PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.y, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo821

Um método não convencional para a diagonalização de matrizes 2×2

Adilson Francisco da Silva Josimar da Silva Rocha Thiago Pinguello de Andrade

Resumo

Neste trabalho, apresentamos o conceito de matrizes diagonalizáveis e encontramos condições necessárias e suficientes para que uma matriz em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ seja diagonalizável, bem como explicitamos a matriz diagonal correspondente e a matriz conjugadora, sem que para isso sejam utilizados conceitos de espaços vetoriais. Como aplicações, mostramos como calcular potências de matrizes diagonalizáveis em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ e também um método para a resolução de um caso particular de equações de recorrências lineares de segunda ordem.

Palavras-chave: matrizes; diagonalização; recorrências lineares.

Abstract

In this work, we present the concept of diagonalizable matrices and find necessary and sufficient conditions for a matrix in $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ to be diagonalizable, as well as explaining the corresponding diagonal matrix and the conjugating matrix, without using vector spaces concepts. As applications, we show how to calculate powers of diagonalizable matrices in $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ and we also show a method for solving a particular case of second order linear recurrence equations.

Keywords: matrices; diagonalization; linear recurrences.

1. Introdução

O método geralmente utilizado para diagonalização de matrizes requer conhecimento sobre espaço vetorial para a sua aplicação (ver, por exemplo, as referências [1], [2] e [4]), o que restringe sua utilização àqueles que possuem algum conhecimento da matemática do Ensino Superior. Assim, como alternativa, mostraremos uma técnica não usual de diagonalização de matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ em que são utilizados apenas conhecimentos de matemática elementar.

Neste artigo, apresentaremos o conceito de matrizes semelhantes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ e, como aplicação, classificaremos as matrizes 2×2 diagonalizáveis sem utilizar o conceito de autovetores. Apresentaremos o cálculo de potência de matrizes, e resolveremos recorrências lineares de segunda ordem.

2. Matrizes semelhantes

Nesta seção apresentaremos o conceito de semelhança de matrizes e suas principais propriedades. Veremos que matrizes semelhantes formam uma relação de equivalência.

Definição 1. Seja A uma matriz 2×2. O polinômio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

em que I denota a matriz identidade, é chamado de **polinômio característico** de A. Além disso, as raízes do polinômio característico de A são chamadas de **autovalores** de A.

Definição 2. Sejam A e B, matrizes de ordem 2×2. Dizemos que A é **semelhante** a B, e denotaremos $A \sim B$, se existir $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ invertível, tal que

$$B = M^{-1}AM.$$

Exemplo 1. As matrizes $A = \begin{bmatrix} -22 & -28 \\ 18 & 23 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ são semelhantes, pois, para $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ temos que

$$\begin{aligned} M^{-1}BM &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -22 & -28 \\ 18 & 23 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

Proposição 1. *Sejam A, B e C matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. A relação de semelhança de matrizes é uma relação de equivalência, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $A \sim A$ *(propriedade reflexiva);*
2. *Se* $A \sim B$*, então* $B \sim A$ *(propriedade simétrica);*
3. *Se* $A \sim B$ *e* $B \sim C$*, então* $A \sim C$ *(propriedade transitiva).*

Demonstração. 1. De fato, como $A = I^{-1}AI$, temos pela definição de matriz semelhante que $A \sim A$.

2. Sendo $A \sim B$ temos, pela definição, que existe M invertível tal que $B = M^{-1}AM$. Assim, denotando $N = M^{-1}$, temos que N é invertível e multiplicando a igualdade $B = M^{-1}AM$, por N^{-1} à esquerda e por N à direita, obtemos

$$N^{-1}BN = N^{-1}M^{-1}AMN = MM^{-1}AMM^{-1} = A,$$

ou seja, $B \sim A$.

3. Sendo $A \sim B$ e $B \sim C$ existem matrizes invertíveis M e N, tais que $B = M^{-1}AM$ e $C = N^{-1}BN$. Logo, considerando $P = MN$ temos, por propriedades de multiplicação de matrizes e matrizes inversas, que P é invertível e $P^{-1} = N^{-1}M^{-1}$. Assim,

$$P^{-1}AP = N^{-1}M^{-1}AMN = N^{-1}BN = C,$$

ou seja $A \sim C$.

$\square$

Proposição 2. *Sejam* A *e* B *matrizes semelhantes em* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$*. Então:*

(i) $\det A = \det B$*;*

(ii) A *e* B *possuem os mesmos autovalores.*

Demonstração.

(i) Como $A \sim B$, existe uma matriz invertível M tal que $B = M^{-1}AM$. Assim, utilizando as propriedades do determinante, temos

$$\det B = \det(M^{-1}AM) = (\det M^{-1})(\det A)(\det M) = \left(\frac{1}{\det M}\right)(\det A)(\det M) = \det A.$$

(ii) Como $A \sim B$, existe $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ invertível tal que $B = M^{-1}AM$. Assim, para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} B - \lambda I &= M^{-1}AM - \lambda I \\ &= M^{-1}AM - \lambda M^{-1}M \\ &= M^{-1}(AM - \lambda M) \\ &= M^{-1}(AM - \lambda IM) \\ &= M^{-1}(A - \lambda I)M, \end{aligned}$$

isto é, $(A - \lambda I) \sim (B - \lambda I)$. De sorte que, por (i), temos $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$. Portanto, pela definição de autovalor, A e B possuem os mesmos autovalores.

□

Definição 3. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem 2×2. O **traço** de A, denotado por $tr(A)$, é definido por

$$tr(A) = a_{11} + a_{22}.$$

Lema 1. *Para quaisquer matrizes* A *e* B *em* $M_2(\mathbb{R})$*, tem-se* $tr(AB) = tr(BA)$.

Demonstração. Para quaisquer matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ em $M_2(\mathbb{R})$, temos que

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$tr(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = tr(BA).$$

□

Teorema 1. *Se* $A \sim B$, *então* $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Demonstração. Como $A \sim B$, existe uma matriz invertível M, tal que $B = M^{-1}AM$.

Portanto, pelo Lema 1,

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(M^{-1} \cdot (AM)) = \mathrm{tr}((AM) \cdot M^{-1}) = \mathrm{tr}(A \cdot (MM^{-1})) = \mathrm{tr}(A).$$

□

3. Diagonalização de matrizes

Nesta seção, apresentaremos o conceito de matrizes diagonalizáveis e demonstraremos as principais propriedades das matrizes diagonalizáveis em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Apresentaremos também um método não convencional para diagonalização de matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que não utiliza o conceito de espaço vetorial.

Definição 4. Dizemos que uma matriz A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ é diagonalizável se existir uma matriz diagonal $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $A \sim D$, ou seja, se existir uma matriz diagonal D tal que

$$D = M^{-1}AM$$

para alguma matriz invertível $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 2. Toda matriz diagonal é uma matriz diagonalizável. De fato, se A é uma matriz diagonal, como $A = I^{-1}AI$, temos que A é diagonalizável.

Proposição 3. *Se* A *é uma matriz em* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *diagonalizável e* D *é uma matriz diagonal semelhante a* A, *então, os elementos da diagonal principal de* D *são os autovalores de* A.

Demonstração. Sejam D uma matriz diagonal semelhante a A, e d_{11} e d_{22} os elementos da diagonal principal de D. Como D é uma matriz diagonal, então o polinômio característico de D é

$$p(\lambda) = \det(D - \lambda I) = (d_{11} - \lambda)(d_{22} - \lambda).$$

Assim, $p(d_{11}) = 0$ e $p(d_{22}) = 0$, ou seja, d_{11} e d_{22} são autovalores de D. Logo, como d_{11} e d_{22} são autovalores de D, e D é semelhante a A, segue do item (ii) da Proposição 2, que d_{11} e d_{22} são os autovalores de A. □

Proposição 4. *Seja* (A, D, M) *uma terna de matrizes de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *tais que* M *é invertível e* D *é diagonal. A terna* (A, D, M) *satisfaz a equação matricial* $D = M^{-1}AM$ *se, e somente se, exatamente uma das condições abaixo ocorre.*

(i) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ *e* M *com* $\det(M) \neq 0$*;*

(ii) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, *com* $a \neq d$, $x \neq 0$ *e* $w \neq 0$*;*

(iii) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, *com* $y \neq 0$, $z \neq 0$ *e* $a \neq d$*;*

(iv) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & y \\ z & \frac{cy}{a-d} \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, *com* $c \neq 0$, $z \neq 0$, $y \neq 0$ *e* $a \neq d$;

(v) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ \frac{cx}{a-d} & w \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, *com* $c \neq 0$, $x \neq 0$, $w \neq 0$ *e* $a \neq d$;

(vi) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} \frac{bz}{d-a} & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, *com* $b \neq 0$, $z \neq 0$, $y \neq 0$ *e* $a \neq d$;

(vii) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} x & \frac{bw}{d-a} \\ 0 & w \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, *com* $b \neq 0$, $x \neq 0$, $w \neq 0$ *e* $a \neq d$;

(viii) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{(\lambda_1 - a)x}{b} & \frac{(\lambda_2 - a)y}{b} \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, *com* $b \neq 0$, $c \neq 0$, $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$, *desde que* λ_1 *e* λ_2 *sejam soluções reais da equação* $(\lambda - a)(\lambda - d) = bc$ *com* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Demonstração. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

satisfazendo $D = M^{-1}AM$. Assim, $MD = AM$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x\lambda_1 & y\lambda_2 \\ z\lambda_1 & w\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix}$$

donde obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 0 = (a - \lambda_1)x + bz \\ 0 = (a - \lambda_2)y + bw \\ 0 = cx + (d - \lambda_1)z \\ 0 = cy + (d - \lambda_2)w. \end{cases} \tag{1}$$

Caso 1. Se $b = 0$ e $c = 0$, então o sistema (1) torna-se

$$\begin{cases} 0 = (a - \lambda_1)x & (2) \\ 0 = (a - \lambda_2)y & (3) \\ 0 = (d - \lambda_1)z & (4) \\ 0 = (d - \lambda_2)w. & (5) \end{cases}$$

Subcaso 1.1. Se $a = d$, então $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = aI$. Sendo $A = aI$, para toda matriz M inversível, tem-se que $D = M^{-1}AM = M^{-1}(aI)M = a(M^{-1}M) = aI = A$. Com isso, obtemos (i), que é o caso em que $A = aI$ é uma matriz escalar e os autovalores de A são $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.

Subcaso 1.2. Se $a \neq d$ e $x \neq 0$, então por (2), $\lambda_1 = a$. Com isso, por (4) temos $z = 0$. Como M é invertível temos que $\det M = xw - zy \neq 0$, donde $w \neq 0$ e por (5), $\lambda_2 = d$. Além disso, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos por (3) que $y = 0$. Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

com $x \neq 0$, $w \neq 0$ e $a \neq d$, então $MD = AM$. Desse modo, obtemos (ii), que é o caso em que A é a matriz diagonal e possui dois autovalores reais distintos, a saber, $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = d$.

Subcaso 1.3. Se $a \neq d$ e $x = 0$, então, por M ser invertível, temos que $\det M \neq 0$ e $\det M = yz$, ou seja, $y \neq 0$ e $z \neq 0$. Assim, de (3) e (4) temos que $\lambda_2 = a$ e $\lambda_1 = d$. Além disso, por (5) temos que $w = 0$. Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

com $y \neq 0$, $z \neq 0$ e $d \neq a$, então $MD = AM$. Com isso, obtemos (iii), que é o caso em que A é a matriz diagonal com dois autovalores distintos, a saber, $\lambda_1 = d$ e $\lambda_2 = a$.

Caso 2. Se $b = 0$ e $c \neq 0$, então o sistema (1) torna-se

$$\begin{cases} 0 = (a - \lambda_1)x & (6) \\ 0 = (a - \lambda_2)y & (7) \\ 0 = cx + (d - \lambda_1)z & (8) \\ 0 = cy + (d - \lambda_2)w. & (9) \end{cases}$$

Subcaso 2.1. Se $x = 0$, então, por M ser invertível, temos que $\det M = yz$ com $y \neq 0$ e $z \neq 0$. Assim, por (7) e (8) temos que $\lambda_2 = a$ e $\lambda_1 = d$. Com isso, temos por (9) que $(d - \lambda_2)w \neq 0$. Assim, $w \neq 0$ e $\lambda_2 \neq d$, ou seja $a \neq d$, onde podemos escrever

$$w = \frac{cy}{\lambda_2 - d} = \frac{cy}{a - d}.$$

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} 0 & y \\ z & \frac{cy}{a-d} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

com $c \neq 0$, $z \neq 0$, $y \neq 0$ e $a \neq d$, então, $MD = AM$. Com isso, obtemos (iv), que é o caso em que A é uma matriz triangular inferior e possui dois autovalores distintos, a saber, $\lambda_1 = d$ e $\lambda_2 = a$.

Subcaso 2.2. Se $x \neq 0$, então, por (6), $\lambda_1 = a$. Como $c \neq 0$, por (8), temos $(d - \lambda_1)z \neq 0$, ou seja, $z \neq 0$ e $a \neq d$. Pelo Teorema 1 temos que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D)$, ou seja $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$, donde $\lambda_2 = d$. Assim, por (9), $y = 0$, e, como M é invertível, temos que $\det M = xw - yz \neq 0$, com $w \neq 0$. Reescrevendo (8), temos

$$z = \frac{cx}{\lambda_1 - d} = \frac{cx}{a - d}.$$

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ \frac{cx}{a-d} & w \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

com $c \neq 0$, $x \neq 0$, $w \neq 0$ e $a \neq d$, então, $MD = AM$. Com isso, obtemos (v), que é o caso em que A é uma matriz triangular superior e possui dois autovalores reais distintos, a saber, $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = d$.

Caso 3. Se $b \neq 0$ e $c = 0$, então, obtemos (vi) e (vii) aplicando transposição nas relações obtidas nos casos (iv) e (v), respectivamente.

Caso 4. Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então, por (1) obtemos

$$\begin{cases} x = \dfrac{(\lambda_1 - d)z}{c} & (10)\\ y = \dfrac{(\lambda_2 - d)w}{c} & (11)\\ w = \dfrac{(\lambda_2 - a)y}{b} & (12)\\ z = \dfrac{(\lambda_1 - a)x}{b}, & (13) \end{cases}$$

o que implica que

$$xz = \frac{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d)xz}{bc}$$

e

$$wy = \frac{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - d)wy}{bc}.$$

Como M é invertível, temos que $xw - yz \neq 0$, ou seja, $xw \neq 0$ ou $yz \neq 0$. Se $xw = 0$, por (11) e (13) teríamos $yz = 0$ e M não seria invertível. Reciprocamente, se $yz = 0$, por (10) e (12) teríamos $xw = 0$ e M não seria invertível. Assim, temos que $xw \neq 0$ e $yz \neq 0$, ou seja, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ e $w \neq 0$. Logo,

$$\begin{cases} (\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) = bc \\ (\lambda_2 - a)(\lambda_2 - d) = bc, \end{cases} \tag{14}$$

ou seja, λ_1 e λ_2 são raízes da equação

$$(\lambda - a)(\lambda - d) = bc.$$

Além disso, como M é invertível, por (10), (11), (12) e (13), temos

$$xw - yz = \frac{(\lambda_1 - d)(\lambda_2 - a)yz}{bc} - \frac{(\lambda_2 - d)(\lambda_1 - a)xw}{bc}.$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2$, temos

$$xw - yz = \frac{(\lambda_2 - d)(\lambda_2 - a)}{bc}(yz - xw).$$

Como $xw - yz \neq 0$

$$(\lambda_2 - d)(\lambda_2 - a) = -bc,$$

o que contradiz (14). Logo, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{(\lambda_1 - a)x}{b} & \frac{(\lambda_2 - a)y}{b} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

com $b \neq 0$, $c \neq 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, desde que λ_1 e λ_2 sejam soluções da equação $(\lambda - a)(\lambda - d) = bc$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então, $MD = AM$. Com isso, obtemos (viii), que é o caso em que a matriz A não possui entradas nulas na diagonal secundária e possui dois autovalores reais distintos definidos pela equação característica. □

Corolário 1. *Uma matriz* A *de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *é diagonalizável se, e somente se, uma das seguintes situações é verdadeira:*

(i) A *possui dois autovalores reais distintos;*

(ii) A *possui apenas um autovalor real e* A *é uma matriz escalar.*

Demonstração. Se A é diagonalizável, então, pela Proposição 4, A possui dois autovalores reais iguais se, e somente se, A é a matriz escalar. Portanto, se A possui dois autovalores iguais e A não é a matriz escalar, então A não é diagonalizável. Além disso, segue também da Proposição 4 que se A possui autovalores reais distintos, então A é diagonalizável. □

Definição 5. Uma matriz A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ é **simétrica** se $A = A^t$, onde A^t é a transposta da matriz A.

Corolário 2. *Seja* A *uma matriz* 2×2. *Se* A *é simétrica, então* A *é diagonalizável.*

Demonstração. Se A é uma matriz 2×2 simétrica, então, A pode ser escrita na forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Se $b = 0$, A é uma matriz diagonal. Se $b \neq 0$, então, os autovalores de A são

$$\lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2},$$

que são dois autovalores distintos, e A satisfaz o item (viii) da Proposição 4. Logo, A é diagonalizável. □

Exemplo 3. O Corolário 1 mostra-nos que as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ não são diagonalizáveis, pois A e B não são matrizes escalares e possuem o mesmo polinômio característico $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, que admite apenas uma raiz (dupla) $\lambda = -1$.

4. Potência de Matriz

Utilizando a definição e as propriedades da multiplicação de matrizes, se $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de uma matriz A é definida por

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{\text{n-fatores}}.$$

Se n for um número consideravelmente grande, calcular A^n envolve um esforço computacional elevado. Nesta seção, apresentaremos um método para calcular a n-ésima potência de uma matriz A diagonalizável com um baixo custo computacional em comparação com o cálculo de A^n utilizando as $n-1$ multiplicações de matrizes em $\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{\text{n-fatores}}$.

Proposição 5. *Sejam A,D e M matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, sendo M invertível e D uma matriz diagonal, tais que $\mathrm{A} = \mathrm{MDM}^{-1}$. Então,*

$$\mathrm{A}^{\mathrm{n}} = \mathrm{MD}^{\mathrm{n}}\mathrm{M}^{-1}.$$

A demonstração da Proposição 5 pode ser feita utilizando-se o *Princípio de Indução* sobre o expoente n, com $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4. Determine a n-ésima potência da matriz $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

De fato, como os autovalores de A satisfazem $\mathrm{p}(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda) = 2$, temos que

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Pelo item (viii) da Proposição 4, A é diagonalizável e satisfaz $\mathrm{A} = \mathrm{MDM}^{-1}$ com $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Logo, pela Proposição Proposição 5, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{\mathrm{n}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{n}} \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{\mathrm{n}} & 0 \\ 0 & 2^{\mathrm{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2^{\mathrm{n}+1}-(-1)^{\mathrm{n}+1}}{3} & \frac{2[2^{\mathrm{n}}-(-1)^{\mathrm{n}}]}{3} \\ \frac{2^{\mathrm{n}}-(-1)^{\mathrm{n}}}{3} & \frac{2[2^{\mathrm{n}-1}-(-1)^{\mathrm{n}-1}]}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

De modo análogo ao que foi feito no Exemplo 4, o leitor poderá demonstrar o seguinte resultado mais geral:

Proposição 6. *Se* $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *com* $\mathrm{a}^2 > -4\mathrm{b}$, *então,*

$$\mathrm{A}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{a^2+4b}} & \dfrac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n}\right]}{\sqrt{a^2+4b}} \\ \dfrac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{a^2+4b}} & \dfrac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}\right]}{\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

5. Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Uma relação de recorrência é uma equação que expressa cada elemento de uma sequência $(\mathrm{x}_{\mathrm{n}})$ como função de elementos precedentes. Relações da forma $\mathrm{x}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{ax}_{\mathrm{n}} + \mathrm{bx}_{\mathrm{n}-1}$, com $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$, são chamadas *recorrências lineares de segunda ordem sobre* $\mathbb{R}$. *Dados* x_1 *e* x_2, *se, a partir de* $\mathrm{n} = 3$ *todos os elementos* x_{n} *de uma sequência satisfazem a relação* $\mathrm{x}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{ax}_{\mathrm{n}} + \mathrm{bx}_{\mathrm{n}-1}$, *dizemos que a sequência* $(\mathrm{x}_{\mathrm{n}})$ *é uma solução para a recorrência linear.*

Uma sequência importante que aparece na natureza é a Sequência de Fibonacci. Tal sequência está relacionada ao crescimento populacional de coelhos, ao crescimento do número de galhos de árvores, e aparece também na construção de estruturas naturais. O seguinte exemplo define a Sequência de Fibonacci por meio de uma relação de recorrência:

Exemplo 5. A solução da relação de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ é conhecida como Sequência de Fibonacci.

Nesta seção, encontraremos soluções para recorrências lineares de segunda ordem para o caso particular em que x_1 *e* x_2 *são conhecidos e* $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, *para* $n \geq 2$ *e* $a^2 > -4b$. *Para isso, utilizaremos a seguinte Proposição:*

Proposição 7. *A solução geral para a equação de recorrência* $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ *para* $n \geq 2$, $a^2 > -4b$ *com os valores iniciais* x_1 *e* x_2 *conhecidos é*

$$x_n = x_2 \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{a^2+4b}} + x_1 \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2}\right]}{\sqrt{a^2+4b}}.$$

Demonstração. Como x_1 e x_2 são dados, temos $x_3 = ax_2 + bx_1$ e $x_4 = ax_3 + bx_2$. Na forma matricial podemos reescrever essas igualdades como

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando argumento de Indução, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Pela Proposição 6 e Exemplo 4, temos

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{a^2+4b}} & \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}\right]}{\sqrt{a^2+4b}} \\ \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{a^2+4b}} & \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2}\right]}{\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$x_n = x_2 \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{a^2+4b}} + x_1 \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2}\right]}{\sqrt{a^2+4b}}.$$

□

Proposição 8. *O termo geral* $\mathrm{F_n}$ *da* Sequência de Fibonacci *é dado por*

$$\mathrm{F_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\right].$$

De fato, pela Proposição 7, a relação de recorrência definida por $\mathrm{F_{n+1} = F_n + F_{n-1}}$, *com* $\mathrm{F_1} = 1$ *e* $\mathrm{F_2} = 1$, *possui como solução a sequência definida por*

$$\begin{aligned}
\mathrm{F_n} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-1}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-1}}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-2}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-2}}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-1}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-1}} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-2}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-2}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-1}}\left[1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-1}}\left[1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-1}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n-1}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\right].
\end{aligned}$$

Por exemplo, para calcular $\mathrm{F_4}$ *utilizando a Fórmula obtida na Proposição 8, temos*

$$\begin{aligned}
\mathrm{F_4} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2\cdot(1+5)}{4} = 3.
\end{aligned}$$

Calculando $\mathrm{F_4}$ *utilizando a Relação de Recorrência, teríamos*

$$\mathrm{F_4 = F_3 + F_2 = F_1 + 2F_2} = 1 + 2\cdot 1 = 3.$$

Podemos notar que utilizar a Fórmula obtida na Proposição 8 demanda mais cálculos quando feitos manualmente comparado com a utilização da Relação de Recorrência quando n *é pequeno. No entanto, a Proposição 8 é vantajosa, pois permite o cálculo de* $\mathrm{F_n}$ *com* n *grande, sem necessidade de calcular todos os anteriores. Além disso, a fórmula obtida serve para explicar que a sequência de Fibonacci cresce exponencialmente, já que podemos utilizar essa fórmula para mostrar que*

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} - 1 < \mathrm{F_n} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} + 1.$$

Agradecimentos

Agradecemos aos revisores pelos comentários e sugestões que contribuiram para o aprimoramento deste trabalho.

Referências

[1] Nicholson, K. Linear Algebra with Applications. 1ª edição. Toronto: McGraw-Hill, 2006.

[2] Poole, D. Álgebra Linear: uma introdução moderna. 2ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

[3] SILVA, A. F. Recorrências lineares, isometrias, criptografia e outras aplicações envolvendo matrizes 2 por 2. Dissertação (Mestrado), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Cornélio Procópio/PR. 96pp. 2017.

[4] Strang, G. Álgebra Linear e suas aplicações. 1ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

Adilson Francisco da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<*adilson554@gmail.com*>

Josimar da Silva Rocha
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<*jrocha@utfpr.edu.br*>

Thiago Pinguello de Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<*thiagoandrade@utfpr.edu.br*>

Recebido: 20/04/2020
Publicado: 30/06/2020