PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.9, n.4, 2021
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo938

Um método de contagem na soma dos termos de uma progressão aritmética

Ana Gabriela Rodrigues Cardoso   Josenildo de Souza Chaves

Resumo

Apresentamos neste trabalho uma técnica de contagem como solução alternativa de três problemas muito discutidos em aulas de matemática. Exploramos o relacionamento entre os problemas da determinação da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, o da determinação do número de diagonais de um polígono convexo de n lados e o do cálculo de uma probabilidade em um espaço amostral finito. São aplicações relevantes para motivar os métodos de contagem no Ensino Médio.

Palavras-chave: Métodos de Contagem; Progressões Aritméticas; Probabilidade Aplicada.

Abstract

In this work, we present a counting technique to solve three problems frequently discussed in mathematics classes. We explored the relationship between the problems of determining the sum of the first n terms of an arithmetic progression, how to determine the number of diagonals in a convex polygon with n sides and that of calculating a probability in a finite sample space. They are relevant applications to motivate counting methods in high school.

Keywords: Counting Methods; Artimetic Progressions; Applied Probability.

1. Introdução

Técnicas de contagem comumente apresentadas no Ensino Médio, em determinados problemas de Probabilidade e outras áreas, não podem ser empregadas diretamente. Resta então voltar à poderosa ferramenta, os Princípios Básicos de Contagem. Outras técnicas relacionadas a esses princípios são de extrema importância. Elas permitem soluções mais simples de vários problemas. Por exemplo, em probabilidade sob espaços amostrais finitos.

Neste trabalho, motivamos o uso das técnicas de contagem [2, 4, 5, 7, 8] na determinação da soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (PA). Além disso, mostramos o relacionamento desse problema com a determinação do número de diagonais de um polígono convexo de n lados e o do cálculo de uma probabilidade em um espaço amostral finito. Sobre progressões, uma apresentação mais detalhada pode ser vista em [3, 4].

2. Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética (S_n)

Para o desenvolvimento desta Seção e o restante deste trabalho, consideraremos a seguinte definição de uma progressão aritmética (PA).

Definição 1. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica* $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$*, na qual cada termo a partir do segundo é a soma do termo antecessor com uma constante* r *denominada razão. O* n*-ésimo termo* a_n*, também denominado, termo geral, frequentemente é escrito na forma:* $a_n = a_1 + (n-1)r$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1. *Mostrar que a soma dos* n *primeiros termos de uma PA é* $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Formalmente, apresentamos duas provas.

Prova: (1) Temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

ou, equivalentemente,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1.$$

A soma dessas duas últimas igualdades pode ser escrita na forma,

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + r + a_n - r) + (a_1 + 2r + a_n - 2r) + \cdots + (a_n + a_1) \\ &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

■

Esta é a demonstração mais divulgada nos livros didáticos para soma dos n primeiros termos de uma PA. Duas outras demonstrações, com menos popularidade, podem ser obtidas. Uma por indução matemática, e a outra pelo Teorema de Chu apresentado em [6].

A seguir, usamos argumentos de análise combinatória para construir uma demonstração alternativa para a soma S_n dos n primeiros termos de uma PA.

Prova: (2) (Continuação do Exemplo 1). Note que,

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \cdots + [a_1 + (n-1)r]. \tag{1}$$

Então,

$$S_n = a_1 n + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]r. \tag{2}$$

A soma $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ na equação (2) pode ser representada como o número N de elementos acima ou abaixo da diagonal principal de uma matriz quadrada ($A_{n\times n}$).

$$A_{n\times n} = (a_{i,j})_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \color{blue}{a_{12}} & \color{blue}{a_{13}} & \cdots & \color{blue}{a_{1n}} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & \color{blue}{a_{23}} & \cdots & \color{blue}{a_{2n}} \\ \color{red}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} & a_{33} & \cdots & \color{blue}{a_{3n}} \\ \color{red}{\vdots} & \color{red}{\vdots} & \color{red}{\vdots} & \ddots & \color{blue}{\vdots} \\ \color{red}{a_{n1}} & \color{red}{a_{n2}} & \color{red}{a_{n3}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para determinar N, temos na primeira linha da matriz $A_{n\times n}$, $(n-1)$ elementos, na segunda linha $n-2$ elementos, e, assim, sucessivamente até a linha $n-1$ com 1 elemento. Isso significa que $N = 1+2+3+\cdots+(n-1)$. Basta observar que

$$2N + n = n^2,$$

de onde extraímos

$$N = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{3}$$

De acordo com a equação (2),

$$S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} r. \tag{4}$$

Observe que o número $N = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dbinom{n}{2}$ é a quantidade de subconjuntos com dois elementos do conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$ suficientes para descrever os elementos acima ou abaixo da diagonal principal da matriz $A_{n\times n}$. Então, S_n pode ser escrita na forma

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} r. \tag{5}$$

Na equação (5) o coeficiente binomial $\dbinom{n}{2}$ corresponde ao número de subconjuntos com dois elementos do conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$ associados aos termos da matriz $A_{n\times n}$. Além disso, do termo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$, podemos escrever, $r = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$. Portanto, segue da equação (5) que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

■

Para fazer uma apresentação em sala de aula, podemos assumir todos os elementos da matriz $A_{n\times n}$ iguais a 1, destacando a correspondência do i–ésimo termo da série $\sum_{i=1}^{n-1} i$ com a soma dos elementos da i–ésima linha abaixo da diagonal principal da matriz $A_{n\times n}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

3. Exemplos Relacionados

Nesta Seção, usamos o método de contagem para determinar N da equação (3) na solução de dois problemas muito exigidos no Ensino Médio. O primeiro, a determinação do número de diagonais de um polígono convexo de n lados. O segundo está associado à probalilidade em espaços amostrais finitos.

Exemplo 2. *Mostrar que o número de diagonais de um polígono convexo de* n *lados é* $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Um segmento de reta traçado no interior de um polígono convexo ligando dois vértices é chamado de diagonal. A Figura 1, construída por meio do GeoGebra [1], apresenta a superposição de três polígonos regulares: um quadrado, um hexágono e um hoctógono. Eles foram escolhidos com o propósito de associar o número de seus lados a uma progressão aritmética. As 20 diagonais do octógono também estão representadas.

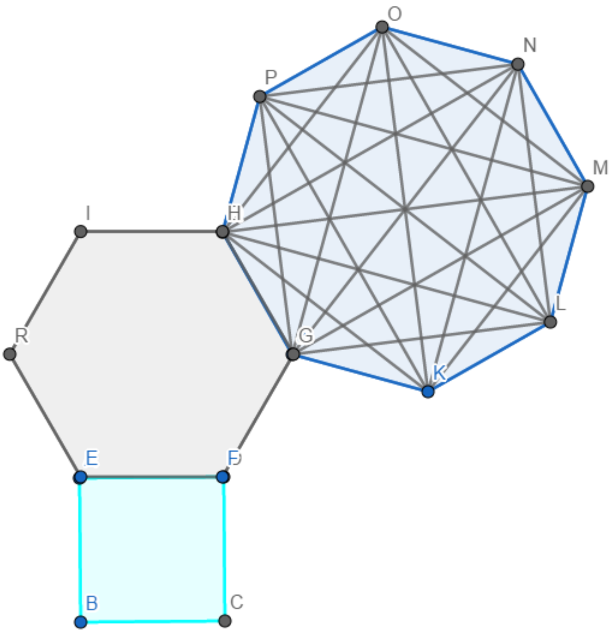

Figura 1: Quadrado, hexágono, hoctógono e diagonais.

Os n vértices de um polígono de n lados podem ser nomeados usando os n elementos do conjunto $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Por conseguinte, as d_n diagonais, podem ser nomeadas usando os n^2 elementos do conjunto $\Omega \times \Omega$. Agora, basta notar que d_n pode ser obtido pela correspondência 1 a 1 entre d_{ij}, $i < j = 1, 2, \dots, n$ com os elementos acima da diagonal principal da matriz $A_{n \times n}$. Ao fazer isso, estamos incluindo o número n de lados do polígono. Daí, o número de diagonais d_n é dado por

$$d_n = \binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n-2)!2!} - n.$$

Logo,

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Exemplo 3. *Considere uma urna com* n *bolas idênticas numeradas de* 1 *a* n, $n \geq 2$. *Suponha que duas bolas sejam retiradas aleatoriamente. Determine a probabilidade de se obter dois números consecutivos quando o processo de retiradas das bolas for:*

(a) *Sem reposição.*

Seja, $A = \{\text{dois números consecutivos}\}$. Se o processo de retiradas das bolas é sem reposição,

$$A = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),\ldots,(n-1,n)\}.$$

O número de elementos do espaço amostral é $\dfrac{n(n-1)}{2}$ pela equação (3) e $\#A = n-1$.

Então,

$$P(A) = \frac{n-1}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n}\cdot$$

(b) *Com reposição.*

O espaço amostral pode ser escrito na forma $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Sendo que $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1,2,\cdots,n\}$. Note que,

$$A = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),\ldots,(n-1,n)\} \cup \{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),\ldots,(n,n-1)\}.$$

Portanto,

$$P'(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2(n-1)}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}.$$

Podemos observar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(A)}{P'(A)} = 1\cdot$$

Estatisticamente, isso significa que, para n suficientemente grande, a extração de duas bolas da urna com ou sem reposição são procedimentos equivalentes.

Para enfatizar o relacionamento do Exemplo 3 (a) com o Exemplo 2, suponha que se possa caminhar em um polígono regular de n lados, apenas sobre os lados ou diagonais. Podemos assumir que o par $(n,1)$ é formado por dois números consecutivos para concluir que a probabilidade, p_n, de se estar caminhando sobre os lados é

$$p_n = \frac{n}{\dbinom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}.$$

4. Considerações Finais

Neste artigo, aplicamos um método de contagem para determinar a soma dos n termos de uma progressão aritmética. A Análise Combinatória é vista por muitos alunos como um assunto complicado e mecanizado. Isso pode estar relacionado à falsa ideia de repassar ao estudante que problemas de contagem são meras aplicações de fórmulas. A falta de contextualização e de estratégias alternativas de resolução dos problemas produzem esse cenário.

Podemos observar que, após os princípios básicos de contagem estarem bem fundamentados, técnicas mais sofisticadas podem ser introduzidas.

Sem dúvida, os problemas de combinatória geralmente cobrados em vestibulares para acesso ao Ensino Superior e em olimpíadas de matemática de âmbito nacional são assuntos que não devem ser desprezados. Acreditamos que os exemplos de aplicações apresentados são relevantes para motivar o ensino de métodos de contagem em salas de aula.

Referências

[1] DE ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. *Aprendendo matemática com o Geogebra*. Editora Exato, Sao Paulo, 2010.

[2] DE OLIVEIRA SANTOS, José Plínio; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha Calzolari. *Introdução à análise combinatória*. Ed. Ciência Moderna, 2007.

[3] LIMA, Elon Lages *et al. A Matemática do Ensino Médio*, volume 2, 6ª edição. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[4] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática discreta.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[5] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. 10ª Edição. *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM, 2016.

[6] MERRIS, Russell. *Combinatorics*. John Wiley & Sons, 2003.

[7] RODRIGUES CARDOSO, Ana Gabriela. Problemas de Contagem e o Princípio da Inclusão e Exclusão. Dissertação de Mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Maranhão, 2018.

[8] ZEITZ, Paul. *The art and craft of problem solving*. New York: John Wiley, 1999.

Ana Gabriela Rodrigues Cardoso
Instituto Federal do Maranhão - Campus Pinheiro, Pinheiro - MA.
<anagabicardoso@yahoo.com>

Josenildo de Souza Chaves
Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA.
<chavesjs@yahoo.com.br,js.chaves@ufma.br>

Recebido: 10/08/2020
Publicado: 10/09/2021