

Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática

Regina Cássia de Souza Ortega 

Mari Sano 

Resumo

O presente artigo, baseado na Dissertação de Mestrado [13] do Profmat ¹ tem por objetivo divulgar e explorar as *Provas sem Palavras* no âmbito do Ensino Fundamental e Médio para, posteriormente, servir de possível material de consulta por parte de professores, na busca por melhores métodos de explicação sobre importantes assuntos desenvolvidos em sala. Dessa forma, acredita-se que a compreensão dos alunos através da visualização fortalecerá de maneira significativa a aquisição do conhecimento. Para tanto, são sugeridos diversos temas onde a visualização é desenvolvida e explicada.

Palavras-chave: Provas sem Palavras; Ensino Fundamental; Ensino Médio.

Abstract

This article, based on the Profmat Master's Dissertation [13] aims to disseminate and explore *Proof Without Words* in the scope of elementary and high school, in order to be used later as a possible reference material for teachers in search of better methods of explanation on important subjects developed in the classroom. In this way, it is believed that students' comprehension through visualization will significantly strengthen the acquisition of knowledge. For that, several themes are suggested where the visualization is developed and explained.

Keywords: Proofs Without Words. Elementary School. High School.

1. Introdução

O ensino da Matemática é uma tarefa difícil na maioria das vezes. Por ser uma matéria abstrata, nem sempre os alunos conseguem compreendê-la. Há vezes em que o professor se esforça tentando ensinar através de exemplos do cotidiano, o que mostra que a aplicabilidade ocorre. Não obstante, nem sempre a Matemática a ser ensinada mostra a sua aplicação de imediato. Isso ocorre muitas vezes, principalmente nas etapas de “algebrismo” do Ensino Fundamental, muito embora toda essa álgebra seja de extrema importância e necessidade para todo o desenrolar da Matemática que vem pela frente. Talvez seja nesse ponto que a corrente de estudos sobre *Provas sem Palavras* venha a se desenvolver e tentar se fazer presente.

¹Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - <http://www.profmat-sbm.org.br/>

As *Provas sem Palavras* surgiram da necessidade de mostrar, de uma maneira mais clara, o que determinado conceito, teorema ou fórmula quer dizer, seja através de diagramas, figuras ou animações que, com frequência, têm o poder do convencimento. O seu objetivo é auxiliar o leitor a compreender determinado tema, convencer sobre seus resultados e, por vezes, dar ideia de como provar a sua veracidade. É através da visualização que torna o caminho menos tortuoso e mais elucidativo.

Na realidade, a prática de tentar resolver um problema, seja através de um simples desenho realizado por quem queria se convencer sobre determinado resultado, seja por algum diagrama testado, existe há centenas de anos. Contudo, a expressão *Provas sem Palavras* começou muito mais recentemente, vindo da necessidade da busca de melhor explicação e convencimento visual. O seu precursor foi Roger Nelsen, que desenvolveu diversas *Provas sem Palavras* [10], [11] e [12]. Existem várias dissertações do Profimat que consideram diversos aspectos dessa abordagem visual, [1], [14].

O presente artigo propõe fazer um estudo intuitivo-pedagógico de algumas *Provas sem Palavras*, de forma a explorar exemplos, mostrar a importância da visualização e melhorar o entendimento na obtenção de resultados. Acredita-se, com isso, que esse material poderá servir aos professores como um meio de consulta e preparo antes de trabalharem com seus alunos. De forma complementar, fazendo jus à frase “uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática” contida no título do trabalho, indicamos a linha de demonstração para assistir ao professor no desenvolvimento da aula.

Apresentações dinâmicas, tais como animações, são especialmente adequadas para o enfoque pedagógico apresentado neste trabalho. Em vários momentos do presente artigo, assim como na referida dissertação, sugerimos *links* onde o leitor terá condições de acompanhar, através de movimento, a prova em questão. Com esses *links*, espera-se que a visualização seja, na medida do possível, aplicada em sala de aula. A maioria das figuras desse trabalho foi desenvolvida usando o *software GeoGebra*², como forma de melhor compreensão.

Este trabalho está dividido na seguinte forma: na seção 2 descrevemos as Representações Visuais Através do Tempo; nela também são apresentados diversos pensamentos de pesquisadores que trabalham sobre o assunto. Nas seções 3 e 4 abordamos, respectivamente, diferentes temas aplicados para o Ensino Fundamental e Médio.

2. Representações Visuais através do Tempo

Até o século XVI constata-se uma marcante influência da rigorosidade axiomática da Matemática grega como paradigma de desenvolvimento na Matemática ocidental. A partir da Revolução Científica (XVI-XVII) até, aproximadamente, o início da segunda fase da Revolução Industrial (XIX), houve uma mudança de pensamento na qual não era presente muita preocupação com o rigor, e a Matemática passou a se interessar na resolução de problemas práticos necessários para a época, relacionados ao comércio, à Mecânica e à Astronomia. Essa fase foi marcada por imensa produtividade dentro da Matemática, dando origem ao Cálculo Diferencial e Integral.

Com a falta de rigor, muitos estudiosos do Cálculo, a começar pelos próprios Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716), tinham dificuldades para explicar certos fundamentos de procedimentos importantes criados por eles próprios [3]. Então, alguns matemáticos como Lagrange (1736-1813) e Bolzano (1781-1848) começaram a perceber a necessidade de eliminar das suas demonstrações o recurso à visualização de propriedades geométricas [5] e a ter consciência de que a fundamentação

²<http://www.geogebra.org/>

matemática passava a ser uma necessidade, o que originou o movimento conhecido como aritmetização da Análise, o qual, por sua vez, impulsionou o aparecimento da Linguagem (Lógica) dos Conjuntos (veja [8], (capítulos 14 e 15), e que foi trazido para o Ensino pela Matemática Moderna, (veja [9] e os artigos de Búrgio, Prytz e Schubring em [17]).

No entanto, se por um lado as demonstrações rigorosas trouxeram o desenvolvimento lógico de conceitos e teorias, por outro ocorreu um distanciamento da linguagem matemática natural, tornando-se uma das maiores dificuldades por parte de professores e de alunos nos tempos atuais.

A partir de 1980, com o surgimento do Construtivismo³, a Educação Matemática ganhou espaço. Novas metodologias de pesquisa qualitativa passaram a ser aceitas como importantes ferramentas dentro da Educação Matemática. O pensamento visual, juntamente com a pesquisa qualitativa, passou a desempenhar um importante papel para a investigação de novos processos de pensamento e no uso de imagens e formas de expressão dentro do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Pouco a pouco, esse processo foi se desenvolvendo, e a utilização de diagramas e tabelas passou a ser mais frequente [16].

Nas últimas décadas, com o crescente acesso a computadores, mais pesquisas dentro dessa área passaram a ocorrer, principalmente devido à facilidade de desenvolver computacionalmente uma melhor visualização de diagramas e tabelas. Vários trabalhos começaram a ser realizados focando uma dinamização e novas formas de interpretação e de pensamento. Diante disso, departamentos de Filosofia, Matemática, Informática e Ciência Cognitiva passaram a trabalhar em projetos de pesquisa dedicados ao desenvolvimento de ferramentas visuais para facilitar o entendimento.

Algo importante a considerar a partir deste estudo, que ganha cada vez mais espaço nas pesquisas dessa área, é que representações visuais possam ser usadas não apenas para obter maior facilidade de visualização na Matemática, mas também na sua justificação. Um número cada vez maior de matemáticos e lógicos têm trabalhado com o uso de diagramas e representações visuais que, em geral, facilitam a compreensão de um teorema e sua demonstração, além de inspirar o teorema a ser provado, apontando, por vezes, caminhos para a construção da própria prova. Há um debate em torno de se uma *Prova sem Palavras* realmente se qualifica como uma prova. Hoje há ainda muita controvérsia sobre o papel da representação visual numa demonstração, e são muitos os pesquisadores que opinam sobre o tema. Por um lado colocam-se os que pensam que as representações visuais são meros facilitadores da compreensão matemática do que se quer provar, e, por outro, há os que defendem que as representações visuais têm papel essencial numa demonstração e que podem constituir provas, tornando desnecessária qualquer outra prova tradicional. A seguir apresentamos uma breve compilação do pensamento de alguns matemáticos em relação a essa abordagem:

- Bill Casselman acredita que uma imagem desempenha um papel crucial na demonstração lógica. Segundo ele, “uma *Prova sem Palavras* pode ser pensada como uma “prova” que faz uso de representações visuais, ou seja, imagens ou outros meios visuais para mostrar uma ideia matemática, equação ou teorema” [4].
- Jon Barwise e John Etchemendy reconhecem que provas formadas por uma sequência de etapas que chegam a um raciocínio correto contribuem com o desenvolvimento da Matemática, e que, se a prova utilizando representações visuais contiver de maneira clara as informações apresentadas na conclusão, então a prova é válida [2].

³O Construtivismo é uma corrente de pensamento baseado nos mecanismos de funcionamento da inteligência e a construção do sujeito a partir de sua interação com o meio, ou seja, as estruturas cognitivas do sujeito não nascem prontas, cabendo ao professor a tarefa de criar possibilidades enquanto sujeito mediador da aprendizagem.

- Segundo Richard Palais, professor emérito da Universidade de Brandeis, “a visualização pode mostrar o caminho a uma prova rigorosa”, deixando claro que as representações visuais podem ser aceitas como provas legítimas em si mesmas [15].

Finalmente, é importante citar que as *Provas sem Palavras* obtiveram um maior reconhecimento a partir do momento em que a *Mathematical Association of America* começou a publicá-las regularmente na *Mathematics Magazine*, sendo seu precursor Roger Nelsen, que tem interesse no processo de visualização em Matemática, mais especificamente em figuras que ajudam os alunos a entender ideias matemáticas, provas e argumentos, tendo publicado mais de uma centena de pesquisas a respeito.

3. Provas sem Palavras para o Ensino Fundamental

A Matemática do Ensino Fundamental é rica em situações-problemas que trazem aos alunos diversas aplicações e, conseqüentemente, visualizações de exemplos em forma de *Provas sem Palavras*. Aqui, longe de esgotar os casos, serão citadas algumas situações que poderão ter alguma importância.

A primeira abordagem será o Teorema de Pitágoras, que é estudado no 9º ano do Ensino Fundamental, sendo que esse tema é abordado durante todo o Ensino Médio.

Teorema 1. (Teorema de Pitágoras) *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Existem inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras, e muitas delas através de *Provas sem Palavras*. Devido à grande importância e variedade em demonstrações desse teorema, serão apresentadas duas provas.

3.1. Teorema de Pitágoras I

Este Teorema foi mostrado através de *Provas sem Palavras*, em 1876, por James Abram Garfield (1831-1881), que foi o 20º presidente dos Estados Unidos.

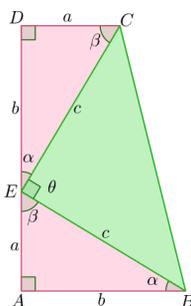


Figura 1: Teorema de Pitágoras I.

Fonte: As autoras.

James Garfield considerou um triângulo retângulo de catetos a e b , e hipotenusa c . Logo, desenhou duas cópias desse triângulo retângulo: $\triangle ABE$ e $\triangle CDE$, conforme a Figura 1. Depois uniu os pontos B e C , formando o trapézio retângulo $ABCD$, de bases a e b e altura $a + b$. Importante observar que o $\triangle BCE$ é retângulo isósceles, pois os lados \overline{CE} e \overline{BE} medem c e o ângulo θ é retângulo pois, conforme a Figura 1, tem-se $\alpha + \theta + \beta$ vale 180° . Assim, $\theta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$.

Ao calcular a área desse trapézio, de duas formas diferentes, tem-se:

(a) Pela área do trapézio, $A_{\text{Trapézio}} = \frac{(a + b)(a + b)}{2}$.

(b) Pela soma das áreas dos três triângulos retângulos, $A_{\text{Trapézio}} = \frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2}$.

Igualando as expressões das áreas obtidas acima, obtém-se $c^2 = a^2 + b^2$.

3.2. Teorema de Pitágoras II

Nessa segunda abordagem do Teorema de Pitágoras, observando a imagem que está ao lado esquerdo da Figura 2, considere-se o quadrado $ABCD$, de lado c , formado por quatro triângulos retângulos de catetos a e b , e hipotenusa c , além de um quadrado no centro, de lado $b - a$. Tal construção fecha um quadrado de lado $a + b$ pelo fato de os triângulos serem retângulos.

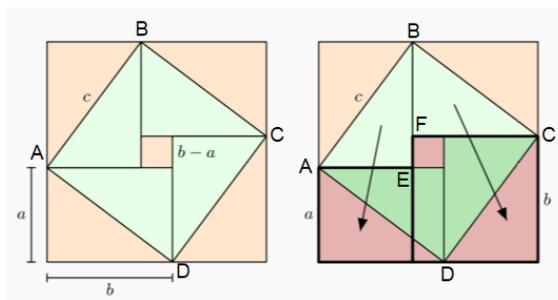


Figura 2: Teorema de Pitágoras II.

Fonte: http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words. Acesso em: 08/10/2019. Legenda adicionada pelas autoras.

Calculando a área do quadrado $ABCD$ de duas formas diferentes, tem-se:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b - a)^2 = a^2 + b^2.$$

A imagem do lado direito mostra uma ideia um pouco diferente: apenas o desmembramento de dois triângulos que compõem o quadrado $ABCD$. Primeiro, rotaciona-se por A o triângulo retângulo ABE , de tal forma que o vértice B coincida com o vértice D , do quadrado. Logo, rotaciona-se por C o $\triangle CBF$, de tal forma que o vértice B coincida com D . Dessa maneira, obtêm-se dois

quadrados (ambos delimitados por uma cor mais forte) de lados a e b , cuja soma de áreas, $a^2 + b^2$, é exatamente igual a c^2 , área do quadrado de lado c , e conseguindo, assim, a equivalência de áreas entre o quadrado ABCD, de lado c , e a soma dos quadrados de lados a e b .

O link <https://www.geogebra.org/m/jFFERBdd> apresenta alguns trabalhos realizados no *GeoGebra*, onde se pode ver a demonstração visual de 30 maneiras diferentes do Teorema de Pitágoras de forma dinâmica.

3.3. Quadrado da Soma de Dois Termos

Nesta seção a *Prova sem Palavras* irá mostrar que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Para interpretar geometricamente esse produto, considere-se o quadrado de lado $(a + b)$, como na Figura 3.

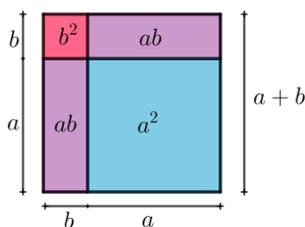


Figura 3: Quadrado da Soma de Dois Termos.

Fonte: As autoras.

Observa-se que a área do quadrado maior será $(a + b)^2$. Esse quadrado é composto por dois quadrados menores, um de área a^2 e outro de área b^2 , e também por dois retângulos, ambos de área ab . Somando-se as áreas dessas quatro regiões, se obter-se-á $a^2 + 2ab + b^2$, e, finalmente, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Existem vários materiais prontos e disponíveis no *GeoGebra*, onde se pode acompanhar esse resultado através de movimento. Seguem duas sugestões: <https://www.geogebra.org/m/rbmzq7Dh> e <https://www.geogebra.org/m/E39u4Cq6>.

Importante comentar que se o professor desenvolver em sala de aula esse raciocínio visual, o aluno poderá ter maior facilidade de compreensão do que ocorre.

3.4. Quadrado da Diferença de Dois Termos

O objetivo desta seção é fornecer uma *Prova sem Palavras* do quadrado da diferença de dois termos, isto é, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. A interpretação geométrica desse produto será feita por meio das áreas dos quadrados de lado a e b , conforme a Figura 4.

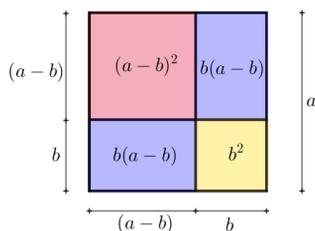


Figura 4: **Quadrado da Diferença de Dois Termos.**

Fonte: As autoras.

Observa-se que, ao tomar a área do quadrado maior, que tem lado a , e dele subtrair a área dos dois retângulos de lados b e $a - b$, assim como retirar a área do quadrado de lado b , sobrar a área do quadrado de lado $(a - b)$; dessa forma:

$$\begin{aligned}
 a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2 &= a^2 - 2b(a - b) - b^2 \\
 &= a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 \\
 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 &= (a - b)^2.
 \end{aligned}$$

Uma vez que o aluno, com o auxílio do professor, esteja engajado e acostumado às representações visuais, pouco a pouco irá obter outros resultados de maneira mais rápida e significativa.

Segue como sugestão de visualização dinâmica sobre o quadrado da diferença de dois termos o *link* <https://www.geogebra.org/m/fm67dzqy>.

3.5. Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos

Nesta seção será visto que a demonstração da igualdade $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ é bastante simples. Será interpretado geometricamente esse resultado por meio das áreas dos quadrados de lados a e b , conforme a Figura 5.

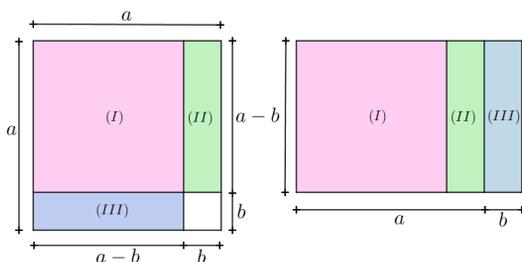


Figura 5: **Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos.**

Fonte: As autoras.

A Figura 5 mostra um quadrado maior de lado a , formado por um quadrado (I) de lado $(a - b)$ e outro de lado b , além de dois retângulos (II) e (III) de lados b e $a - b$. Calculando a área do quadrado de lado a e dele retirando a área do quadrado de lado b , sobrarão as regiões I, II e III, cujas áreas são $(a - b)^2$, $b(a - b)$ e $b(a - b)$, respectivamente. Colocando essas regiões lado a lado, será formado um retângulo de lados $a + b$ e $a - b$. A área desse retângulo é $(a + b)(a - b)$. Portanto, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Através dos seguintes *links*, tem-se duas formas diferentes de como visualizar no *GeoGebra* esse produto notável: <https://www.geogebra.org/m/P5CGdcpZ> e <https://www.geogebra.org/m/R4vQsjfr>.

3.6. Área de Figuras Planas

A Geometria Plana é um conteúdo que possibilita ser desenvolvido de forma diversificada com os alunos. Com base nisso, a próxima *Prova sem Palavras* foi desenvolvida com o intuito de os estudantes manipularem as formas geométricas de diferentes maneiras, até chegarem a superfícies equivalentes.

3.6.1 Área de Trapézio e Triângulo

No Ensino Fundamental, a expressão que representa a área do trapézio normalmente é conhecida por:

$$S_{\text{Trapézio}} = \frac{(\text{Base maior} + \text{Base menor}) \cdot \text{Altura}}{2}.$$

Contudo, são poucos os alunos que sabem que um trapézio pode ser transformado em triângulo, e, a partir disso, obter a fórmula acima. Para isso, a *Prova sem Palavras* da Figura 6 mostra facilmente como chegar a esse objetivo.

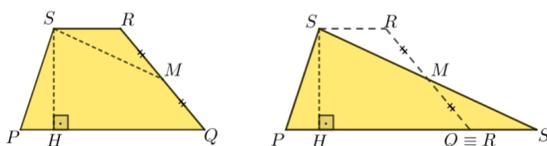


Figura 6: Área de Trapézio e Triângulo.

Fonte: As autoras.

Considere-se, no trapézio PQRS, $\overline{PQ} = \text{Base maior}$, $\overline{RS} = \text{Base menor}$ e $\overline{SH} = \text{Altura}$. Partindo do trapézio PQRS, divide-se o lado \overline{QR} ao meio, encontrando o ponto médio M . Por esse ponto, rotaciona-se o ΔSRM até \overline{QM} coincidir com \overline{MR} , sendo que os segmentos \overline{SM} e $\overline{MS'}$ são colineares, obtendo-se o $\Delta PS'S'$, cuja base será $\overline{PS'} = \overline{PQ} + \overline{QS'}$, e de altura \overline{SH} . Com isso, a área do $\Delta PS'S'$ será a mesma do trapézio PQRS, pois não houve perda de superfície. Algebricamente, como $\overline{QS'}$ tem a mesma medida de \overline{RS} , tem-se:

$$S_{\Delta PS'S'} = \frac{\overline{PS'} \cdot \overline{SH}}{2} = \frac{(\overline{PQ} + \overline{QS'}) \cdot \overline{SH}}{2} = \frac{(\overline{PQ} + \overline{RS}) \cdot \overline{SH}}{2} = \frac{(\text{Base maior} + \text{Base menor}) \cdot \text{Altura}}{2}.$$

3.7. Completando Quadrados

Para se resolver equações polinomiais do segundo grau, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, quando ainda não existia a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, usava-se o método de completar quadrados, criado pelo matemático árabe Abu Abdullah Mohammed ben Musa Al-Khwarizmi (780-850) que se baseia em

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

A fim de entender a *Prova sem Palavras* dessa igualdade, trabalha-se com a área do quadrado de lado x somada à área do retângulo de lados b e x . Para isso, o retângulo é dividido em duas partes iguais, de tal modo que seus lados são x e $\frac{b}{2}$. Depois, constrói-se um novo quadrado de lado $x + \frac{b}{2}$, sendo que o quadrado pequeno de lado $\frac{b}{2}$ não faz parte dessa construção, conforme pode-se ver na Figura 7.

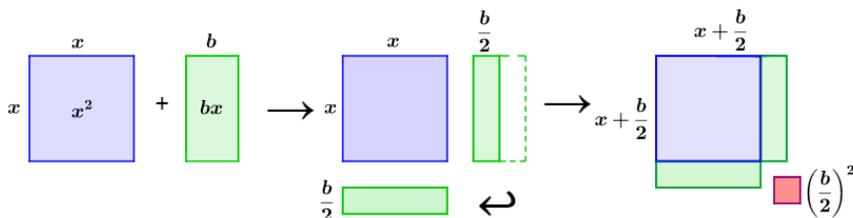


Figura 7: Completando Quadrados.

Fonte: As autoras.

Algebricamente, tem-se $x^2 + bx = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Introduzido no 9º ano do Ensino Fundamental, esse assunto é normalmente considerado de difícil entendimento por parte dos estudantes. A parte visual é de fundamental importância para sua elucidação. Uma vez desenvolvido esse tema através das representações visuais, espera-se que o aluno desempenhe melhor suas habilidades dentro do cálculo algébrico. Para tanto, aconselha-se ver o *link* <https://www.geogebra.org/m/ytsdsfyH>, onde o estudante poderá interagir com a proposta através do *GeoGebra*.

4. Provas sem Palavras para o Ensino Médio

Nesta seção serão apresentados mais exemplos de *Provas sem Palavras*, conforme realizado na seção 3, porém com assuntos próprios do Ensino Médio.

4.1. Lei dos Cossenos

Dado um $\triangle OBF$ qualquer, de lados a , b e c , conforme a Figura 8.

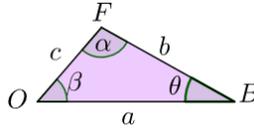


Figura 8: **Apresentação da Lei dos Cossenos.**

Fonte: As autoras.

A Lei dos Cossenos é dada por:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

Para a próxima *Prova sem Palavras* serão utilizados dois resultados da Geometria, cujas demonstrações podem ser consultadas em [7].

Teorema 2. *Um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo inscrito é metade da medida do arco correspondente.*

Teorema 3. *Se por P passam duas retas concorrentes que interseccionam a circunferência em A, B, C e D, respectivamente, conforme a Figura 9, então*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

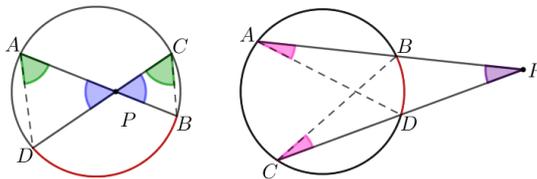
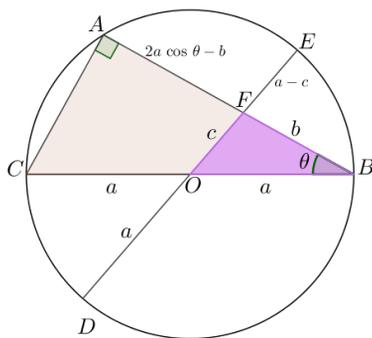


Figura 9: **Potência de Ponto.**

Fonte: As autoras.

Será demonstrada a identidade $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$. Para isso, considere-se o $\triangle ABC$, inscrito na circunferência de raio a , cuja hipotenusa \overline{BC} é o diâmetro dessa circunferência. Pelo Teorema 2, o \widehat{CAB} é retângulo, como mostra a Figura 10. Considere-se também o $\triangle OBF$, da mesma figura.



$$(2a \cos \theta - b) \cdot b = (a - c)(a + c)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Figura 10: **Lei dos Cossenos.**

Fonte: As autoras.

Tem-se que:

- $\overline{AB} = 2a \cos \theta$.
- $\overline{OF} = c$.
- $\overline{FB} = b$.
- $\overline{FD} = a + c$.
- $\overline{FA} = 2a \cos \theta - b$.
- $\overline{FE} = a - c$.

Pela propriedade de Potência de Ponto, sabe-se que $\overline{FA} \cdot \overline{FB} = \overline{FD} \cdot \overline{FE}$. Desse modo, $(2a \cos \theta - b) \cdot b = (a + c) \cdot (a - c)$. Logo, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$.

Também para esse tópico sugere-se acessar o [link https://www.geogebra.org/m/AbpUfamD](https://www.geogebra.org/m/AbpUfamD), onde se mostra a Lei dos Cossenos no *GeoGebra* dessa mesma forma.

4.2. Seno e Cosseno da Soma de Dois Arcos

A expressão do seno da soma de dois arcos α e β é dada por:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha.$$

E a expressão do cosseno da soma de dois arcos α e β é dada por:

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta.$$

Nessa *Prova sem Palavras* será usado o Teorema dos ângulos externos de um triângulo, cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 4. *Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Para a visualização, considere-se α , β e $\alpha + \beta$ tais que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\alpha + \beta < 90^\circ$.

Serão mostradas as duas expressões baseadas em uma mesma figura.

Começando com o triângulo retângulo ABF , com hipotenusa medindo 1 e um dos ângulos igual a $\alpha + \beta$. Logo, seus catetos medem $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$, segundo a Figura 11.

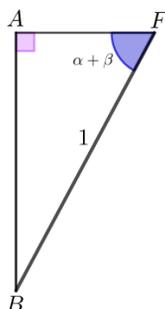


Figura 11: **Triângulo de ângulo $\alpha + \beta$.**

Fonte: As autoras.

A fim de provar as fórmulas do seno e do cosseno da soma, será preciso fazer aparecer α e β . Para tanto, serão construídas em volta do ΔABF figuras associadas a α e β , da seguinte forma: de B será traçada uma linha L_1 em um ângulo β à direita de \overline{BF} e uma segunda linha L_2 , em um ângulo α , à direita de L_1 , conforme a Figura 12.

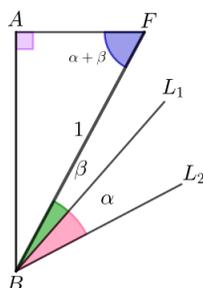


Figura 12: **Ângulos α e β .**

Fonte: As autoras.

Como o ângulo entre \overline{BF} e L_2 é igual a $\alpha + \beta$, tem-se que L_2 é paralela ao segmento \overline{AF} , isso sugere a presença de um retângulo associado ao problema.

A seguir, desenha-se de F uma perpendicular à linha L_1 , obtendo E, e logo desenha-se de E uma paralela ao segmento \overline{AB} até atingir L_2 , obtendo C, como mostra a figura a seguir:

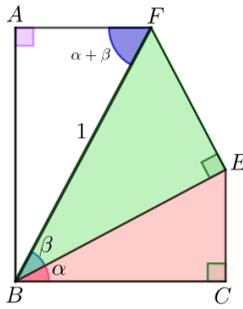


Figura 13: \overline{AF} é paralelo a \overline{BC} .
 Fonte: As autoras.

Agora, basta completar o retângulo para obter D, como pode ser observado na Figura 14.

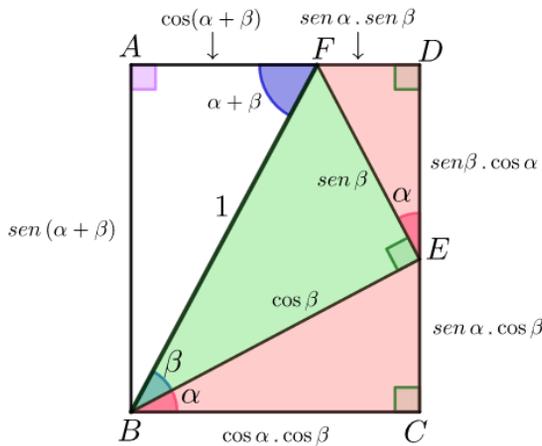


Figura 14: **Seno e Cosseno da Soma de Dois Arcos.**
 Fonte: As autoras.

Como a hipotenusa do $\triangle BEF$ mede 1 e o ângulo $\widehat{FBE} = \beta$, tem-se que o cateto \overline{BE} mede $\cos \beta$ e o cateto \overline{EF} mede $\sin \beta$.

Os catetos \overline{CE} e \overline{BC} , do triângulo retângulo BCE, medem $\sin \alpha \cdot \cos \beta$ e $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, respectivamente, dado que sua hipotenusa mede $\cos \beta$.

Finalmente, no $\triangle EFD$, $\widehat{FED} = \alpha$ pelo Teorema 4 no $\triangle BCE$. Com isso, os catetos \overline{DF} e \overline{DE} medem, respectivamente, $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ e $\sin \beta \cdot \cos \alpha$.

Comparando os lados do retângulo ABCD, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{AB} = \overline{DC} &\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha. \\ \overline{AD} = \overline{BC} &\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta. \\ &\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

4.3. Seno e Cosseno da Diferença de Dois Arcos

A expressão do seno da diferença de dois arcos α e β é dada por

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

A expressão do cosseno da diferença de dois arcos α e β é dada por

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

A fim de visualizar tais expressões, será considerado α , β e $\alpha + \beta$ tais que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\alpha + \beta < 90^\circ$.

Para essa *Prova sem Palavras* pode ser usada uma construção similar à que foi feita na seção 4.2, porém, neste caso os ângulos α e β não serão adjacentes:

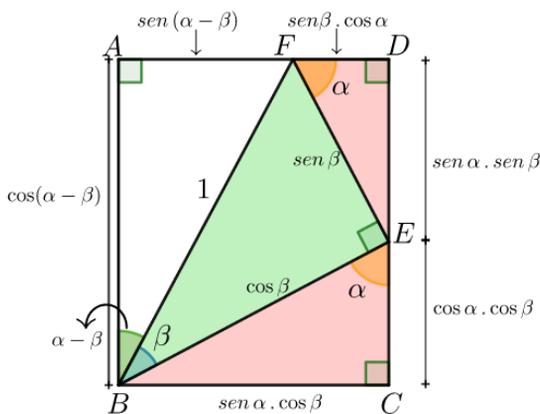


Figura 15: Seno e Cosseno da Diferença de Dois Arcos.

Fonte: As autoras.

No $\triangle ABF$, com hipotenusa medindo 1 e um dos ângulos igual a $\alpha - \beta$, o cateto \overline{AF} mede $\sin(\alpha - \beta)$ e o cateto \overline{AB} mede $\cos(\alpha - \beta)$.

Como a hipotenusa do $\triangle BEF$ mede 1 e o ângulo $\widehat{FBE} = \beta$, tem-se que os catetos \overline{BE} e \overline{EF} medem, respectivamente, $\cos \beta$ e $\sin \beta$.

Agora, \widehat{BEC} é alterno interno a \widehat{ABE} ; logo, $\widehat{BEC} = \alpha$. Como a hipotenusa do triângulo retângulo BCE mede $\cos \beta$, segue que o cateto \overline{BC} mede $\sin \alpha \cdot \cos \beta$ e o cateto \overline{CE} mede $\cos \alpha \cdot \cos \beta$.

Finalmente, no $\triangle EFD$ tem-se que $\widehat{EFD} = \alpha$, pelo Teorema 4 no $\triangle BCE$. Com isso, o cateto \overline{DE} mede $\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$ e o cateto \overline{DF} mede $\text{sen } \beta \cdot \cos \alpha$.

Comparando os lados do retângulo ABCD, chega-se à conclusão:

$$\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \text{sen}(\alpha - \beta) + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha.$$

4.4. Progressão Aritmética - Soma de Inteiros

Nessa seção será mostrado que a soma

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$$

dos primeiros n inteiros positivos é igual à metade de $n^2 + n$, isto é, $\frac{n(n+1)}{2}$. A *Prova sem Palavras* para essa soma está representada na Figura 16:

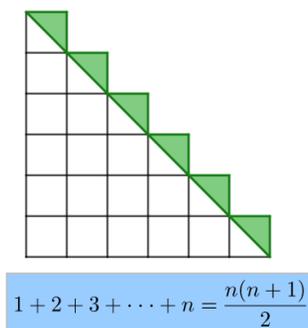


Figura 16: **Progressão Aritmética - Soma de Inteiros.**

Fonte: As autoras.

Nela pode-se observar que a área do triângulo de lado 6 e altura também 6 será 18 unidades; depois, somando a área de 6 quadrados e dividindo por 2, obtém-se o total de quadrados da figura, que é 21. Generalizando, tem-se portanto a área de um triângulo com uma altura de comprimento n unidades e uma base de comprimento n unidades, que resulta $\frac{n^2}{2}$. A área que falta ser adicionada é $\frac{1}{2}$ multiplicada por n , sendo n o número de unidades quadradas. Essas são as metades dos quadrados sombreados, $\frac{n}{2}$.

Certamente, o exposto acima não é uma demonstração, mas sim uma visualização desse fato que pode ser apresentada aos estudantes e, logo, usar a soma de uma progressão aritmética para justificar a fórmula.

Como sugestão de animação pode-se acessar os *links*: <http://www.math.utah.edu/~palais/sums.html> e <https://www.geogebra.org/m/YYdPDUqS>. Esse último transmite exatamente o que foi exposto nesta seção.

4.5. Volume de Tronco de Pirâmide de Base Quadrada

O volume do tronco de uma pirâmide quadrada costuma ser visto com muita frequência no Ensino Médio. A próxima *Prova sem Palavras* retrata uma maneira diferente de ser desenvolvida, para chegar à fórmula desse volume.

Na Figura 17 há um tronco de pirâmide de base maior b e base menor a , cuja altura é h .

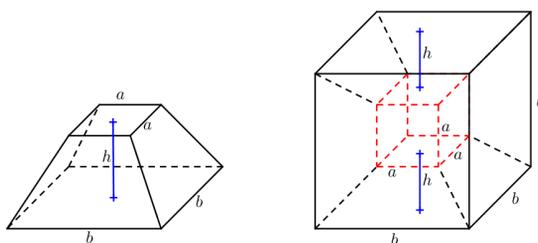


Figura 17: Volume de Tronco de Pirâmide de Base Quadrada.

Fonte: As autoras.

Se forem colocados nesse tronco de pirâmide outros quatro troncos iguais nas laterais (um em cada face), e outro tronco na parte superior, pode-se perceber que será formado um cubo grande de aresta b , porém com um cubo não preenchido internamente de aresta a . Isso significa que o volume de cada tronco de pirâmide colocado terá $\frac{1}{6}$ do volume do cubo maior menos o volume do cubo menor. Escrito de outra forma:

$$V_{\text{Tronco}} = \frac{1}{6}(b^3 - a^3).$$

Como também se pode observar, a aresta b do cubo maior terá a mesma medida de duas alturas h do tronco inicial mais a aresta a do cubo menor, isto é, $b = 2h + a$. Assim,

$$V_{\text{Tronco}} = \frac{1}{6}(b^3 - a^3) = \frac{1}{6}(b - a)(a^2 + b^2 + ab) = \frac{1}{6}2h(a^2 + b^2 + ab) = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab),$$

que é a fórmula do tronco de uma pirâmide de base quadrada.

Segue, como sugestão, o *link* <https://www.geogebra.org/m/JWMSFnW8>, sobre tronco de pirâmide.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi precursor do cálculo infinitesimal. Ele, juntamente com o alemão Johannes Kepler (1571-1630) e outros matemáticos, inventou e usou métodos intuitivos infinitesimais para resolver problemas de área e volume, isto é, a integral. Vinte anos após a publicação da *Stereometria Doliorum* de Kepler, Cavalieri escreveu um livro muito popular: *Geometria*

indivisibilibus (1635). Nele, o matemático italiano usou o que agora é conhecido como o Princípio de Cavalieri [18].

Princípio de Cavalieri:

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes) [6].

Nas seguintes subseções serão apresentadas algumas aplicações do Princípio de Cavalieri.

4.6. Volume da Semiesfera

Nesta seção será mostrada outra *Prova sem Palavras* realizada no século V pelo matemático chinês Zu Geng (480-525). Acredita-se que ele tenha sido o primeiro a desenvolver a ideia do Princípio de Cavalieri, muito tempo antes desse último estudar o tema. O objetivo é chegar na fórmula do volume da semiesfera, para isso, serão comparadas as secções de uma pirâmide de base quadrada “deitada” do lado da semiesfera para, posteriormente, utilizar o Princípio de Cavalieri e comparar os seus respectivos volumes.

Partindo de uma pirâmide de base quadrada de lado r e altura $2\pi r$, traça-se um plano, a uma altura h , conforme a Figura 18.

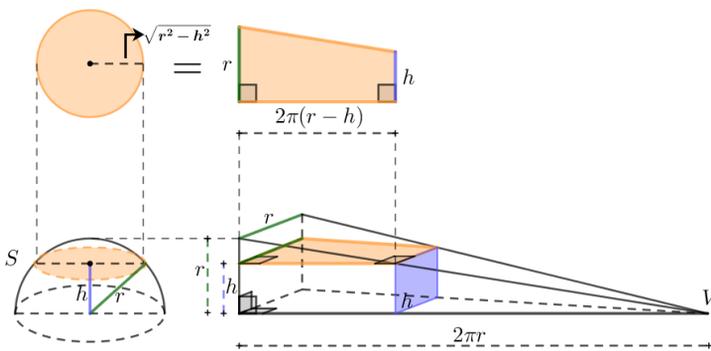


Figura 18: **Volume de Semiesfera.**

Fonte: As autoras.

A secção paralela à base desta pirâmide (na cor azul nas figuras) será um quadrado de lado h , conforme resultado abaixo, cujo assunto pode ser encontrado em [6].

Proposição 1. *Em uma pirâmide qualquer, a secção transversal e a base são regiões poligonais semelhantes.*

Dessa forma, pode-se comparar a base da pirâmide e da secção paralela, para encontrar a medida H da altura do tronco da pirâmide, aplicando proporções, segundo a Figura 19.

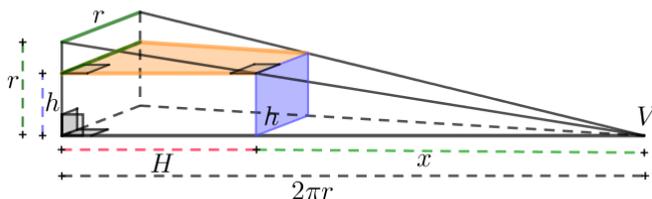


Figura 19: **Pirâmide.**

Fonte: As autoras.

Obtém-se $\frac{x}{h} = \frac{2\pi r}{r}$. Desse modo, $x = 2\pi h$.

Como $H = 2\pi r - x$, tem-se que $H = 2\pi r - 2\pi h$, o que implica $H = 2\pi(r - h)$.

Tomando a secção da pirâmide e calculando a sua área, de acordo com a Figura 20, obtém-se:

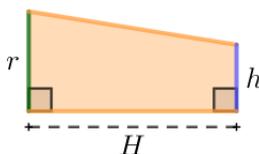


Figura 20: **Secção da Pirâmide.**

Fonte: As autoras.

$$S_{\text{Trapézio}} = \frac{(r + h)2\pi(r - h)}{2} = \pi(r^2 - h^2).$$

Seja agora a semiesfera de raio r , cuja secção dista h do centro da mesma, e seja r' o raio dessa secção. Tem-se que r, h , e r' formam um triângulo retângulo de hipotenusa r , de acordo com a Figura 21.

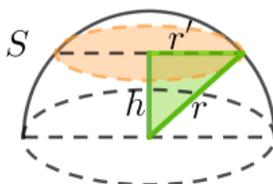


Figura 21: **Secção da Semiesfera.**

Fonte: As autoras.

Aplicando o Teorema de Pitágoras para calcular a medida do raio dessa secção, conclui-se que $r^2 = r'^2 + h^2$, de onde $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$. Portanto, a área da secção será $A_{\text{Círculo}} = \pi r'^2 = \pi(r^2 - h^2)$.

Logo, as áreas das secções da pirâmide e da semiesfera são iguais, qualquer que seja o plano secante paralelo a um plano dado, assim como seus volumes são iguais, de acordo com o Princípio de Cavalieri, $V_{\text{Semiesfera}} = V_{\text{Pirâmide}} = \frac{2}{3}\pi r^3$.

4.7. Problema do Anel de Guardanapo

A forma do anel de guardanapo origina-se de uma esfera. Ao passar um cilindro cortante através do centro da esfera, obtém-se o anel de guardanapo, conforme a Figura 22.



Figura 22: Anel de Guardanapo.

Fonte: <https://steemit.com/steemstem/@mcfarhat/the-napkin-ring-paradox>. Acesso em: 08/10/2019.

Surpreendentemente, o volume do anel de guardanapo não depende do raio da esfera original, apenas da altura.

Usando o Princípio de Cavalieri, será mostrado que *quaisquer dois anéis de guardanapo, com a mesma altura, terão o mesmo volume, independentemente do tamanho de suas esferas originais*. Ou seja, se houver uma esfera do tamanho de uma bola de tênis e outra do tamanho de uma bola de basquete, por exemplo, cortando anéis de guardanapos de mesma altura, ambos terão exatamente o mesmo volume, sendo que o menor teria um anel mais grosso, conforme se pode constatar na Figura 23. É nessa figura que se baseia a *Prova sem Palavras* desta seção.

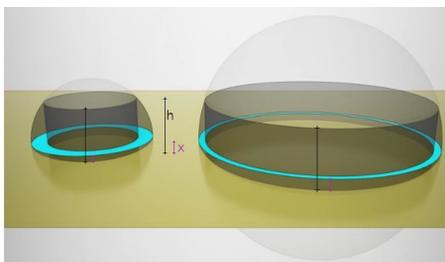


Figura 23: Anel de Guardanapo - Coroa Circular.

Fonte: <https://steemit.com/steemstem/@mcfarhat/the-napkin-ring-paradox>. Acesso em: 08/10/2019. Legenda adicionada pelas autoras.

Partindo-se de dois anéis de guardanapo de altura $2h$. Considerem-se somente os respectivos hemisférios superiores, de altura h . Logo, traça-se um plano horizontal, a uma altura x . A interseção desse plano com esses hemisférios são coroas circulares, como mostra a Figura 23. Então, para atingir o objetivo, usa-se o Princípio de Cavalieri: dado que se está considerando anéis de mesma altura, basta mostrar que a área da coroa circular independe do raio da esfera.

Para isso, considere-se uma semiesfera de raio R e um plano paralelo a sua base, a uma distância h . Esse plano determina, na semiesfera, uma secção de raio r_1 e área πr_1^2 , conforme a Figura 24. Essa secção é a do cilindro cortante que determina o anel de guardanapo de altura $2h$, considerando as duas semiesferas. Ao traçar outro plano paralelo à base, a uma distância qualquer x , $0 \leq x \leq h$, tem-se outra secção, de raio r_2 e área πr_2^2 .

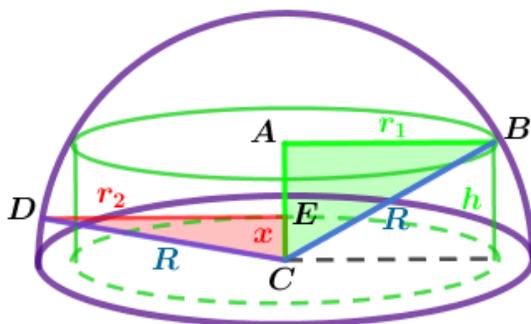


Figura 24: Anel de Guardanapo - Princípio de Cavalieri.

Fonte: As autoras.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABC e CDE, conforme a Figura 25,

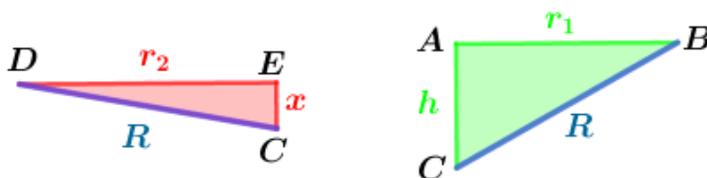


Figura 25: Anel de Guardanapo - Triângulos.

Fonte: As autoras.

deduz-se para o ΔABC que $R^2 = r_1^2 + h^2$ e para o ΔCDE que $R^2 = r_2^2 + x^2$. Por conseguinte, $r_1^2 = R^2 - h^2$ e $r_2^2 = R^2 - x^2$.

Logo, a área da coroa circular formada pelas duas secções citadas é dada por:

$$S_{\text{Coroa circular}} = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(R^2 - x^2) - \pi(R^2 - h^2) = \pi(R^2 - x^2 - R^2 + h^2) = \pi(h^2 - x^2).$$

Dessa forma, o Princípio de Cavalieri permite concluir que os volumes de dois anéis de guardanapo são iguais.

Referências

- [1] Albuquerque, F. de Assis. *Visualizando e Dinamizando Temas no Ensino básico*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) - Universidade Federal Fluminense, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=594 Acesso em: 23 de junho de 2020.
- [2] Barwise, J.; Etchemendy, J. *Visual Information and Valid Reasoning*. MAA, pp.9-24, 1991.
- [3] Calazans, A. *Um Panfleto de Berkeley Contra as Práticas Matemáticas de Newton e de Leibniz*. *Scientiae Studia: Revista Latino-americana de Filosofia e História da Ciência*, v.8, n.4, pp.623-632, São Paulo, 2010.
- [4] Casselman, B. *Pictures and Proofs*. MAA, v.47, pp.1257-1266, 2000.
- [5] Clímaco, H.A., OTTE, M. Bolzano, *A Formação da Matemática Pura e a Aritmetização da Matemática*. Goiania: 36ª Reunião Nacional da ANPEd, 2013.
- [6] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo-SP. Atual Editora v.10, 2005.
- [7] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo-SP. Atual Editora v.09, 2005.
- [8] Eves, H. *Introdução à história da Matemática*. Editora da Unicamp, 2004.
- [9] Lima, E. L. *Conceituação, Manipulação e Aplicações. As dois Problemas e duas soluções*. RPM - *Revista do Professor de Matemática*. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/41/1.htm> Acesso em: 26/06/2020.
- [10] Nelsen, R. B. *Proofs Without Words - Exercices in Visual Thinking*. MAA, 1993.
- [11] Nelsen, R. B. *Proofs Without Words II*. MAA, 2000.
- [12] Nelsen, R. B. *Proofs Without Words II*. MAA, 2016.
- [13] de Souza Ortega, R. C. *Provas sem Palavras: Uma Ponte entre a Intuição e a Linguagem Matemática*. Dissertação de Mestrado, Profmat- UTFPR, Curitiba-PR, 2018.
- [14] Oliveira, A. L. C. *O Teorema de Pitágoras: Demonstrações e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciência e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013. Disponível: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=31415 Acesso em: 23 de junho de 2020.
- [15] Palais, R. *The Visualization of Mathematics: Toward a Mathematical Exploratorium*. Notices of the AMS, v.46, pp.647-658, 1999.
- [16] Presmeg, N. C. *Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics*. [S.l.], 2006.
- [17] *Researching the History of Mathematics Education: An International Overview*. ICME-13 Monographs. Springer, 2018
- [18] MATEMÁTICAS VISUALES. El Volumen de la Esfera. Disponível em: <http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/cavalieri/cavalieriesfera.html> Acesso em: 20/03/2019.

Regina Cássia de Souza Ortega
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<reginacassia.ortega@hotmail.com>

Mari Sano
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<marisano@utfpr.edu.br>

Recebido: 15/10/2019
Publicado: 17/09/2020