PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.3, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo830

Um truque com cartas usando a base numérica 3

Miguel V. S. Frasson   Lee Y. Sheng

Resumo

Com habilidade em representar números na base 3, um mágico pode executar um impressionante truque com cartas apresentado neste trabalho.

Palavras-chave: Base numérica três; truque de mágica; cartas.

Abstract

With the ability to represent numbers in base 3, a magician can perform a spectacular card trick revealed in this work.

Keywords: Number base three; magic trick; cards.

1. Introdução

A mágica sempre encantou o homem, mesmo os truques simples. Entre tantos truques, há os que se baseiam em conceitos matemáticos, os quais podem despertar o interesse pela Matemática uma vez que o truque seja embasado matematicamente [1, 2]. Entre os truques que têm conceitos matemáticos estão o truque do "número pensado" [3], "do calendário" [4], aqueles que usam cartas/baralho [5, 6], entre vários outros [4, 7].

Apresentamos aqui um truque mágico que utiliza a decomposição na base 3 para transportar a carta desconhecida a posição escolhida, montando um "truque mágico" que certamente encantará a plateia, já apresentado em [8]. O truque requer apenas um pouco de prática mental de se escrever números pequenos na base 3. Ao final, apresentamos uma generalização para qualquer base.

2. A matemática de uma distribuição de cartas

Tomemos um baralho de 27 cartas, viradas para baixo e vamos numerá-las sequencialmente de 0 a 26, de cima para baixo. Vamos distribuí-las em três montes em sequência. Veja a Figura 1. Os montes receberão as seguintes cartas:

$$\begin{aligned} &1^{\text{o}} \text{ monte:} \quad 0, 3, 6, \ldots, 3q, \ldots, 24;\\ &2^{\text{o}} \text{ monte:} \quad 1, 4, 7, \ldots, 3q+1, \ldots, 25;\\ &3^{\text{o}} \text{ monte:} \quad 2, 5, 8, \ldots, 3q+2, \ldots, 26. \end{aligned}$$

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

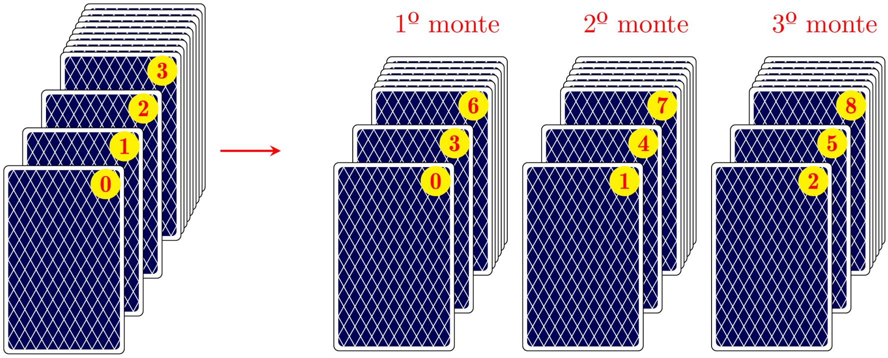

Figura 1: Distribuição das cartas em seus respectivos montes. Os montes recebem cartas com numeração da forma 3q, 3q + 1 e 3q + 2, respectivamente.

Observe que, em cada monte, a carta $3q + r$ passará a ocupar a numeração q (ao reiniciarmos a numeração em cada monte), isto é, o quociente da antiga numeração por 3.

Escolha um dos montes e volte a empilhá-los. Se o monte escolhido ficar no topo, a carta originalmente na posição $3q + r$ ficará na posição $q = 0 \cdot 9 + q$. Se o monte escolhido ficar no meio, como os montes têm nove cartas, a carta originalmente na posição $3q+r$ ficará na posição $1 \cdot 9 + q$. Se o monte escolhido for posto embaixo, a carta originalmente na posição $3q + r$ ficará na posição $2 \cdot 9 + q$. Assim, marcaremos as posições do monte escolhido com $p = 0$, $p = 1$ ou $p = 2$ de acordo com o posicionamento no topo, no meio ou embaixo, respectivamente.

Vejamos como essa distribuição de cartas reordena os números das cartas escritos na base 3. Seja um número n entre 0 e 26 e escreva-o na base 3, com dígitos a, b, c: $n = (abc)_3$. A separação em montes coloca n na posição de seu quociente por três num dos montes:

$$(abc)_3 = 9a + 3b + c \mapsto q = 3a + b = (0ab)_3.$$

Se o monte que contém essa carta for parar na posição p, soma-se 9p a $(0ab)_3$ e o posicionamento na pilha final será $(pab)_3$, ou seja:

Uma distribuição que coloca o monte escolhido na posição p, acrescenta p à esquerda e descarta o dígito final!

$$\mathbf{(abc)_3 \mapsto (pab)_3}$$

Recorde que a numeração das cartas começa em zero. Se desejarmos deslocar a carta que começa na numeração $n = (abc)_3$ para a posição m, que corresponde à numeração $m - 1 = (xyz)_3$, basta repetir a distribuição três vezes, colocando o monte em que aparece a carta escolhida nas posições correspondendo à ordem inversa dos dígitos de $m - 1$, ou seja, z, y e x:

$$n = (abc)_3 \xmapsto{1^{\underline{a}}:\ z} (zab)_3 \xmapsto{2^{\underline{a}}:\ y} (yza)_3 \xmapsto{3^{\underline{a}}:\ x} (xyz)_3 = m - 1$$

que corresponde à m-ésima posição do baralho, de cima para baixo. Isso explica o truque que descreveremos adiante.

3. Fazendo uma distribuição na prática

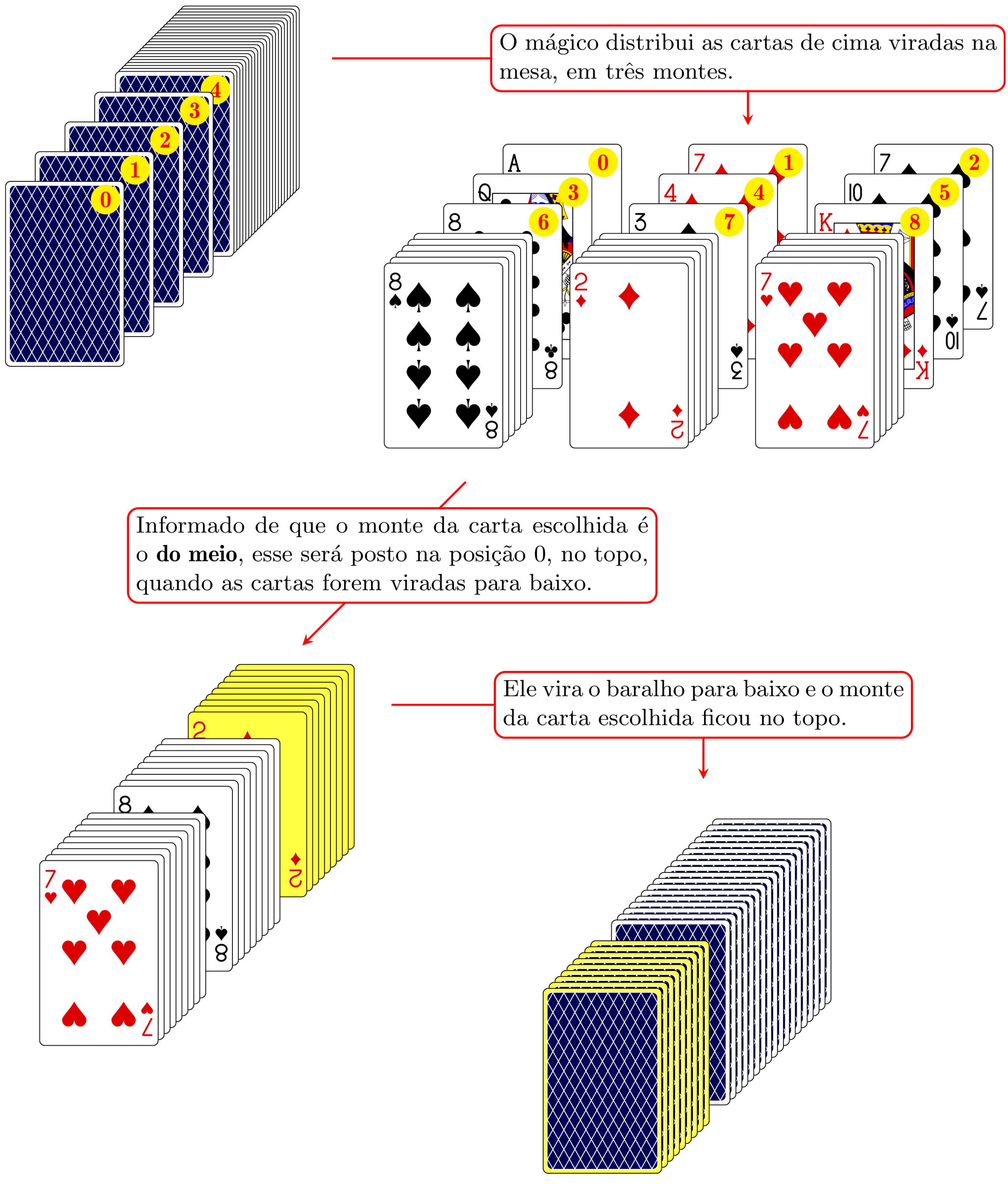

Figura 2: Uma distribuição para colocar o monte da carta escolhida na posição 0 = no topo. O participante informou que a carta escolhida está no monte do meio.

Para efetuar uma distribuição, com o baralho virado para baixo em suas mãos, o mágico deve retirar as cartas de cima e pô-las na mesa, empilhando-as nos três montes enquanto o participante observa, de forma que esse pode ver todas as cartas e apontar em que monte a carta que escolheu está. Além disso, a ordenação da numeração das cartas é mantida.

Ao final, tendo sido revelado o monte, o mágico deve lembrar-se que as posições $0 =$ no topo, $1 =$ no meio e $2 =$ embaixo referem-se ao baralho virado para baixo quando for posicionar os montes com as cartas ainda sobre a mesa viradas para cima. Veja na Figura 2 a demonstração de uma distribuição.

4. Decompondo um número na base 3 mentalmente

É fácil decompor mentalmente números pequenos na base 3. Um bom método é pelos sucessivos restos da divisão por 3, sendo o próximo dividendo o quociente da primeira divisão. Com efeito, o resto por 3 é o quanto o dividendo excede um múltiplo de 3 que está na tabuada e o quociente é imediato dela. Esse método tem a vantagem de dar os dígitos na ordem para executar o truque. Por exemplo, para o número 17, 17 excede 15 em **2**, $15 \div 3 = 5$, e 5 excede 3 em **2**, com quociente **1**. Portanto, o truque deve ser feito com as posições 2, 2 e 1 ($17 = (122)_3$).

5. Execução do truque

1. Selecione um participante da plateia. Mostre um baralho com 27 cartas e este deve escolher, em segredo, uma das cartas, podendo revelá-la à plateia. O baralho pode ser rapidamente embaralhado pelo próprio participante.

2. O mágico pergunta um número (que chamaremos aqui de m) – digamos até 25 – a ele ou a outra pessoa da plateia. O número pode ser anotado numa lousa.

3. Mentalmente o mágico decompõe o antecessor $m-1$ na base 3: $m-1 = (xyz)_3$.

4. O mágico deve executar três distribuições como explicadas acima para as posições z, y e x, nessa ordem, perguntando ao participante ao final de cada distribuição em qual monte está a carta que escolheu.

5. Ao final das três distribuições, com o baralho em mãos virado para baixo, o mágico retira as cartas de cima uma a uma, contando de 1 a m, virando apenas a m-ésima carta, perguntando no ato se é esta a carta escolhida, o que o espantado participante confirmará.

A Figura 3 ilustra uma execução completa do truque.

6. Uma generalização para b^k cartas

O truque pode estender-se para qualquer base. A base b é o número de montes, e, para um baralho de b^k cartas, precisamos de k distribuições. O desafio é decompor números na base b mentalmente.

Um caso interessante é fazer o truque com b^2 cartas, com b montes e apenas duas distribuições, uma vez que decompor números de apenas dois dígitos na base b é uma questão de quociente e resto na divisão por b:

$$0 \leqslant n < b^2: \qquad n = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b \iff n = (qr)_b.$$

Como exercício, demonstre a generalização e aprenda também o truque com 16 ou 25 cartas e duas distribuições.

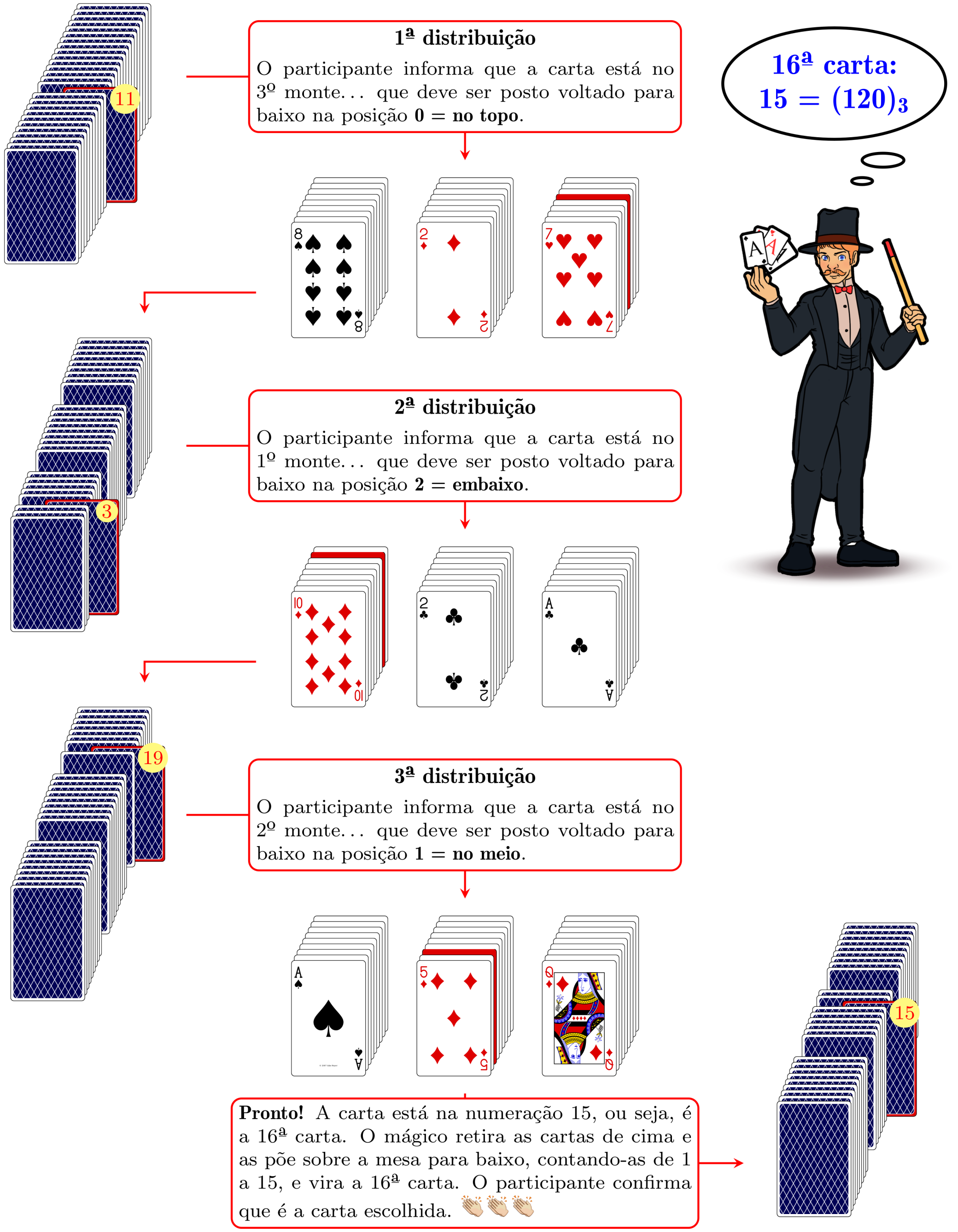

Figura 3: Um exemplo do truque em sua totalidade. Supomos que foi escolhido o número 16. O mágico decompõe $15 = (120)_3$ e deve fazer as distribuições para as posições 0, 2 e 1, nessa ordem. Supondo que a carta escolhida iniciou na posição $11 = (102)_3$, as posições ocupadas por ela após cada distribuição serão $11 = (102)_3 \xrightarrow{1^{\text{a}}:\ 0} (010)_3 = 3 \xrightarrow{2^{\text{a}}:\ 2} (201)_3 = 19 \xrightarrow{3^{\text{a}}:\ 1} (120)_3 = 15$.

Referências

[1] CARVALHO, M. P. de; SANTOS, J. M. "Dinâmica de um truque de cartas." *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n° 70, 2014.

[2] FIALHO, P. M. S. *Matemática e Embaralhamento de Cartas: de Mágicas a Cadeias de Markov.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.

[3] RODRIGUES, J. C. F. "Adivinhando o número pensado: uma contribuição para atividades em sala de aula." *Educação Matemática em Revista*, pp.152–165, 2017.

[4] SAMPAIO, J. C.; MALAGUTTI, P. L. *Mágicas, matemática e outros mistérios.* São Carlos: EdUFSCar, 2008.

[5] ALVES, A. G. *Mágicas matemáticas como metodologia de ensino.* Dissertação (ProfMat) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

[6] SHENG L. Y.; FRASSON, M. V. S. "Uma mágica com cartas usando a base dois." *Revista do Professor de Matemática*, v. 99, 2019.

[7] MCOWAN, P.; PARKER, M. *The manual of Mathematical Magic.* [S.l.]: www.mathematicalmagic.com/, 2010.

[8] GARDNER, M. *Mathematics, Magic and Mystery.* Nova York: Dover, 1956.

Miguel V. S. Frasson
ICMC – Universidade de São Paulo
<frasson@icmc.usp.br>

Lee Y. Sheng
Universidade Federal do Mato Grosso
<leeufmt@yahoo.com.br>

Recebido: 08/06/2020
Publicado: 28/08/2020