PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.13, n.2, 2025
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2025/pmo1314

Uma caracterização dos polígonos regulares

Flávio França Cruz   Alexsandro Gomes Fernandes

Resumo

Podemos caracterizar polígonos regulares como os polígonos que maximizam (minimizam) área na classe dos polígonos inscritos (circunscritos) em uma circunferência. A demonstracão usual deste resultado é baseada na desigualdade de Jensen, cuja dedução padrão apoia-se fortemente no Cálculo Diferencial e Integral. Recentemente, foi apresentada em [2] uma demonstração alternativa desta caracterizacão, ancorada numa manipulação astuciosa de somas infinitas. Neste trabalho, apresentamos uma demonstração deste resultado utilizando apenas Matemática elementar. Precisamente, a prova que apresentamos tem como principal ferramenta algumas desigualdades clássicas envolvendo funções trigonométricas.

Palavras-chave: Polígonos Regulares; Área mínima; Área máxima; Inscrito; Circunscrito.

Abstract

We can characterize regular polygons as the polygons that maximize (minimize) area within the class of polygons inscribed in (circumscribed around) a circle. The usual demonstration of this result is based on Jensen's inequality, whose standard derivation relies heavily on Differential and Integral Calculus. Recently, an alternative demonstration of this characterization was presented in [2], anchored in a clever manipulation of infinite sums. In this work, we present a demonstration of this result using only elementary Mathematics. Specifically, the proof we present has as its main tool some classical inequalities involving trigonometric functions.

Keywords: Regular Polygons; Minimum Area; Maximum Area; Inscribed; Circumscribed.

1. Introdução

Um polígono é uma figura geométrica plana delimitada por segmentos de reta, chamados de lados, que se encontram em vértices. Os polígonos podem ter diferentes formas e quantidades de lados, e são classificados como convexos ou côncavos, dependendo da disposição dos vértices em relação ao interior da figura. Historicamente, os polígonos são conhecidos desde a antiguidade. Civilizações como os babilônios e os gregos já estudavam suas propriedades geométricas. O matemático grego Euclides, em sua obra "Os Elementos", apresentou diversas proposições sobre polígonos e suas relações. Os polígonos regulares, que são aqueles que têm todos os lados e ângulos iguais, sempre despertaram interesse, especialmente em obras artísticas e arquitetônicas, como as construções de templos e monumentos da Grécia antiga, e possuem uma importância significativa tanto na Matemática quanto em sua aplicação prática. Eles são fundamentais em diversas áreas, como na arquitetura, design gráfico e na arte, onde suas simetrias e proporções são utilizadas para criar composições harmoniosas e esteticamente agradáveis. Além disso, na Matemática, os polígonos regulares servem como pontos de referência no estudo de simetria, razões proporcionais e transformações geométricas. No ensino de Matemática elementar, o entendimento dos polígonos regulares é crucial pois induzem o desenvolvimento de habilidades espaciais, raciocínio lógico e a compreensão dos conceitos fundamentais de área, perímetro e ângulo. A familiaridade com essas formas também prepara os estudantes para o estudo de tópicos mais avançados, como geometria analítica e trigonometria. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza o ensino da geometria de forma integrada, buscando que os alunos desenvolvam uma compreensão profunda dos conceitos geométricos, incluindo os polígonos. A BNCC propõe que os estudantes experimentem, analisem e criem representações de figuras geométricas, reconhecendo as propriedades dos polígonos e sua importância nas dimensões da vida cotidiana. O estudo dos polígonos regulares aparece como uma oportunidade para desenvolver habilidades de observação, análise crítica e resolução de problemas, além de contribuir para a formação de uma base sólida no raciocínio matemático. Os polígonos regulares são muito mais do que meras figuras geométricas; são ferramentas essenciais na Matemática e possuem um impacto profundo na formação educacional dos estudantes, são elementos que não apenas enriquecem o conhecimento matemático, mas também promovem a consciência sobre a beleza e a ordem presentes no mundo ao nosso redor.

Nos "Elementos" de Euclides é demonstrado que polígonos regulares são inscritíveis e circunscritíveis a uma circunferência. Arquimedes, no século III antes da era cristã, fez uso de polígonos regulares inscritos e circunscritos para determinar o valor aproximado do número π, usando o que hoje conhecemos como *método da exaustão*. Para obter tal aproximação, Arquimedes, inicialmente, inscreveu e circunscreveu hexágonos regulares em um círculo de raio 1. Em seguida, duplicou sucessivamente o número de lados destes polígonos. Assim, inscreveu os polígonos regulares com $3 \times 2^{n-1}$ lados, cujos semiperímetros são b_n e circunscreveu polígonos regulares com $3 \times 2^{n-1}$, cujos semiperímetros são a_n. As sequências b_n e a_n são respectivamente decrescentes e crescentes e temos que $b_n < 2\pi < a_n$. Assim, aumentando n obtem-se estimativas superior e inferior cada vez melhores para π. A abordagem de Arquimedes sugere que dentre os polígonos inscritos em uma circunferência e com mesmo número de lados os regulares seriam os que possuem maior área. E, analogamente, entre os polígonos circunscritos, os regulares seriam os que possuem menor área. De fato, os polígonos regulares podem ser caracterizados como os polígonos que maximizam (minimizam) área na classe dos polígonos inscritos (circunscritos) em uma circunferência.

A despeito da naturalidade desta caracterização, a literatura disponível sobre o tema é escassa. No livro Fundamentos de Cálculo da coleção PROFMAT [1], considera-se o seguinte problema: *Seja* Γ *um semicírculo de raio* R *e diâmetro* $\overline{A_0A_1}$. *Para cada inteiro* $n > 2$, *mostre que existe um* n*-ágono* $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ *satisfazendo as seguintes condições: (a)* $A_2 \ldots A_{n-1} \in \Gamma$. *(b) A área do polígono* $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ *é a maior possível*. A solução apresentada é baseada na desigualde de Jensen, cuja demonstração utiliza propriedades da derivada segunda das funções convexas. Uma busca no popular site MathOverFlow, resultou apenas no tópico de título *Área máxima de um polígono cíclico quando é um polígono regular* (tradução livre) [3]. Ao longo da discussão apresentada no tópico, a caracterização dos polígonos descrita acima é abordada. A demonstração dada, assim como em [1], é uma consequência direta da desigualdade de Jensen. O tema é abordado ainda no artigo da revista Parábola intitulado *Uma prova elementar de que o polígono regular é o de maior área entre os polígonos inscritos em um círculo* [2], elaborado por quatro estudantes japoneses do ensino médio e seu professor. Utilizando uma técnica extremamente bem elaborada e lidando adequadamente com somas infinitas, os autores demonstram o resultado sem fazer uso da desigualdade de Jensen.

Neste trabalho, apresentaremos uma demonstração da caracterização dos polígonos regulares como os polígonos que maximizam (minimizam) área na classe dos polígonos inscritos (circunscritos) em uma circunferência, utilizando uma abordagem acessível aos alunos dos anos finais da Educação Básica. Especificamente, a prova apresentada utiliza como ferramenta principal algumas desigualdades elementares envolvendo funcões trigonométricas.

2. Preliminares

Apresentaremos definições e resultados que serão utilizados na demonstração do resultado principal. Iniciamos com a seguinte definição.

Definição 1. Dizemos que um polígono está inscrito numa circunferência se todos os vértices do polígono pertencem à circunferência. Um polígono é dito circunscrito à uma circunferência se todos os lados do polígono tangenciam a circunferência.

Dada a importância do resultado abaixo para o problema abordado aqui, optamos por apresentar sua demonstração.

Proposição 1. *Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.*

Demonstração. Seja $\mathrm{P_n}$ um polígono regular de vértices $\mathrm{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ e lados $\overline{\mathrm{A_1A_2}}, \overline{\mathrm{A_2A_3}}, \ldots, \overline{\mathrm{A_{n-1}A_n}}$. Sem perda de generalidade, traçamos as bissetrizes internas dos ângulos consecutivos cujos vértices são $\mathrm{A_1}$ e $\mathrm{A_2}$, obtendo o ponto O de intersecção dessas retas. Assim, o triângulo $\mathrm{OA_1A_2}$ é isósceles, pois $\angle\mathrm{OA_1A_2} = \angle\mathrm{A_1A_2O}$, de onde obtemos $\overline{\mathrm{A_1O}} = \overline{\mathrm{A_2O}}$, garantindo que O é equidistante de $\mathrm{A_1}$ e $\mathrm{A_2}$. Seguimos traçando o segmento $\overline{\mathrm{OA_3}}$ obtendo o triângulo $\mathrm{OA_2A_3}$, onde $\overline{\mathrm{A_1A_2}} = \overline{\mathrm{A_2A_3}}$, $\angle\mathrm{OA_2A_3} = \angle\mathrm{OA_2A_3}$, e $\overline{\mathrm{OA_2}}$ é lado comum aos dois triângulos (Figura 1). Assim, pelo caso LAL, temos $\triangle\mathrm{OA_1A_2} \equiv \triangle\mathrm{OA_2A_3}$, implicando que $\triangle\mathrm{OA_2A_3}$ é isósceles, ou seja, $\overline{\mathrm{A_2O}} = \overline{\mathrm{A_3O}}$. Como em um polígono regular todos os ângulos são iguais, então $\overline{\mathrm{A_3O}}$ é a bissetriz do ângulo cujo vértice é $\mathrm{A_3}$. Repetimos, de forma análoga, o processo de ligar o ponto O ao vértice seguinte do polígono e assim provamos que o triângulo obtido é congruente aos anteriores, concluindo que $\overline{\mathrm{A_1O}} = \overline{\mathrm{A_2O}} = \cdots = \overline{\mathrm{A_{n-1}O}} = \overline{\mathrm{A_nO}}$, ou seja, todos os vértices de $\mathrm{P_n}$ são equidistantes do ponto O, garantindo que podemos traçar uma circunferência de centro O passando por todos os vértices do polígono.

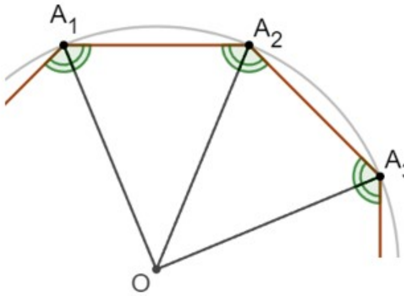

Figura 1: $\overline{\mathrm{OA_2}}$ como lado comum
Fonte: Autores

Agora, sejam $\mathrm{H_1, H_2, \ldots, H_n}$ os pés das alturas baixadas de O às bases dos triângulos isósceles, que são os lados de $\mathrm{P_n}$ (Figura 2). Como $\triangle\mathrm{OA_1A_2} \equiv \triangle\mathrm{OA_2A_3} \equiv \cdots \equiv \triangle\mathrm{OA_nA_1}$, então $\overline{\mathrm{OH_1}} = \overline{\mathrm{OH_2}} = \cdots = \overline{\mathrm{OH_n}}$, ou seja, os pontos $\mathrm{H_1, H_2, \ldots, H_n}$ de $\mathrm{P_n}$ são equidistantes de O, logo podemos traçar uma circunferência Γ de centro O que passa pelos pontos $\mathrm{H_1, H_2, \ldots, H_n}$. Como as alturas são perpendiculares aos lados do polígono, segue que estas são tangentes a Γ, garantindo que $\mathrm{P_n}$ é circunscrito à circunferência. □

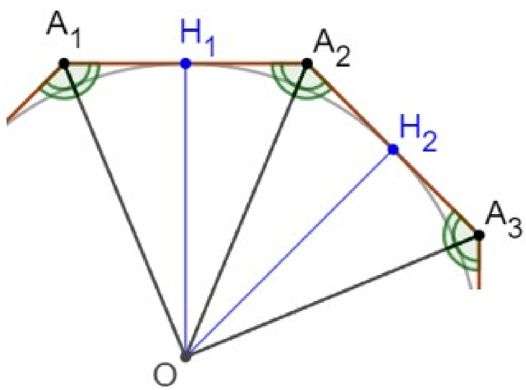

Figura 2: Altura do triângulo $\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$
Fonte: Autores

No que segue, apresentamos alguns resultados envolvendo as funções trigonométricas. Inicialmente observe que, utilizando as fórmulas para soma e diferença de arcos, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Denotando $\theta := \alpha+\beta$ e $\gamma := \alpha-\beta$ obtemos

$$\beta = \frac{\theta-\gamma}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\theta+\gamma}{2}.$$

Assim, podemos reescrever (1) da forma

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\gamma &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\mathrm{y}}{2}\right) \\ \cos\theta+\cos\gamma &= 2\cos\left(\frac{\theta-\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\mathrm{y}}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\gamma &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\mathrm{y}}{2}\right) \\ \cos\theta-\cos\gamma &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\gamma}{2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

As identidades acima são chamadas de *fórmulas de prostaférese*. Vamos determinar mais duas relações que seguem das relações acima. Uma delas é a soma das tangentes de dois arcos. Temos

$$\tan\alpha+\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta}+\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Assim, segue de $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ que

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}. \tag{3}$$

De modo análogo, determinaremos uma relação para a diferença das tangentes de dois arcos. De fato,

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta}-\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Portanto,

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}. \tag{4}$$

Agora obteremos variações das fórmulas acima, utilizando o chamado arco metade. Partindo da relação fundamental da trigonometria $\cos^2\theta=1-\operatorname{sen}^2\theta$ e da expressão $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta$, obtemos

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=(1-\operatorname{sen}^2\theta)-\operatorname{sen}^2\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta,$$

ou seja, $\cos 2\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta$. Agora, substituindo 2θ por θ na última igualdade, recebemos

$$\cos\theta=1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Assim,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}.$$

Por outro lado, utilizando novamente $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta$ obtemos

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=2\cos^2\theta-1$$

ou seja, $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$. Portanto,

$$\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1.$$

Logo,

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}.$$

Finalmente, aplicando a definição da função tamgente, concluímos que

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}.$$

Racionalizando o denominador,

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}=\frac{\sqrt{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}{\sqrt{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{1+\cos\theta}.$$

Como $1-\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta$, então

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta}}{1+\cos\theta}.$$

Assim,

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}.$$

Na sequência iremos utilizar a expressão da tangente da média aritmética de dois arcos expressa em função do seno e do cosseno dos arcos envolvidos. Precisamente, se substituirmos θ por $\alpha+\beta$, obtendo a igualdade

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)}. \tag{5}$$

3. Polígonos inscritos com 2^{m} lados

Nesta seção vamos abordar o problema para polígonos com 2^{m}, $\mathrm{m}\in\mathbb{N}$, lados. Especificamente, mostraremos que dentre todos os polígonos com 2^{m} lados inscritos em uma circunferência, os regulares são os que possuem a maior área. Trataremos o caso geral na próxima seção.

Proposição 2. *Seja* $\mathrm{m}\in\mathbb{N}, \mathrm{m}\geq 2$. *Na classe dos polígonos com* 2^{m} *lados inscritos em uma circunferência, os regulares são os que possuem maior área.*

Demonstração. Considere um polígono $\mathcal{P}$ com 2^{m} lados inscrito em uma circunferência de raio R. Considere os segmentos de reta que ligam o centro da circunferência a cada vértice do polígono. Assim, obtendo 2^{m} triângulos isósceles cuja base é um lado do polígono e os outros dois lados medem R (ver figura 3). Sejam $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3, \ldots, \mathrm{S}_{2^{\mathrm{m}}}$ as áreas dos triângulos em que o polígono foi dividido e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2^{\mathrm{m}}}$ os ângulos formados pelos lados iguais de cada triângulo. Note que $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2^{\mathrm{m}}} = 2\pi$. Vamos denotar

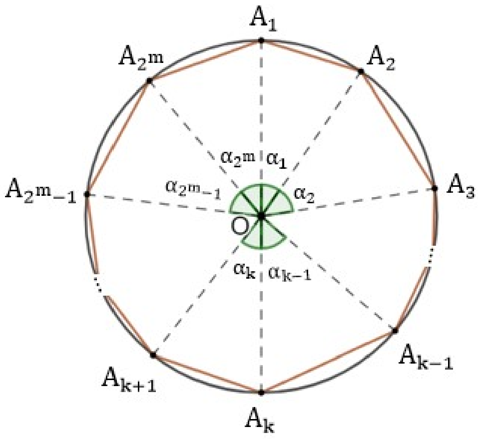

Figura 3: Polígono inscrito com 2^{m} lados
Fonte: Autores

por $\mathrm{S}(\mathcal{P})$ a área do polígono inscrito $\mathcal{P}$. Pela construção descrita acima, temos que $\mathrm{S}(\mathcal{P})$ é a soma das áreas dos triângulos obtidos a partir do polígono:

$$\mathrm{S}(\mathcal{P}) = \mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2+\cdots+\mathrm{S}_{2^{\mathrm{m}}}.$$

Seja h a altura do triângulo $\triangle \mathrm{OA_iA_{i+1}}$ em relação ao lado $\overline{\mathrm{OA_{i+1}}}$, para qualquer $1\leq \mathrm{i}\leq 2^{\mathrm{m}}$. Temos

$$\operatorname{sen}\alpha_{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{R}} \iff \mathrm{h} = \mathrm{R}\operatorname{sen}\alpha_{\mathrm{i}}.$$

Portanto a área S_i do triângulo será

$$S_i = \frac{Rh}{2} = R^2 \operatorname{sen} \alpha_i.$$

Concluimos assim que a área do polígono $\mathcal{P}$ é dada por

$$S(\mathcal{P}) = \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \alpha_1 + \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \alpha_2 + \cdots + \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \alpha_{2^m},$$

ou seja,

$$S(\mathcal{P}) = \frac{R^2}{2} \left(\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 + \cdots + \operatorname{sen} \alpha_{2^m} \right). \tag{6}$$

Portanto, os polígonos de maior área serão os polígonos para os quais a expressão

$$\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 + \cdots + \operatorname{sen} \alpha_{2^m}$$

possui valor máximo, sob a restrição $\alpha_k \in (0, \pi), \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, 2^m\}$, já que o polígono é inscrito. Sabemos que não existem polígonos com dois lados, entretanto, a soma de duas parcelas será bastante usada na busca da expressão que determina o valor máximo para a soma dos 2^m senos da igualdade (6). Inicialmente, para $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, vamos verificar que

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta \leq 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \tag{7}$$

e a igualdade ocorre se, e só se, $\alpha = \beta$. De fato,, sabemos de (2) que

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

E a desigualdade segue de

$$2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \leq 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

pois

$$\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \leq 1$$

e a igualdade ocorre se, e só se, $\alpha = \beta$. Portanto, vale (7), e mais, o valor máximo de $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta$ ocorre quando $\alpha = \beta$ e, neste caso, vale a igualdade em (7).

Agora vamos estender este resultado para 2^m termos. Denotamos $F := \operatorname{sen} \alpha_1 + \cdots + \operatorname{sen} \alpha_{2^m}$ e agrupamos os senos de dois em dois e, aplicando (7) em cada par de senos, obtemos

$$\begin{aligned} F &= (\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2) + \cdots + (\operatorname{sen} \alpha_{2^{m-1}} + \operatorname{sen} \alpha_{2^m}) \\ &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) + \cdots + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} + \alpha_{2^m}}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} - \alpha_{2^m}}{2} \right) \\ &\leq 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + \cdots + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} + \alpha_{2^m}}{2} \right). \\ &\leq 2 \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + \cdots + \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} + \alpha_{2^m}}{2} \right) \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Repetindo esse processo $m - 1$ vezes, obtemos

$$F \leq 2^m \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right),$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\alpha_1 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_{2^m} \leq 2^m \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m}\right). \tag{9}$$

Concluímos, portanto, que a soma $\operatorname{sen}\alpha_1 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_{2^m}$ atinge seu valor máximo quando ocorre a igualdade em (9). Demonstraremos, a seguir, que tal condição se verifica se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^m}$. Claramente, se os ângulos são iguais então vale a igualdade em (9). Por outro lado, se

$$\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_{2^m} = 2^m \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m}\right), \tag{10}$$

então a igualdade ocorre em cada uma das desigualdades geradas pelo processo descrito em (8). Por exemplo, seguirá da igualdade

$$F = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) + \cdots + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} + \alpha_{2^m}}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} - \alpha_{2^m}}{2}\right)$$

que

$$\cos\left(\frac{\alpha_i - \alpha_{i+1}}{2}\right) = 1$$

ou seja, $\alpha_i = \alpha_{i+1}, i \in \{1, 3, \ldots, 2k+1, \ldots, 2^m - 1\}$. Aplicando o mesmo raciocínio às demais igualdades concluiremos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^m}$. Isto garante que entre os polígonos, com 2^m lados, inscritos em uma circunferência, os regulares são os que possuem maior área. Além disso, como $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m} = 2\pi$, a fórmula para determinar a área desse polígono é dada por

$$S(\mathcal{P}) = \frac{nR^2}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

onde $n = 2^m$. □

3.1. Polígonos inscritos com n lados

Nesta seção apresentamos a demonstração do caso geral para polígonos inscritos. Precisamente, temos o seguinte:

Teorema 1. *Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Na classe dos polígonos com n lados inscritos em uma circunferência, os regulares são os que possuem maior área.*

Demonstração. Inicialmente, dividimos o polígono $\mathcal{P}$ de n lados inscrito em uma circunferência em n triângulos, com $n \geq 3$, em que dois lados de cada triângulo são raios da circunferência e o terceiro é um lado do polígono, como mostrado na Figura 4. Procedendo como na seção anterior, obtemos a expressão

$$S(\mathcal{P}) = \frac{R^2}{2}(\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n), \tag{11}$$

para área $S(\mathcal{P})$ do polígono inscrito $\mathcal{P}$, onde R é o raio do círculo.

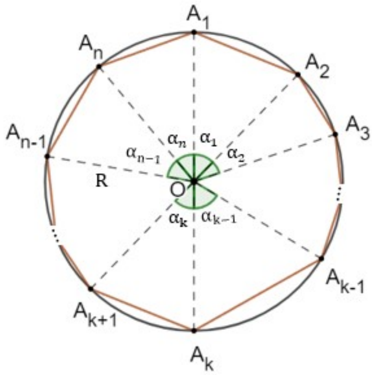

Figura 4: Polígono inscrito com n lados
Fonte: Autores

Assim, para determinar o polígono de maior área, basta obter o valor máximo para expressão $\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n$, sob a condição $\alpha_k \in (0,\pi), \forall\, k \in \{1,\ldots,n\}$, pois o polígono está inscrito em uma circunferência. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq n < 2^m$, vamos provar que

$$\operatorname{sen}\alpha_1 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n \leq n \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}\right) \tag{12}$$

e que a igualdade ocorre se, e só se, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$. Seja

$$\theta := \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \in (0,\pi). \tag{13}$$

Adicionamos $(2^m - n)\operatorname{sen}\theta$ à soma $\operatorname{sen}\alpha_1 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n$ e aplicamos (9) para obter que

$$\operatorname{sen}\alpha_1 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n + (2^m - n)\operatorname{sen}\theta \leq 2^m \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m}\right), \tag{14}$$

e a igualdade vale, se e só se, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \theta$. Note que

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} = \theta, \tag{15}$$

portanto (14) pode ser reescrita como

$$\operatorname{sen}\alpha_1 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n + (2^m - n)\operatorname{sen}\theta \leq 2^m \operatorname{sen}\theta,$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\alpha_1 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n \leq n \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}\right) \tag{16}$$

e a igualdade ocorre se, e só se, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$. Portanto, os polígonos que maximizam a área são os regulaes.

$\square$

Uma consequência da demonstração dada acima é que a área $S(\mathcal{P})$ de um polígono regular de n lados $\mathcal{P}$ inscrito em uma circunferência de raio R é dada por

$$S(\mathcal{P}) = \frac{R^2}{2} n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

4. Polígonos circunscritos

Nesta seção iremos abordar os polígonos circunscritos. Como acima, inicialmente consideramos o caso de polígonos com 2^m lados, $m \in \mathbb{N}$.

Proposição 3. *Seja* $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. *Na classe dos polígonos com* 2^m *lados circunscritos em uma circunferência, os regulares são os que possuem menor área.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ um polígono de 2^m lados circunscrito a uma circunferência de raio R e centro O, em que $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 2$. Traçando segmentos de reta que partem do centro da circunferência até os pontos em que o polígono tangencia a circunferência, obteremos 2^m quadriláteros. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_{2^m}$ os vértices do polígono e $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2^m}$ os pontos de interseção entre o polígono e a circunferência. Denotamos $\angle Q_1OQ_2 = 2\alpha_1$, $\angle Q_2OQ_3 = 2\alpha_2$, $\ldots$, $\angle Q_{2^m}OQ_1 = 2\alpha_{2^m}$. Note que $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{2^m} = 2\pi$. Para determinar a área S_1 do quadrilátero $OQ_1P_1Q_2$, traçamos o segmento $\overline{OP_1}$, como mostra a Figura 5, que o divide em dois triângulos retângulos congruentes, segundo o caso CH. Logo, a área S_1 do quadrilátero $OQ_1P_1Q_2$ é igual a duas vezes a área do triângulo OQ_1P_1. Assim, se denotarmos $x_1 := Q_1P_1$, teremos $S_1 = R \cdot x_1$.

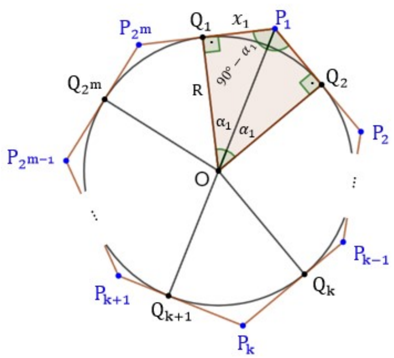

Figura 5: Polígono circunscrito com 2^m lados
Fonte: Autores

Por outro lado, como o triângulo OQ_1P_1 possui um ângulo reto, os outros ângulos são complementares. Assim, pela lei dos senos, obtemos que

$$\frac{x_1}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \alpha_1)},$$

ou seja,

$$x_1 = R\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1}.$$

Logo, $x_1 = R \cdot \tan \alpha_1$. Substituindo em $S_1 = R \cdot x_1$ segue que $S_1 = R^2 \cdot \tan \alpha_1$. Procedendo da mesma maneira para os demais quadriláteros, obtemos a seguinte expressão para a área $S(\mathcal{P})$ do polígono circunscrito $\mathcal{P}$:

$$S(\mathcal{P}) = R^2 \left(\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_{2^m}\right).$$

Para determinar o polígono de menor área, vamos encontrar uma expressão que represente o valor mínimo da soma $\tan\alpha_1+\tan\alpha_2+\cdots+\tan\alpha_{2^m}$, onde $\alpha_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \{1, \ldots, 2^m\}$, com $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Inicialmente, observamos que, para $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\tan\alpha + \tan\beta \geq 2\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \tag{17}$$

e ocorre a igualdade se, e somente se, $\alpha = \beta$. De fato, utilizando (3) e (5),

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \quad \text{e} \quad \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)},$$

podemos escrever a desigualdade (17) como

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \geq \frac{2\sin(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)}.$$

Daí, como $\cos\alpha\cdot\cos\beta > 0$ e $1+\cos(\alpha+\beta) > 0$, temos que a desigualdade é equivalente a

$$1+\cos(\alpha+\beta) \geq 2\cos\alpha\cdot\cos\beta).$$

Substituindo $2\cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$, acima, recebemos

$$1+\cos(\alpha+\beta) \geq \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

ou seja, (17) equivale a $1 \geq \cos(\alpha-\beta)$. Portanto, vale a desigualdade (17) e, como $1 = \cos(\alpha-\beta)$ se, e somente se, $\alpha = \beta$ concluímos que o valor mínimo de $\tan\alpha+\tan\beta$ é atingido se, e somente se, $\alpha = \beta$.

Para determinarmos o valor mínimo de $\tan\alpha_1+\tan\alpha_2+\cdots+\tan\alpha_{2^m}$ procedemos de maneira análoga ao que foi feito com $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{2^m}$ na seção anterior. Seja

$$F := \tan\alpha_1+\tan\alpha_2+\cdots+\tan\alpha_{2^m}.$$

Agrupamos as parcelas da soma como

$$F = (\tan\alpha_1+\tan\alpha_2)+(\tan\alpha_3+\tan\alpha_4)+\cdots+(\tan\alpha_{2(m-1)}+\tan\alpha_{2^m}).$$

Em seguida, aplicamos a desigualdade (17) a cada par de tangentes, de modo que

$$F \geq 2\left(\tan\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)+\tan\left(\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\right)+\cdots+\tan\left(\frac{\alpha_{2^{m-1}}+\alpha_{2^m}}{2}\right)\right).$$

Repetindo esse processo, obtemos

$$F \geq 2^m\tan\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{2^m}}{2^m}\right),$$

ou seja,

$$\tan\alpha_1+\tan\alpha_2+\cdots+\tan\alpha_{2^m} \geq 2^m\tan\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{2^m}}{2^m}\right).$$

Além disso, se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^m}$ então vale a igualdade. Reciprocamente, como observado na sessão anterior, se ocorrer a igualdade na desigualdade acima acima, teremos que vale a igualdade em todas as passagens onde utilizamos (17) e concluimos que vale $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^m}$. $\square$

4.1. Polígonos circunscritos com n lados

Finalmente, abordamos o caso geral.

Teorema 2. *Seja* $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. *Na classe dos polígonos com* n *lados circunscritos em uma circunferência, os regulares são os que possuem menor área.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{P}$ um polígono circunscrito em uma circunferência de centro O e raio R, $P_1, \ldots, P_n$ os vértices de $\mathcal{P}$ e $Q_1 Q_2 \cdots Q_n$ os pontos de tangência do polígono com a circunferência, conforme figura 6.

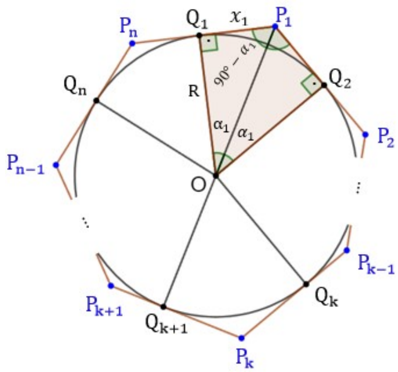

Figura 6: Polígono circunscrito com n lados
Fonte: Autores

Procedendo como no caso de 2^m lados, concluimos que a área do polígono $\mathcal{P}$ é dada por

$$S(\mathcal{P}) = R^2(\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_n),$$

com $\alpha_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Portanto, para obter o polígono de menor área basta minimizar a expressão $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_n$. Vamos mostrar que

$$\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n \geq n \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right), \tag{18}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$.

Já vimos que a desigualdade é válida se n é da forma $n = 2^m$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < 2^m$ e

$$\theta := \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}.$$

Adicionando $(2^m - n) \tan \theta$ à soma $\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n$ e utilizando que (18) vale para $n = 2^m$ termos, concluimos que

$$\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n + (2^m - n) \tan \theta \geq 2^m \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} \right),$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \theta$. Por outro lado,

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} = \theta.$$

Logo, podemos reescrever a última desigualdade como

$$\tan\alpha_1 + \cdots + \tan\alpha_n + (2^m - n)\tan\theta \geq 2^m \tan\theta,$$

ou seja,

$$\tan\alpha_1 + \cdots + \tan\alpha_n \geq n\tan\theta$$

que é exatamente (18), como queríamos provar. □

Concluímos ainda que a área de polígono regular $\mathcal{P}$ circunscrito em uma circunferência de raio R pode ser determinada pela fórmula

$$S(\mathcal{P}) = nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3.$$

Considerações finais

Este trabalho é, também, uma amostra das inúmeras possibilidades de pesquisa em Matemática mesmo restrito à Matemática do ensino básico. É surpreendente que os resultados apresentados aqui já não possuíssem uma demonstração elementar bastante difundida. Esta ausência motivou as pesquisas realizadas em [2] e neste trabalho. De fato, não causaria surpresa o surgimento de novos trabalhos com demonstrações mais simples e acessíveis que as apresentadas até o momento.

Referências

[1] Caminha, A. **Fundamentos de cálculos.** 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[2] Tanaka, R. and Miyamoto, J. and Maruo, Y. and Nakayama, K. and Miyadera, R. *An elementary proof that the regular polygon is the largest among polygons that are inscribed in a circle*. Parabola, v. 59, n. 1, p. 1-8, 2013.

[3] **Area of a cyclic polygon maximum when it is a regular polygon.** 2016. Disponível em: https://math.stackexchange.com/q/1919518 Acesso em: 10 fev. 2025.

Flávio França Cruz
Universidade Regional do Cariri
<flavio.franca@urca.br>

Alexsandro Gomes Fernandes
Universidade Regional do Cariri
<alex.gomes.fernandes@gmail.com>

Recebido: 17/03/2025
Publicado: 28/05/2025