


# Variações de Parâmetros em Funções: proposta e experiência didática remota com o GeoGebra

Edson Agustini<sup>1</sup> 

Érika M. C. Lopes<sup>2</sup> 

## Resumo

No processo de ensino e aprendizagem de funções no Ensino Médio e no início de cursos universitários da área de Exatas, a análise gráfica de algumas composições de funções tem sido pouco explorada. Neste trabalho, apresentamos uma contribuição ao ensino de funções, por meio de uma construção geométrica no aplicativo GeoGebra, na qual a representação gráfica é dinamicamente apresentada em articulação com a algébrica. Mais especificamente, vamos analisar e classificar os efeitos geométricos de parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  sobre uma dada função  $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ao considerarmos a função  $g(x) = af(bx + c) + d$ , sendo  $bx + c \in X$ . Além disso, relatamos uma experiência didática remota realizada com uma turma de ingressantes de um curso de graduação, na qual a construção foi utilizada. Por meio do recurso Classroom da plataforma do GeoGebra, foi possível criar um espaço de diálogo e aprendizagem ativa entre estudantes e professora durante a atividade *on-line*.

**Palavras-chave:** funções; variação de parâmetros; transformações geométricas; GeoGebra; ensino e aprendizagem online de Matemática.

## Abstract

In the process of teaching and learning functions in high school and at the beginning of university courses in STEM courses, the graphic analysis of some function compositions has been little explored. In this work, we present a contribution to the teaching of functions, through a geometric construction using *GeoGebra*, in which the graphic representation of a function is dynamically presented in articulation with the algebraic representation. More specifically, we will analyze and classify the geometric effects of parameters  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $d$  on a given function  $y = f(x)$  by considering the function  $g(x) = af(bx + c) + d$ . In addition, we report on a remote didactic experience carried out with a group of first semester students from an undergraduate course, in which the construction was used. Through the *Classroom* feature of the *GeoGebra* platform, it was possible to create a space for dialogue and active learning between students and the teacher during the online activity.

**Keywords:** functions; parameter variation; geometric transformations; GeoGebra; online learning and teaching of Mathematics.

<sup>1</sup>Apoiado pelo Programa Institucional de Graduação Assistida - Prossiga, da Prograd/UFU.

<sup>2</sup>Apoiado pelo Programa Institucional de Graduação Assistida - Prossiga, da Prograd/UFU.

## 1. Introdução

O estudo de funções reais de uma variável real, ou seja, de funções  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , geralmente é introduzido no Ensino Básico, e constitui um dos conceitos matemáticos mais importantes em qualquer ramo das Ciências Exatas. Nos cursos de graduação, o aprendizado sobre funções tem prosseguimento nas chamadas disciplinas de *Cálculo Diferencial e Integral*, e suas aplicações são extremamente diversas. Entretanto, algumas propriedades geométricas envolvendo o estudo de composições de funções, muitas vezes, são vistas de forma bastante superficial. Em particular, são pouco estudadas as relações que tais compostas possuem com as chamadas *Transformações Geométricas*, tais como as isometrias e as homotetias. A nosso ver, os principais motivos para um estudo superficial dos efeitos geométricos associados a determinadas composições de funções em sala de aula são de duas ordens:

- (i) carga horária curricular que, geralmente, é reduzida para todo o conteúdo programático que se deveria ministrar e;
- (ii) dificuldade de uma visualização dinâmica dos gráficos de tais compostas por meio de aplicativos que sejam livres, eficientes e de fácil manipulação.

Quanto ao Item (i), concordamos que há conteúdos que são mais básicos e urgentes ao aprendizado dos alunos do que a análise gráfica de composição de funções, o que justifica deixar esse assunto na forma de atividade complementar para os alunos. No entanto, conforme mostraremos neste artigo, o entendimento dos efeitos geométricos de algumas composições simples amplia a compreensão do próprio gráfico, visto que a representação é apresentada em articulação com a algébrica. Isso pode trazer benefícios para a aprendizagem dos conteúdos mais básicos e urgentes, além de simplificar o processo de construção de alguns gráficos.

Quanto ao Item (ii), há, na atualidade, o aplicativo GeoGebra que cumpre as características supracitadas e que possui as qualidades necessárias para o empreendimento dos estudos aos quais estamos nos referindo, mas que ainda não possui a inserção que gostaríamos no cotidiano da sala de aulas.

Considerando que estamos em uma fase de mudanças no Ensino de modo geral, precipitadas pelo atual período de isolamento social, onde a convivência com aulas remotas parece ser uma tendência, propomos uma atividade complementar que pode ser realizada de forma remota, envolvendo a análise e a classificação dos efeitos geométricos de cada parâmetro  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , sobre uma dada função  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ao considerarmos a composição  $g : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = af(bx + c) + d$ , sendo  $bx + c \in X$ . A partir do relato da experiência de realização da atividade didática em uma turma de ingressantes de um curso de Graduação, refletimos sobre o processo *on-line* de ensino e aprendizagem de gráficos de compostas de funções, especialmente com relação à sua representação gráfica, em articulação com sua expressão algébrica.

Na elaboração da experiência didática, buscamos utilizar ferramentas do *software* Geogebra para proporcionar um ambiente de aprendizagem ativa para os estudantes. Como já ressaltava Moran ([7], p. 24), “a combinação da aprendizagem ativa e híbrida com tecnologias móveis é poderosa para desenhar formas interessantes de ensinar e aprender”. Sem poder nos encontrar presencialmente, também aproveitamos de recursos mais recentes da plataforma do GeoGebra, para possibilitar um espaço de comunicação dialógica entre estudantes e professora, durante a realização da experiência.

Conforme já dito, esse assunto está diretamente relacionado à área da Geometria que trata das chamadas *Transformações Geométricas* do plano no plano, e possui aplicações em diversos ramos da Ciência, como computação gráfica e modulação de ondas eletromagnéticas em Telecomunicações. Quando as transformações geométricas são operadores lineares, elas geralmente são estudadas em disciplinas de Álgebra Linear da graduação sob o nome, por exemplo, de rotações, reflexões (em retas), compressões, dilatações, homotetias, cisalhamentos, projeções ortogonais etc. Exemplos mais comuns de transformações geométricas que podem não ser operadores lineares são as translações, inversões em círculos e projeções estereográficas, que podem, inclusive, ser utilizadas na composição com transformações que são operadores lineares e dar origem a uma gama enorme de outras transformações.

Neste artigo, veremos que os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  em  $g(x) = af(bx + c) + d$  conduzem-nos a casos particulares de translações, dilatações e compressões apenas. Observemos que os parâmetros  $a$  e  $b$  são multiplicativos, enquanto  $c$  e  $d$  são aditivos na composta  $g$ . Observemos, também, que  $b$  e  $c$  são parâmetros que atuam nos domínios das funções, enquanto  $a$  e  $d$  atuam nos conjuntos imagens das funções.

## 2. A preparação da construção geométrica “Variação de Parâmetros em Funções”

Nesta seção, descrevemos como construir a base da construção geométrica feita no GeoGebra, que será utilizada neste artigo. Além disso, dada a necessidade emergencial de que o trabalho educativo fosse desenvolvido remotamente, indicaremos a forma como foi realizada a experiência didática relatada na Seção 8, por meio da plataforma do GeoGebra.

Consideremos uma função  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , as constantes reais  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  e a composição  $g : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = af(bx + c) + d$ , sendo  $bx + c \in X$ . As constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são chamadas de *parâmetros*.

Conforme dito na seção introdutória, o *software* utilizado neste artigo é o GeoGebra e a construção pronta com três exemplos específicos para a função base  $f$  pode ser conferida no *link*:

<https://www.geogebra.org/m/j4dchfed>

Os exemplos trabalhados na construção geométrica supracitada são das funções:

- (1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \text{sen}(x)$ .
- (2)  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \ln(x)$ .
- (3)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^2$ .

Tendo em vista a liberdade de podermos alterar a função base  $f$ , inclusive para os exemplos apresentados mais adiante neste artigo, explicaremos brevemente e de modo simplificado como construir os controles deslizantes associados a cada um dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  e como entrar com a expressão da função  $f$  desejada no GeoGebra. Para tanto, vamos utilizar a chamada versão “clássica” do GeoGebra, que pode ser baixada a partir do *site* oficial do aplicativo ([geogebra.org](http://geogebra.org)).

Um controle deslizante é um dispositivo que permite ao usuário atribuir valores a uma variável por meio da movimentação de um ponto em uma pequena barra. Vamos criar quatro controles deslizantes, um para cada parâmetro. O intervalo de variação de cada um deles pode ser definido na janela de configuração do controle, e esse intervalo depende da função base  $f$  com a qual se deseja trabalhar. As imagens a seguir ilustram o procedimento de construção dos controles:

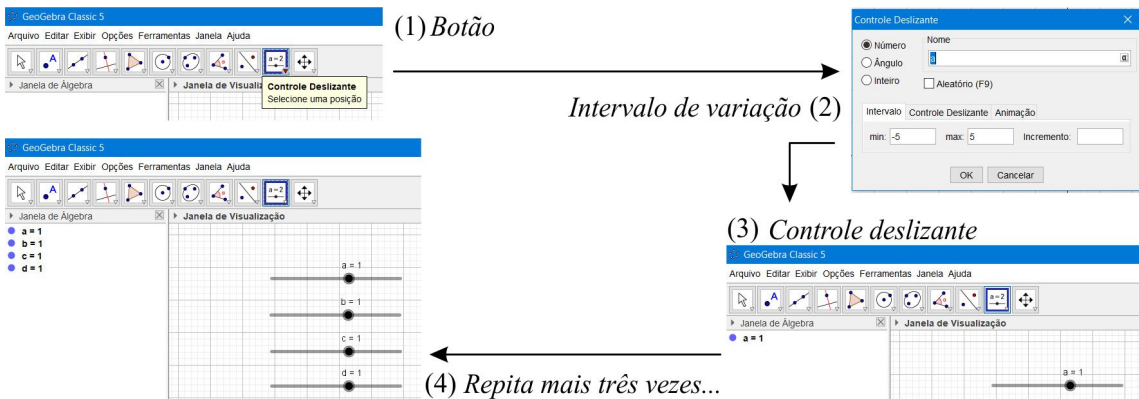


Figura 1: Construindo os controles deslizantes – um para cada parâmetro.

Para entrar com as expressões das funções  $f$  e  $g$ , utilizamos o campo de entrada localizado na parte inferior da tela. Nas imagens a seguir, estão ilustrados os procedimentos, sendo que, a título de exemplo, tomamos  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ . Depois de feita a construção, basta movimentar os pontos nas barras deslizantes e observar o efeito geométrico que cada parâmetro produz no gráfico da  $g$ , tendo por base o gráfico da  $f$ .

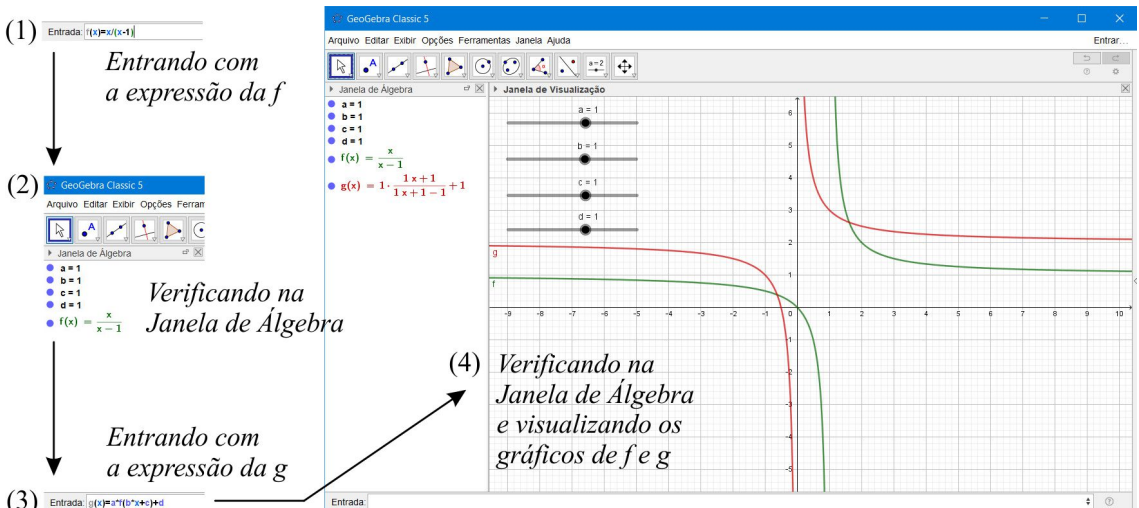


Figura 2: Entrando com as expressões das funções  $f$  e  $g$ .

Além do *software*, utilizamos o recurso Classroom, disponível na plataforma do GeoGebra, para criar um ambiente virtual de aprendizagem, no qual fosse possível a exploração, por cada estudante, da construção disponibilizada por meio de um *link* durante uma atividade síncrona com os estudantes. As imagens a seguir ilustram o procedimento para criação da classe e do *link* para a atividade.

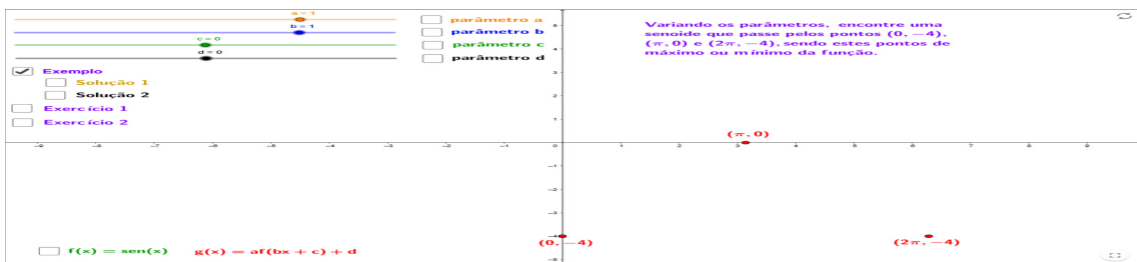


Figura 3: Criando e nomeando uma classe no GeoGebra Classroom.

Além disso, por meio da classe criada, a professora podia ter acesso às respostas e manipulações de cada estudante, como será mostrado mais adiante.

### 3. Análise do Parâmetro $a$

Com a nomenclatura e notações básicas para as funções  $f$  e  $g$  que foram introduzidas na seção anterior, e considerando os gráficos de  $f$  e  $g$  em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o parâmetro  $a$  está relacionado a deformações verticais a partir do gráfico de  $f$ , ou melhor, deformações verticais que resultam no gráfico de  $g(x) = af(bx+c)+d$  quando deixamos  $b$ ,  $c$  e  $d$  fixos.

Com o intuito de deixar a leitura deste texto mais didática e evitar o uso de uma simbologia matemática muito técnica (embora precisa), vamos abusar um pouco da linguagem informal nas definições que apresentamos a seguir. Para uma abordagem mais precisa, sugerimos as referências [5] e [3].

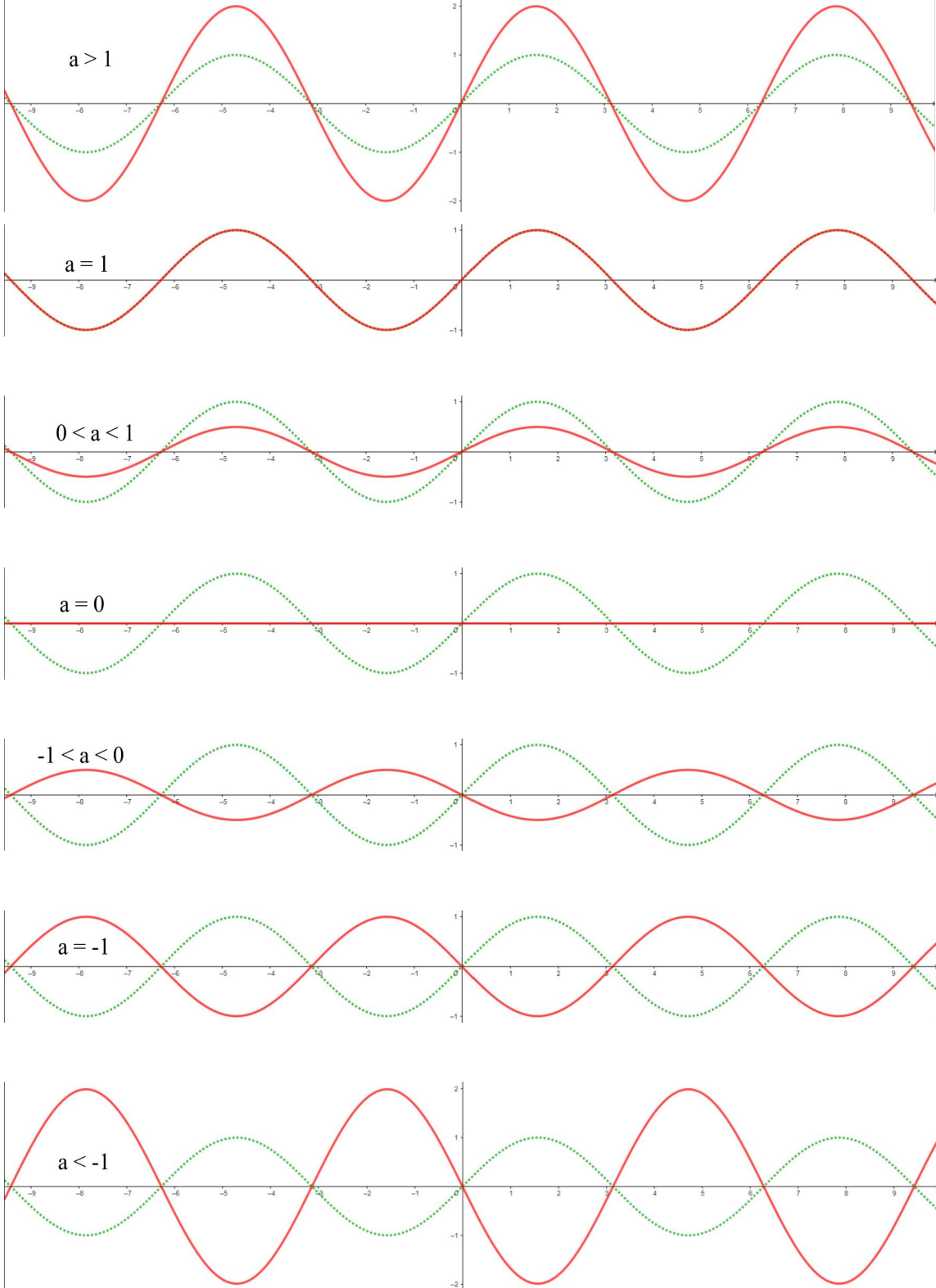
Tomando-se por referência o gráfico de  $g$  para  $a = 1$ , quando a deformação vertical produzida pela variação de  $a$  no gráfico de referência resulta em um “achatamento” desse gráfico, chamamos a deformação de *compressão*, e, quando a deformação vertical produzida pela variação de  $a$  no gráfico de referência resulta em um “esticamento” do gráfico, chamamos a deformação de *dilatação*.

Em uma deformação vertical, além da compressão e dilatação, ainda podemos ter uma reflexão em torno de uma reta. O teorema abaixo sintetiza nossos resultados acerca do parâmetro  $a$ :

**Teorema 1.** *Consideremos uma função  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , as constantes reais  $a, b, c$  e  $d$  e a composição  $g : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = af(bx+c)+d$ , sendo  $bx+c \in X$ . Tomando-se por referência o gráfico de  $g$  quando  $a = 1$  temos:*

- (i) *Se  $a > 1$ , então o gráfico de  $g$  é uma dilatação vertical do gráfico de referência.*
- (ii) *Se  $a = 1$ , então o gráfico de  $g$  é o próprio gráfico de referência.*
- (iii) *Se  $0 < a < 1$ , então o gráfico de  $g$  é uma compressão vertical do gráfico de referência.*
- (iv) *Se  $a = 0$ , então o gráfico de  $g$  é uma reta horizontal; gráfico da função constante  $g(x) = d$ .*
- (v) *Se  $-1 < a < 0$ , então o gráfico de  $g$  é uma compressão vertical do gráfico de referência com reflexão em torno da reta horizontal  $y = d$ .*
- (vi) *Se  $a = -1$ , então o gráfico de  $g$  é uma reflexão do gráfico de referência em torno da reta horizontal  $y = d$ ; neste caso temos uma isometria.*
- (vii) *Se  $a < -1$ , então o gráfico de  $g$  é uma dilatação vertical do gráfico de referência com reflexão em torno da reta horizontal  $y = d$ .*

Como exemplo ilustrativo, tomemos  $f(x) = \text{sen}(x)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , como função base e seu gráfico como referência, ou seja, vamos fixar  $b = 1$  e  $c = d = 0$  e fazer  $a$  variar em  $g(x) = af(x) = a \text{sen}(x)$ . As imagens a seguir ilustram as diversas situações apresentadas pelo Teorema 1:



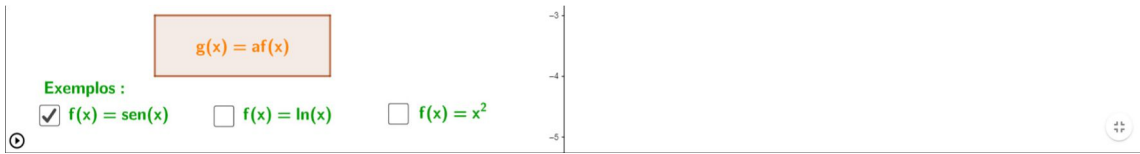


Figura 4: Efeito geométrico do parâmetro a.

É fácil perceber que se a função  $f$  do exemplo acima fosse utilizada, por exemplo, para modelar o comportamento de ondas eletromagnéticas, o parâmetro  $a$  estaria associado à amplitude de tais ondas.

Uma observação interessante é que se utilizarmos a transformação geométrica do plano (cartesiano) no plano  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $T(x, y) = (x, ay)$ , podemos considerar no lugar de  $y = f(x)$  qualquer outra curva ou figura  $F$  no plano do domínio de  $T$  (não necessariamente gráfico de uma função  $f$ ) e teremos como imagem  $T(F)$  uma deformação vertical de  $F$ . Por exemplo, se  $F$  for um círculo de raio  $r$  com centro na origem, então  $T(F)$  é uma elipse com um dos semieixos com comprimento  $r$  (quando  $a \neq \pm 1$  ou  $0$ ).

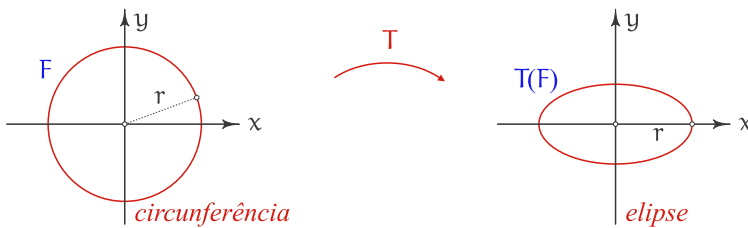


Figura 5: Uma transformação do plano no plano envolvendo o parâmetro a.

#### 4. Análise do Parâmetro b

Nesta seção, vamos considerar a mesma nomenclatura e notações básicas para as funções  $f$  e  $g$  que foram introduzidas na seção anterior, bem como os gráficos de  $f$  e  $g$  em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

O parâmetro  $b$  está relacionado a deformações horizontais a partir do gráfico de referência de  $g(x) = af(bx + c) + d$  quando deixamos  $a$ ,  $c$  e  $d$  fixos.

As definições são análogas àsquelas que demos na seção acima: tomando-se por referência o gráfico de  $g$  para  $b = 1$ , quando a deformação horizontal produzida pela variação de  $b$  no gráfico de referência resulta em um “achatamento” desse gráfico, chamamos a deformação de *compressão*, e, quando a deformação horizontal produzida pela variação de  $b$  no gráfico de referência resulta em um “esticamento” do gráfico, chamamos a deformação de *dilatação*.

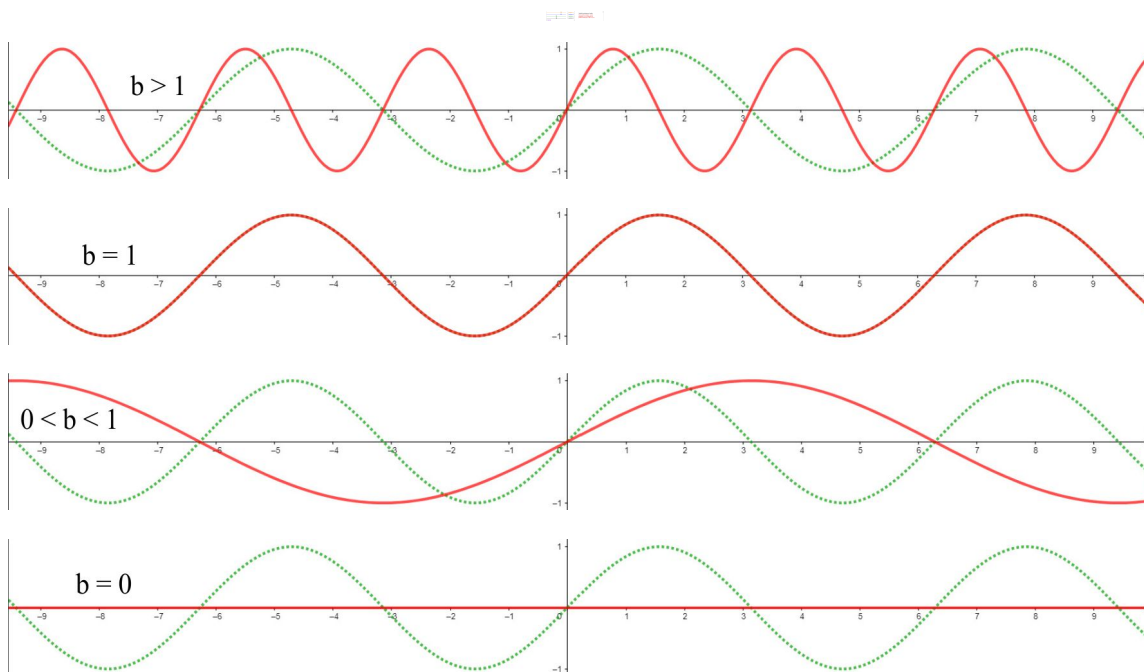
Em uma deformação horizontal, além da compressão e dilatação, ainda podemos ter uma reflexão em torno do eixo das ordenadas (eixo  $y$ ). E essa é uma diferença marcante em relação às deformações verticais da seção anterior, que poderiam ocorrer em qualquer reta horizontal (a depender do valor de  $d$ ). Nas deformações horizontais, a reflexão *sempre* ocorre no eixo  $y$ . O teorema abaixo sintetiza nossos resultados acerca do parâmetro  $b$ :

**Teorema 2.** Consideremos uma função  $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , as constantes reais  $a, b, c$  e  $d$  e a composição  $g: Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = af(bx + c) + d$ , sendo  $bx + c \in X$ . Tomando-se por referência o gráfico de  $g$  quando  $b = 1$  temos:

- (i) Se  $b > 1$ , então o gráfico de  $g$  é uma compressão horizontal do gráfico de referência.
- (ii) Se  $b = 1$ , então o gráfico de  $g$  é o próprio gráfico de referência.
- (iii) Se  $0 < b < 1$ , então o gráfico de  $g$  é uma dilatação horizontal do gráfico de referência.
- (iv) Se  $b = 0$ , então o gráfico de  $g$  é uma reta horizontal; gráfico da função constante  $g(x) = af(c) + d$ , caso  $c \in X$ .
- (v) Se  $-1 < b < 0$ , então o gráfico de  $g$  é uma dilatação horizontal do gráfico de referência com reflexão em torno do eixo  $y$ .
- (vi) Se  $b = -1$ , então o gráfico de  $g$  é uma reflexão do gráfico de referência em torno do eixo  $y$ ; neste caso temos uma isometria.
- (vii) Se  $b < -1$ , então o gráfico de  $g$  é uma compressão horizontal do gráfico de referência com reflexão em torno do eixo  $y$ .

No Teorema 2, é sempre bom enfatizar que a hipótese  $bx + c \in X$  pode restringir as hipóteses de cada item. Em alguns casos nem há itens a considerar. Por exemplo, se a função base for  $f(x) = \ln(x)$  e os parâmetros fixados no gráfico de referência forem  $a = 1, c = d = 0$  (ou seja, o gráfico de referência for o gráfico da própria  $f$ ), então não faz sentido o item (iv), pois teríamos  $g(x) = \ln(0)$ , que não está definido.

Como exemplo ilustrativo, tomemos novamente  $f(x) = \sin(x)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , como função base e seu gráfico como referência, ou seja, vamos fixar  $a = 1$  e  $c = d = 0$  e fazer  $b$  variar em  $g(x) = f(bx) = \sin(bx)$ . As imagens a seguir ilustram as diversas situações apresentadas pelo Teorema 2:





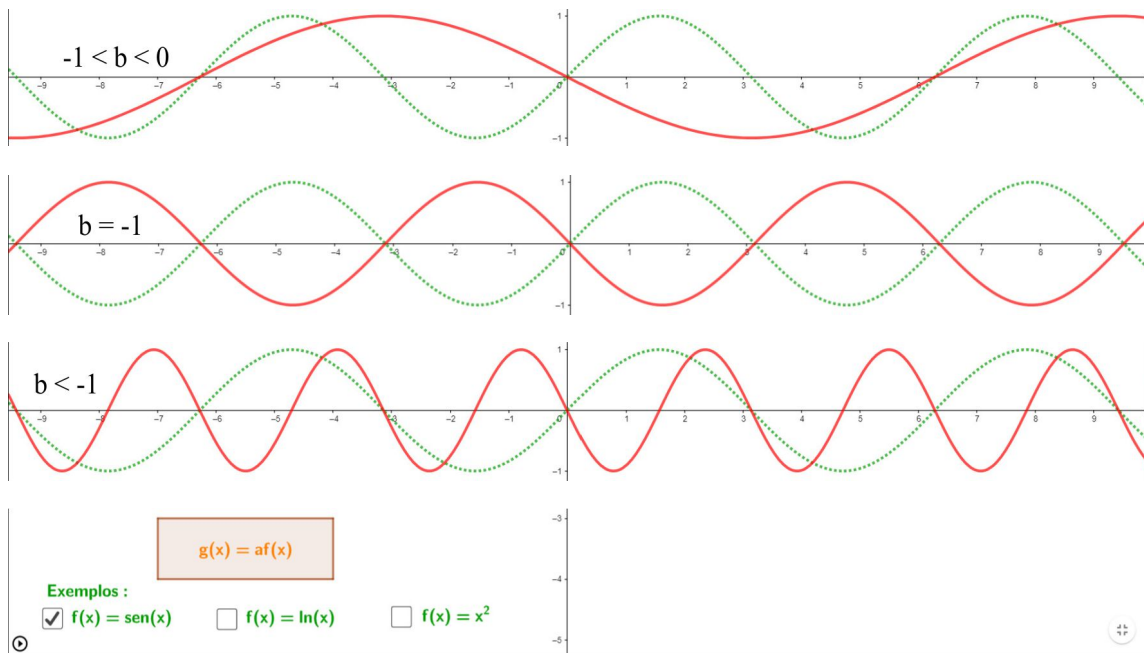


Figura 6: Efeito geométrico do parâmetro  $b$ .

Mais uma vez, é fácil perceber que se a função  $f$  do exemplo acima fosse utilizada, por exemplo, para modelar o comportamento de ondas eletromagnéticas, o parâmetro  $b$  estaria associado à frequência de tais ondas.

Também, de modo análogo à observação que fizemos na seção anterior: se utilizarmos a transformação geométrica do plano no plano  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $T(x, y) = (bx, y)$ , podemos considerar no lugar de  $y = f(x)$  qualquer outra curva ou figura  $F$  no plano do domínio de  $T$ , e teremos como imagem  $T(F)$  uma deformação horizontal de  $F$ .

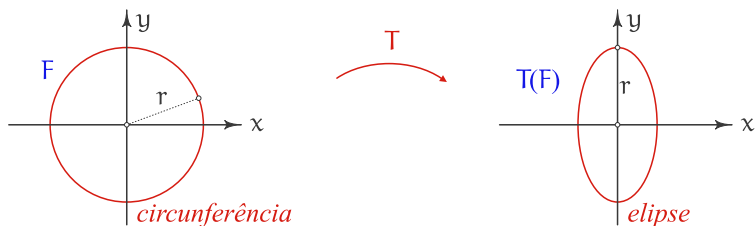


Figura 7: Uma transformação do plano no plano envolvendo o parâmetro  $b$ .

### 5. Análise do Parâmetro c

Mais uma vez, nesta seção, vamos considerar a mesma nomenclatura e notações básicas para as funções  $f$  e  $g$  que foram introduzidas nas seções anteriores, bem como os gráficos de  $f$  e  $g$  em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

A análise do parâmetro  $c$  é mais simples do que a dos parâmetros  $a$  e  $b$ , pois  $c$  está relacionado às translações, que chamaremos de *deslocamentos*, horizontais a partir do gráfico de referência de  $g(x) = af(bx + c) + d$  quando deixamos  $a$ ,  $b$  e  $d$  fixos. Portanto, estamos falando de movimentos isométricos. Não há deformações do gráfico de referência.

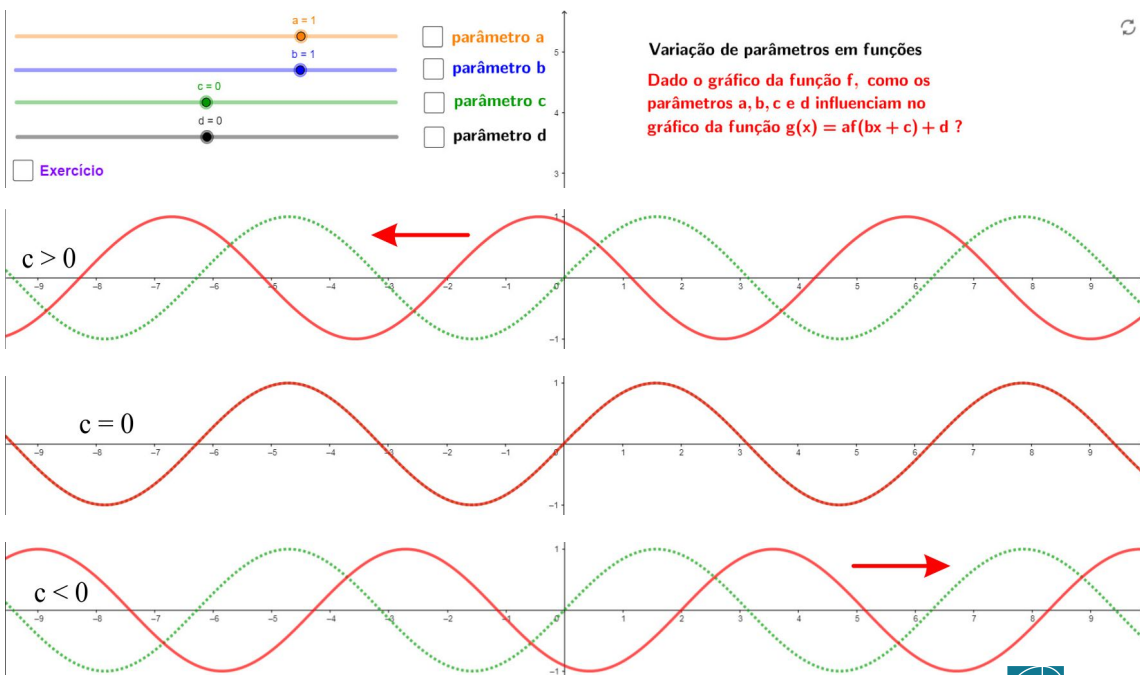
O teorema abaixo sintetiza nossos resultados acerca do parâmetro  $c$ :

**Teorema 3.** *Consideremos uma função  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , as constantes reais  $a, b, c$  e  $d$  e a composição  $g : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = af(bx + c) + d$ , sendo  $bx + c \in X$ . Tomando-se por referência o gráfico de  $g$  quando  $c = 0$  temos:*

- (i) *Se  $c > 0$ , então o gráfico de  $g$  é um deslocamento horizontal, de  $c$  unidades do gráfico de referência, para a esquerda.*
- (ii) *Se  $c = 0$ , então o gráfico de  $g$  é o próprio gráfico de referência.*
- (iii) *Se  $c < 0$ , então o gráfico de  $g$  é um deslocamento horizontal, de  $-c$  unidades do gráfico de referência, para a direita.*

Neste teorema, é interessante observar algo que é, de certa forma, contrário a nossa intuição:  $c$  positivo significa deslocamento para a esquerda e não para a direita, assim como  $c$  negativo significa deslocamento para a direita e não para a esquerda.

Retomemos nosso exemplo ilustrativo das seções anteriores  $f(x) = \text{sen}(x)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , como função base e seu gráfico como referência, ou seja, vamos fixar  $a = b = 1$  e  $d = 0$  e fazer  $c$  variar em  $g(x) = f(x + c) = \text{sen}(x + c)$ . As imagens a seguir ilustram as diversas situações apresentadas pelo Teorema 3:



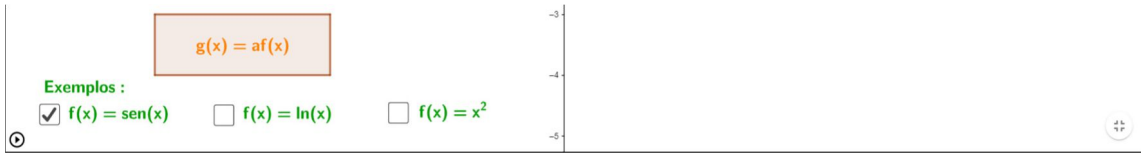


Figura 8: Efeito geométrico do parâmetro  $c$ .

Novamente, é fácil perceber que se a função  $f$  do exemplo acima fosse utilizada, por exemplo, para modelar o comportamento de ondas eletromagnéticas, o parâmetro  $c$  estaria associado à fase de tais ondas.

Também, de modo análogo à observação que fizemos na seção anterior: se utilizarmos a transformação geométrica do plano no plano  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $T(x, y) = (x + c, y)$ , podemos considerar no lugar de  $y = f(x)$  qualquer outra curva ou figura  $F$  no plano do domínio de  $T$  e teremos como imagem  $T(F)$  um deslocamento horizontal de  $F$ .

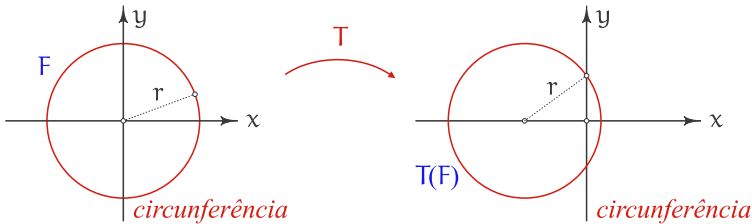


Figura 9: Uma transformação do plano no plano envolvendo o parâmetro  $c$ .

## 6. Análise do Parâmetro $d$

Por fim e mais uma vez, nesta seção, também vamos considerar a mesma nomenclatura e notações básicas para as funções  $f$  e  $g$  que foram introduzidas nas seções anteriores, bem como os gráficos de  $f$  e  $g$  em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

A análise do parâmetro  $d$  é a mais simples dentre todas, pois  $d$  está relacionado às translações, que estamos chamando de *deslocamentos*, verticais a partir do gráfico de referência de  $g(x) = af(bx + c) + d$  quando deixamos  $a$ ,  $b$  e  $c$  fixos. Portanto, assim como na seção anterior, estamos falando de movimentos isométricos. Não há deformações do gráfico de referência.

O teorema abaixo sintetiza nossos resultados acerca do parâmetro  $d$ :

**Teorema 4.** *Consideremos uma função  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , as constantes reais  $a, b, c$  e  $d$  e a composição  $g : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = af(bx + c) + d$ , sendo  $bx + c \in X$ . Tomando-se por referência o gráfico de  $g$  quando  $d = 0$  temos:*

- (i) *Se  $d > 0$ , então o gráfico de  $g$  é um deslocamento vertical, de  $d$  unidades do gráfico de referência, para cima.*
- (ii) *Se  $d = 0$ , então o gráfico de  $g$  é o próprio gráfico de referência.*
- (iii) *Se  $d < 0$ , então o gráfico de  $g$  é um deslocamento vertical, de  $-d$  unidades do gráfico de referência, para baixo.*

É curioso que, ao contrário do que vimos na seção anterior, neste caso, a intuição “casa” com o movimento:  $d$  positivo significa deslocamento para cima, assim como  $d$  negativo significa deslocamento para baixo.

Por fim, vamos ao nosso exemplo ilustrativo das seções anteriores  $f(x) = \text{sen}(x)$  com  $x \in \mathbb{R}$ , como função base e seu gráfico como referência, ou seja, vamos fixar  $a = b = 1$  e  $c = 0$  e fazer  $d$  variar em  $g(x) = f(x) + d = \text{sen}(x) + d$ . As imagens a seguir ilustram as diversas situações apresentadas pelo Teorema 4:

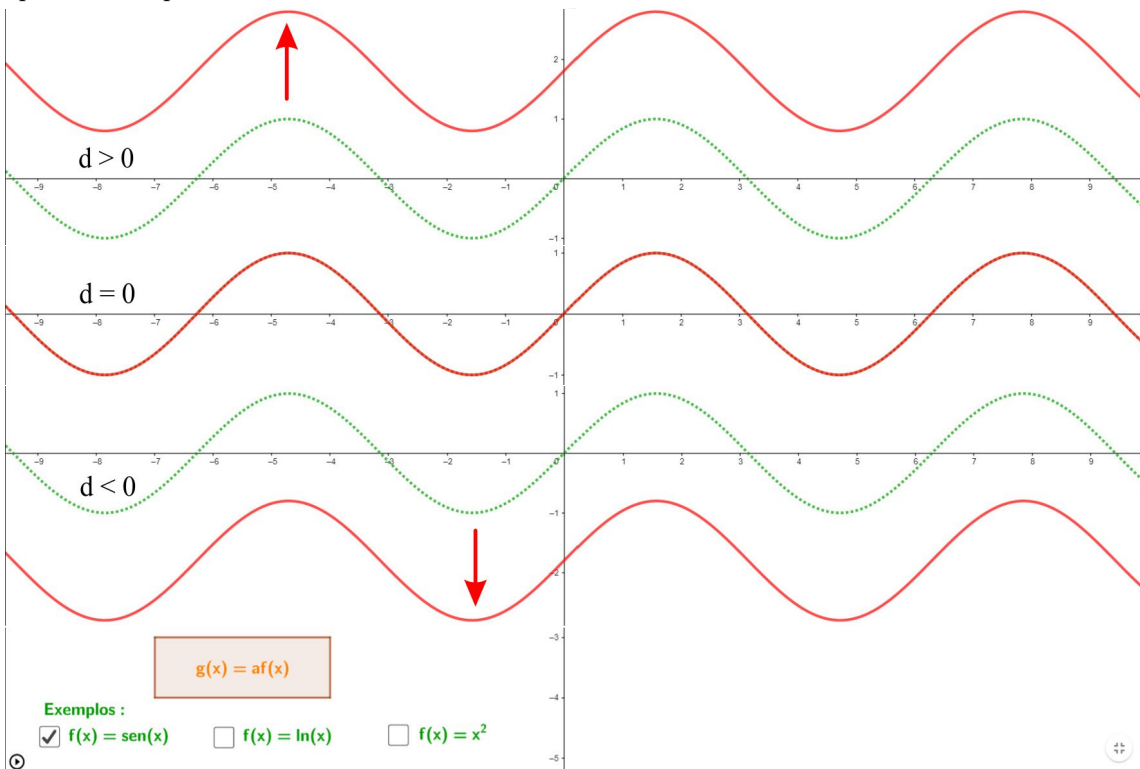


Figura 10: Efeito geométrico do parâmetro  $d$ .

E, mais uma vez, também de modo análogo à observação que fizemos nas seções anteriores: se utilizarmos a transformação geométrica do plano no plano  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $T(x, y) = (x, y + d)$ , podemos considerar no lugar de  $y = f(x)$  qualquer outra curva ou figura  $F$  no plano do domínio de  $T$ , e teremos como imagem  $T(F)$  um deslocamento vertical de  $F$ .

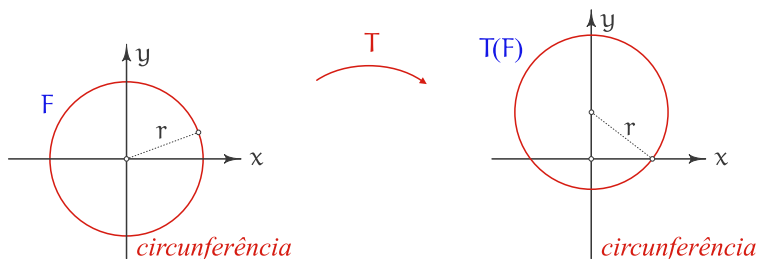


Figura 11: Uma transformação do plano no plano envolvendo o parâmetro  $d$ .

## 7. Algumas Sugestões de Atividades

É claro que podemos trabalhar com ajustes de curvas fazendo a variação de todos os quatro parâmetros estudados nas seções anteriores simultaneamente. Nesse sentido, muitas atividades podem ser propostas, e a construção geométrica feita no GeoGebra pode ajudar muito. Vamos começar com o exercício proposto na própria construção geométrica utilizada para ilustrar as seções anteriores.

### (1) Ajustando uma parábola e verificando que os parâmetros nem sempre são únicos.

Considerando  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = af(bx + c) + d$ , a atividade consiste em ajustar  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  de tal modo que o gráfico de  $g$ , no plano cartesiano, seja uma parábola que possua vértice no ponto  $(2, -2)$  e passe pelos pontos  $(0, -4)$  e  $(4, -4)$ .

Trata-se de um exercício simples, e, após alguma manipulação na construção geométrica, o aluno geralmente chega aos valores  $a = -0,5$ ,  $b = 1$ ,  $c = -2$  e  $d = -2$ , que, na Figura 12 a seguir, chamamos de “Solução 1” e que conduz à parábola de equação cartesiana  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$ .

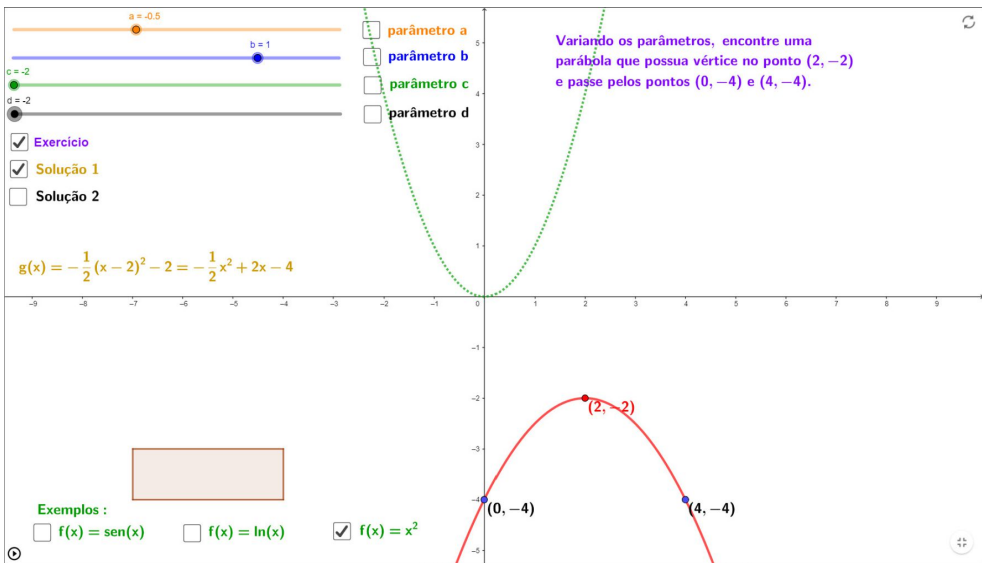


Figura 12: Ajustando os parâmetros de acordo com as exigências do enunciado.

É curioso que os parâmetros escolhidos podem não ser únicos. No caso do exemplo acima, há uma outra solução, não tão trivial quando a primeira, que é obtida fazendo  $a = -1$ ,  $b = 0,5$ ,  $c = -1$  e  $d = -2$ , conforme pode ser constatado na Figura 13 a seguir. Entretanto, é muito importante ter em mente que se há uma única parábola que satisfaça às condições pedidas (e nesse caso a parábola é única mesmo), então a expressão da função  $g$  deve conduzir a uma equação cartesiana de parábola equivalente (igual se o  $y$  estiver isolado) à equação que encontramos acima, ou seja,  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$ .

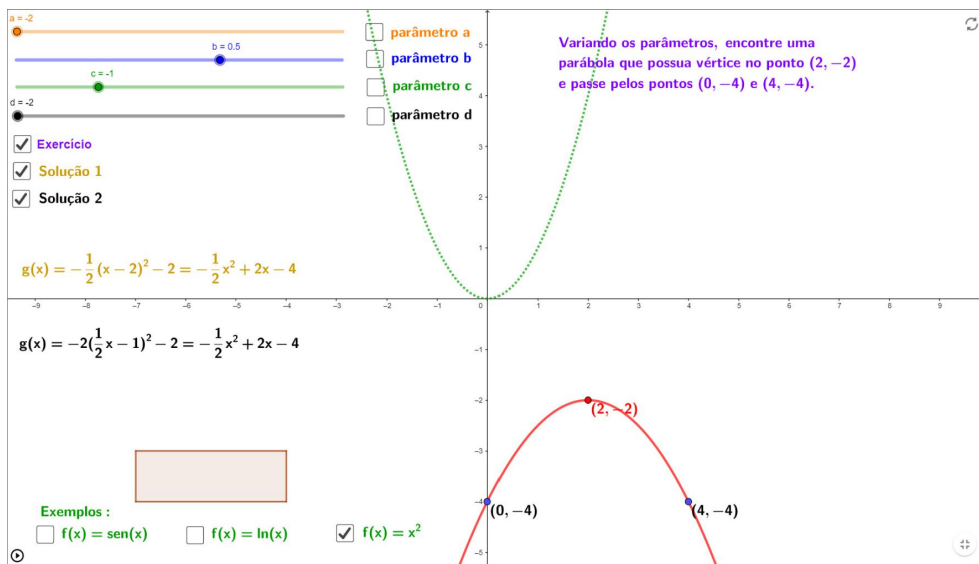


Figura 13: Outra solução para o ajuste de parâmetros.

(2) **Encontrando o gráfico de uma função polinomial de grau até  $n - 1$  que passa por  $n$  pontos com abcissas diferentes dados no plano cartesiano.**

É clássico o resultado que afirma que, dados  $n$  pontos no plano cartesiano, todos com abcissas distintas, existe uma função polinomial de grau até  $n - 1$  cujo gráfico passa pelos  $n$  pontos dados. De fato, se considerarmos  $y = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , ao substituirmos as coordenadas  $(x, y)$  de  $n$  pontos com abcissas distintas, podemos montar um sistema linear  $n \times n$  que possui solução para os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ .

Podemos pensar nos coeficientes de uma função polinomial de grau até  $n - 1$ ,  $g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$  como parâmetros que podem ser variados em uma construção geométrica, similar àquela em que estamos trabalhando, e usá-la para desenvolver o assunto com exemplos simples, variando o número de pontos e o grau do polinômio e analisando quando é possível ter ou não soluções e se elas são únicas ou não.

Em particular, o caso de  $n$  pontos e grau até  $n - 1$  pode ser estendido ao estudo de sistemas lineares possíveis ou compatíveis.

(3) **Por cinco pontos distintos no plano cartesiano existe uma única curva cônica (pode ser degenerada) que passa por eles.**

Eis aqui outro exercício interessante. De modo análogo ao item acima, podemos considerar a equação geral de curva cônica  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  no plano cartesiano. Considerando

que  $a$ ,  $b$  ou  $c$  tem que ser diferente de zero, podemos dividir tal equação por um desses valores e, em vez de considerar seis coeficientes, podemos considerar cinco coeficientes, por exemplo,  $x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$ .

Mais uma vez, podemos pensar em coeficientes como parâmetros e trabalhar com eles em uma construção geométrica similar àquela com a qual estamos ilustrando este texto. Novamente, temos uma ponte para considerar o estudo com  $n$  pontos quaisquer e analisar existência e unicidade de soluções, além do vínculo com sistemas lineares.

Cabe ressaltar que o famoso logo constituído de uma curva fechada passando por cinco pontos do GeoGebra faz lembrar esta sugestão de exercício.

#### (4) **Reta do Método dos Mínimos Quadrados.**

O Método dos Mínimos Quadrados é bem estudado em disciplinas como Cálculo Numérico, por exemplo, e consiste em encontrar uma reta no plano cartesiano que esteja, de certo modo, próxima a um conjunto de pontos dados. Mais especificamente, dados  $n$  pontos  $(x_i, y_i)$  no plano cartesiano, o método consiste em encontrar uma reta  $y = ax + b$  tal que a soma dos quadrados das distâncias verticais dos pontos à reta seja a menor possível. Ou seja, o método consiste em minimizar  $S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$ .

Assim, como nas duas sugestões acima, podemos pensar em  $a$  e  $b$  como parâmetros. Com uma pequena adaptação, podemos calcular no GeoGebra as  $n$  distâncias verticais dos pontos ao gráfico da função afim  $g(x) = ax + b$ . Também podemos calcular a soma  $S(a, b)$  acima e, por meio de ajustes nos parâmetros  $a$  e  $b$ , podemos estimar qual será o menor valor possível para  $S(a, b)$ . É claro que nesse caso temos uma fórmula, que é deduzida nos cursos de Cálculo Numérico e que serve de “gabarito” para essa atividade.

#### (5) **Algumas Equações Diferenciais Ordinárias.**

Em cursos de Cálculo Diferencial e Integral ou, mais especificamente, em cursos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), é comum considerar problemas envolvendo crescimento populacional sem fatores inibidores, problemas envolvendo decaimento radioativo e problemas envolvendo resfriamento (ou aquecimento) de corpos, associados à chamada “Lei de Resfriamento de Newton”. Não é nosso objetivo entrar em detalhes na formulação de problemas aqui neste texto, entretanto, o que esses três problemas possuem em comum é a solução, que são funções da forma  $g(x) = a \cdot e^{kx} + c$  e, às vezes, chamadas de “funções do tipo exponencial”.

Aqui, mais uma vez, podemos enxergar os coeficientes  $a$ ,  $k$  e  $c$  como parâmetros e, de forma análoga ao que escrevemos na sugestão (4) acima, podemos fazer ajustes desses parâmetros tendo por base pontos fornecidos no plano cartesiano que podem, inclusive, representar dados observados na prática (a abscissa é sempre o tempo, e a ordenada representa quantidade de indivíduos, massa de elementos radiativos ou temperatura, a depender do problema). É interessante notar que, na prática, muitas vezes os parâmetros das soluções analíticas encontradas devem sofrer pequenos ajustes para se adequar de modo mais realista possível aos dados coletados. Isso deve-se ao fato de que, frequentemente, é difícil termos situações práticas que se enquadrem com perfeição nas hipóteses que tais EDOs exigem.

### **8. Experiência Didática em uma Turma de Graduação**

A experiência didática aqui relatada faz parte de uma série de atividades planejadas no âmbito de um projeto de ensino, subprojeto do Prossiga, que foi iniciado em março de 2020, sendo um dos objetivos elaborar atividades a serem realizadas pelos estudantes no GeoGebra, que possibilitassem ampliar a aprendizagem em conteúdos matemáticos abordados nas disciplinas do primeiro período do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. Na construção “Variação de Parâmetros em Funções”, pretendíamos explorar dinamicamente os efeitos geométricos no gráfico da função  $g(x) = af(bx + c) + d$ , obtidos a partir da variação dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , com relação ao gráfico de referência correspondente à função  $f(x) = \text{sen}(x)$ . Nosso objetivo é que o estudante possa avançar nos raciocínios empregados para construção e interpretação de gráficos de funções, superando a maneira usual de construir gráficos, a partir de uma tabela de valores predefinidos. Para a realização dessa atividade, pressupomos que o gráfico da função elementar  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \text{sen}(x)$ , já fosse conhecido, bem como os conceitos de domínio, imagem, período e amplitude de  $f$ .

A seguir mostramos o encaminhamento ocorrido durante a experiência didática, que teve duração de 2 horas-aula, ou seja, aproximadamente 1 hora e 40 minutos. Também apresentamos algumas observações que fizemos a partir dos diálogos estabelecidos entre professora e os 18 estudantes presentes no dia da aula.

**Passo 1:** Criamos uma classe no GeoGebra Classroom, a partir da construção descrita na Seção 2, e disponibilizamos o *link* aos estudantes por meio do *chat* de reunião, durante uma atividade síncrona ocorrida no segundo semestre de 2020.

**Passo 2:** Inicialmente, houve a manipulação dos controles deslizantes relativos aos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , feita simultaneamente por parte dos estudantes e da professora, cada um em sua tela, acompanhada de troca de ideias sobre o que estavam observando no gráfico. Foi solicitado aos estudantes que “brincassem” com a construção sem marcar as caixas dos parâmetros. Depois, com a mediação da professora, à medida que cada parâmetro era movimentado, foram visualizadas as sínteses sobre os efeitos geométricos do parâmetro sobre o gráfico de  $g$ , descritas neste texto nos Teoremas 1, 2, 3 e 4.

**Passo 3:** Passamos a discutir o exemplo apresentado na construção, conforme figura a seguir:



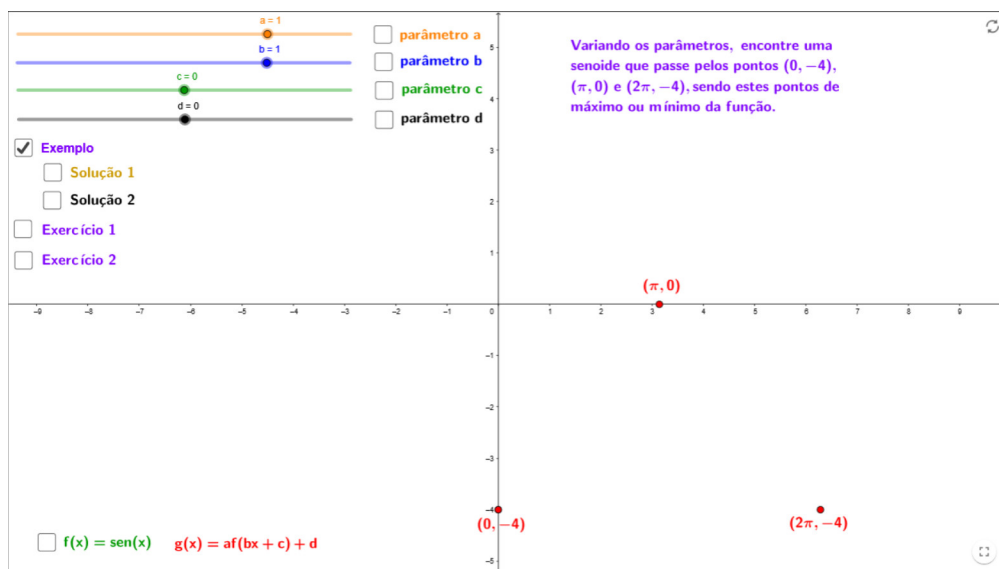


Figura 14: Trabalhando com exemplos.

Nesse momento, direcionamos perguntas aos estudantes para discussão coletiva: Se os pontos dados são pontos de máximo ou mínimo de  $g$ , qual deve ser a imagem dessa função? Qual deve ser sua amplitude? E quanto ao período de  $g$ , houve modificação em relação a  $f$ , sabendo que o gráfico de  $g$  passa por tais pontos? Houve dilatação vertical para se gerar esse gráfico a partir do gráfico de  $\text{sen}(x)$ ? Se o ponto de máximo localiza-se no eixo  $x$ , houve deslocamento? Horizontal ou vertical?

A partir de perguntas como essas, esperamos que os estudantes relacionem a imagem de  $g$  com o parâmetro  $a$  e as coordenadas dos pontos dados com os parâmetros  $c$  e  $d$ . De posse da construção, potencializa-se nos estudantes a postura de investigação exploratória e testagem de hipóteses. As respostas esperadas para este exemplo estão apresentadas na construção como “Solução 1” e “Solução 2”, a partir das quais foi possível observar que, com as condições dadas, não teremos unicidade de soluções.

**Passo 4:** Propusemos aos estudantes que resolvessem os Exercícios 1 e 2, digitando nos campos de resposta a solução encontrada.

1) Variando os parâmetros, encontre uma senoide que passe pelos pontos  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(-\frac{\pi}{2}, 2)$  e  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ , sendo estes pontos de máximo ou mínimo da função. Digite no campo abaixo a expressão encontrada para  $g(x) = af(bx + c) + d$ .

Digite sua resposta aqui...

---

2) Variando os parâmetros, encontre uma senoide de período  $\pi$  que passe pelos pontos  $(\frac{3\pi}{4}, 1)$  e  $(\frac{5\pi}{4}, -3)$ , sendo estes pontos de máximo ou mínimo da função. Digite no campo abaixo a expressão encontrada para  $g(x) = af(bx + c) + d$ .

Digite sua resposta aqui...

---

Figura 15: Campos de respostas.

Nesse momento, os áudios silenciaram e a professora pôde acompanhar os movimentos executados pelos estudantes por meio da classe criada na plataforma do GeoGebra. Dentro da classe, a janela de visualização com a construção “Variação de parâmetros da função seno” tornou-se a *Task 1*. Assim, ao acessar a classe no momento da aula, a professora visualizava a *Task 1* de cada estudante, como na Figura 16 a seguir, na qual ocultamos os nomes dos estudantes.

Aos poucos, alguns estudantes começaram a se manifestar, para esclarecer dúvidas ou solicitar que sua solução fosse corrigida. Apresentaremos algumas observações que nos chamaram a atenção.

- Um dos estudantes anotou, no Exercício 1, a resposta  $g(x) = -1,72f(0,55x - 0,7) + 0,28$ , enquanto outro anotou  $g(x) = -1,82f(0,53x - 0,74) + 0,19$ . Nos dois casos, observamos na construção de cada um deles que os gráficos aparentemente passavam pelos pontos dados, mas  $(-3\pi/2, 0)$  e  $(\pi/2, 0)$  não eram pontos de mínimo de  $g$ . Uma releitura em voz alta do enunciado do Exercício 1 foi suficiente para revelar o erro para os dois estudantes.

## Task 1

Activity: Variação de parâmetros da função seno

|| PAUSE    SHOW NAMES

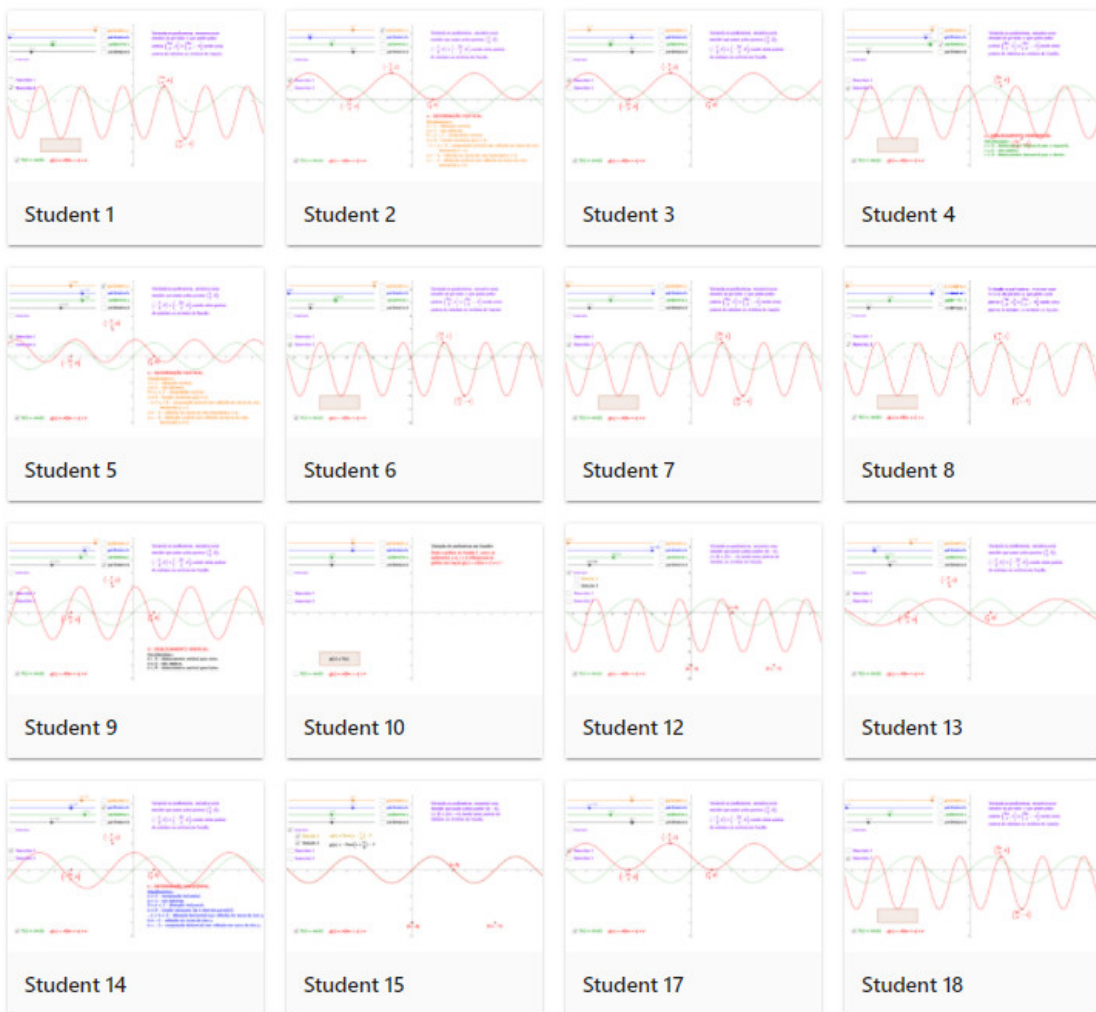


Figura 16: Telas para acompanhamento dos estudantes durante a atividade.

- Um estudante anotou, no Exercício 1, a resposta  $g(x) = -f(x + 0,05) + 1$ , conforme a Figura 17 a seguir. Visualmente, o gráfico parece passar pelos pontos dados, mas uma simples substituição mostra que, por exemplo,  $g(\pi/2)$  é diferente de 0.

No diálogo com o estudante, percebemos que ele concluiu por esses valores para os parâmetros a partir apenas da manipulação dos controles deslizantes na figura, sem fazer associação com os efeitos geométricos discutidos anteriormente. Então, a partir desse erro, foi possível discutir com ele a questão das limitações de qualquer programa computacional, pois, na construção feita no GeoGebra, a linha representativa do gráfico de  $g$  tem uma espessura e os pontos na verdade são

representados por pequenos círculos. Pontuamos sobre a incompatibilidade gerada pelo valor escolhido para o parâmetro  $c$ , ao raciocinarmos sobre os efeitos geométricos de cada parâmetro na resposta do estudante.

← Student 3

This is just a preview and won't be saved.

### Task 1

Activity: Variação de parâmetros da função seno

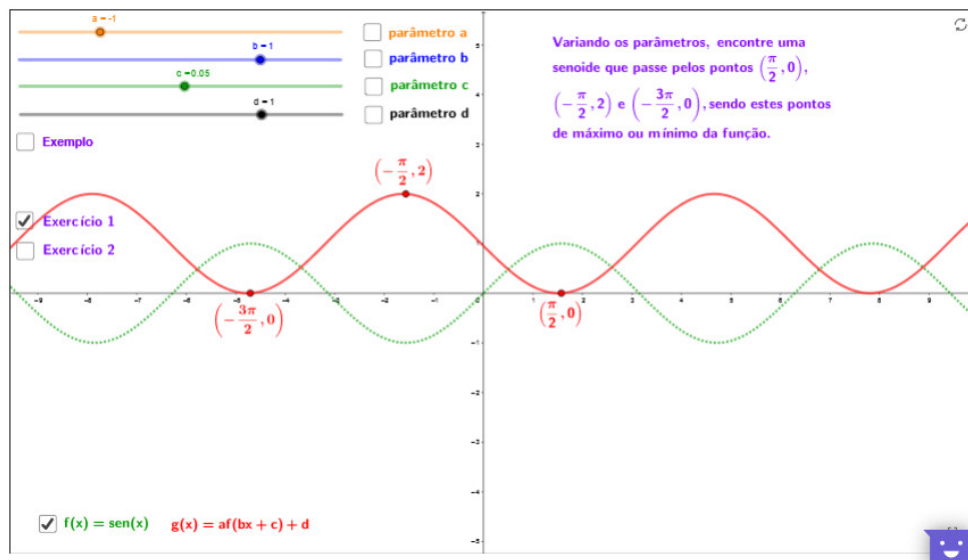


Figura 17: Soluções aproximadas que parecem exatas.

## 9. Conclusões

Concluimos que foi importante, durante a realização da experiência citada na seção anterior, o estabelecimento de um “intervalo de silêncios”, ou seja, de um tempo destinado à manipulação individual por parte de cada estudante, que possibilitasse a reflexão a partir dos efeitos percebidos no gráfico. Por outro lado, percebemos que o diálogo da professora com os estudantes foi igualmente valioso e fundamental para a construção da aprendizagem, procurando reconhecer acertos e discutir significados a partir dos erros observados.

Nesse sentido, considerando o contexto de aulas remotas a que estamos submetidos, o recurso Classroom da plataforma do GeoGebra, utilizado em atividades síncronas, proporcionou um ambiente efetivo para interações entre estudantes, professora e as ferramentas do *software* em si. De um lado, é um recurso prático, visto não ser necessário conta cadastrada dos estudantes para entrar no ambiente. Por outro lado, possibilita que o professor veja a tela do estudante e seus registros na atividade, mesmo estando a distância. Esperamos que a proposta aqui discutida possa suscitar novas experiências didáticas voltadas à aprendizagem de gráficos de funções, articulando dinamicamente representações algébricas e gráficas.

Sabemos que o presente cenário educacional de realização de aulas remotas, quando existem condições que as tornam possíveis, foi precipitado pelo período de isolamento social a que fomos

submetidos. Há alguns anos muitos pesquisadores já vinham discutindo e apontando o ensino híbrido como uma forte tendência educacional, pelos benefícios que traz para o processo de ensino e aprendizagem ([7], [8] e [2]).

Em um futuro próximo, quando for possível a volta aos modelos presenciais, há muitas possibilidades para avançarmos em experiências didáticas híbridas no ensino e aprendizagem de Matemática, trazendo recursos do GeoGebra, tanto do *software* quanto da plataforma, para atividades que promovam mais interação e reflexão dos estudantes.

## Agradecimentos

Agradecemos à equipe de colaboradores do subprojeto do Prossiga.

## Referências

- [1] ALVES, S. e GALVÃO, M.E.E.L. *Um Estudo das Transformações Elementares*. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. 1996.
- [2] BACICH, L.; NETO, A. T.; TREVISANI, F. M. *Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação*. Porto Alegre: Penso, 2015.
- [3] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*. 3ª. ed. São Paulo: Harbra. 1986.
- [4] LIMA, E. L. *Isometrias*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção do Professor de Matemática). 1996.
- [5] EVES, H. *Estudio de las Geometrias*. Vol. 1 Cidade do México: Centro Regional de Ayuda Tecnica. 1969.
- [6] LEDERGERBER-RUOFF, E. B. *Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano*. São Paulo: Atual Editora / Editora da Universidade de São Paulo. 1982.
- [7] MORAN, J. “Metodologias ativas e modelos híbridos na educação”. In: *Novas tecnologias digitais: reflexões sobre mediação, aprendizagem e desenvolvimento*. Curitiba: CRV, 2017, p. 23-35.
- [8] VALENTE, J. A. “Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida”. *Educar em Revista*, Curitiba, n. 4, pp. 79-97, 2014.

Edson Agustini  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia - MG  
<[agustini@ufu.br](mailto:agustini@ufu.br)>

Érika M. C. Lopes  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia - MG  
<[erikalopes@ufu.br](mailto:erikalopes@ufu.br)>

Recebido: 15/10/2020  
Publicado: 02/02/2021

Chamada Temática “Experiências didáticas em Matemática no período de isolamento social”