PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.9, n.1, 2021
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo96

# Sequência Fedathi na prática : Mediação docente em uma sessão didática sobre conjuntos no grupo de educação matemática do laboratório multimeios (GEM²)

Carlos Henrique Delmiro de Araújo    Milínia Stephanie Nogueira Barbosa Felício
Daniel Brandão Menezes    Hermínio Borges Neto

**Resumo**

O trabalho versa sobre um dos encontros do Grupo de Educação Matemática do Laboratório Multimeios (GEM²) realizado de forma virtual durante o semestre 2020.1 na Faculdade de Educação (Faced/UFC) da Universidade Federal do Ceará (UFC). A proposta nesse semestre foi discutir Matemática Discreta e a Sequência Fedathi (SF), metodologia de ensino que procura guiar o professor em sua prática com o intuito de tornar o aluno um ser ativo na aprendizagem. O objetivo do artigo é ilustrar ao GEM² uma apresentação sobre Conjuntos com o aporte metodológico da SF e demonstrações de teoremas introdutórios dos estudos relacionados a essa temática. A natureza da pesquisa é qualitativa, delineada com pesquisa participante. Acredita-se que trabalhar conteúdos por meio da SF favorece maior maturação dos participantes por meio de seus fundamentos e etapas. É possível verificar a prática fedathiana na estrutura metodológica do mediador, intervindo na participação dos integrantes do grupo que se permitiram cooperar. Embora nem todos os participantes tenham se envolvido diretamente com os questionamentos, considera-se a real modificação das estruturas de apresentação dos trabalhos do grupo, tornando mais evidente a imersão na prática.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática; Metodologia de Ensino; Matemática Discreta.

**Abstract**

The work addresses one of the meetings of the Group of Mathematical Education of the Multimeios Laboratory (GEM²) held virtually during the semester 2020.1 at the Education College (FACED / UFC) of the Federal University of Ceará (UFC). The proposal this semester was to discuss Discrete Mathematics and the Fedathi Sequence (SF), a teaching methodology that seeks to guide the teacher in his practice in order to make the student an active being in learning. The purpose of the article is to illustrate to the group a presentation on "Sets"with the methodological contribution of the SF and demonstrations of introductory theorems of studies related to this theme. The research is qualitative, outlined with participant research. It is believed that working with content through the SF favors greater maturation of the participants through its fundamentals and stages. It is possible to verify the fedathiana practice in the mediator's methodological structure, intervening


SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

in the participation of the group members who allowed themselves to cooperate. Although not all participants were directly involved with the questions, the real change in the presentation structures of the group's works is considered, making immersion in practice more evident.

**Keywords:** Mathematics Teaching; Teaching Methodology; Discrete Mathematics.

## 1. Introdução

Inserido na Faculdade de Educação (Faced/UFC) da Universidade Federal do Ceará (UFC), o Laboratório de Pesquisas Multimeios (MM)[1] possui grupos com o propósito de desenvolver estudos no ensino de Matemática, Informática Educativa e Formação de Professores. Delimitando a ótica para o ensino de Matemática, o grupo de estudos para essa temática é nomeado "Grupo de Educação Matemática Multimeios (GEM²)".

Esse grupo realiza encontros presenciais com periodicidade semanal, pelo período da manhã, todas as segundas-feiras. Devido, porém, à pandemia mundial ocasionada pelo Covid-19, o grupo aderiu a encontros síncronos por meio de videoconferência. Antes da pandemia, o grupo possuía características do EaD, nos quais as postagens dos apresentadores com uma semana de antecedência no ambiente Teleduc geram debates em fóruns, estendendo as discussões que aconteceram no encontro, como também a sugestão de leituras complementares para a desenvoltura do grupo.

Os estudos e apresentações realizadas no GEM² possuem o aporte metodológico da Sequência Fedathi (SF). Para o semestre de 2020.1, o coordenador do grupo, professor Dr. Hermínio Borges Neto, levantou o estudo de tópicos em Matemática Discreta e como propor o ensino desses tópicos à luz da SF.

Para realizar o estudo em Matemática Discreta, foi sugerida pelo coordenador do grupo a obra de Stanat e McAllister (1977). Todavia, durante os estudos, alguns dos integrantes sentiram a necessidade de ver o tratamento da SF perante esse campo matemático, e se seria possível abordar demonstrações que o corpo do texto oferece.

Então, partindo dessas ansiedades relatadas, o como proceder o ensino de tópicos em Matemática Discreta e suas respectivas demonstrações à luz da SF, tem-se a seguinte pergunta norteadora: como abordar as demonstrações matemáticas versadas em Stanat e McAllister (1977) para um grupo de pessoas que possuem familiaridade com a Matemática Discreta, no ensino concebido por meio da SF?

Diante disso e de posse da Taxonomia de Bloom (ANDERSON *et al.*, 2001), para formular o objetivo desse trabalho, aborda-se a categoria Aplicação. A justificativa do uso do verbo aplicar parte da definição de Ferraz e Belhot (2010, p. 426), na qual os autores afirmam que a categoria Aplicação é definida como a "Habilidade de usar informações, métodos e conteúdos aprendidos em novas situações concretas."

Como o grupo de estudo possui *expertise* em Matemática Discreta e estuda a SF como metodologia de ensino, na apresentação foram usadas essas informações em novas situações de ensino, sendo assim uma materialização dos estudos realizados.

Logo, o objetivo desse trabalho é ilustrar (um dos verbos sugeridos na categoria Aplicação) ao GEM² uma apresentação sobre Conjuntos com o aporte metodológico da SF e demonstrações de teoremas introdutórios dos estudos relacionados a essa temática.

[1] http://www.multimeios.ufc.br/index.php

Com isso, este trabalho está dividido em introdução, na qual apresenta-se a motivação da pesquisa e, de forma breve, o campo de estudo. Em seguida, considera-se a fundamentação teórica, retratando a metodologia de ensino SF. Posteriormente, o processo metodológico, ou seja, como se deu a coleta de dados, o tipo de pesquisa realizada e a explanação dos métodos de análise. Adiante, a descrição da apresentação junto da realização da análise dos dados. Por fim, as considerações finais levantadas desse estudo.

## 2. Fundamentação Teórica

A SF é uma metodologia de ensino que busca a interação ativa entre os participantes da sessão didática e a construção do conhecimento partindo de problemas generalizáveis. Essa situação generalizável é, conforme Menezes (2018, p. 43), “[...] que seu modo de executar possa também solucionar outras inúmeras situações.”

A exemplo do generalizável, as proposições demonstradas na sessão didática transcrita nesse trabalho usam a ideia de demonstração direta[2], que é possível validar outras inúmeras proposições e teorema com essa técnica.

Para apresentar o problema generalizável, a SF prevê a etapa Tomada de Posição. Com o intuito de pensar, conjecturar, criar hipótese do problema, a SF caracteriza essa etapa como Maturação. Quando apresentada uma solução para o problema, denomina-se etapa Solução. Por fim, o professor sistematiza essa solução e formaliza o conteúdo que o problema aborda, alcançando assim a etapa Prova.

Essas etapas possuem participações ativas de alunos e uma postura mediadora do professor. Para tanto, o professor apresenta o problema (ou o aluno pode propor) e os alunos buscam elaborar uma solução (Maturação). Em caso de dúvidas, o professor não responde de prontidão os questionamentos levantados pelos alunos, mas sim o faz refletir sobre o que está em jogo, com uso de artifícios denominados fundamentos, pela SF.

Esses fundamentos são a Pergunta, uma Pedagogia Mão no Bolso, o Contraexemplo, a Concepção do Erro e a Mediação. Para caracterizar a Pergunta, Sousa (2015, p. 47) diz que ela “[...] refere-se a uma situação em que o professor interpela, interroga, instiga o aluno a pensar sobre o problema proposto como desafio para sua aprendizagem [...]”. Dessa forma, o professor não soluciona os problemas ou dúvidas dos alunos com algo pronto, mas sim como mediador para o aluno, sujeito ativo, construir o seu aprendizado.

Com essa postura perante os alunos, de não resolver por eles, o professor propicia um ambiente em que se deve pôr a “mão na massa”, seja pesquisando ou debatendo com os colegas, partindo das mediações do professor e seus entraves. Dessa forma, o professor torna o aluno ativo no processo de aprendizagem, e essa ação é vista na SF como Pedagogia Mão no Bolso.

Mas, mesmo após o professor realizar a Pergunta para o aluno refletir diante de seus entraves e ele não conseguir avançar, o professor pode abordar um Contraexemplo sobre o qual ele tenha conhecimento, e, assim, entender o processo de solução que ele pode criar com as suas ideias.

Outro caso que pode ocorrer é o aluno apresentar uma ideia ou solução errônea. O professor pode realizar perguntas para instigá-lo a notar seu erro. Se, porventura, o aluno não perceber o erro, o professor pode utilizar contraexemplos para “abrir os olhos” perante o erro. Essa postura de não

[2]“[...] a hipótese fornece informações suficientes que permitem usá-la para deduzir diretamente a tese [...]” (MORAIS FILHO, 2016, p. 193).

indicar o que errou, mas de fazer com que o aluno encontre o erro partindo da mediação docente, é caracterizada pela SF de Concepção do Erro. Esses fundamentos da SF relatados possuem uma base para propiciar essas ações em sala de aula, que é a mediação pedagógica.

A Mediação é definida por Pinheiro (2018, p. 44) como uma ação "[...] que tem por objetivo favorecer a imersão do aluno à prática do pesquisador que desenvolve o conteúdo que se pretende ensinar." Nota-se que a autora esclarece essa participação ativa no aprendizado, sendo o aluno o pesquisador responsável por desenvolver o assunto (Maturação/Solução), e o professor aquele que ensina o saber (Prova).

## 3. Procedimentos Metodológicos

Essa pesquisa é de natureza qualitativa, visto que "a pesquisa qualitativa possui o poder de analisar os fenômenos com consideração de contexto." (LEITE, 2008, p. 100). De fato, foi analisado o proceder da sessão didática considerando o contexto, em que, de 12 participantes do encontro do GEM², 11 possuem graduação em Matemática. Tal fato colaborou com um *plateau*[3] diferente para o ensino de Conjuntos, pois a sessão didática aqui descrita não é plausível para o uso no Ensino Médio, uma vez que os pré-requisitos aqui determinados são oriundos de disciplinas de um curso de Matemática. O outro participante possui graduação na área de Computação, com experiência em Matemática Discreta. A tipologia científica empregada é a participante, visto que ,

> *É aquela em que o pesquisador, para realizar a observação dos fenômenos, compartilha a vivência dos sujeitos pesquisados, participando, de forma sistemática e permanente, ao longo da pesquisa, das suas atividades.* ((SEVERINO, 2007, p. 120).

De fato, o pesquisador vivenciou a mediação realizada à luz da SF (sistematizou o ensino), permaneceu durante todo o processo de ilustração (foi o professor da sessão didática) da atividade abordada e vivenciou o antes, durante e depois do ocorrido. Como instrumento metodológico de coleta de dados, teve o uso da gravação da videoconferência realizada no *software* Microsoft Teams no dia 20 de abril de 2020. Vale ressaltar que as apresentações anteriores à do dia 20 de abril de 2020 abordaram os capítulos 0 e 1 da obra de Stanat e McAllister (1977). Com o intuito de analisar a sessão didática, além de relacionar os momentos do encontro com as etapas e fundamentos da SF, avaliou a postura docente e discente (atribuindo ao apresentador o papel de professor e aos demais participantes o papel de alunos) de acordo com os aspectos fundamentais que Souza (2013) aponta para a aplicação didática da SF.

[3]"O levantamento dos conhecimentos prévios e interesses de aprendizagem dos sujeitos [...]" (SANTANA, 2019, p. 214).

Figura 1: Avaliação qualitativa de uma aplicação da SF

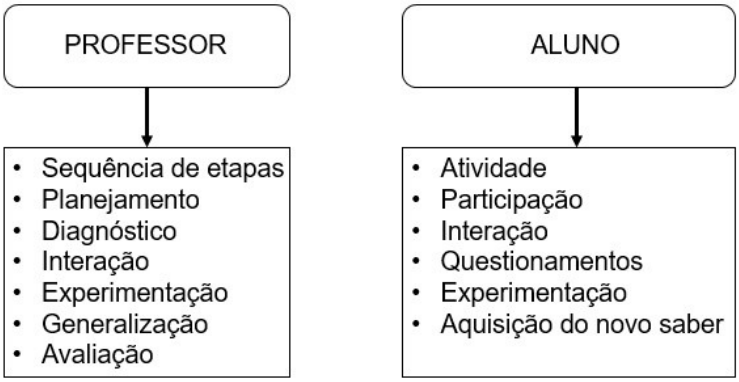


Figura 2: Fonte: Souza (2013, p. 41).

Essas categorias são abordadas na análise de dados, a título de avaliar quais desses aspectos foram contemplados. A justificativa de tais parâmetros para a avaliação desse trabalho recai na afirmação de Souza (2013), de que, para ter a eficácia nos resultados de aprendizagem com o aporte metodológico da SF, deve-se atender a esses aspectos, fundamentais para uma aplicação que envolva essa metodologia de ensino.

## 4. Aplicação da Sessão Didática

Como já mencionado, esse encontro contou com 12 participantes e o apresentador (que se trata na figura de professor). Para identificar as falas dos participantes, adotou a nomenclatura Aluno n, com n variando de 1 até 12; por exemplo, Aluno 1, em que n é o número 1. O tema foi "Conjuntos", abordando a pertinência e a relação entre conjuntos. Sobre os sujeitos, 91% dos participantes possuem graduação em Matemática, o restante possui graduação na área de Computação.

Perante a maioria ter experiência com os conteúdos de Matemática, em nível de graduação, notou-se que uma abordagem no moldes do Ensino Médio não traria desafios para os membros. Diante disso, observou-se a necessidade de buscar temas de Matemática que pudessem abordar as definições de pertinência e relação de conjuntos, como também as demonstrações dos teoremas nessa temática.

Para a SF, a definição dos pré-requisitos e o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes enquadra-se no *plateau*. Isso corrobora com a fala de Borges Neto (informação verbal)[4] na qual afirma que "Na heterogeneidade, os alunos devem possuir os conhecimentos essenciais para maturar e solucionar o problema proposto." Diante disso, o *plateau* abordado foi o seguinte:

[4]Palestra proferida por Hermínio Borges Neto no IX Dim@n-line, 6 de maio. 2020.

Tabela 1: Descrição do *plateau*

| | |
|---|---|
| Sequência Numérica | Uma família com índices no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ dos números naturais chama-se uma sequência. (LIMA, 2013a, p. 23). |
| Intervalos Reais | “[...] as seguintes notações para representar tipos especiais de conjuntos de números reais, chamados intervalos: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} = a \leqslant x \leqslant b\}$ $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leqslant b\}$ $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} = a < x < b\}$ $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} = a \leqslant x < b\}$ $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x\}$ $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} = a < x \leqslant b\}$ $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$ (LIMA, 2013b, p. 16). |
| Limite no Infinito | Se n é um número inteiro positivo, então: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ e (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ (FLEMMING; GONÇANVES, 2006, p. 85). |
| Congruência | Sejam dois números naturais a e b que, após efetuadas as divisões euclidianas por outro número natural m, não nulo, produzem o mesmo resto. Dizemos então que a é congruente com b módulo m. Simbologia: $a \equiv b \pmod{m}$. (SANT’ANNA, 2013, p. 11) |
| Espaço Vetorial | Um *espaço vetorial* E é um conjunto cujos elementos são chamados *vetores*, nos quais estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores $u, v \in E$ faz corresponder um novo vetor $u + v \in E$, chamado a *soma* de u e v, e a *multiplicação por um número real*, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in E$ faz corresponder um vetor $\alpha \cdot v$, ou $\alpha v$, chamado o *produto* de $\alpha$ por v. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, as condições abaixo, chamadas os *axiomas* de espaço vetorial: **comutatividade:** $u + v = v + u$; **associatividade:** $u + (v + w) = (u + v) + w$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$; **vetor nulo:** existe um vetor $0 \in E$, chamado vetor nulo ou *vetor zero* tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in E$; **inverso aditivo:** para cada vetor $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$ chamado o inverso aditivo ou o simétrico de v tal que $-v + v = v + (-v) = 0$; **distributividade:** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$; **multiplicação por 1:** $1 \cdot v = v$ (LIMA, 2012, p. 1). |

Tabela 2: Fonte: Elaborado pelos autores.

O apresentador (na função de professor) iniciou a sessão didática com *slides* para abordar as definições descritas na Tabela 1, sempre indagando se alguém tinha dúvidas ou não relembrava tais conceitos. A turma assentiu, dizendo que estavam recapitulando os assuntos.

Com o intuito de conceber as definições de pertinência e inclusão, para ter arcabouço com a finalidade de demonstrar teoremas acerca da inclusão de conjuntos, utilizou-se a seguinte Tomada de Posição.

Tabela 3: Quadro 1: Tomada de Posição para o conceito de pertinência

| |
|---|
| Vejamos a sequência: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$.1. Qual é o termo geral da sequência? 2. Qual é o limite dessa sequência quando n tende ao infinito? |
| 3. Se X = $(0, +\infty)$ qual relação que podemos fazer com o limite encontrado em 2? |
| 4. O que fazer para o limite da sequência pertencer a X? |

Tabela 4: Fonte: Elaborado pelos autores.

Essas perguntas foram alicerçadas na classificação de Souza (2013), denominadas de Perguntas Esclarecedoras, Perguntas Estimuladoras e Perguntas Orientadoras. Conforme Souza (2013, p. 26) a questão 1 pode ser caracterizada como uma Pergunta Esclarecedora, pois "[...] têm por objetivo verificar o que e como os alunos estão entendendo sobre o que está sendo apresentado [...]". Isso deve-se ao fato de tentar relacionar algo realizado no *plateau* com a atividade presente.

As questões 2 e 3 podem ser interpretadas como Perguntas Estimuladoras, pois para Souza (2013, p. 27), essa classificação "[...] tem como objetivo levar o aluno a fazer descobertas." Nota-se que, utilizando conhecimentos tratados no *plateau*, as respostas dessas questões coadunam para a definição de pertinência que a questão 4 sugere, caracterizando em novas descobertas.

E a questão 4, Souza (2013, p. 27) afirma ser "[...] aquelas que o professor leva o aluno a tentar estabelecer compreensões e relações entre o problema e o caminho a seguir para chegar à solução." Portanto, com a solução dessa questão, o professor afere a mediação para concluir a definição de pertinência de um elemento a algum conjunto.

Esclarecidas as justificativas de tais perguntas, tem-se em relação ao Quadro 1, para a questão 1, como resposta dos alunos da turma $\frac{1}{n}$ . O Aluno 1 enfatizou: "um sobre n, em que n varia de um ao infinito.". Nota-se que ele deu uma solução justificada para o problema (Solução). Diante da resposta satisfatória, o professor formalizou o termo geral da sequência de acordo com a solução dada pela turma (Prova). E fase de Maturação? Para essa fase, conforme relatos, apresenta-se de modo breve o raciocínio utilizado para elucidar suas soluções.

Na questão 2, houve um período de silêncio durante a videoconferência (Maturação). Após esse momento, o Aluno 1 respondeu que o limite seria 0. Para tanto, o professor pediu a justificativa, e ele respondeu: "Porque quando n tende ao infinito, fica um número sobre o infinito, um número muito grande, então essa divisão tende a zero." Nota-se, de maneira ingênua, a utilização do *plateau* sobre limites infinitos relatado na Tabela 1. Frente a isso, o professor formalizou a resposta com a utilização do teorema presente na Tabela 1 sobre limites infinitos.

No momento em que foi abordada a questão 3, o Aluno 2 respondeu que todos os pontos da sequência faziam parte do conjunto X. A questão, porém, referia-se ao número 0, resultado do limite realizado na questão 2. Então o professor indagou sobre a relação do 0 com o conjunto dado. Perante isso, o Aluno 2 respondeu: "Não está, mas o zero não é dessa sequência, ela tende a zero."

Dessa forma, o aluno ainda não havia notado qual a ideia da questão 3, que remeteu ao limite da sequência, em vez de seus valores.

Tratando-se de SF, notam-se as idas e vindas entre as fases Maturação e Solução, visto que a cada pergunta do professor (fundamento da SF), o aluno repensa e reorganiza sua solução para então expor um novo pensamento, ou uma complementação da sua premissa anterior. Assim constata-se o uso também da Pedagogia Mão no Bolso, em que o professor não realizou a atividade no lugar do aluno, oportunizando tempo para que a ideia fosse maturada.

Diante disso, o professor perguntou se o limite da sequência está no conjunto dado, obtendo como resposta da Aluna 3 que não. Após isso, o professor passou para a questão 4. Para tanto, o Aluno 2 disse: "Ou você considera um novo conjunto, onde o extremo inferior seja fechado no 0 ou então você redefine uma outra sequência.". E então o professor tomou a primeira solução dada, em que redefiniu o conjunto, incluindo o zero nele.

A ideia principal dessas quatro questões era conceber o conceito de pertinência; à vista disso, o professor apresentou a definição: "Dado qualquer objeto x e um conjunto S, se x é um elemento do conjunto S, então escrevemos $x \in S$ [...]" (STANAT; MCALLISTER, 1977, p. 75, tradução nossa)[5].

Nos encontros passados a esse, foram apresentados os conceitos de lógica (interpretados como conhecimentos prévios para essa sessão didática). Para tanto, exibiu a definição de "não pertence" com o uso dos conceitos presentes na lógica matemática e na linguagem de conjuntos: "Se x não é um elemento de S, então escrevemos $\neg(x \in S)$ ou $x \notin S$" (STANAT; MCALLISTER, 1977, p. 75-76, tradução nossa)[6].

Com o objetivo de contemplar o axioma da extensão, utilizou-se o seguinte problema.

Tabela 5: Quadro 2: Tomada de Posição para o axioma da extensão

| |
|---|
| 1. Seja $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e considere a multiplicação usual para operar os elementos. Quais os possíveis resultados que as multiplicações geram? |
| 2. Agora, tome a multiplicação em A: sendo o $\pmod{10}$, quais são os possíveis resultados? |
| 3. Qual a relação entre os conjuntos A e Z? |

Tabela 6: Fonte: Elaborado pelos autores.

As questões 1 e 2 (Quadro 2) podem ser caracterizadas como Perguntas Esclarecedoras, e a questão 3 (Quadro 2) como Pergunta Estimuladora. Quando apresentada a questão 1, o Aluno 2 respondeu: "Dois vezes quatro é igual a oito. Quatro vezes quatro, oito." Note que ele não realizou a multiplicação com todos os elementos do conjunto A. Diante disso, o professor perguntou se esses dois resultados fornecidos seriam todos os possíveis (presença da Pedagogia Mão no Bolso e a Pergunta), então ele respondeu: "Para operação fechada, sim!". Para esse aluno, em sua interpretação da questão, o produto entre dois termos do conjunto tinha que ser um elemento do conjunto, porém o enunciado não fazia essa restrição.

[5] Tradução de: *"Given any object* x *and set* S *if* x *is an element of the set* S *we will write* $x \in S$ [...]"
[6] Tradução de: "*[...] if* x *not an element of* S*, we will write* $\neg(x \in S)$ *or* $x \notin S$*."*

Dando prosseguimento a esse momento de Maturação e Solução, sem a preocupação da linearidade, o professor questionou: "Se não for fechada? Pois estamos utilizando a multiplicação usual." E então a Aluna 3 diz, nessa ordem: "Quatro, oito, doze, dezesseis, vinte e quatro, quarenta e oito, sessenta e quatro e o trinta e seis." Percebe-se que ela realizou as multiplicações, mas não forneceu o resultado do produto oito vezes quatro. Mas diante da resposta, o professor sintetizou a solução com todos os resultados possíveis. Foi nomeado de X o conjunto de todos os produtos possíveis.

Adentrando na questão 2 (a resposta dada é definida como o conjunto Z), o Aluno 2 afirmou: "Dá aquelas que falei: o quatro e o oito." Diante disso, o professor polemiza: "Apenas quatro e oito?" Apesar de utilizar a Pedagogia Mão no Bolso e a Pergunta, talvez fosse satisfatório o uso de um Contraexemplo, por exemplo, que seis vezes dois módulo dez resulta em dois. Todavia, o aluno reconheceu o erro e afirmou que o dois também seria um resultado.

Para tanto, o professor questionou como o participante encontrou o novo resultado. Então o Aluno 2 respondeu: "Fiz a conta bem rápido, pode ter erro. Por exemplo, o doze é congruente a dois módulo dez." Mas o professor ainda instigou-o por mais justificativas, perguntando sobre como obtivera o número doze. Dessa forma, o Aluno 2 assume que estava observando o conjunto errado.

Percebe-se que de forma alguma o professor abdicou dos fundamentos da SF, não afirmando que o aluno errou, mas trabalhando em cima do erro (Concepção do Erro). Assim, o Aluno 2 realizou a justificativa de seus resultados da seguinte forma: "O doze é dois vezes seis que é igual a doze, que doze é congruente a dois módulo dez. Então são os mesmos elementos, dois, quatro, seis e oito." Diante disso, o professor sintetizou a solução (Prova) dada e considerou os valores encontrados como os elementos de um conjunto nomeado Z ($Z = \{2, 4, 6, 8\}$).

Dessa forma, apresenta-se a questão 3 do Quadro 2. De imediato, o Aluno 2 afirmou que A e Z possuem os mesmos elementos. O professor concordou (nesse caso o aluno maturou, forneceu a solução e realizou a Prova) e formalizou a questão com o axioma da extensão: "Dois conjuntos A e B são iguais, A = B, se e somente se eles possuem os mesmos elementos [...]" (STANAT; MCALLISTER, 1977, p. 78, tradução nossa)[7].

Para formalizar o conceito de inclusão, utilizaram-se três questões presentes no Quadro 3.

Tabela 7: Quadro 3: Tomada de Posição para o conceito de inclusão

| |
|---|
| 1. Alguma relação entre os conjuntos A e X? |
| 2. E se retirarmos o elemento 2 de A, como fica o conjunto? |
| 3. Esse novo conjunto possui alguma relação com X? |

Tabela 8: Fonte: Elaborado pelos autores.

As questões 1, 2 e 3 são caracterizadas como Pergunta Esclarecedora, Pergunta Estimuladora e Pergunta Orientadora, respectivamente. A apresentação de cada questão ocorreu após a solução da questão anterior. Nota-se que o professor pediu para relembrarem o conjunto A já trabalhado.

Para responder a questão 1 do Quadro 3, a Aluna 4 manifestou que o conjunto A está contido em

[7]Tradução de: *"Two sets* A *and* B *are equal,* A = B*, if and only if they have the same members [...]"*

X (sendo $X = \{4, 8, 12, 16, 24, 32, 36, 48, 64\}$). Para tanto, o professor reescreveu o conjunto X para perceber se realmente esse contido (ainda não definido na sessão didática) é verdade. Desse modo, a Aluna 3 afirma que nem todos os elementos de A estão em X.

Diante do exposto, o professor apresentou a questão 2, por conseguinte a Aluna 5 respondeu que ainda não está contido, pois o número seis está em A mas não está em X. Com isso, o professor questionou o que precisa para que todos os elementos de A estejam em X (como forma de ser uma preliminar da questão 3). Isso posto, a Aluna 3 afirmou que precisa retirar também o número seis, além do dois, no conjunto A.

Portanto, o professor apresentou a questão 3, respondeu de acordo com as soluções construídas pelo grupo, e formalizou com a seguinte definição: "Sejam A e B conjuntos. Então A é subconjunto de B, notação $A \subset B$, se cada elemento de A é um elemento de B." (STANAT; MCALLISTER, 1977, p. 82, tradução nossa)[8]. Após isso, o professor utilizou um dos exemplos contidos nessa maturação para perceber quando não está contido.

Após formalizados os conceitos de pertinência e inclusão entre conjuntos, abordou-se então três resultados matemáticos (antissimétrica, reflexiva e transitiva em relação a relação de contido entre conjuntos) que sejam consequência de tais definições. Para idealizar a antissimétrica (LIMA, 2013a), realizou-se o questionamento presente no Quadro 4.

Tabela 9: Quadro 4: Tomada de Posição para enunciar a antissimétrica entre conjuntos

| |
|---|
| Vejamos as duas situações: (i) filhos de Maria: Antomario e Mariania; (ii) filhos de Antonio: Mariania e Antomario. O que dizer dos filhos de Antonio e Maria? |

Tabela 10: Fonte: Elaborado pelos autores.

Assim que apresentado o problema, o Aluno 5 respondeu que são os mesmos, e então o Aluno 3 complementou que seriam os mesmos filhos supondo que são as mesmas pessoas. Diante disso, o professor sintetizou a fala dos alunos para formalizar com o seguinte teorema.

**Teorema 1.** *Sejam* A *e* B *conjuntos. Então* $A = B$ *se e somente se* $A \subset B$ *e* $B \subset A$. *(STANAT e McALLISTER 1977, p. 83, tradução nossa)*[9].

Essa proposição é tratada como teorema em Stanat e McAllister (1997). Para Lima (2013a), se surgir um problema que exija a igualdade entre conjuntos, a saída para a demonstração é usar tal proposição. Após a apresentação da proposição (Teorema 1), o professor perguntou como demonstrar esse resultado matemático (Tomada de Posição).

De imediato, o Aluno 5 apresentou seu raciocínio (Maturação), no qual disse: "Teria que considerar um conjunto e mostrar que todo elemento do conjunto considerado pertencia ao segundo." Nota-se que, dessa forma, não utilizou como hipótese que os conjuntos A e B sejam iguais. O professor utilizou, porém, a Concepção do Erro (fundamento da SF) e solicita a opinião dos outros participantes para complementarem ou refutarem a ideia apresentada pelo colega.

[8]Tradução de: *"Let* A *and* B *be sets. Then* A *is a subset of* B, *denoted* $A \subset B$, *if each element of* A *is a element of* B *[...]".*

[9]Tradução de: *"Let* A *and* B *be sets. Then* $A = b$ *if and only if* $A \subset B$ *and* $B \subset A$*"*

Assim, o Aluno 3 sugeriu que faça a subtração de um conjunto com o outro. O professor perguntou como faria tal processo, visto que "não tinham" esse artifício matemático de diferença entre conjuntos (não foi abordado nessa sessão didática e tampouco nos encontros anteriores do grupo). Diante da dificuldade de formular um raciocínio que apresente a demonstração, o professor perguntou como as definições vistas na sessão didática e o axioma da extensão poderiam contribuir para alcançar esse resultado (Pergunta Orientadora).

Apesar dessa mediação, a turma não avançou, então o professor perguntou qual seria a hipótese da proposição. Perante isso, o Aluno 5 respondeu que seria A igual a B, e que dessa forma todos os elementos de A são elementos de B, e vale a recíproca (Solução). Dessa forma, o professor sintetizou a solução (Prova) utilizando o axioma da extensão e a definição de subconjunto para mostrar a "ida" da proposição, pois é da forma se e somente se.

Após esse levantamento que a proposição precisava da "volta" para ser demonstrada, houve então o comentário do Aluno 5: "Então a gente considera A contido em B para mostrar que todo elemento de A está em B, depois considera que o B tá contido em A para mostrar que todos os elementos de B estão em A." (Maturação/Solução).

À vista disso, o professor sintetizou a demonstração com o uso dos argumentos matemáticos, isto é, utilizou a definição de subconjunto (presente na fala do Aluno 5) e o axioma da extensão.

Para adentrar na propriedade reflexiva (Lima, 2013a), o professor utilizou os exemplos dos conjuntos A e Z (Quadro 2) e perguntou se poderiam dizer que o conjunto A está contido em Z (Pergunta Esclarecedora). A Aluna 3 respondeu que não, e, diante do equívoco, o professor reapresentou os conjuntos, tendo a turma respondido de imediato poder-se considerar A contido em Z. Para tanto, o professor apresentou a propriedade vista no Corolário 1.

**Corolário 1.** *Para* $\mathrm{A}$ *um conjunto qualquer,* $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$ *(STANAT e McALLISTER 1977, p. 83, tradução nossa)*[10].

Quando questionados como demonstrar o Corolário 1, o Aluno 3 disse que bastava usar que A é igual a A e então encontraria que A está contido em A (Maturação/Solução). Nessa situação, o professor sintetizou a demonstração fornecida, utilizando a definição de subconjunto ($\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ ) e atribuindo $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ (Prova).

Seguindo com a sessão didática, o professor enunciou a definição de Espaço Vetorial (Tabela 1) e então apresentou o seguinte problema.

Tabela 11: Quadro 5: Tomada de Posição para transitividade

| |
|---|
| Vejamos os espaços vetoriais $\{0\}, \{(1,1,0)\}$ e $\mathbb{R}^3$; o que podemos afirmar sobre eles? |

Tabela 12: Fonte: Fontenele (2013).

Diante do problema, o Aluno 2 relatou: "Podemos afirmar muita coisa. Por exemplo, os dois primeiros são finitos e o último é infinito." (Maturação). Nota-se que na fala do aluno não foram utilizados os conceitos e proposições trabalhadas na sessão didática. O professor então pediu para

[10] Tradução de: *"For any set* $\mathrm{A}$, $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$*."*

a turma propor mais afirmações. Com um tempo de maturação, o Aluno 2 afirmou que um está contido no outro (Solução).

Com a solução do Aluno 2, o professor apresentou a proposição "Sejam A, B e C conjuntos. Se A ⊂ B e B ⊂ C, então A ⊂ C." (STANAT; MCALLISTER, 1977, p. 83, tradução nossa)[11]. Após isso, demonstrar a proposição foi o novo problema para a turma (Tomada de Posição). O Aluno 3 então diz: "Partindo do contido, se todo elemento de A está em B e todo elemento de B está em C, posso dizer que todo elemento de A está em C. Mas isso é o que diz o teorema." (Maturação/Solução).

Percebe-se que nessa fala do Aluno 3 houve o uso de hipóteses (algo que não tinha ocorrido na primeira demonstração, Teorema 1). Ele, porém, não viu a demonstração em sua fala, visto que afirma que apenas "explicou" o que a proposição oferece. Mas, de uso dessa solução, o professor sistematizou a fala, utilizando a definição de subconjunto e de pertinência para concluir a inclusão de A em C. Com isso, deu-se por encerrada a sessão didática.

## 5. Resultados e Análise dos Dados

Como se tinha a ideia de utilizar a SF em demonstrações matemáticas, o professor perguntou se eles visualizaram a proposta metodológica no decorrer do encontro (visto que todos estudam essa metodologia de ensino). As respostas foram as seguintes:

Tabela 13: Quadro 6: *Feedback* dos participantes em relação à SF

| |
|---|
| Aluno 4: Utilizou a pergunta. |
| Aluno 1: Eu vi o *plateau* no início, vi a Maturação. |
| Aluno 6: Chamou para interagir. |
| Aluno 7: Vi as fases da Sequência Fedathi (Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova), você apresentou o problema, que foram exemplos e os teoremas, deixou um tempo para nós respondermos, nós fornecíamos a ideia de como demonstrar (Solução) e você formalizava com o rigor matemático a demonstração (Prova). |
| Aluno 6: Você deu tempo para o pessoal maturar (Maturação), um pedaço o pessoal ficava calado, logo depois nós respondíamos e instigou para ter participação. Usou a pergunta, usou a mão no bolso (fundamentos da Sequência Fedathi) e a mão na massa. |

Tabela 14: Fonte: Pesquisa direta.

Apesar de não ter a participação de todos na sessão didática (de 12, ocorreu a participação de 7) eles perceberam o uso da SF durante todo o encontro virtual. Para avaliar a sessão didática, utilizou-se a Figura 1. Para as categorias do professor, nota-se que houve uma sequência de etapas (não chegou com a proposição formalizada e pediu a demonstração, houve um desenvolvimento).

[11] Tradução de: *"Let* A, B *and* C *be sets. If* A ⊂ B *and* B ⊂ C *then* A ⊂ C*"*

Como o encontro foi *on-line*, com uso de apresentação de *slides* e análise ambiental (qual plataforma seria utilizada e o público-alvo), tem-se então um planejamento que foi realizado. Como apontado pelo Aluno 6, no Quadro 6, diversas vezes houve o pedido de interação, sendo notório durante as falas transcritas. Além disso, o professor propiciou o momento de experimentação (Maturação/Solução) e generalizou as ideias propostas pela turma (Prova). Com isso, abordaram-se os aspectos fundamentais propostos, por Sousa (2013) (Figura 1), em relação ao professor.

Qual foi a limitação? Como se tratava de um público que em sua maioria possui graduação em Matemática, não foi realizado um diagnóstico em relação aos conhecimentos deles e no final também não ocorreu uma avaliação quantitativa para formalizar o que foi estudado.

Em relação aos tópicos avaliativos para o aluno, propostos na Figura 1, de fato, eles imergiram na atividade, participaram (apesar de alguns permanecerem calados durante todo o encontro), houve interação entre eles (um complementava a ideia do outro), realizaram questionamentos perante o problema e a solução. Com efeito, realizaram experimentações (foram vistos durante a videoconferência alguns com lápis e papel para buscar as soluções). Como, porém, não foi realizada uma avaliação quantitativa ao final do encontro, nada se pode afirmar em relação à aquisição do novo saber, contemplando assim os aspectos fundamentais que os alunos apresentam na aula pautada pela SF (Figura 1).

Por outro lado, de forma qualitativa, apresentam-se novos saberes, tanto em relação a conjuntos (temática da sessão didática), como da utilização da SF no ensino (dúvida do grupo e constatação dada no quadro 6).

## 6. Considerações Finais

Este trabalho surgiu a partir de indagações do GEM$^2$ em relação às demonstrações matemáticas frente à proposta metodológica SF. Com o intuito de sanar essas dúvidas do grupo, houve como pergunta norteadora dessa pesquisa *Como abordar as demonstrações matemáticas versadas em Stanat e McAllister (1977) para um grupo de pessoas que possuem familiaridade com a Matemática Discreta, no ensino concebido por meio da SF?* O uso da obra de Stanat e McAllister (1977), seguindo as orientações do coordenador Hermínio Borges Neto, e o entrelaçamento do conteúdo matemático com uma metodologia de ensino, deu-se pelo fato de o grupo realizar estudos no ensino da Matemática com o aporte metodológico da SF.

Acredita-se que esse trabalho respondeu a pergunta norteadora proposta, visto ter mostrado um viés de como abordar um tópico da Matemática, enviesado com a Matemática Discreta, com a mediação pedagógica à luz da SF.

Outro ponto a destacar é em relação ao objetivo que esse trabalho propôs-se a alcançar, que foi *Ilustrar ao GEM$^2$ uma apresentação sobre Conjuntos com o aporte metodológico da SF e demonstrações de teoremas introdutórios dos estudos relacionados a essa temática.* Nota-se, durante a aplicação da sessão didática, a abordagem de Conjuntos um pouco distinta dos livros que abordam essa temática. Isso foi dado pelo fato de os participantes possuírem experiência com a Matemática vista no Ensino Superior.

Como visto na análise dos dados, os participantes, que são pesquisadores sobre o ensino pautado na SF, visualizaram as etapas e fundamentos dessa metodológica no decorrer da mediação pedagógica. Houve a construção das definições através de problemas e soluções dos participantes, como também as demonstrações nasceram de raciocínios expostos por eles.

Com isso, o trabalho apresentou uma maneira no tratar pedagógico de Conjuntos e suas demonstrações com a metodologia SF. Uma lacuna vista no trabalho é o tratar quantitativo, visto que não houve avaliações com parâmetros estatísticos.

Acredita-se que esse trabalho influenciará futuras pesquisas que abordem demonstrações matemáticas com o aporte metodológico para o ensino e, em particular, com a SF. E, caso seja interessante, adaptar os problemas abordados nos quadros para o público-alvo de sua realidade.

Dessa forma, este trabalho visa esclarecer uma maneira de tratar as demonstrações matemáticas à luz da SF, o como se dá a mediação pedagógica frente a essa metodologia de ensino e como ela influencia para tornar o aluno um ser ativo no aprendizado.

Por fim, tem-se como perspectivas futuras uma abordagem da SF com demonstrações matemáticas em cursos regulares de ensino (Educação Básica e/ou Ensino Superior) e que, se possível, aborde uma natureza quantitativa no trabalho, com o intuito de elucidar o possível avanço na aprendizagem.

## Referências

[1] ANDERSON, Lorin W. et al. *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: a revision of bloom's taxonomy of educational objectives*. New York: Longman, 2011.

[2] FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. *A Sequência Fedathi no ensino da álgebra linear: o caso da noção de base de um espaço vetorial*. 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/7521/>. Acesso em: 05 abr. 2020.

[3] FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. *Contribuições da Sequência Fedathi para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado: uma análise da mediação docente em aulas de Álgebra Linear*. 2018. 192 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/37490/>. Acesso em: 20 jan. 2020.

[4] LEITE, Francisco Tarciso. *Metodologia Científica: métodos e técnicas de pesquisa: monografias, dissertações, teses e livros*. Aparecida: Ideias  Letras, 2008.

[5] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 8ª ed. Rio de Janeiro: Impa, 2012. 357 pp.

[6] LIMA, Elon Lages.*Curso de Análise*. vol. 1. 14ª ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013a. 431 pp.

[7] LIMA, Elon Lages. *Análise Real volume 1: funções de uma variável*. 12ª ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013b. 198 pp.

[8] MENEZES, Daniel Brandão. *O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva da Sequência Fedathi: caracterização do comportamento de um bom professor*. 2018. 127 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/37124/>. Acesso em: 15 jul. 2020.

[9] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. *Um Convite à Matemática: com técnicas de demonstração e notas históricas*. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[10] PINHEIRO, Ana Cláudia Mendonça. "A Mediação". *In*: BORGES NETO, Hermínio (Org.). *Sequência Fedathi: fundamentos*. Curitiba: CRV, 2018. p. 37-48.

[11] SEVERINO, Antônio Joaquim. *Metodologia do Trabalho Científico*. 23ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2007.

[12] SOUSA, Francisco Edisom Eugenio de. *A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da sequência fedathi*. 2015. 282 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/14363/>. Acesso em: 03 out. 2020.

[13] SOUZA, Maria José Araújo. Sequência Fedathi: apresentação e caracterização". *In*: BORGES NETO, Hermínio *et al.* (Org.). *"Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de matemática e ciências*. Fortaleza: Edições UFC, 2013. pp. 15-48.

[14] STANAT, Donald F.; MCALLISTER, David F. *Discrete Mathematics in Computer Science*. New Jersey: Prentice-Hall International Editions, 1977. 401 pp.

Carlos Henrique Delmiro de Araújo
EEF Coronel Adauto Bezerra (Canindé-CE)
<delmiro@multimeios.ufc.br>

Milínia Stephanie Nogueira Barbosa Felício
Universidade Federal do Ceará (UFC)
<milinia@multimeios.ufc.br>

Daniel Brandão Menezes
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)
<danielbrandao@multimeios.ufc.br>

Hermínio Borges Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)
<herminio@multimeios.ufc.br>

Recebido: 15/10/2020
Publicado: 02/02/2021

Chamada Temática "Experiências didáticas em Matemática no período de isolamento social"