

Fórmula de Bhaskara: uma abordagem via geometria analítica

Daniel Jelin

Antonio Luís Venezuela

Resumo

Este artigo aborda a fórmula resolvente da equação de segundo grau por meio da Geometria Analítica. O objetivo é mostrar que a chamada “fórmula de Bhaskara” e as relações de Girard podem ser determinadas analiticamente pelo estudo da interseção no espaço tridimensional de um plano com uma curva parametrizada específica, cujo traço coincide com a parábola.

Palavras-chave: Equação Quadrática; Relações de Girard; Geometria Analítica.

Abstract

This article addresses the quadratic formula through Analytic Geometry. Its aim is to show that the roots of the quadratic equation and the Girard-Newton formulae can be analytically determined by investigating the intersection of a plane with a specific parameterized curve, whose line coincides with the parabola, in the three-dimensional space.

Keywords: Quadratic Equation; Girard-Newton formulae; Analytic Geometry.

1. Introdução

Soluções para casos particulares do que hoje chamamos equações quadráticas são conhecidas desde a Antiguidade. Na tradição do ensino brasileiro, sua fórmula resolvente é creditada ao matemático indiano Bhaskara II, que viveu no século XII. Mas nos exatos termos em que hoje é ensinada, a expressão surge muito tempo depois [1], de que é mostra um curto artigo de 1896, em que o matemático amador Henry Heaton demonstra que a solução de $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, é $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. O artigo termina com uma pergunta intrigante: “Isto é novo”? [2]

A fórmula de Bhaskara, como a expressão é chamada no Brasil – e aparentemente só aqui [3] – é uma das mais conhecidas do aluno. No Ensino Médio, é largamente usada tanto na Matemática como na Física. Em geral, suas propriedades são dadas sem justificativas [4], embora haja muitas delas ao alcance do estudante. A mais usual é dada por meios algébricos, a partir da forma canônica do trinômio do segundo grau. Há também demonstrações por meio de construções geométricas, algumas de importância histórica. Propomos aqui a abordagem da Geometria Analítica por exercitar ao mesmo tempo a manipulação algébrica e a interpretação geométrica, com o que, acreditamos, é possível enriquecer o repertório do docente.

A estratégia consiste em relacionar as raízes de uma equação quadrática à interseção, em \mathbb{R}^3 , de um plano com uma curva parametrizada. Por esse caminho, será necessário mostrar também as relações de Girard para o polinômio de segundo grau, ou seja, as relações entre os coeficientes e a soma e o produto de raízes. A teoria associada à Geometria Analítica pode ser encontrada nos trabalhos de Baldin e Furuya (2011) [5] e Boulos e Camargo (2005) [6]; e a associada aos polinômios e equações, no trabalho de Iezzi (2005) [7].

2. Geometria analítica, polinômios e raízes

Nesta seção será mostrado como representar o polinômio de segundo grau por meio da Geometria Analítica. A conexão entre eles será realizada por uma específica curva parametrizada, cujo traço coincide com a parábola.

2.1. Conexão entre polinômios e geometria analítica

Definição 1. Sejam $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ e $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções. A função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é chamada de *curva parametrizada*.

Definição 2. O conjunto $\mathcal{C} = \{\gamma(t), t \in I\}$, é chamado de *traço da curva* γ e é representado no sistema de coordenadas cartesianas Oxyz, conforme a Figura 1.

Definição 3. Se uma das funções reais, x , y ou z , for constante, a curva parametrizada γ é chamada de *curva plana vinculada ao plano* $\Pi, \Pi \subset \mathbb{R}^3$.

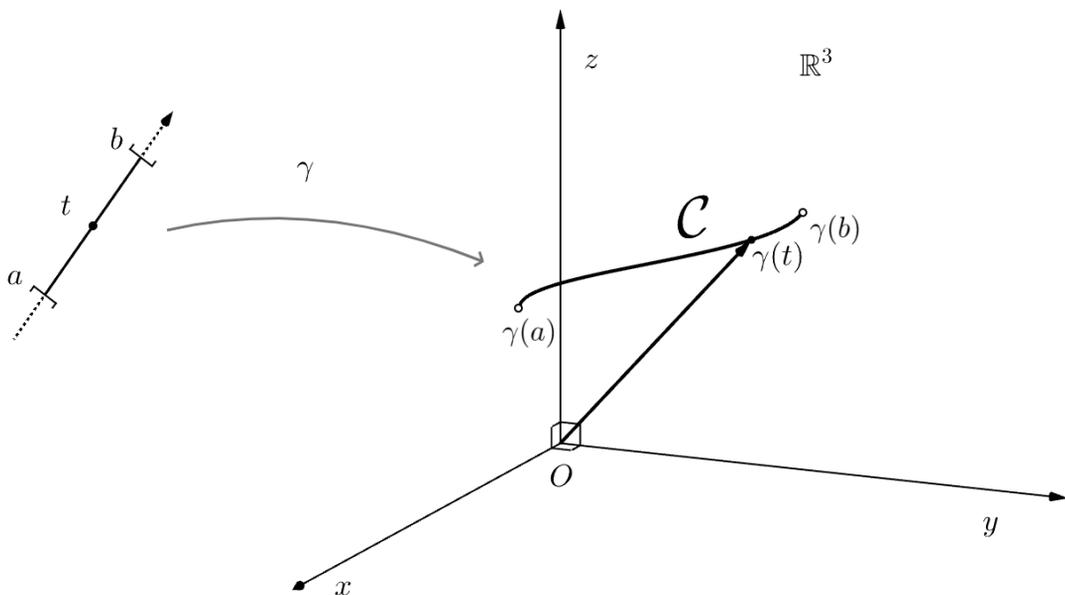


Figura 1: Traço \mathcal{C} da curva parametrizada no sistema Oxyz.

Definição 4. Sejam os coeficientes $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$. A função $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ é chamada de *polinômio de segundo grau*. O gráfico do polinômio de segundo grau $p(t)$ coincide com a parábola. Quando existe $t_0 \in I \mid p(t_0) = 0$, t_0 é chamado de *raiz do polinômio de segundo grau* $p(t)$. Dizemos que t_0 é uma *solução analítica da equação de segundo grau* $p(t) = 0$ quando podemos representar t_0 em função dos coeficientes a_0, a_1 e a_2 .

Definição 5. No sistema $Oxyz$, sendo $O = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, chamaremos de *vetor dos coeficientes* ao vetor $\overrightarrow{OC} = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, sendo a_0, a_1 e a_2 os coeficientes do polinômio $p(t)$ e chamaremos de *vetor variável* ao vetor $\overrightarrow{OR} = (1, t, t^2), t \in \mathbb{R}$ (Figura 2).

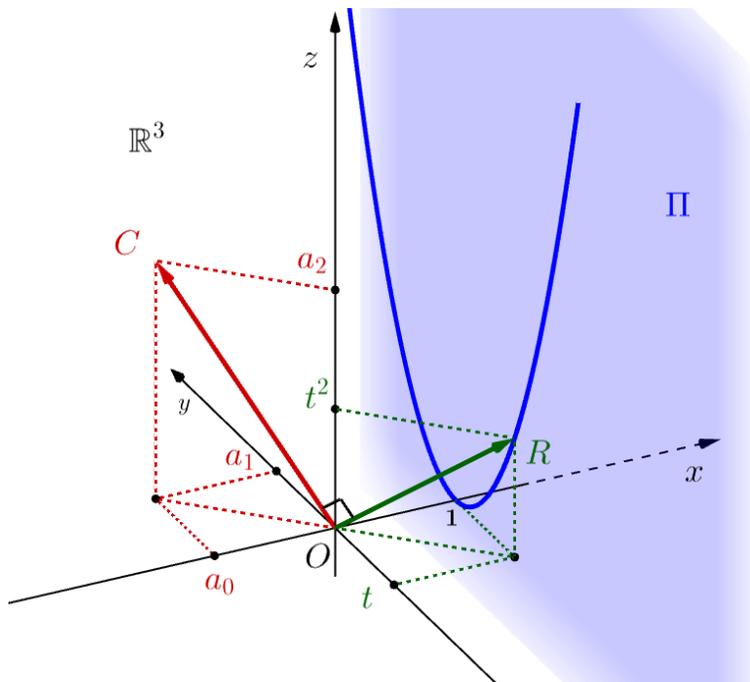


Figura 2: Representação do polinômio de segundo grau $p(t)$ e os vetores $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OR}$.

Esses vetores, \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OR} , foram definidos dessa forma depois de observarmos que seu produto escalar gera o polinômio $p(t)$, ou seja, para $t \in \mathbb{R}$, temos:

$$p(t) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OR}. \tag{1}$$

De fato:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OR} = (a_0, a_1, a_2) \cdot (1, t, t^2) = a_0 + a_1t + a_2t^2 = p(t).$$

A equação (1) permite estudar a equação de segundo grau por meio do conteúdo teórico da Geometria Analítica. Assim, considerando a equação de segundo grau $p(t) = 0$, podemos escrever:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OR} = 0. \tag{2}$$

Pela equação (2), temos que \overline{OC} e \overline{OR} são ortogonais [5], conforme mostrado na Figura 2. Seja a curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\gamma(t) = \overline{OR} = (1, t, t^2), \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Assim, $x(t) = 1, y(t) = t$ e $z(t) = t^2$. Como $x(t) = 1$, γ é uma curva plana, vinculada ao plano Π (Figura 2), sendo Π paralelo ao plano Oyz . Observamos que a conexão entre polinômio de segundo grau e a Geometria Analítica é realizada por meio da curva parametrizada plana γ no plano Π .

2.2. Enunciado de um problema: equação de segundo grau e suas raízes

A partir da subseção 2.1, o próximo passo é tomarmos dois pontos pertencentes à curva plana γ . Para tanto, vamos considerar o seguinte desenvolvimento. Sejam os pontos $D, E \in \Pi$. Daí, relativamente ao sistema de coordenadas $Oxyz$, temos os seguintes vetores: $\overline{OD} = (1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ e $\overline{OE} = (1, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Com isso, podemos determinar o vetor $\overline{DE} = \overline{OE} - \overline{OD} = (0, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, conforme representado na Figura 3. O comprimento de \overline{DE} é dado por:

$$\|\overline{DE}\| = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (4)$$

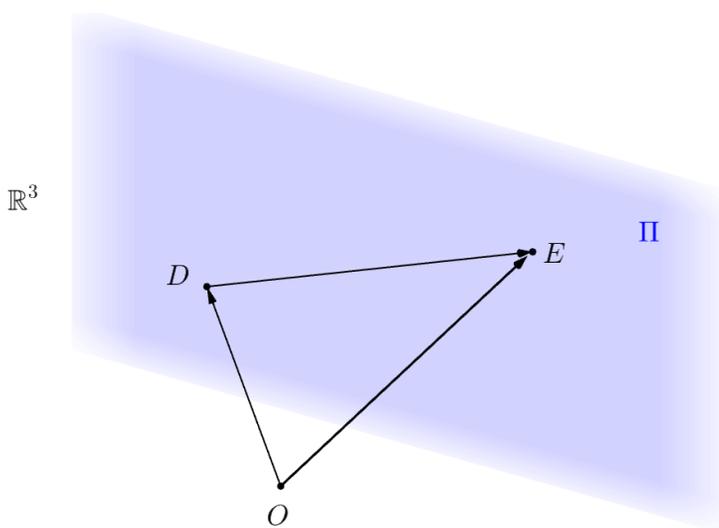


Figura 3: Representação do vetor $\overline{DE} \subset \Pi$.

Vamos supor que existam os parâmetros $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2$, os quais são raízes do polinômio de segundo grau $p(t)$, ou seja, $p(t_1) = 0 = p(t_2)$ (Figura 4). Pela equação (3), podemos representar:

$$\overline{OZ_1} = \gamma(t_1) = (1, t_1, t_1^2). \quad (5)$$

$$\overline{OZ_2} = \gamma(t_2) = (1, t_2, t_2^2). \quad (6)$$

Daí, considerando a equação (2), temos as seguintes afirmações:

$$\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OC} \text{ e} \tag{7}$$

$$\overrightarrow{OZ_2} \perp \overrightarrow{OC}, \tag{8}$$

sendo \overrightarrow{OC} o vetor dos coeficientes.

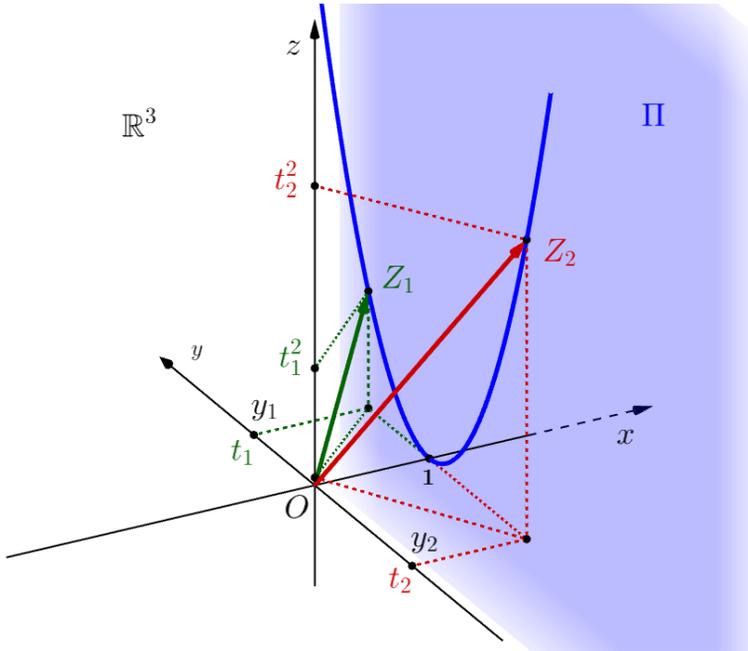


Figura 4: Parâmetros t_1, t_2 , que determinam, respectivamente, os vetores $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$.

A proposta deste trabalho é obter a solução analítica da equação de segundo grau por meio da Geometria Analítica. Com o objetivo de estruturar este trabalho de tal forma que possamos deduzir a fórmula de Bhaskara, a partir do conteúdo teórico desenvolvido na subseção 2.1 e na presente subseção, vamos enunciar a seguir um problema.

Problema 1. Sejam as equações (5) e (6) e as afirmações (7) e (8), determine *analiticamente* as raízes reais da equação de segundo grau $p(t)=0$.

3. Desenvolvimento

A solução do Problema 1 pode ser obtida pela fórmula de Bhaskara (solução analítica), a qual é deduzida usualmente pela forma canônica do trinômio do segundo grau. Neste trabalho, determinaremos a solução analítica a partir das equações (2), (3), (5) e (6) e as afirmações (7) e (8). Para tanto, propomos um roteiro que mostrará, passo a passo, a construção de todos elementos necessários para dedução da fórmula de Bhaskara.

Resumidamente, o referido roteiro é constituído de nove itens, de (a) até (n). Do item (a) até (c), as construções a serem realizadas têm suporte na Figura 5. Nos itens (d) e (e) determinamos os

comprimentos de \overline{PA} e $\overline{Z_1A}$ e no item (g) obtemos o vetor $\overline{PZ_1}$, os quais dão suporte para o cálculo da área do triângulo PMZ_1 nos Itens (h) e (i). No Item (f) construímos a reta s_1 e o ponto B, com os quais podemos estabelecer a igualdade entre $\|\overline{Z_1A}\|$ e $\|\overline{BZ_2}\|$, conforme Figura 7. No Item (j) apresentamos a Proposição 1, cujo resultado notável está associado à parábola e é fundamental para dedução da fórmula de Bhaskara no Item (n). No Item (k), obtemos as relações de Girard a partir da equação geral do plano, determinado pelos vetores $\overline{OZ_1}$ e $\overline{OZ_2}$, e a partir delas os vetores \overline{OM} , \overline{OP} e \overline{PM} podem ser representados pelos coeficientes a_0, a_1 e a_2 no Item (l). No Item (m) calculamos o comprimento $\|\overline{PM}\|$. Finalmente, no Item (n), as raízes t_1 e t_2 são deduzidas analiticamente, com o suporte dos itens anteriores.

(a) O segmento $\overline{Z_1Z_2}$ e seu ponto médio, M;

Considerando a Figura 5 e as equações (5) e (6), construímos o segmento $\overline{Z_1Z_2}$, sendo M o seu ponto médio (Figura 6). Daí, $\overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OZ_1} + \overline{OZ_2})$. Logo, o vetor \overline{OM} é dado por:

$$\overline{OM} = (1, y_m, z_m) = \left(1, \frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} \right). \tag{9}$$

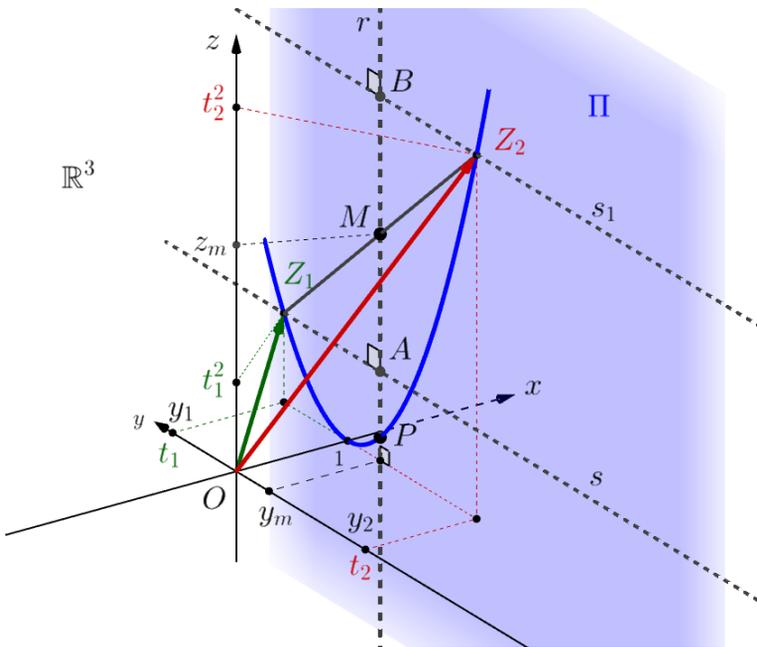


Figura 5: Representação dos pontos e retas envolvidos no desenvolvimento desta seção.

(b) A reta r e o ponto P;

Seja a reta $r, r \subset \Pi$ e $r \parallel Oz$, que passa por $M \in r$, conforme Figura 5. Tomamos o ponto $\{P\} = r \cap \gamma$, assim temos:

$$\overline{OP} = (1, y_m, y_m^2) = \left(1, \frac{t_1 + t_2}{2}, \left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{2} \right)^2 \right). \tag{10}$$

(c) A reta s e o ponto A ;

Seja a reta s , $s \subset \Pi$ e $s \parallel Oy$, onde $Z_1 \in s$, conforme Figura 5. Tomamos o ponto $\{A\} = s \cap r$, logo temos:

$$\overrightarrow{OA} = (1, y_m, t_1^2) = \left(1, \frac{t_1 + t_2}{2}, t_1^2\right). \quad (11)$$

(d) O comprimento do vetor \overrightarrow{PM} ;

No plano Π , consideramos o triângulo $\triangle PMZ_1$, de base PM e altura Z_1A , conforme Figura 6.

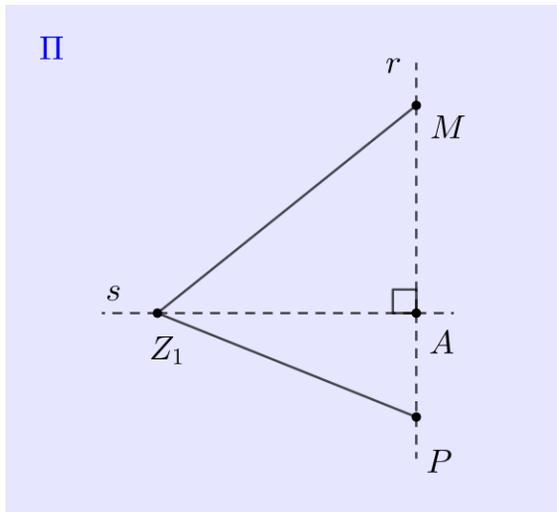


Figura 6: O triângulo $\triangle PMZ_1$, de base PM .

A partir das equações (9) e (10), podemos determinar o seguinte:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \left(0, 0, \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} - \left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)^2\right) \Rightarrow \\ \overrightarrow{PM} &= \left(0, 0, \left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Logo, usando a equação (4), temos:

$$\|\overrightarrow{PM}\| = \left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right)^2. \quad (13)$$

(e) O comprimento do vetor $\overrightarrow{Z_1A}$;

A partir das equações (5) e (11), podemos determinar o seguinte:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Z_1A} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OZ_1} = \left(0, \frac{t_1 + t_2}{2} - t_1, 0\right) \Rightarrow \\ \overrightarrow{Z_1A} &= \left(0, \frac{t_2 - t_1}{2}, 0\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Logo, usando a equação (4), temos o comprimento do vetor $\overrightarrow{Z_1A}$:

$$\|\overrightarrow{Z_1A}\| = \left|\frac{t_1 - t_2}{2}\right|. \quad (15)$$

Como $t_1 \neq t_2$, temos que $\|\overrightarrow{Z_1A}\| \neq 0$.

(f) A reta s_1 e o ponto B;

Seja a reta s_1 , $s_1 \subset \Pi$ e $s_1 \parallel Oy$, com $Z_2 \in s_1$, conforme as figuras 5 e 6. Tomamos o ponto $\{B\} = s_1 \cap r$. Como $s_1 \parallel s$, os triângulos $\triangle Z_1AM$ e $\triangle Z_2BM$ são congruentes, logo, conforme a Figura 7:

$$\|\overrightarrow{Z_1A}\| = \|\overrightarrow{BZ_2}\|. \quad (16)$$

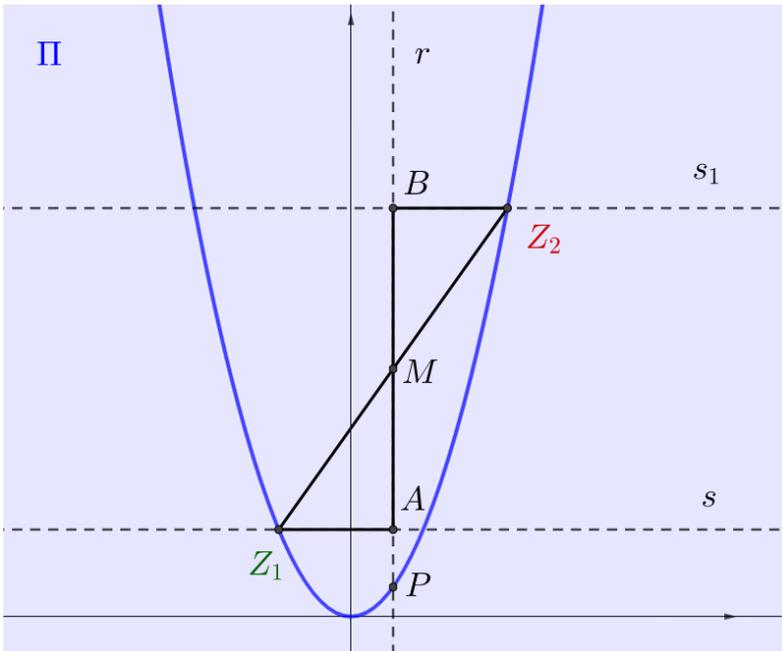


Figura 7: Os triângulos congruentes $\triangle Z_1AM$ e $\triangle Z_2BM$.

(g) Determinando o vetor $\overrightarrow{PZ_1}$;

Tomando as equações (5) e (10), calculamos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PZ_1} &= \overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OP} = \left(0, t_1 - \frac{t_1 + t_2}{2}, t_1^2 - \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right)^2 \right) \Rightarrow \\ \overrightarrow{PZ_1} &= \left(0, \frac{t_1 - t_2}{2}, \frac{4t_1^2 - (t_1 + t_2)^2}{4} \right).\end{aligned}\quad (17)$$

(h) A área do triângulo PMZ_1 por meio da Geometria Analítica;

Considerando as equações (12) e (17) aplicadas no produto vetorial:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PZ_1} \times \overrightarrow{PM} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{t_1 - t_2}{2} & \frac{4t_1^2 - (t_1 + t_2)^2}{4} \\ 0 & 0 & \left(\frac{t_1 - t_2}{2} \right)^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \\ \overrightarrow{PZ_1} \times \overrightarrow{PM} &= \left(\left(\frac{t_1 - t_2}{2} \right)^3, 0, 0 \right).\end{aligned}$$

Daí, tomando a equação (4), a área do triângulo PMZ_1 (Figura 6) é dada por:

$$\begin{aligned}\text{Área}_A &= \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{PZ_1} \times \overrightarrow{PM}\| = \frac{1}{2} \cdot \left| \left(\frac{t_1 - t_2}{2} \right)^3 \right| \Rightarrow \\ \text{Área}_A &= \frac{1}{2} \cdot \left| \left(\frac{t_1 - t_2}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{t_1 - t_2}{2} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \left(\frac{t_1 - t_2}{2} \right)^2 \right| \cdot \left| \frac{t_1 - t_2}{2} \right|.\end{aligned}\quad (18)$$

Considerando que $8\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $|\alpha^2| = |\alpha|^2$, logo a equação (18) pode ser escrita como:

$$\text{Área}_A = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{t_1 - t_2}{2} \right|^2 \cdot \left| \frac{t_1 - t_2}{2} \right|,$$

e nessa expressão substituímos a equação (15) para obtermos:

$$\text{Área}_A = \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{Z_1\bar{A}}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{Z_1\bar{A}}\|.\quad (19)$$

(i) A área do triângulo PMZ_1 por meio da Geometria Plana;

Pela Figura 6, a área de PMZ_1 é dada por:

$$\text{Área}_P = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\|\overrightarrow{PM}\| \cdot \|\overrightarrow{Z_1\bar{A}}\|}{2}.\quad (20)$$

(j) A relação entre os comprimentos $\|\overrightarrow{PM}\|$ e $\|\overrightarrow{Z_1\bar{A}}\|$;

Proposição 1. Sejam $\overline{OM}, \overline{OP}, \overline{OA}, \overline{OZ_1}$, então: $\|\overline{PM}\| = \|\overline{Z_1A}\|^2$.

Demonstração. Igualando as equações (19) e (20), temos:

$$\|\overline{PM}\| \cdot \|\overline{Z_1A}\| = \|\overline{Z_1A}\|^2 \cdot \|\overline{Z_1A}\|.$$

Como $\|\overline{Z_1A}\| \neq 0$, temos que:

$$\|\overline{PM}\| = \|\overline{Z_1A}\|^2.$$

□

A partir da Proposição 1, obtemos:

$$\|\overline{Z_1A}\| = \sqrt{\|\overline{PM}\|}. \tag{21}$$

(k) As relações de Girard;

Como $t_1 \neq t_2$ e considerando as afirmações (7) e (8), temos que os vetores correspondentes a $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ são linearmente independentes, logo $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ geram um plano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (Figura 8). A equação geral do plano Ω , gerada por $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$, é obtida por:

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{vmatrix}, 8\tilde{v} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \Omega.$$

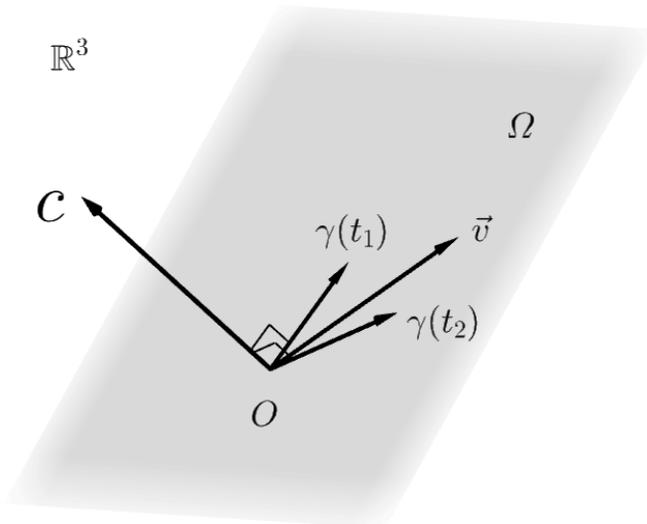


Figura 8: O plano Ω gerado pelos vetores $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$.

Daí:

$$(t_1 t_2^2 - t_1^2 t_2) \tilde{x} + (t_1^2 - t_2^2) \tilde{y} + (t_2 - t_1) \tilde{z} = 0. \quad (22)$$

Além disso, $8\vec{v} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \Omega$, tem-se que $\vec{v} \perp \overline{OC}$, conforme a Figura 8, logo:

$$\overline{OC} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow a_0 \tilde{x} + a_1 \tilde{y} + a_2 \tilde{z} = 0. \quad (23)$$

Igualando as equações (22) e (23), temos:

$$(t_1 t_2^2 - t_1^2 t_2 - a_0) \tilde{x} + (t_1^2 - t_2^2 - a_1) \tilde{y} + (t_2 - t_1 - a_2) \tilde{z} = 0.$$

E pela igualdade entre polinômios, temos:

$$\begin{cases} t_1 t_2^2 - t_1^2 t_2 - a_0 = 0 \\ t_1^2 - t_2^2 - a_1 = 0 \\ t_2 - t_1 - a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 t_2 (t_2 - t_1) = a_0 \\ (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = a_1 \\ (t_2 - t_1) = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 t_2 a_2 = a_0 \\ -a_2 (t_1 + t_2) = a_1. \end{cases}$$

Assim, temos as relações de Girard:

$$t_1 t_2 = \frac{a_0}{a_2}, \quad (24)$$

$$t_1 + t_2 = -\frac{a_1}{a_2}. \quad (25)$$

A partir da equação (9) e considerando a equação (25), temos:

$$y_m = \frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{a_1}{2a_2}. \quad (26)$$

(I) Os vetores \overline{OP} e \overline{OM} em função dos coeficientes a_0, a_1 e a_2 ;

Considerando as equações (10) e (23), podemos escrever o vetor \overline{OP} como segue:

$$\overline{OP} = \left(1, -\frac{a_1}{2a_2}, \frac{a_1^2}{4a_2^2} \right). \quad (27)$$

Desenvolvendo:

$$(t_1^2 + t_2^2)^2 = t_1^4 + 2t_1 t_2 + t_2^4 \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 = (t_1^2 + t_2^2)^2 - 2t_1 t_2.$$

E nessa expressão substituímos as equações (24) e (25) e obtemos:

$$t_1^2 + t_2^2 = \frac{a_1^2 - 2a_2 a_0}{a_2^2}. \quad (28)$$

Considerando as equações (9), (24) e (28), podemos escrever o vetor \overline{OM} como:

$$\overline{OM} = (1, y_m, z_m) = \left(1, -\frac{a_1}{2a_2}, \frac{a_1^2 - 2a_2 a_0}{2a_2^2} \right). \quad (29)$$

(m) De volta ao vetor \overline{PM} ;

A partir das equações (27) e (29), podemos reescrever o vetor \overline{PM} da seguinte forma:

$$\overline{PM} = \left(0, 0, \frac{a_1^2 - 4a_2a_0}{4a_2^2} \right). \quad (30)$$

E o comprimento do vetor \overline{PM} é:

$$\|\overline{PM}\| = \sqrt{\left(\frac{a_1^2 - 4a_2a_0}{4a_2^2} \right)^2} = \left| \frac{a_1^2 - 4a_2a_0}{4a_2^2} \right|. \quad (31)$$

A equação (31) garante que sempre teremos $\|\overline{PM}\| > 0$, já que, consideramos na Subseção 2.2 a existência das raízes $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2$, da equação de segundo grau $p(t) = 0$. Para podermos estender a análise sobre a existência, ou não, dessas raízes, a equação (31) passa a ser escrita como:

$$\|\overline{PM}\| = \frac{a_1^2 - 4a_2a_0}{4a_2^2}. \quad (32)$$

(n) Determinando analiticamente as raízes t_1 e t_2 ;

A Figura 9 foi construída a partir das figuras 5 e 7, e nela estão representados os pontos t_1 e t_2 , bem como $y_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

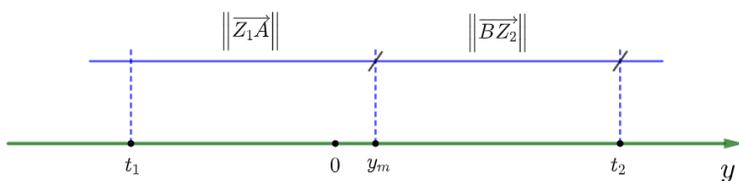


Figura 9: As raízes t_1 e t_2 , relativas ao eixo Oy

Considerando a Figura 9, temos que:

$$t_1 = y_m - \|\overline{Z_1A}\| \text{ e } t_2 = y_m + \|\overline{BZ_2}\|.$$

Mas, pela equação (16), $\overline{Z_1A} = \overline{BZ_2}$, então:

$$t_1 = y_m - \|\overline{Z_1A}\| \text{ e } t_2 = y_m + \|\overline{Z_1A}\|.$$

Daí, utilizando a equação (21), ficamos com:

$$t_1 = y_m - \sqrt{\|\overline{PM}\|} \text{ e } t_2 = y_m + \sqrt{\|\overline{PM}\|}.$$

Substituindo as equações (26) e (32), temos:

$$t_1 = -\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2a_0}{4a_2^2}} \text{ e } t_2 = -\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2a_0}{4a_2^2}}.$$

Dessa forma, obtemos a solução analítica (fórmula de Bhaskara) da equação de segundo grau, ou seja, as respectivas raízes:

$$t_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \text{ e } t_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

4. Conclusão

Buscamos ao longo do artigo determinar analiticamente as raízes de um polinômio de segundo grau por meio de noções elementares de Geometria Analítica. Mostramos que a solução buscada pode ser deduzida da interseção no espaço tridimensional entre: uma curva parametrizada específica, que corresponde à parábola; um plano cujos coeficientes são os mesmos do polinômio em questão. Para determinar os pontos dessa interseção, consideramos inicialmente que o vetor normal ao plano é necessariamente ortogonal aos vetores correspondentes aos pontos de interseção. Para conhecer as coordenadas desses pontos, valemo-nos da distância de cada um até seu ponto médio e da descrição do ponto médio em função dos coeficientes do plano. Ao longo do roteiro, demonstramos as relações de Girard para o polinômio de segundo grau e, ao fim dele, determinamos suas raízes.

Referências

- [1] Krantz, Steven G. Parks, Harold R. *Mathematical odyssey: Journey from the Real to the Complex*. Nova York: Springer, 2014. 382 p. <<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8939-9>>
- [2] Heaton, Henry. A Method of Solving Quadratic Equations. *The American Mathematical Monthly*, v. 3, nº 10, p. 236-237, 1896. ISSN 0002-9890. <<https://doi.org/10.1080/00029890.1896.11998825>>
- [3] Roque, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 2012. 512 p. ISBN 978-8537808887.
- [4] Lima, Elon Lajes. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 289 p. (Coleção Profmat). ISBN 9788585818814.
- [5] Baldin, Yuriko Yamamoto; Furuya, Yolanda Kioko Saito. *Geometria analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra*. São Carlos: EdUFSCar, 2011.
- [6] Boulos, Paulo; Camargo, Ivan. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. 3ª ed. São Paulo, São Paulo: Prentice-Hall, 2005.
- [7] Iezzi, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações*, v. 6. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

Daniel Jelin
Escola Anglo/Monteiro, Piedade
<danieljelin@gmail.com>

Antonio Luís Venezuela
Universidade Federal de S. Carlos, Sorocaba
<alvenez@ufscar.br>

Recebido: 15/05/2021
Publicado: 01/09/2021