

Desvendando a matemática do cubo mágico de Rubik

Pedro Roberto de Lima 

Resumo

O cubo mágico (também conhecido como cubo de Rubik) é um objeto com muitas potencialidades didáticas. Seu uso pode explorar desde conexões imediatas com a matemática na educação básica (como área, volume, significado de algoritmo e ordem de grandeza) até conexões mais profundos em nível de graduação (como grupos de permutações), passando por reconhecimento de padrões e estímulo ao raciocínio lógico (esses últimos adequados a todos os níveis de ensino). Buscando contribuir nesse contexto, o presente artigo apresenta um material que permite ao instrutor conhecer os fundamentos matemáticos básicos necessários para responder algumas questões essenciais relativas ao cubo mágico facilitando, dessa forma, seu uso em salas de aula dos diversos níveis e/ou em eventos acadêmicos especiais (como oficinas e minicursos).

Palavras-chave: Matemática recreativa; Indução; Grupo de permutações; Cubo mágico; Cubo de Rubik

Abstract

The Rubik's Cube (also known as the Magic Cube) is an object with many educational potentialities. Its use can range from immediate connections to mathematics in basic education (such as area, volume, the meaning of algorithms, and orders of magnitude) to deeper connections at the undergraduate level (such as permutation groups), including pattern recognition and stimulation of logical reasoning (the latter being suitable for all levels of education). Aiming to contribute to this context, this article presents material that allows instructors to know the basic mathematical foundations necessary to address essential questions related to the Rubik's Cube, thereby facilitating its use in classrooms at various educational levels and/or in special academic events (such as workshops and mini-courses).

Keywords: Recreational mathematics; Induction; Group of permutations; Magic cube; Rubik's cube

1. Introdução

O **cubo mágico** (inventado em 1974 e assim chamado até 1980), também conhecido como **cubo de Rubik¹**, é um brinquedo que tem a forma de um hexaedro regular. Ele é formado por 26 cubinhos, todos encaixados entre si. O cubinho central de cada face é conectado a um eixo interior, o qual permite que as faces sejam rotacionadas. Cada rotação faz com que certos cubinhos troquem de lugar. Em sua **configuração inicial** (isto é, antes de sofrer qualquer rotação), o cubo possui cada face com exatamente uma cor. Como as rotações permitem os cubinhos, após aplicá-las as cores se misturam (veja a Figura 1).

¹Rubik (lê-se rúbik) é o sobrenome do professor de arquitetura húngaro que inventou o objeto. Um histórico completo pode ser visto em [14].



Figura 1: Rotações sucessivas misturaram as cores do cubo.

A brincadeira mais comum consiste em tomar um cubo que esteja com as cores misturadas e organizá-las (mas não vale desmontá-lo, tem que ser apenas rotacionando as faces!). Esse procedimento é chamado de **resolver o cubo**. Às vezes (de modo acidental, ou para lubrificação) ocorre a situação em que peças do cubo são desencaixadas. Naturalmente, podemos pegá-las e encaixá-las novamente. O problema é que há mais de um modo de se fazer isso (veja a Figura 2).

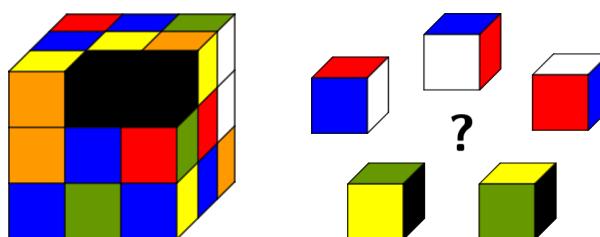


Figura 2: Como posicionar corretamente uma peça que foi desencaixada?

Na situação ilustrada na Figura 2, se as peças não forem encaixadas exatamente como estavam, o cubo jamais poderá ser resolvido novamente. Nesse caso, há duas alternativas:

- (i) Desmontar o cubo todo e remontá-lo em sua configuração inicial.
- (ii) Usar um teorema para descobrir qual é a posição correta da peça desencaixada.

A segunda opção, menos conhecida, parece ser bem interessante e instrutiva! Neste texto veremos esse e outros teoremas relativos ao cubo mágico, bem como algumas aplicações. Especificamente, vamos descobrir respostas para as seguintes questões básicas que surgem naturalmente e frequentemente no contexto do cubo:

- Por que uma peça que saiu não pode ser encaixada de qualquer maneira? (Teoremas 1 e 2; Seções 4 e 6.)
- Por que algumas configurações são impossíveis de obter? (Seção 7.)
- Como calcular o número total de configurações possíveis? (Seção 9.)
- Como resolver o cubo mágico? (Seção 11.)

A teoria apresentada está baseada em [1], com um diferencial substancial: buscamos apresentar um material bem detalhado, muito ilustrado e menos técnico de modo a proporcionar uma leitura acessível para professores em geral e estudantes de graduação². Acreditamos que esse material pode ser utilizado nas disciplinas

² Até a Seção 7, apenas matemática básica e indução serão necessárias; A partir da Seção 8, conceitos e resultados de Teoria dos Grupos serão utilizados (com as devidas explicações e referências).

que cobrem grupos de permutação, sendo especialmente adequado aos cursos de formação docente visto que permite uma aplicação prática visual dos conceitos abstratos da teoria. A quem já sabe resolver o cubo, sugerimos que faça a leitura com um cubo em mãos para acompanhar e verificar os movimentos citados; a quem ainda não sabe, sugerimos que use um simulador online³ (como, por exemplo [8]) ou algum dos vários aplicativos equivalentes existentes para smartphones.

2. Conhecendo o cubo: representação, partes e movimentos

Nas figuras que utilizarmos, vamos supor que o lado oposto ao amarelo é branco, que o lado oposto ao azul é verde e que o lado oposto ao vermelho é alaranjado. Quando for necessário visualizar as cores do lado esquerdo ou da base do cubo (ocultas na representação bidimensional), vamos utilizar quadriláteros simbolizando espelhos que refletem as cores – como ilustrado na Figura 3.

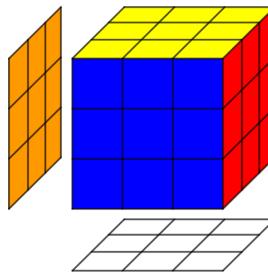


Figura 3: Quadriláteros paralelos aos lados representarão espelhos que refletem as cores.

As rotações no **sentido horário** de cada uma das seis faces serão representadas conforme as seguintes notações (veja a Figura 4): **L** = face esquerda (do inglês *Left*); **F** = face da frente (do inglês *Front*); **R** = face direita (do inglês *Right*); **U** = face de cima (do inglês *Up*); **D** = face de baixo (do inglês *Down*); **B** = face da trás (do inglês *Back*).

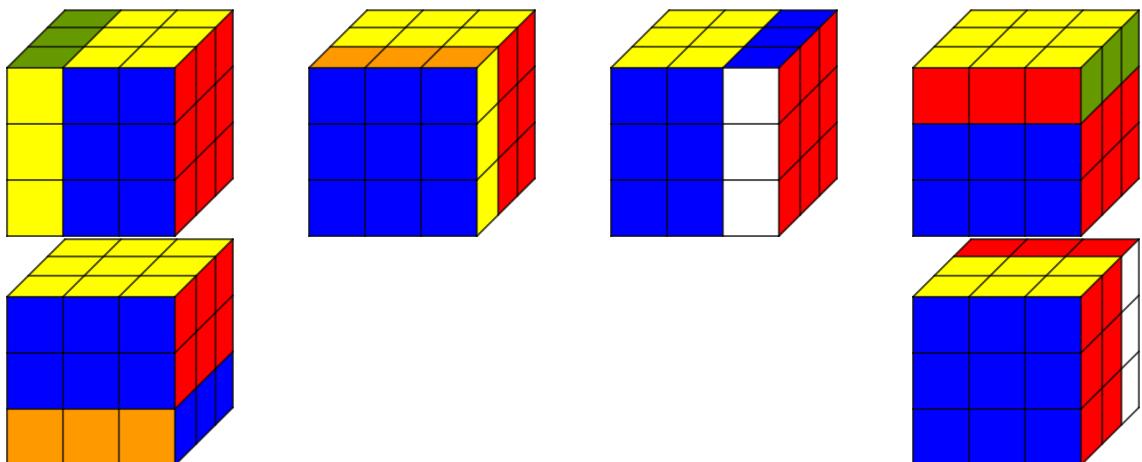


Figura 4: Efeitos das rotações L, F, R, U, D e B na configuração inicial, respectivamente.

³A diferença entre o cubo real e o simulador é que o simulador permite restaurar a configuração inicial facilmente sendo, portanto, propício a quem ainda não aprendeu a resolvê-lo.

As respectivas rotações no **sentido anti-horário**, por sua vez, serão representadas por **L'**, **F'**, **R'**, **U'**, **D'** e **B'**. Configurações do cubo que podem ser obtidas a partir da configuração inicial por meio da aplicação de combinações desses doze tipos de rotações (horárias e anti-horárias) serão chamadas de **configurações possíveis**. E uma sequência de tais rotações será chamada de **movimento**.

Cada tipo de peça do cubo receberá um nome (veja a Figura 5): as peças que possuem três lados visíveis serão chamadas de **cantos** (há 8 cantos), as peças que possuem dois lados serão chamadas de **arestas** (há 12 arestas) e as peças que possuem apenas uma lado serão chamadas de **centros** (há 6 centros).

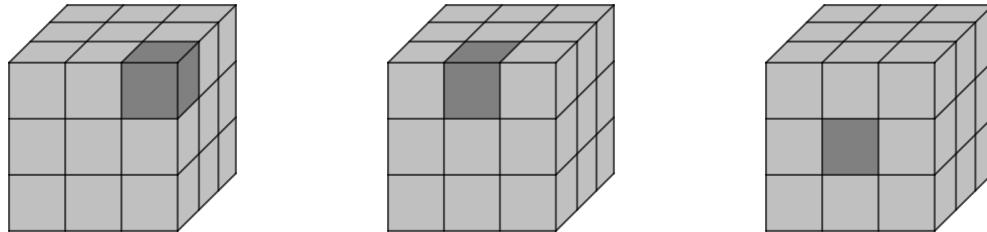


Figura 5: Em destaque, um canto, uma aresta e um centro, respectivamente.

A ação de **permutar** peças consiste em aplicar movimentos que as troquem de lugar. Por exemplo, partindo da configuração inicial: o movimento **R' F R' B B R F' R' B B R R** permuta três cantos superiores e o movimento **F F U L R' F F L' R U F F** permuta três aresta superiores, ambas no sentido horário (veja a Figura 6).

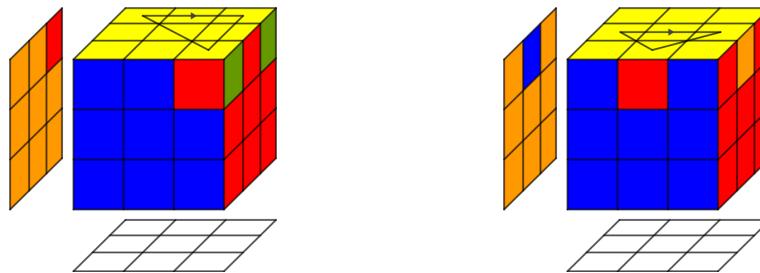


Figura 6: Exemplo de permutação de cantos e arestas a partir da configuração inicial.

Note que qualquer movimento pode apenas permutar canto com canto e aresta com aresta (ou seja, um canto nunca vai para o lugar de uma aresta e uma aresta nunca vai para o lugar de um canto). Por outro lado, a ação de mudar a **orientação** de peças consiste em aplicar movimentos que girem as peças sem trocá-las de lugar. Por exemplo, partindo da configuração inicial: a sequência **U' R' D R F D F' U F D' F' R' D' R** muda a orientação de dois cantos adjacentes “girando” suas laterais para cima e a sequência **F R' F' R' F F L D R D' L' R' F F R R** muda a orientação de duas arestas adjacentes invertendo suas faces (veja a Figura 7).

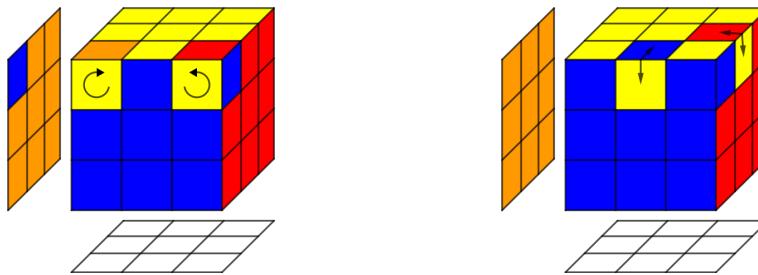


Figura 7: Exemplo de reorientação de cantos e arestas a partir da configuração inicial.

3. Teorema sobre a orientação dos cantos

Vamos criar uma “embalagem” para o cubo conforme a Figura 8. A demonstração do Teorema 1 irá requerer que imaginemos o cubo guardado dentro dessa embalagem. As figuras nas faces da embalagem são de extrema importância: nas proximidades de cada canto, sempre há uma face com duas retas, uma face com uma reta e uma face vazia (isto é, sem retas). A embalagem é simétrica: giros horizontais de 90° bem como giros verticais de 180° resultam na mesma imagem da figura.

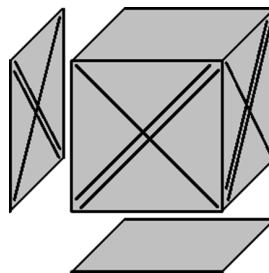


Figura 8: Embalagem de referência para o cubo que será usada na prova do Teorema 1.

Lembrando que estamos considerando o lado amarelo oposto ao lado branco (como ocorre na maioria dos cubos), cada canto do cubo possui um, e somente um, lado que é amarelo ou branco. Assim, podemos definir a **cor principal de um canto** como sendo: amarelo, se ele possuir um lado amarelo; branco, se ele possuir um lado branco.

Daqui em diante, vamos considerar que a embalagem fique sempre fixa na exata posição ilustrada na Figura 8. Guardando o cubo numa dada configuração na embalagem **com o centro amarelo voltado para cima**, vamos definir uma função f que a cada canto c do cubo associa um número, da seguinte maneira⁴:

$$f(c) = \begin{cases} 0, & \text{se a cor principal de } c \text{ coincide com nenhuma reta} \\ 1, & \text{se a cor principal de } c \text{ coincide com uma reta} \\ 2, & \text{se a cor principal de } c \text{ coincide com duas retas.} \end{cases}$$

Por exemplo, rotulando os cantos do cubo por c_1, c_2, \dots, c_8 conforme a Figura 9 e guardando-o na embalagem naquela posição, obtemos $f(c_1) = 1$, $f(c_2) = 2$, $f(c_3) = 0$, $f(c_4) = 2$, $f(c_5) = 2$, $f(c_6) = 2$, $f(c_7) = 1$ e $f(c_8) = 2$.

⁴Note que a função também depende da configuração do cubo (cada vez que a configuração é alterada, os valores que a função assume também mudam). Mas, por simplicidade, deixamos essa dependência implícita na notação da função.

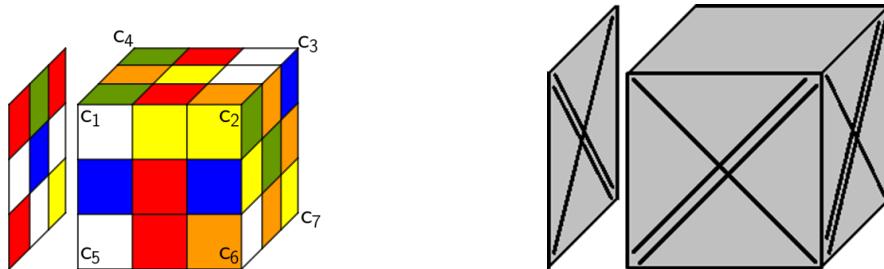


Figura 9: Cubo embaralhado ao lado da embalagem usada na definição de f .

No exemplo da Figura 9, note que $f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_8) = 12$. O fato dessa soma ser um múltiplo de três não é uma coincidência. Não importa o quanto você brinque com seu cubo, o teorema a seguir⁵ estabelece que isso sempre ocorre.

Teorema 1. *Sejam c_1, c_2, \dots, c_8 os oito cantos distintos do cubo e $S = f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_8)$.*

- (a) *Se S é múltiplo de três numa dada configuração, então S continua múltiplo de três após aplicarmos L, F, R, U, D ou B na configuração dada.*
- (b) *Em qualquer configuração possível do cubo, a soma S sempre é um múltiplo de três.*

Demonstração.

- (a) Suponha que o cubo esteja numa configuração em que S é múltiplo de três e seja M a rotação aplicada nessa configuração.

Caso 1: $M = U$. Após a rotação, a cor principal de um determinado canto continuará coincidindo com a mesma quantidade de retas (veja a Tabela 1). Assim, nenhum dos termos $f(c_1), \dots, f(c_8)$ tem seu valor alterado após M ser executada e, por conseguinte, a soma S permanece a mesma.

⁵O teorema também pode ser enunciado em termos de congruência: S ser múltiplo de três equivale à condição $S \equiv 0 \pmod{3}$. Aqui, evitamos essa abordagem mantendo a linguagem de múltiplos com o propósito de tornar o conteúdo mais acessível.

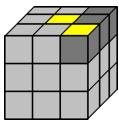
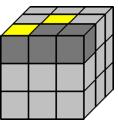
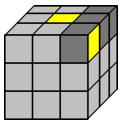
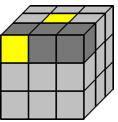
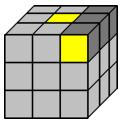
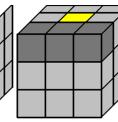
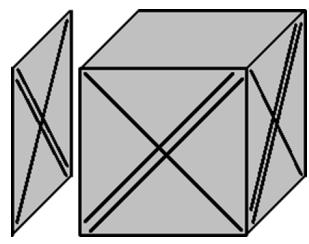
Descrição	Antes de $M = U$	Após $M = U$	Embalagem de referência
$f(c_i)$ era 0 antes e continua sendo 0 após a aplicação de $M = U$.			
$f(c_i)$ era 1 antes e continua sendo 1 após a aplicação de $M = U$.			
$f(c_i)$ era 2 antes e continua sendo 2 após a aplicação de $M = U$.			

Tabela 1: Efeitos da rotação $M = U$ nos valores que f assume num canto superior. Pela simetria da embalagem, os outros três cantos superiores se comportam de modo análogo. Os cantos inferiores não são afetados por essa rotação.

Caso 2: $M = D$. Pela simetria da embalagem, é análogo ao Caso 1.

Caso 3: $M = F$. Após a rotação, a quantidade de retas coincidentes com qualquer par de cores principais adjacentes continuará a mesma, aumentará três unidades ou diminuirá três unidades (veja a Tabela 2). Como dois pares de cantos adjacentes serão movimentados pela rotação, a soma total vai sofrer uma variação de 0, ± 3 ou ± 6 e, portanto, ainda será um múltiplo de três.

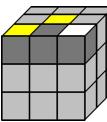
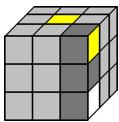
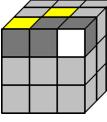
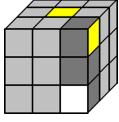
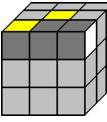
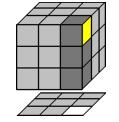
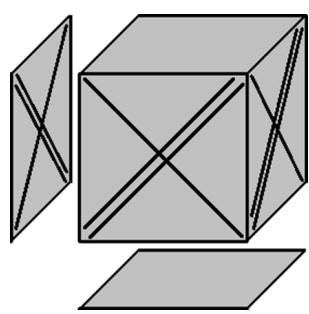
Antes de $M = F$	Após $M = F$	Alteração no valor de S	Embalagem de referência
		$+1 + 2 = +3$	
		$+1 - 1 = 0$	
		$+1 - 1 = 0$	

Tabela 2: Efeitos da rotação $M = F$ nas cores principais de dois cantos frontais adjacentes, em três casos particulares. Os outros seis casos possíveis para esse par de cantos (em que o amarelo ocupa um dos outros dois lados do canto) podem ser analisados de modo análogo. Se as cores estiverem invertidas, forem ambas brancas ou ambas amarelas, a análise é a mesma. Pela simetria da embalagem, o outro par de cantos dessa face se comporta de modo análogo. Os cantos traseiros não são afetados por essa rotação.

Caso 4: $M = B, L$ ou R . Pela simetria da embalagem, é análogo ao Caso 3.

(b) Podemos assumir que L, F, R, U, D e B são as únicas rotações possíveis, pois qualquer outra rotação produz uma configuração que pode ser obtida por uma combinação dessas. Por exemplo: aplicar F' equivale a aplicar $F F F$; rotacionar uma vez a camada do meio para frente produz uma configuração que também é produzida por $R L L L$. Estabelecida essa simplificação, vamos usar indução sobre o número n de rotações aplicadas no cubo a partir de sua configuração inicial.

Caso base: Quando o cubo está em sua configuração inicial, a cor principal de cada canto está voltada para cima ou para baixo, não coincidindo com nenhuma reta (veja a Figura 10). Logo, se $n = 0$, então $S = f(c_1) + \dots + f(c_8) = 0 + \dots + 0 = 0$ é um múltiplo de três.

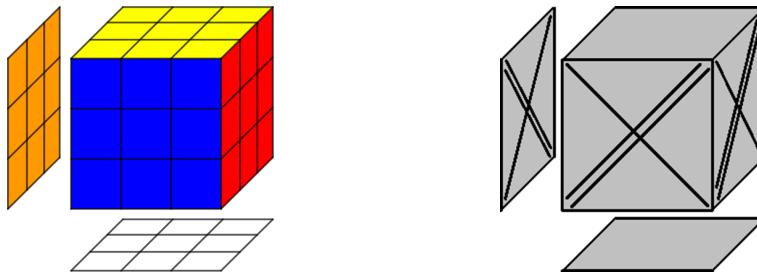


Figura 10: Cubo na configuração inicial ao lado da embalagem usada na definição de f .

Hipótese de indução: Suponha que, após aplicar n rotações, a soma S seja um múltiplo de três.

Passo indutivo: Seja M a $(n + 1)$ -ésima rotação. Pelo item (a) já provado, após M a soma S continuará sendo um múltiplo de três. \square

4. Aplicação 1: encaixe de um canto

O cubo da Figura 2, que possui um canto Azul-Branco-Vermelho desencaixado, é mostrado na Figura 11 com os cantos rotulados.

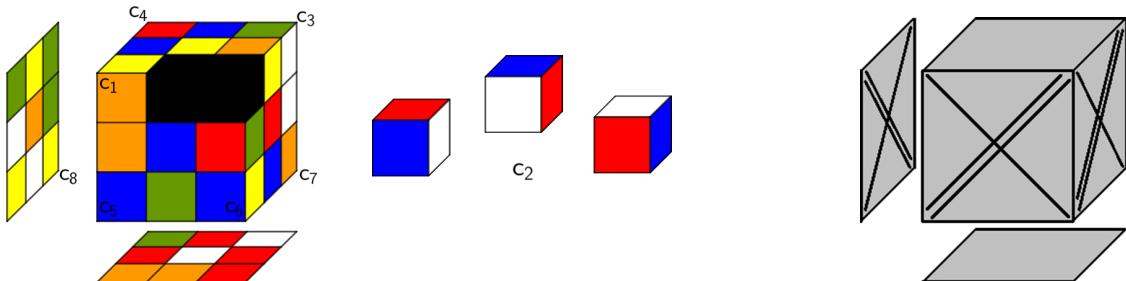


Figura 11: Cubo embaralhado com peças desencaixadas ao lado da embalagem usada na definição de f .

Aplicando a definição de f , obtemos: $f(c_1) = 0, f(c_3) = 2, f(c_4) = 2, f(c_5) = 1, f(c_6) = 2, f(c_7) = 0$ e $f(c_8) = 2$. Daí, $S = f(c_1) + \dots + f(c_8) = f(c_2) + 9$. Como S tem que ser múltiplo de 3 (pelo Teorema 1-(b)), segue que devemos ter $f(c_2) = 0$ (não pode ser 1 nem 2, pois esses valores produziriam uma soma que não é múltiplo de três). Assim, o lado branco do canto desencaixado tem que estar voltado para cima. Portanto, o encaixe correto desse canto é dado de acordo com a Figura 12.

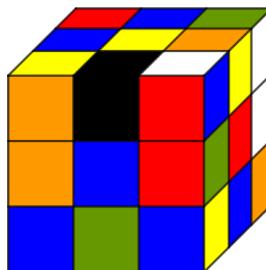


Figura 12: Forma correta de encaixar o canto Azul-Branco-Vermelho conforme o Teorema 1-(b).

5. Teorema sobre a orientação das arestas

O caso das arestas será tratado com uma abordagem semelhante ao caso dos cantos visto na Seção 3. Para isso, vamos considerar a embalagem mostrada na Figura 13. Nesse caso, a embalagem também é simétrica: giros horizontais ou verticais de 180° , bem como um giro horizontal de 90° seguido de um giro vertical de 90° , resultam na mesma imagem da figura (de modo que a reta na face oculta da figura é vertical).

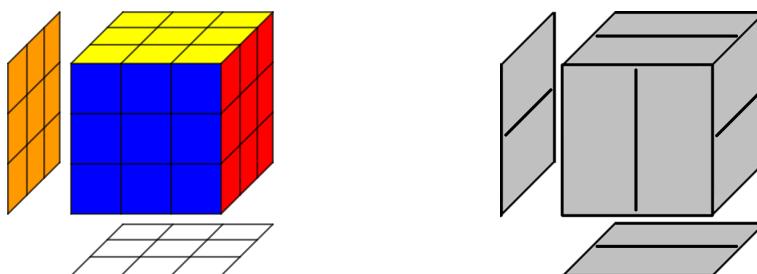


Figura 13: Configuração inicial ao lado da embalagem de referência que será usada na prova do Teorema 2.

Aqui, vamos definir a **cor principal de uma aresta** como sendo a cor que coincide com uma reta quando o cubo em sua configuração inicial é guardado na embalagem posicionado como na Figura 13. A Tabela 3 relaciona a cor principal de cada uma das doze arestas.

Aresta	Cor principal
Amarelo-Azul	Azul
Amarelo-Vermelho	Amarelo
Amarelo-Verde	Verde
Amarelo-Alaranjado	Amarelo
Branco-Azul	Azul
Branco-Vermelho	Branco

Aresta	Cor principal
Branco-Verde	Verde
Branco-Alaranjado	Branco
Azul-Vermelho	Vermelho
Vermelho-Verde	Vermelho
Verde-Alaranjado	Alaranjado
Alaranjado-Azul	Alaranjado

Tabela 3: Cor principal de cada aresta.

Daqui em diante, vamos considerar que a embalagem ficará sempre fixa na posição ilustrada na Figura 13. Guardando o cubo numa dada configuração na embalagem **com o centro amarelo voltado para cima**,

vamos definir uma função g que a cada aresta a do cubo associa um número, da seguinte maneira⁶:

$$g(a) = \begin{cases} 0, & \text{se a cor principal de } a \text{ coincide com nenhuma reta} \\ 1, & \text{se a cor principal de } a \text{ coincide com uma reta.} \end{cases}$$

Por exemplo, rotulando as arestas por a_1, a_2, \dots, a_{12} conforme a Figura 14 e guardando o cubo na embalagem naquela posição, concluímos (com auxílio da Tabela 3) que $g(a_1) = 1, g(a_2) = 1, g(a_3) = 0, g(a_4) = 1, g(a_5) = 0, g(a_6) = 0, g(a_7) = 0, g(a_8) = 1, g(a_9) = 1, g(a_{10}) = 0, g(a_{11}) = 0$ e $g(a_{12}) = 1$ ⁷.

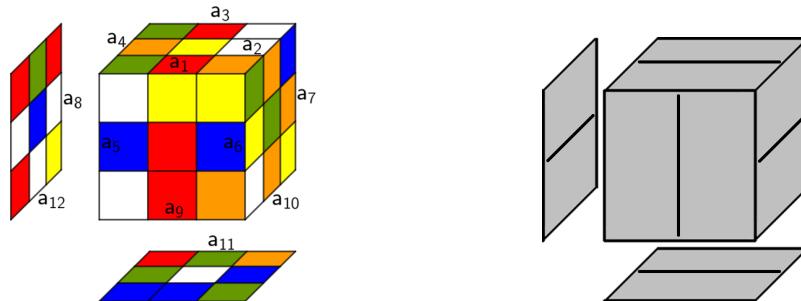


Figura 14: Cubo embaralhado ao lado da embalagem usada na definição de g .

Pelo Teorema 2 abaixo, também não é coincidência que $g(a_1) + g(a_2) + \dots + g(a_{12}) = 6$ é par.

Teorema 2. Sejam a_1, a_2, \dots, a_{12} as doze arestas distintas do cubo e $T = g(a_1) + g(a_2) + \dots + g(a_{12})$.

(a) Se T é par numa dada configuração, então T continua sendo par após aplicarmos L, F, R, U, D ou B na configuração dada.

(b) Em qualquer configuração possível do cubo, a soma T sempre é par.

Demonstração.

(a) Suponha que o cubo esteja numa configuração em que T é par e seja M a rotação aplicada nessa configuração.

Caso 1: $M = U$. Após a rotação, a cor principal de uma determinada aresta vai passar de uma reta para nenhuma, ou de nenhuma para uma (veja a Tabela 4).

⁶A nota de rodapé número 4 também se aplica aqui, com o adendo de que, nesse caso, a função também depende da posição em que o cubo é colocado na embalagem (pois a embalagem não é simétrica em relação a giros horizontais de 90°).

⁷Aqui usamos o fato de que a_7 é Amarelo-Alaranjado, a_8 é Branco-Verde, a_3 é Vermelho-Verde e a_{11} é Amarelo-Verde (o que pode ser deduzido da figura).

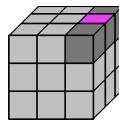
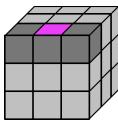
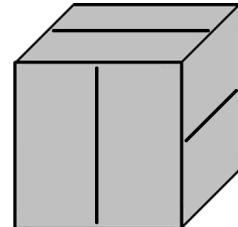
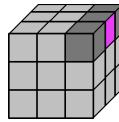
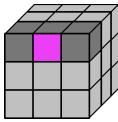
Descrição	Antes de $M = U$	Após $M = U$	Embalagem de referência
$f(a_i)$ era 1 antes e passa a ser 0 após a aplicação de $M = U$.			
$f(a_i)$ era 0 antes e passa a ser 1 após a aplicação de $M = U$.			

Tabela 4: Efeitos de $M = U$ nos valores que g assume numa aresta superior. A cor rosa simboliza a posição da cor principal. As outras arestas se comportam de modo análogo ou não são afetadas por essa rotação.

Assim, cada par de arestas adjacentes rotacionadas vai alterar a soma T em 0, +2 ou -2 (veja a Tabela 5). Como o movimento rotaciona dois pares de arestas adjacentes, a soma total vai sofrer uma variação de 0, ± 2 ou ± 4 e, portanto, continuará sendo par.

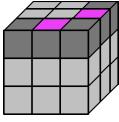
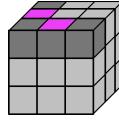
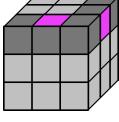
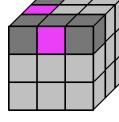
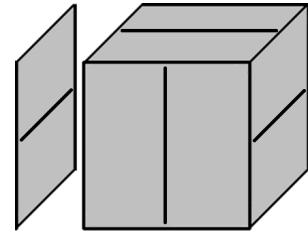
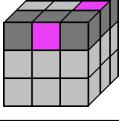
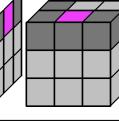
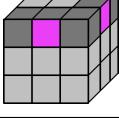
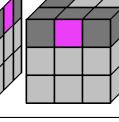
Antes de $M = U$	Após $M = U$	Alteração no valor de T	Embalagem de referência
		+1 - 1 = 0	
		+1 + 1 = +2	
		-1 - 1 = -2	
		-1 + 1 = 0	

Tabela 5: Efeitos de $M = U$ nas cores principais de duas arestas adjacentes superiores, nos quatro casos possíveis. A cor rosa simboliza as posições das cores principais. Pela simetria da embalagem, o outro par de arestas da face superior se comporta de modo análogo. As demais arestas não são afetadas por essa rotação.

Caso 2: $M = L, F, R, D$ ou B . A análise é análoga ao Caso 1 (relativamente à alteração no valor de T , cada par de arestas adjacentes se comporta exatamente como um dos quatro casos apresentados na Tabela 5).

(b) Como na prova do Teorema 1-(b), podemos assumir que L, F, R, U, D e B são as únicas rotações possíveis e usar indução sobre o número n de rotações aplicadas no cubo a partir de sua configuração inicial.

Caso base: Quando o cubo está em sua configuração inicial, a cor principal de cada aresta está coincidindo com uma reta (pois é assim que as cores principais foram definidas; veja a Figura 13). Logo, se $n = 0$, então $T = g(a_1) + \dots + g(a_{12}) = 1 + \dots + 1 = 12$ é par.

Hipótese de indução: Suponha que, após aplicar n rotações, a soma T seja par.

Passo indutivo: Seja M a $(n + 1)$ -ésima rotação. Pelo item (a) já provado, após M a soma T continuará sendo par. \square

6. Aplicação 2: encaixe de uma aresta

O cubo da Figura 12, que possui uma aresta Amarelo-Verde desencaixada, é mostrado na Figura 15 com as arestas rotuladas.

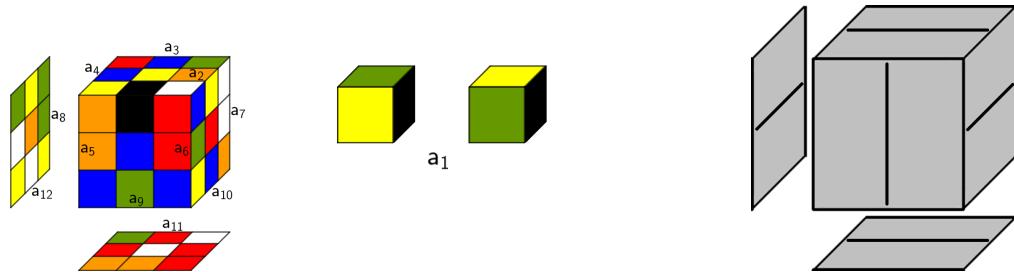


Figura 15: Cubo com uma aresta desencaixada ao lado da embalagem usada na definição de g.

Aplicando a definição de g, obtemos (com auxílio da Tabela 3): $g(a_2) = 0$, $g(a_3) = 1$, $g(a_4) = 1$, $g(a_5) = 1$, $g(a_6) = 0$, $g(a_7) = 0$, $g(a_8) = 1$, $g(a_9) = 0$, $g(a_{10}) = 1$, $g(a_{11}) = 1$ e $g(a_{12}) = 0$ ⁸. Daí, $T = g(a_1) + \dots + g(a_{12}) = g(a_1) + 6$. Como T tem que ser par (pelo Teorema 2-(b)), segue que devemos ter $g(a_1) = 0$. Assim, o lado verde (cor principal) da aresta desencaixada tem que estar voltado para cima. Portanto, o encaixe correto é dado de acordo com a Figura 16.

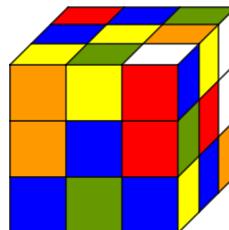


Figura 16: Forma correta de encaixar a aresta Amarelo-Verde conforme o Teorema 2-(b).

7. Aplicação 3: padrões impossíveis

Uma brincadeira comum entre os cubistas consiste em tomar o cubo em sua configuração inicial e aplicar movimentos que, em vez de bagunçar as cores, construam configurações visualmente interessantes – os

⁸Aqui usamos o fato de que a_8 é Branco-Verde, a_7 é Branco-Azul, a_3 é Alaranjado-Azul e a_{11} é Branco-Vermelho (o que pode ser deduzido da figura).

chamados **padrões** (no inglês, *patterns*). Por exemplo, o movimento R R U U R R L L U U L' R' produz listras em todas as faces (veja a Figura 17).



Figura 17: Construção de um padrão de listras.

Um padrão particularmente interessante seria aquele em que há um único cubinho de canto girado (veja a Figura 18). Qual seria o movimento que fornece esta configuração?

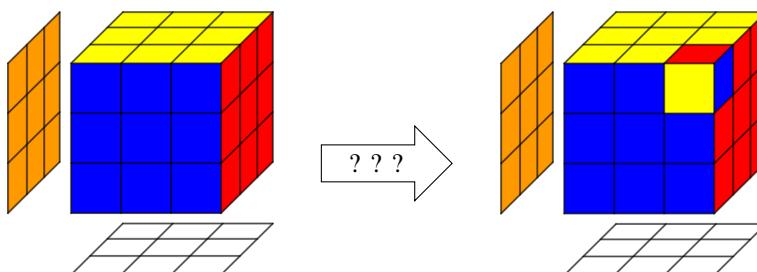


Figura 18: Como girar apenas um canto?

Como mostra o resultado seguinte, desde que o cubo não seja desmontado, não é possível fazer isso.

Corolário 1 (Corolário do Teorema 1). *O padrão acima proposto é impossível de obter, ou seja: não existe movimento que produza um único canto incorretamente orientado.*

Demonstração. Suponha que seja possível obter um único canto c_k incorretamente orientado mantendo todas as outras peças corretas. É imediato que $f(c_k) = 1$ ou $f(c_k) = 2$ e que, para todo $i \neq k$, tem-se $f(c_i) = 0$. Portanto, $S = 1$ ou $S = 2$. ABSURDO, pois viola o Teorema 1-(b). \square

Note que outros corolários similares podem ser obtidos do Teorema 1-(b), bem como versões análogas para arestas podem ser obtidas do Teorema 2-(b).

Observação 1. Embora não seja possível girar um único canto, é possível adaptar o movimento ilustrado na Figura 7 para obter um padrão parecido com o padrão impossível da Figura 18: aplicando L L U' R' D R F D F' U F D' F' R' D' R L L obtemos dois cantos diametralmente opostos incorretamente orientados (veja a Figura 19). Uma galeria com os padrões mais comuns pode ser vista em [10].

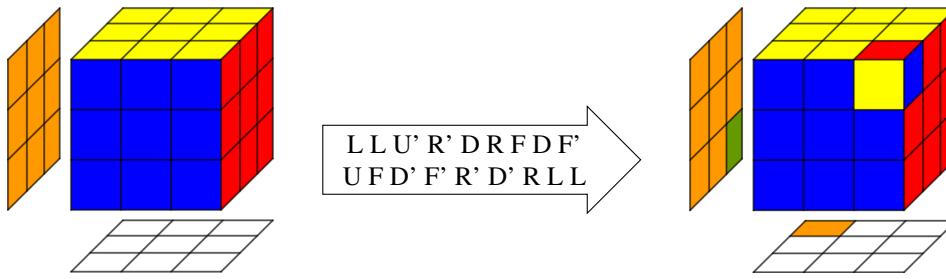


Figura 19: Cantos diametralmente opostos incorretamente orientados.

8. Teorema sobre a paridade das permutações

8.1. A notação de ciclos

Informalmente, uma permutação de uma lista ordenada de elementos pode ser entendida como sendo uma reordenação (não necessariamente distinta) desses elementos. Por exemplo, uma lista (x_1, x_2, x_3, x_4) de 4 elementos possui $4! = 24$ permutações distintas:

(x_1, x_2, x_3, x_4)	(x_2, x_1, x_3, x_4)	(x_3, x_1, x_2, x_4)	(x_4, x_1, x_2, x_3)
(x_1, x_2, x_4, x_3)	(x_2, x_1, x_4, x_3)	(x_3, x_1, x_4, x_2)	(x_4, x_1, x_3, x_2)
(x_1, x_3, x_2, x_4)	(x_2, x_3, x_1, x_4)	(x_3, x_2, x_1, x_4)	(x_4, x_2, x_1, x_3)
(x_1, x_3, x_4, x_2)	(x_2, x_3, x_4, x_1)	(x_3, x_2, x_4, x_1)	(x_4, x_2, x_3, x_1)
(x_1, x_4, x_2, x_3)	(x_2, x_4, x_1, x_3)	(x_3, x_4, x_1, x_2)	(x_4, x_3, x_1, x_2)
(x_1, x_4, x_3, x_2)	(x_2, x_4, x_3, x_1)	(x_3, x_4, x_2, x_1)	(x_4, x_3, x_2, x_1)

Note que, partindo da lista original (x_1, x_2, x_3, x_4) , a permutação (x_3, x_4, x_2, x_1) é obtida quando o 1º elemento vai para o lugar do 4º, o 4º vai para o lugar do 2º, o 2º vai para o lugar do 3º e o 3º vai para o lugar do 1º. Isso pode ser representado da seguinte forma abreviada: $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$. Podemos, ainda, utilizar a seguinte notação mais concisa: $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$, onde fica convencionado que o elemento final dentro dos parênteses sempre vai para o lugar do elemento inicial. Nesse contexto também é comum omitir as setas de modo que, na prática, a referida permutação é representada simplesmente por $(1\ 4\ 2\ 3)$. Nesse sentido, a notação $(3\ 1\ 4\ 2)$ representa a permutação em que o 3º elemento vai para o lugar do 1º, o 1º vai para o lugar do 4º, o 4º para o lugar do 2º e o 2º para o lugar do 3º. Ou seja, representa a permutação (x_3, x_4, x_2, x_1) .

Às vezes, uma permutação não altera a posição de todos os elementos. Por exemplo: na permutação (x_3, x_1, x_2, x_4) , o 1º termo foi para o lugar do 2º, o 2º para o lugar do 3º, o 3º para o lugar do 1º e o 4º ficou parado. Seguindo as ideias anteriores, as trocas de lugar dessa permutação são indicadas por $(1\ 2\ 3)$. E o fato de que o 4 ficou parado é indicado por (4) . Assim, a permutação completa é indicada por $(1\ 2\ 3)(4)$. Nesse sentido, a notação $(3)(2\ 4\ 1)$ representa a permutação em que o 3º elemento ficou parado, o 2º foi para o lugar do 4º, o 4º para o lugar do 1º e o 1º para o lugar do 2º. Ou seja, representa a permutação (x_4, x_1, x_3, x_2) .

Parênteses com dois elementos também podem ocorrer com um significado similar: a notação $(1\ 3)(2\ 4)$ representa a permutação em que o 1º elemento trocou de lugar com o 3º e o 2º trocou de lugar com o 4º, ou seja, representa (x_3, x_4, x_1, x_2) ; já a notação $(2)(3)(1\ 4)$ representa a permutação em que o 2º e o 3º elementos ficaram parados e o 1º trocou de lugar com 4º, ou seja, representa (x_4, x_2, x_3, x_1) .

Sob as notações acima explicadas, as 24 permutações de (x_1, x_2, x_3, x_4) listadas no início desta seção podem

ser representadas, respectivamente, do seguinte modo⁹:

(1)(2)(3)(4)	(3)(4)(1 2)	(4)(1 2 3)	(1 2 3 4)
(1)(2)(3 4)	(1 2)(3 4)	(1 2 4 3)	(3)(1 2 4)
(1)(4)(2 3)	(4)(1 3 2)	(2)(4)(1 3)	(2)(1 3 4)
(1)(2 4 3)	(1 4 3 2)	(2)(1 4 3)	(2)(3)(1 4)
(1)(2 3 4)	(1 3 4 2)	(1 3)(2 4)	(1 3 2 4)
(1)(3)(2 4)	(3)(1 4 2)	(1 4 2 3)	(1 4)(2 3)

Nesse contexto, cada par de parênteses é chamado de **ciclo**. Um ciclo nunca possui elementos repetidos, pois ele determina a posição que cada elemento passou a ocupar (e nenhum elemento ocupa dois lugares diferentes bem como nenhum lugar é ocupado por mais de um elemento).

8.2. Produto de permutações

Cada ciclo específico pode ser visto como sendo uma ação que reordena os elementos da lista, mantendo fixos os elementos que eventualmente não apareçam. Por exemplo, o ciclo $(1\ 3\ 4)$ em que não aparece o elemento 2 representa a permutação $(2)(1\ 3\ 4)$. Nesse sentido, a justaposição de ciclos é entendida como sendo a aplicação sucessiva das respectivas ações de reordenação, é chamada de **produto de permutações** e aqui sempre será lida **da direita para a esquerda**¹⁰. Por exemplo, a notação $(2\ 3)(1\ 3\ 4)$ representa a permutação obtida quando inicialmente executamos a reordenação definida pelo ciclo da direita $(1\ 3\ 4)$ obtendo (x_4, x_2, x_1, x_3) e, em seguida, executamos a reordenação definida pelo ciclo da esquerda $(2\ 3)$ obtendo (x_4, x_1, x_2, x_3) . Como essa última permutação também pode ser representada por $(1\ 2\ 3\ 4)$, escrevemos $(2\ 3)(1\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)$. Devemos ter atenção ao calcular um produto de permutações porque, em geral, a ordem importa. Por exemplo, se primeiro aplicarmos $(2\ 3)$ e em seguida $(1\ 3\ 4)$ obtemos $(1\ 3\ 4)(2\ 3) = (1\ 3\ 2\ 4) \neq (1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3)(1\ 3\ 4)$ ¹¹.

8.3. Transposições e paridade

A quantidade de elementos de um ciclo é chamada de **comprimento do ciclo**. Por exemplo: o ciclo $(2\ 3)$ tem comprimento 2; o ciclo $(1\ 3\ 4)$ tem comprimento 3. Um ciclo de comprimento 2 é chamado de **transposição**¹². É possível demonstrar¹³ que todo ciclo $(n_1\ n_2\ n_3\ \cdots\ n_{k-1}\ n_k)$ pode ser expresso como um produto de transposições da seguinte forma:

$$(n_1\ n_2\ n_3\ \cdots\ n_{k-1}\ n_k) = (n_1\ n_k)(n_1\ n_{k-1}) \cdots (n_1\ n_3)(n_1\ n_2). \quad (1)$$

⁹Listamos as 24 permutações para que o leitor não familiarizado com a notação tenha acesso a uma grande variedade de exemplos.

¹⁰Formalmente, uma permutação de n elementos é definida como sendo uma bijeção $\alpha : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ e o produto $\alpha\beta$ entre duas permutações é definido como sendo a composição $\alpha \circ \beta$ (primeiro aplicamos β e depois α). É isso que motiva a leitura da direita para a esquerda na notação de ciclos. Ressaltamos, entretanto, que sequências de rotações e de movimentos continuarão a ser lidas normalmente da esquerda para a direita.

¹¹Prova-se que o conjunto das permutações mundo desse produto forma um grupo (veja o Teorema 8.5 em [4]). Como a ordem em que a operação é realizada importa, esse grupo não é comutativo. No cubo, isso significa que a ordem das rotações interferem no resultado final; por exemplo: o movimento U R produz uma configuração diferente daquela produzida por R U. Porém, prova-se também que o produto comuta quando os ciclos são disjuntos (veja o Teorema 5.2 em [5]). Uma versão do cubo que produz um grupo comutativo seria trivial de resolver! (veja [3]).

¹²Uma transposição também é chamada de **2-ciclo**. Analogamente, um ciclo de comprimento 3 é chamado de **3-ciclo** e, em geral, um ciclo de comprimento n é chamado de **n-ciclo**.

¹³Veja o Teorema 5.4 em [5].

Por exemplo:

$$(1 \ 4 \ 3 \ 2) = (1 \ 2)(1 \ 3)(1 \ 4).$$

De fato: aplicando $(1 \ 4)$ em (x_1, x_2, x_3, x_4) obtemos (x_4, x_2, x_3, x_1) ; aplicando $(1 \ 3)$ nessa última reordenação obtemos (x_3, x_2, x_4, x_1) ; finalmente, aplicando $(1 \ 2)$ obtemos (x_2, x_3, x_4, x_1) que é $(1 \ 4 \ 3 \ 2)$.

Em geral, a decomposição de uma permutação p como um produto de transposições não é única. Por exemplo, também temos $(1 \ 4 \ 3 \ 2) = (1 \ 2)(1 \ 4)(4 \ 3)$. Porém, fixada p , pode-se demonstrar¹⁴ que a quantidade de transposições necessárias para expressar p como um produto de transposições é sempre par ou sempre ímpar; quando é par, dizemos que p é uma **permutação par**; quando é ímpar, dizemos que p é uma **permutação ímpar**.

8.4. O teorema

Cada movimento do cubo troca cantos e arestas de lugar. Mas um canto nunca vai para o lugar de uma aresta e uma aresta nunca vai para o lugar de um canto. Assim, nomeando as peças conforme a Figura 20, a posição dos cantos numa dada configuração é dada por uma permutação de (c_1, c_2, \dots, c_8) e a posição das arestas é dada por uma permutação de $(a_1, a_2, \dots, a_{12})$.

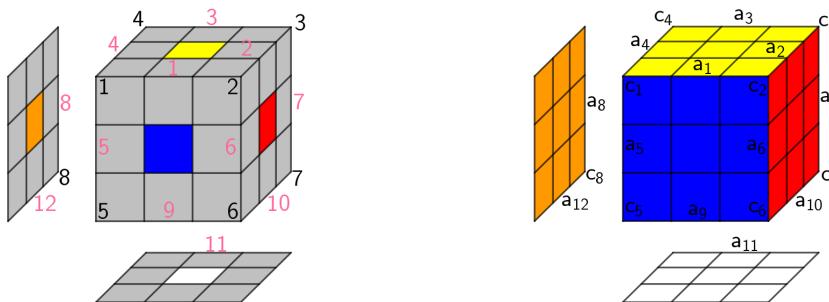


Figura 20: Nomeação das posições (fixas) do cubo, e dos cantos e arestas (móveis) na configuração inicial.

Por exemplo, o movimento U D R produz a configuração mostrada na Figura 21. Nessa situação, a posição dos cantos é dada pela permutação

$$(c_2, c_5, c_3, c_1, c_8, c_6, c_4, c_7) = (1 \ 4 \ 7 \ 8 \ 5 \ 2) = (1 \ 2)(1 \ 5)(1 \ 8)(1 \ 7)(1 \ 4)$$

e a posição das arestas é dada pela permutação

$$\begin{aligned} (a_2, a_6, a_4, a_1, a_5, a_9, a_3, a_8, a_{12}, a_7, a_{10}, a_{11}) &= (1 \ 4 \ 3 \ 7 \ 10 \ 11 \ 12 \ 9 \ 6 \ 2) \\ &= (1 \ 2)(1 \ 6)(1 \ 9)(1 \ 12)(1 \ 11)(1 \ 10)(1 \ 7)(1 \ 3)(1 \ 4). \end{aligned}$$

¹⁴Veja o Teorema 5.5 em [5].

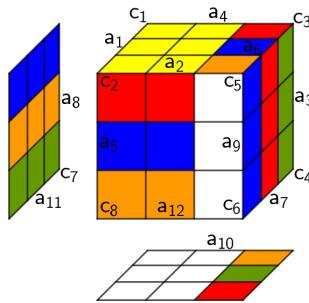


Figura 21: Exemplo de permutações de cantos e arestas.

Note que as permutações exemplificadas são ambas ímpares (suas expressões como produto de transposições possuem quantidades ímpares de transposições: 5 e 9, respectivamente). O próximo teorema estabelece que a igualdade da paridade verificada nesse caso específico não é uma coincidência.

Observação 2 (Efeito de transposições repetidas). Uma permutação $(i\ j)$ troca o elemento da posição i com o elemento da posição j . Assim, aplicando $(i\ j)$ em uma dada lista $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k)$ obtemos $(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k)$. Aplicando $(i\ j)$ novamente, desfazemos a troca voltando para a lista original¹⁵. Portanto, o produto $(i\ j)(i\ j)$ não produz nenhuma alteração na lista original podendo ser expresso por $(i\ j)(i\ j) = (i\ j)$.

Observação 3 (Paridade do produto). Como a soma de par com ímpar resulta em ímpar, o produto de duas permutações com paridades distintas resulta numa permutação ímpar. Como a soma de par com par resulta em par e soma de ímpar com ímpar também resulta em par, o produto de duas permutações com paridades iguais resulta numa permutação par.

Teorema 3. *Em qualquer configuração possível do cubo, a permutação dos cantos e a permutação das arestas possuem a mesma paridade (ou seja: são ambas pares ou ambas ímpares).*

Demonstração. Como na prova do Teorema 1-(b), podemos assumir que L, F, R, U, D e B são as únicas rotações possíveis e usar indução sobre o número n de rotações aplicadas no cubo a partir de sua configuração inicial.

Caso base: Se $n = 0$, o cubo está em sua configuração inicial de modo que nenhuma peça foi trocada de lugar. Assim sendo, em vista da Observação 2 e usando a nomeação da Figura 20, a permutação dos cantos é dada por

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) = (1\ 2)(1\ 2)(3\ 4)(3\ 4)(5\ 6)(5\ 6)(7\ 8)(7\ 8)$$

e, analogamente, a permutação das arestas é dada por

$$(1)(2)(3)(4) \cdots (11)(12) = (1\ 2)(1\ 2)(3\ 4)(3\ 4) \cdots (11\ 12)(11\ 12).$$

Como em cada caso há um número par de transposições, ambas as permutações são pares.

Hipótese de indução: Suponha que, após aplicar n rotações, a permutação P_c dos cantos e a permutação P_a das arestas possuem a mesma paridade.

Passo indutivo: Sejam M a $(n + 1)$ -ésima rotação, \tilde{P}_c a permutação dos cantos após a aplicação de M e \tilde{P}_a a permutação das arestas após a aplicação de M . Vamos mostrar que \tilde{P}_c e \tilde{P}_a possuem a mesma paridade.

¹⁵No contexto da teoria dos grupos, essa propriedade se reflete no fato de que a **inversa** de uma transposição é ela própria.

- Caso 1: $M = U$. A Figura 22 mostra o efeito de M nos cantos c_i, c_j, c_k e c_l que se encontram na face superior do cubo. Note que c_i (posição 1, conforme a Figura 20) vai para o lugar de c_l (posição 4), que vai para o lugar de c_k (posição 3), que vai para o lugar de c_j (posição 2), que vai para o lugar de c_i (posição 1).

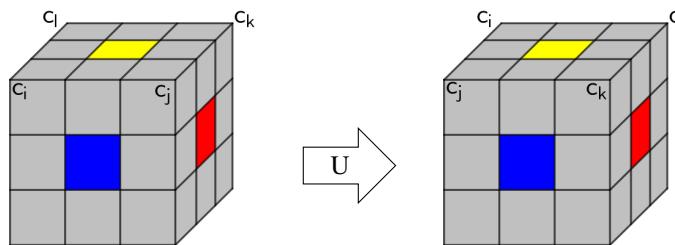


Figura 22: Efeito de $M = U$ nos cantos superiores. Os demais cantos não são afetados por essa rotação.

Assim, pela igualdade (1), temos $\tilde{P}_c = (1\ 4\ 3\ 2)P_c = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)P_c$. Isso mostra que \tilde{P}_c é obtida multiplicando P_c por uma permutação ímpar. E um argumento inteiramente análogo mostra que \tilde{P}_a é obtida multiplicando P_a também por uma permutação ímpar. Assim, pela Observação 3:

- Se P_c e P_a são ambas pares, então \tilde{P}_c e \tilde{P}_a serão ambas ímpares;
- Se P_c e P_a são ambas ímpares, então \tilde{P}_c e \tilde{P}_a serão ambas pares.

- Caso 2: $M = L, F, R, B$ ou D . Análogo ao Caso 1.

□

9. Aplicação 4: Número de configurações possíveis

Formar uma configuração possível do cubo equivale a tomar 4 decisões consecutivas:

Decisão 1: Escolher uma permutação possível de cantos.

Decisão 2: Escolher uma permutação possível de arestas.

Decisão 3: Escolher uma orientação possível de cantos.

Decisão 4: Escolher uma orientação possível de arestas.

Observação 4. A palavra “possível” nas declarações acima serve para enfatizar que devemos eliminar as escolhas que geram configurações impossíveis de obter como, por exemplo, aquela ilustrada na Figura 18 (os critérios de impossibilidade de que dispomos são aqueles produzidos pelos teoremas 1, 2 e 3).

Vamos contabilizar as maneiras de tomar cada decisão.

De quantos modos diferentes podemos tomar a Decisão 1? Como existem 8 cantos, existem $8!$ maneiras de tomar a Decisão 1.

De quantos modos diferentes podemos tomar a Decisão 2? Como existem 12 arestas, num primeiro momento poderíamos pensar que existem $12!$ maneiras de tomar a Decisão 2. Porém, após tomar a Decisão 1, só podemos escolher uma permutação de aresta que possua a mesma paridade da permutação de cantos (pelo Teorema 3). É possível demonstrar¹⁶ que, do total de permutações de qualquer grupo de objetos, exatamente metade é par e metade é ímpar. Portanto, metade das permutações contabilizadas no valor $12!$ não poderão ser escolhidas por terem a paridade diferente daquela escolhida para os cantos. Assim, restam no máximo

¹⁶Veja o Teorema 5.7 em [5].

$12!/2$ escolhas possíveis. Ou seja, após tomar a Decisão 1, existem no máximo $12!/2$ maneiras de tomar a Decisão 2.

De quantos modos diferentes podemos tomar a Decisão 3? A princípio, cada um dos 8 cantos pode ser orientado de 3 maneiras diferentes (veja a Figura 11). Assim, num primeiro momento, poderíamos pensar que existem 3^8 maneiras de tomar a Decisão 3. Porém, após escolher as orientações dos 7 primeiros cantos, sobra apenas uma orientação para o oitavo canto que faz com que a soma $f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_8)$ seja um múltiplo de 3 (condição dada pelo Teorema 1). Portanto, existem no máximo 3^7 orientações que podem ser obtidas na prática. Ou seja, existem no máximo 3^7 maneiras de tomar a Decisão 3.

De quantos modos diferentes podemos tomar a Decisão 4? Analogamente ao caso dos cantos, existem (em razão do Teorema 2) no máximo 2^{11} orientações de arestas que podem ser obtidas na prática. Ou seja, existem no máximo 2^{11} maneiras de tomar a Decisão 4.

Pelo princípio fundamental da contagem, resulta da discussão que fizemos até aqui que o número total de configurações possíveis do cubo mágico é de, no máximo,

$$8! \cdot \frac{12!}{2} \cdot 3^7 \cdot 2^{11} = 43.252.003.274.489.856.000 \approx 43 \text{ quintilhões.}$$

Estamos dizendo “no máximo” porque, até aqui, não podemos garantir que esse é o “número exato de configurações possíveis”. Podemos apenas afirmar que esse é o “número de configurações que satisfazem as condições dos teoremas 1, 2 e 3”, pois ele foi obtido com base no seguinte fato: Se uma configuração é possível, então

- (a) A soma $f(c_1) + \dots + f(c_8)$ é múltiplo de 3 (Teorema 1).
- (b) A soma $g(a_1) + \dots + g(a_{12})$ é múltiplo de 2 (Teorema 2).
- (c) As paridades das permutações de cantos e de arestas são iguais (Teorema 3).

Assim, na prática, o que fizemos foi contabilizar as configurações que satisfazem essas três condições simultaneamente. Se houvesse algum outro critério de impossibilidade não abordado nas seções anteriores, o número obtido seria reduzido. Ocorre, porém, que é possível demonstrar (veja a Seção 10) que a recíproca do referido fato também vale: toda configuração que satisfaz simultaneamente as condições (a), (b) e (c) é uma configuração possível. Assim, o número obtido não é apenas um limitante superior para o número de configurações possíveis. Ele é o valor exato: cada uma das 43.252.003.274.489.856.000 configurações contabilizadas realmente é uma configuração possível.

Observação 5 (Quão grande é 43 quintilhões?). Para termos uma noção de como é grande o número de configurações possíveis, podemos observar que se existisse um cubo do tamanho de um grão de areia em cada configuração possível, eles poderiam substituir a areia de todas as praias existentes no mundo e ainda sobraria mais do que o quádruplo da quantidade utilizada¹⁷. Essa quantidade enorme de configurações possíveis já foi subestimada: conforme escreveu J. A. Paulos em 1988 *apud* [11], “A Companhia de Brinquedos Ideal afirmava na caixa do Cubo Mágico original que ele poderia atingir mais de três bilhões de possíveis configurações. Isto é o mesmo que o MacDonald’s orgulhosamente anunciar que eles já venderam mais de 120 hamburgers”.

¹⁷De acordo com o Capítulo 9 de [2], o total de grãos de areia existentes em todas as praias do mundo é de aproximadamente 7,5 quintilhões.

10. O Teorema Fundamental da Cubologia

O objetivo desta seção é demonstrar que as três condições necessárias para um configuração ser possível dadas pelos teoremas 1, 2 e 3 também são suficientes (quando olhadas juntas). Para isso, é conveniente introduzir um novo conceito: o **movimento inverso** de um movimento M é um movimento M^{-1} que “desfaz” a ação que M faz. Por exemplo, como uma verificação direta no cubo nos mostra: se $M = R$, então $M^{-1} = R'$; se $M = R D'$, então $M^{-1} = D R'$; se $M = R D' F$, então $M^{-1} = F' D R'$. Em geral, M^{-1} é obtido aplicando as rotações que produzem M na ordem inversa e com sentido de rotação contrários¹⁸.

Lema 1. *Toda permutação par de $q \geq 3$ elementos pode ser escrita como um produto de ciclos da forma $(1\ 2\ m)$ com $m \in \{3, 4, 5, \dots, q\}$.*

Demonstração. Seja P uma permutação par. Então, ela é um produto de um número par de transposições. Note que cada transposição pode ser decomposta como um produto de transposições que começam com 1: $(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$. Fazendo essa decomposição em P e agrupando as transposições aos pares da esquerda para direita, podemos supor que cada par é formado por duas transposições distintas (pois os pares iguais podem ser removidos, já que o uma desfará o que a outra fizer; veja a Observação 2). Finalmente, observamos que o produto de duas transposições distintas que começam com 1 pode ser escrito do seguinte modo: $(1\ i)(1\ j) = (1\ 2\ i)^2(1\ 2\ j)(1\ 2\ i)$. \square

Lema 2. *Dada qualquer configuração possível do cubo e qualquer $m \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, existe um movimento que produz a permutação $(1\ 2\ m)$ para os cantos sem alterar a posição das arestas.*

Demonstração. Sejam c_1, c_2 e c_m os cantos que se encontram nas posições fixas 1, 2 e m , respectivamente (indicadas na Figura 20). Aplique um movimento M_0 que coloque c_1, c_2 e c_m nas posições indicadas na Figura 23.

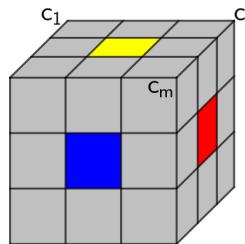


Figura 23: Posição adequada dos cantos para produzir $(1\ 2\ m)$.

Após isso, aplique o movimento $M = R' F R' B B R F' R' B B R R$ (ilustrado na Figura 6) e desfaça o movimento M_0 . Isso colocará c_1 no lugar de c_2 , c_2 no lugar de c_m e c_m no lugar de c_1 sem alterar a posição das demais peças, conforme o desejado. Por exemplo, se c_m for o canto indicado na Figura 24, podemos tomar $M_0 = R L' F$ ou $M_0 = D R L'$. No primeiro caso, o movimento completo será $M_0 M M_0^{-1} = (R L' F)(R' F R' B B R F' R' B B R R)(F' L R')$.

¹⁸Interpretando cada movimento como sendo uma permutação, o movimento inverso é o **elemento inverso** no sentido da teoria dos grupos (veja nota de rodapé número 10). Assim, a propriedade enunciada (fácil de verificar para casos específicos e bastante intuitiva no contexto do cubo) é uma versão da teorema do inverso de um produto (veja o Teorema 2.4 em [5]).

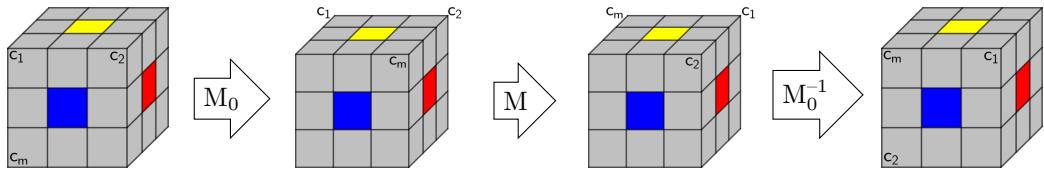


Figura 24: Exemplo de como obter $(1 \ 2 \ m)$ nos cantos usando $M = R' F R' B B R F' R' B B R R$ ($M_0 = R L' F$ auxilia a preparar a posição das peças para a aplicação de M , e deve ser desfeito no fim). \square

Lema 3. Dada qualquer configuração possível do cubo e qualquer $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, existe um movimento que produz a permutação $(1 \ 2 \ n)$ para as arestas sem alterar a posição dos cantos.

Demonstração. É análoga à demonstração do Lema 2. Nesse caso, usamos o movimento $N = F F U L R' F F L' R U F F$ (também ilustrado na Figura 6) – o qual permuta três arestas no sentido horário sem alterar a posição das demais peças. Um exemplo é mostrado na Figura 25.

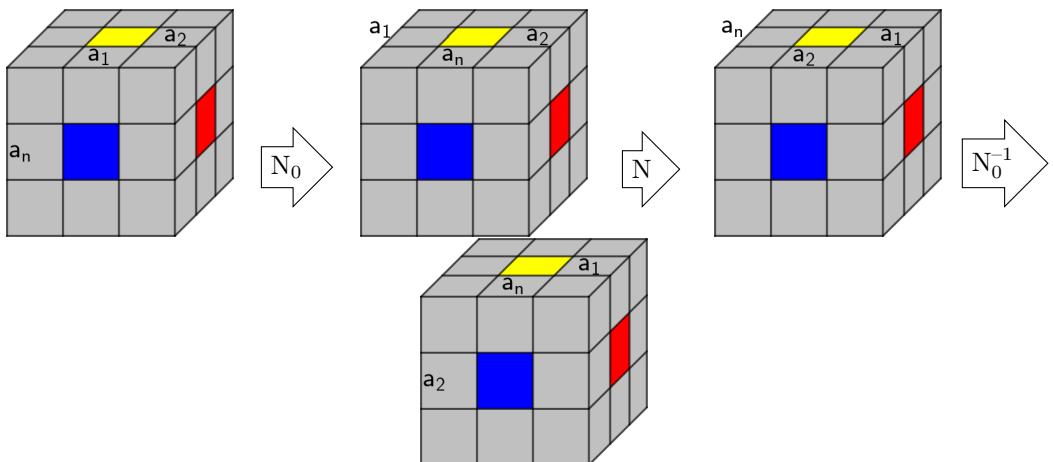


Figura 25: Exemplo de como produzir $(1 \ 2 \ n)$ nas arestas usando $N = F F U L R' F F L' R U F F$ (nesse caso específico, o movimento auxiliar pode ser $N_0 = F' L' F F$, ou $N_0 = R U F R'$). \square

Teorema 4 (Teorema Fundamental da Cubologia¹⁹). Sejam c_1, \dots, c_8 os oito cantos distintos do cubo, a_1, \dots, a_{12} as doze arestas distintas, f a função definida conforme a Seção 3 e g a função definida conforme a Seção 5. Um configuração do cubo é possível se, e somente se, as seguintes três condições são satisfeitas simultaneamente:

- (a) A soma $S = f(c_1) + \dots + f(c_8)$ é múltiplo de 3.
- (b) A soma $T = g(a_1) + \dots + g(a_{12})$ é múltiplo de 2.
- (c) A paridade da permutação de cantos é igual à paridade da permutação de arestas.

Demonstração. Suponha que o cubo esteja numa configuração possível. Resulta dos teoremas 1, 2 e 3 que as três condições são satisfeitas.

¹⁹ Assim chamado, por exemplo, em [1] e [7].

Reciprocamente, suponha que o cubo esteja numa configuração em que as três condições sejam satisfeitas. Queremos mostrar que é possível obter essa configuração a partir da configuração inicial. Para isso, basta mostrar que existe um movimento M que a converte na configuração inicial (daí, M^{-1} é precisamente o movimento que a produz). Isso será feito arrumando a permutação dos cantos e arestas e, em seguida, arrumando suas orientações.

Sejam P_c a permutação dos cantos e P_a a permutação das arestas. Em razão de (c), podemos supor que P_c e P_a são ambas pares (se não forem, aplique U^{20}).

Etapa 1: Arrumação da permutação dos cantos. Pelo Lema 1, P_c se decompõe como um produto de permutações da forma $(1\ 2\ m)$ com $m \in \{1, \dots, 8\}$. Digamos que $P_c = (1\ 2\ m_1) \cdots (1\ 2\ m_2)(1\ 2\ m_1)$. Tome um cubo em que a permutação dos cantos seja a mesma da configuração inicial. Pelo Lema 2, podemos executar um movimento M_1 que produz $(1\ 2\ m_1)$ nos cantos sem alterar as arestas. Após terminá-la, pelo mesmo lema, podemos executar um movimento M_2 que produz $(1\ 2\ m_2)$ também sem alterar as arestas. Repetindo esse processo, concluímos que P_c é obtida da permutação inicial de cantos sem alterar as arestas aplicando, sucessivamente, os movimentos M_1, M_2, \dots, M_k . Escrevendo $M_{pc} = M_1 M_2 \cdots M_k$, concluímos que o movimento inverso M_{pc}^{-1} aplicado na configuração dada coloca cada canto no seu lugar correto²¹ sem alterar a posição das arestas.

Etapa 2: Arrumação da permutação das arestas. Pelo Lema 1, P_a se decompõe como um produto de permutações da forma $(1\ 2\ n)$ com $n \in \{1, \dots, 12\}$. Digamos que $P_a = (1\ 2\ n_1) \cdots (1\ 2\ n_2)(1\ 2\ n_1)$. Tome um cubo em que a permutação das arestas seja a mesma da configuração inicial. Pelo Lema 3, podemos executar um movimento N_1 que produz $(1\ 2\ n_1)$ nas arestas sem alterar os cantos. Após terminá-la, pelo mesmo lema, podemos executar um movimento N_2 que produz $(1\ 2\ n_2)$ também sem alterar os cantos. Repetindo esse processo, concluímos que P_a é obtida da permutação inicial de arestas sem alterar os cantos aplicando, sucessivamente, os movimentos N_1, N_2, \dots, N_l . Escrevendo $M_{pa} = N_1 N_2 \cdots N_l$, concluímos que o movimento inverso M_{pa}^{-1} aplicado na configuração resultante da Etapa 1 coloca cada aresta no seu lugar correto sem alterar a posição dos cantos.

Etapa 3: Arrumação da orientação dos cantos. Nesse estágio, após a Etapa 2, todos os cantos e arestas já estão nos lugares corretos. Segure o cubo e numere os cantos conforme a Figura 26.

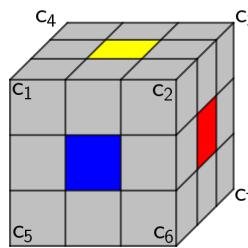


Figura 26: Numeração dos cantos.

Caso esteja com a orientação incorreta, o canto c_1 pode ser arrumado aplicando uma ou duas vezes o movimento $M = U' R' D R F D F' U F D' F' R' D' R$ (ilustrado na Figura 7). A Figura 27 ilustra o caso em que duas aplicações são necessárias.

²⁰Pelo que vimos na prova do Teorema 3, aplicando U numa permutação ímpar (de cantos ou arestas) obtemos uma permutação par.

²¹Em geral, com a orientação incorreta porque os movimentos de permutação usados apenas trocam cantos de lugar, sem considerar orientação; por exemplo, há mais de uma possibilidade para M_0 e cada uma irá posicionar os cantos como uma orientação diferente.

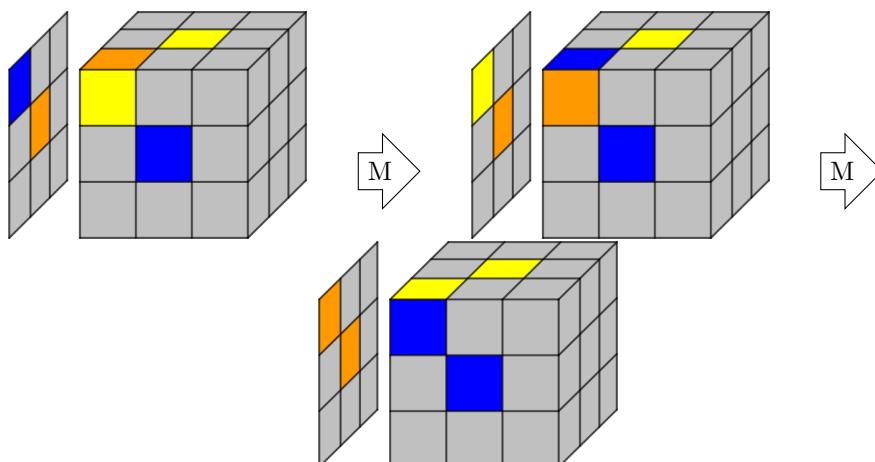


Figura 27: Exemplo de como arrumar a orientação de um canto com duas aplicações do movimento $M = U' R' D R F D F' U F D' F' R' D' R$. Se a face amarela do canto já estivesse inicialmente voltada para a esquerda, apenas uma aplicação seria necessária.

Após fazer isso, podemos aplicar uma rotação horizontal horária de 90° no cubo de modo que c_2 ocupe a posição em que estava c_1 (canto superior esquerdo da face da frente). Daí, uma ou duas aplicações de M também vai arrumar c_2 caso ele esteja incorretamente orientado. Repetindo esse processo, podemos arrumar a orientação dos cantos c_3, c_4, c_8 e c_7 (nessa ordem)²². Após fazer isso, os cantos c_5 e c_6 estarão arrumados ou desarrumados. Se estiverem arrumados, a Etapa 3 está terminada. Suponha, então, que estejam desarrumados. Pela hipótese (a) e pelo Teorema 1-(a), a soma S continua sendo um múltiplo de três²³. Assim, as únicas possibilidades para os cantos desarrumados são aquelas mostradas na Figura 28. No primeiro aplicamos M e, no segundo, aplicamos $M M$.

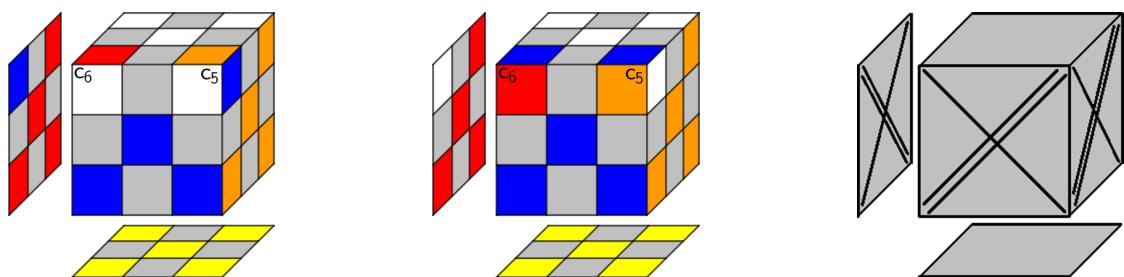


Figura 28: Possibilidades para os últimos dois cantos desarrumados ao lado da embalagem de referência usada na definição de f . Nesse caso temos $S = f(c_5) + f(c_6)$, o que impede qualquer outra possibilidade para os brancos desarrumados.

Etapa 4: Arrumação da orientação das arestas. Nesse estágio, após a Etapa 3, falta apenas arrumar a orientação das arestas. Um argumento análogo ao que foi utilizado na Etapa 3 para os cantos se aplica para a orientação das arestas. Nessa situação, o movimento necessário é $M = F R' F' R' F F L D R D' L' R' F$

²²Se, por exemplo, c_4 já estiver arrumado, passamos para c_8 . Se, por exemplo, c_4 estiver desarrumado e c_8 arrumado, c_8 será desarrumado após arrumar c_4 ; daí c_8 terá que ser arrumado em seguida. O mesmo vale para os outros cantos.

²³Para aplicar o Teorema 1-(a) na situação atual, devemos lembrar que $U' = U U U$, $F' = F F F$, etc. Assim, rotações anti-horárias também preservam o fato de S ser múltiplo de 2.

F R R – o qual reorienta arestas adjacentes aos pares sem alterar a permutação e a orientação das demais peças (veja a Figura 7). Na numeração da Figura 20, podemos arrumar as orientações das dez primeiras na seguinte ordem: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_8, a_{12}, a_5, a_9, a_6$ e a_{10} . A hipótese (b) e o Teorema 2-(a) implicam que, quando faltarem apenas duas arestas adjacentes para serem consideradas, estarão ambas arrumadas estando a presente etapa já concluída ou ambas desarrumadas – caso em que a etapa estará concluída após uma aplicação de M (veja a Figura 29).

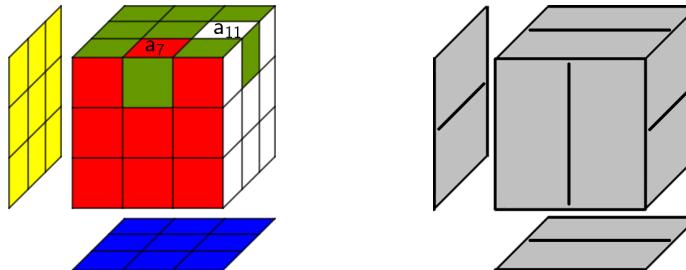


Figura 29: Exemplo de possibilidade para as últimas duas arestas desarrumadas, onde as cores principais são vermelho para a aresta da frente e verde para a outra, ao lado da embalagem de referência usada na definição de g . Nesse caso temos $T = g(a_7) + g(c_{11})$, o que impede qualquer outra possibilidade de desarrumação. Note que para calcular g precisamos do centro amarelo para cima, ou podemos girar a embalagem apropriadamente. Aqui ela foi girada, mas aparece idêntica em razão de sua simetria. \square

11. Aplicação 5: Como resolver o cubo mágico?

No contexto do cubo mágico, um **algoritmo** é um movimento (sequência de rotações) que executa uma permutação ou orientação específica. Uma análise das demonstrações feitas na seção precedente nos fornece o seguinte método para resolver o cubo mágico utilizando apenas quatro algoritmos²⁴:

1. Utilizando F F U L R' F F L' R U F F, coloque cada aresta no seu lugar (aqui não precisa se importar com a orientação; mas boa parte das arestas podem ser colocadas de modo intuitivo e já com a orientação correta – o que facilita o próximo passo).
2. Utilizando F R' F' R' F F L D R D' L' R' F F R R, arrume as arestas que estão com orientação incorreta.
3. Utilizando R' F R' B B R F' R' B B R R, coloque cada canto no seu lugar (sem se importar com a orientação).
4. Utilizando U' R' D R F D F' U F D' F' R' D' R, arrume os cantos que estiverem com orientação incorreta.

Nesse método, nada nos impede de começar pelos cantos ou deixar todas as orientações por último. Mas a formulação apresentada parece facilitar a execução. Apesar do fato curioso desse método ter sido deduzido como corolário das demonstrações que fizemos e exigir apenas quatro algoritmos, ele tem a desvantagem de exigir muitas repetições de movimentos longos – o que torna a resolução do cubo relativamente maçante e lenta (especialmente quando cometemos algum erro já próximo do fim!). Certamente algumas melhorias poderiam ser feitas. Por exemplo: o movimento do passo 4 possui uma versão que gira o canto no sentido

²⁴Em todos os passos pode ser necessário/conveniente utilizar movimentos auxiliares que colocam as peças nas posições propícias para a aplicação do algoritmo e, depois de aplicá-lo, desfazer os movimentos auxiliares – em analogia com que foi nas provas do Lema 2 e do Lema 3.

anti-horário evitando, dessa forma, que ele seja repetido duas vezes²⁵; o movimento do passo 3 poderia ser substituído pelo movimento mais curto R' U L U' R U L' U²⁶. Um panorama geral das versões mais refinadas desse método, chamadas de **Edges First** (“arestas primeiro”) e **Corners First** (“cantos primeiro”), pode ser visto em [12, 13]. Porém, ao leitor interessado em aprender a resolver o cubo, sugerimos fortemente que se dedique ao **método das camadas** conforme descrito, por exemplo, em [6]. Ele tem as vantagens de ser considerado um dos mais simples, possuir poucos algoritmos (alguns bem curtos) e ser o primeiro passo para o aprendizado do **método CFOP** (ou **método de Fridrich**), que é o método utilizado pelos cubistas profissionais²⁷.

12. Proposta de oficina

Ao leitor interessado em apresentar oficinas que ensinem a resolver o cubo, há um material preparado com base no método das camadas disponível no seguinte link: <<https://drive.google.com/file/d/17k-5jq-W7Lg90FHiiMWHoGbaGBWLZ2j0/view?usp=sharing>>. O presente autor já teve ocasião de participar de oficinas desse gênero no seguinte formato:

- Monta-se uma equipe em que todos estejam familiarizados com o método do material no link.
- Cada membro da equipe fica responsável por ensinar um grupo de 4 ou 5 ouvintes.
- Cada ouvinte ganha uma versão impressa (colorida!) do material e um cubo para utilizar durante a oficina²⁸.

Esse formato geralmente é bastante atrativo e, a depender do público, pode constituir uma base para futura exploração dos aspectos matemáticos tratados neste artigo.

Referências

- [1] BANDELOW, C. *Inside Rubik's Cube and Beyond*. Boston: Birkhauser, 1982.
- [2] BEISER, V. *The World in a Grain: The Story of Sand and How It Transformed Civilization*. New York: Riverhead Books, 2018.
- [3] DAWSON, R. *Abelian Groups Are Easier*. Math Intelligencer, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00283-024-10378-7>>. Acesso em: 17 de outubro de 2024.
- [4] FRALEIGH, J. B. *A First Course in Abstract Algebra*. 7. ed. Harlow: Pearson, 2014.
- [5] GALLIAN, J. A. *Contemporary Abstract Algebra*. 9. ed. Boston: Cengage Learning, 2017.
- [6] MONTAR CUBO MÁGICO. *Método de Camadas*. Disponível em: <<https://www.youtube.com/playlist?list=PL47C27021F8B9383E>>. Acesso em: 15 de outubro de 2024.
- [7] MULHOLLAND, J. *Permutation Puzzles: A Mathematical Perspective*. Disponível em: <<https://www.sfu.ca/~jtmulhol/math302/notes/permutation-puzzles-book.pdf>>. Acesso em: 13 de outubro de 2024.

²⁵Não citamos essa versão do movimento porque ela não é necessária para as demonstrações que fizemos.

²⁶A diferença entre os dois é que esse é mais curto, além de permitir, também, girar os cantos. Por exemplo, se na Figura 6 tivéssemos aplicado ele em vez do movimento longo, as faces amarelas dos cantos permutados não continuariam voltadas para cima. No contexto da nossa demonstração, isso não faria diferença. Escolhemos trabalhar com o movimento longo porque ele costuma ser utilizado nos métodos mais usuais modernos (assim, o leitor já estava familiarizado com ele ou pôde se familiarizar com um movimento útil).

²⁷O método CFOP completo possui incríveis 119 algoritmos que, em conjunto com técnicas de movimentação dos dedos e cubos de alta qualidade, possibilita que o cubo seja resolvido em poucos segundos. O recorde mundial atual está em 3,13 segundos (veja [9]).

²⁸Nas minhas experiências, tanto as folhas quanto os cubos ficaram de brinde para o ouvinte; para isso foram utilizados cubos “baratos” (sugerimos tamanho não menor do que 5 cm).

- [8] ONLINE RUBIK'S CUBE - SIMULATOR, SOLVER, TUTORIAL, TIMER. Disponível em: <<https:////rubikscube.be/>>. Acesso em: 30 de setembro de 2024.
- [9] PARK, M. *Fastest Rubik's cube 3x3 WR (3.13) sec WORLD RECORD*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gh8HX4itF_w>. Acesso em: 15 de outubro de 2024.
- [10] PATTERN 3x3x3. Disponível em: <<https://www.blog.oncube.com.br/tutoriais/tutorial-3x3x3/pattern-padroes-cubo-magico-3x3x3/>>. Acesso em: 07 de outubro de 2024.
- [11] SCHÜTZER, W. *Aprendendo Álgebra com o Cubo Mágico. Aula 2*. Disponível em: <<https://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/rubik/rubik2.pdf>>. Acesso em: 13 de outubro de 2024.
- [12] SPEEDSOLVING.COM WIKI. *Corners First*. Disponível em: <https://www.speedsolving.com/wiki/index.php?title=Corners_First>. Acesso em: 16 de outubro de 2024.
- [13] SPEEDSOLVING.COM WIKI. *Edges First*. Disponível em: <https://www.speedsolving.com/wiki/index.php?title=Edges_First>. Acesso em: 16 de outubro de 2024.
- [14] THE OFFICIAL RUBIK'S CUBE. *50 Years of Rubik's Cube*. Disponível em: <<https://www.rubiks.com/history>>. Acesso em: 16 de outubro de 2024.

Pedro Roberto de Lima
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - Campus Seropédica
<pedrorobertodelima@ufrj.br>

Recebido: 20/10/2024
Publicado: 02/12/2025