

# Métodos de Euler e Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem por meio de um *applet* do Geogebra

Flank David Morais Bezerra

Manoel Wallace Alves Ramos

## Resumo

Neste artigo mostramos a construção de um *applet* criado a partir do uso de ferramentas do *software Geogebra* para apresentar os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem. O *applet* fornece soluções numéricas aproximadas para um problema de valor inicial associado a EDOs, que são obtidas a partir dos métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem.

**Palavras-chave:** método de Euler; método de Runge-Kutta; *applet*; geogebra; métodos numéricos; equações diferenciais.

## Abstract

In this paper show the construction of an *applet* created from the use of *Geogebra software* tools to present the numerical Euler's methods and fourth order Runge-Kutta's method. The *applet* provides approximate numerical solutions to an initial value problem associated to ODEs, as well as displays the graphs of the solutions that are obtained from the numerical Euler's methods and fourth-order Runge-Kutta's method.

**keywords:** Euler's method; Runge-Kutta's method, *applet* ; geogebra; Numerical methods; differential equations.

## 1. Introdução

O primeiro método para calcular uma solução aproximada de uma EDO, a partir de uma condição inicial, foi desenvolvido por Leonhard Euler. O método de Euler desempenha um papel de destaque no ensino e na base metodológica para explicar os métodos para obter uma primeira aproximação na solução de EDOs. Generalizações do método de Euler foram desenvolvidas por Carl Runge, Karl Heun e Martin Wilhelm Kutta. Tais pesquisadores contribuíram para a formulação dos, hoje bastante conhecidos, métodos de Runge-Kutta. Assim, os métodos de Euler e Runge-Kutta formam o bloco dos procedimentos de passo simples (ou passo único), isto é, métodos em que para se obter o valor aproximado  $y_{n+1}$  é necessário apenas conhecer o seu antecessor  $y_n$ .

Neste artigo, apresentamos os métodos numéricos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem. Também propomos um *applet*, criado no *software Geogebra*, que fornece as soluções

numéricas de um PVI a partir dos métodos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de 4ª ordem.

Sobre a estrutura do artigo. Na Seção 2, lembramos o método de Euler. Na Seção 3 abordamos o método de Euler melhorado. Na Seção 4 tratamos do método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Na Seção 5 propomos um *applet* que gera soluções numéricas de um PVI utilizando os métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem. Na Seção 6, mostramos em 12 passos a construção do *applet*.

Considere o problema de valor inicial (PVI) seguinte

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

em que  $y$  é uma função real na variável  $x \in \mathbb{R}$  e  $y' = dy/dx$ . Os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta são utilizados para encontrar soluções aproximadas de PVI's do tipo (1). A principal referência para a elaboração das Seções 2, 3, e 4 foi [2]. Informamos que todos os cálculos e gráficos do trabalho foram feitos utilizando o *software Geogebra*.

## 2. O método de Euler

Descrevemos o método: suponha que queremos aproximar a solução do PVI (1) em  $x = x_1 = x_0 + h$ , em que  $h$  é pequeno e é chamado de passo. A ideia por trás do método de Euler é usar a reta tangente à curva da solução do PVI através de  $(x_0, y_0)$  para obter tal aproximação.

Sabemos que a equação da reta tangente a uma curva em  $(x_0, y_0)$  é dada por  $y(x) = y_0 + m(x - x_0)$ , em que  $m$  é a inclinação da curva em  $(x_0, y_0)$ . Da equação (1), temos que  $m = f(x_0, y_0)$ , então

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \quad (2)$$

Fazendo  $x = x_1$  na equação (2) encontramos a aproximação de Euler para a solução exata em  $x_1$ , ou seja,  $y_1(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$ , que pode ser escrita como  $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ .

Suponha que desejamos encontrar uma aproximação para a solução exata do PVI (1) em  $x_2 = x_1 + h$ . Podemos usar a mesma ideia, só que agora tomamos a reta tangente à curva da solução de (1) em  $(x_1, y_1)$ . Neste caso, a inclinação da reta tangente é  $f(x_1, y_1)$ , então a equação da reta tangente é  $y(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$ . Fazendo  $x = x_2$  temos a aproximação desejada  $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ , em que  $h = x_2 - x_1$ . Continuando esse procedimento, determinamos uma sequência de aproximações  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  para a solução do PVI (1) nos pontos  $x_{n+1} = x_n + h$ . Dessa forma, o método de Euler para uma aproximação da solução do PVI (1) através dos pontos  $x_{n+1} = x_0 + nh$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ) é dado por

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

**Exemplo 1.** Considere o PVI  $y' = x - y - 1$ ,  $y(0) = 1$ . Usando o método de Euler com  $h = 0.1$  e  $h = 0.05$ , obtemos uma solução aproximada para o PVI em  $[0, 1]$  com 5 casas decimais. Os valores da solução aproximada estão apresentados na Tabela 1. Ainda na Tabela 1, apresentamos a solução exata do PVI  $y(x) = 3e^{-x} + x - 2$  e o **erro absoluto** que é definido por  $|y(x_n) - y_n|$ .

Comparando os valores das aproximações apresentados na Tabela 1, vemos que o menor passo levou a uma melhor aproximação. Na verdade, quando aplicamos o método de Euler com  $h = 0.05$ , o

Tabela 1: Resultados do método de Euler com  $h=0.1$  e  $h=0.05$  aplicado ao PVI do Exemplo 1.

		$y_n$ Euler		Erro absoluto		
$n$	$x_n$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	Solução exata	$h = 0.1$	$h = 0.05$
1	0.1	0.8	0.8075	0.81451	0.01451	0.00701
2	0.2	0.63	0.64352	0.65619	0.02619	0.01267
3	0.3	0.487	0.50528	0.52245	0.03545	0.01718
4	0.4	0.3683	0.39026	0.41096	0.04266	0.02070
5	0.5	0.27147	0.29621	0.31959	0.04812	0.02338

erro absoluto foi praticamente reduzido a um quarto na comparação do erro com  $h = 0.1$ . O erro absoluto definido no Exemplo 1 e apresentado nas tabelas deste trabalho é um erro de truncamento local. Para saber mais sobre erros decorrentes de métodos numéricos, veja a referência [1].

No Exemplo 1 vimos que reduzir o tamanho do passo pela metade ocasionou uma redução considerável do erro absoluto. Podemos continuar reduzindo o tamanho do passo até chegar a uma precisão razoavelmente boa, porém a quantidade de cálculos necessários será muito grande. Note que, se tomarmos  $h = 0.001$  no Exemplo 1, precisamos de 1000 passos para atravessar o intervalo  $[0, 1]$ . Veremos na Seção 3 uma derivação do método de Euler, em que é possível obter melhor precisão para o PVI, que a do método de Euler, para o mesmo tamanho de passo.

### 3. Método de Euler melhorado

O método de Euler melhorado é um exemplo do que chamamos de **método preditor-corretor**. A ideia é usar a fórmula do método de Euler para obter uma primeira aproximação para a solução  $y(x_{n+1})$  do PVI (1). Denotaremos aproximação por  $y_{n+1}^*$ , então  $y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$ . Agora, melhoramos (ou corrigimos) tal aproximação aplicando mais uma vez o método de Euler. Mas desta vez, usamos as médias das inclinações das curvas das soluções através de  $(x_n, y_n)$  e  $(x_{n+1}, y_{n+1}^*)$ . Ou seja,  $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)]$ .

Dessa forma, o método de Euler melhorado para encontrar soluções próximas da solução exata do PVI (1) nos pontos  $x_{n+1} = x_0 + nh$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) é:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)], \tag{4}$$

em que  $y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$

esta

**Exemplo 2.** Aplicando o método de Euler melhorado com  $h = 0.1$  para encontrar uma solução aproximada do PVI  $y' = x - y - 1$ ,  $y(0) = 1$ , no intervalo  $[0, 1]$ , obtemos os valores descritos na Tabela 2.

Analisando os resultados da Tabela 2, vemos que o método de Euler melhorado tem captado, pelo menos, uma casa decimal de precisão quando  $h = 0.1$ . Isto é um indicativo de que o erro de truncamento local no método de Euler melhorado comporta-se com ordem  $h^3$ , enquanto que o comportamento do erro no método de Euler tem ordem  $h^2$ .

Tabela 2: Resultados dos métodos de Euler e Euler melhorados com  $h=0.1$  aplicado ao PVI do Exemplo 2.

$n$	$x_n$	$y_n$ ( $h=0.1$ )			Erro absoluto	
		Euler	Euler melhorado	Solução exata	Euler	Euler melhorado
1	0.1	0.8	0.815	0.81451	0.01451	0.00049
2	0.2	0.63	0.65708	0.65619	0.02619	0.00088
3	0.3	0.487	0.52365	0.52245	0.03545	0.00120
4	0.4	0.3683	0.41241	0.41096	0.04266	0.00145
5	0.5	0.27147	0.32123	0.31959	0.04812	0.00164

#### 4. Runge-Kutta de 4ª ordem

Dentre todos os métodos de Runge-Kutta, o de 4ª ordem é o mais conhecido e utilizado. Ele também é conhecido como **método clássico de Runge-Kutta**. O método de Runge-Kutta de 4ª ordem mais popular, de acordo com Butcher [2], é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4],$$

em que

$$\begin{aligned} c_1 &= f(x_n, y_n), \\ c_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}c_1\right), \\ c_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}c_2\right), \\ c_4 &= f(x_n + h, y_n + hc_3). \end{aligned}$$

Esse método tem erro de truncamento local proporcional a  $h^5$ . Assim, é duas ordens de grandeza mais preciso do que o método de Euler melhorado, e três ordens de grandeza mais preciso que o método de Euler.

**Exemplo 3.** Aplicando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com  $h = 0.1$  para encontrar uma solução aproximada do PVI  $y' = x - y - 1$ ,  $y(0) = 1$ , no intervalo  $[0, 1]$ , obtemos os valores descritos na Tabela 3. Analisando a Tabela 3, descobrimos o motivo do método de Runge-Kutta de 4ª ordem ser tão popular. Pois, se desejamos uma solução com precisão de 5 casas decimais, os resultados da Tabela 3 mostram-nos que não é necessário reduzir o tamanho do passo. A comparação do erro absoluto nas Tabelas 2 e 3 ilustra a eficiência do método de Runge-Kutta sobre os métodos de Euler e Euler melhorado.

Tabela 3: Resultados do método de Runge-Kutta de 4ª ordem com  $h = 0.1$  aplicado ao PVI do Exemplo 3.

$n$	$x_n$	$y_n$	Solução exata	Erro absoluto
1	0.1	0.81451	0.81451	0.00000
2	0.2	0.65619	0.65619	0.00000
3	0.3	0.52246	0.52245	0.00001
4	0.4	0.41096	0.41096	0.00000
5	0.5	0.31959	0.31959	0.00000

Diversos outros conceitos podem ser utilizados no estudo de métodos numéricos para EDO. Por exemplo, conceitos como convergência, estabilidade e consistência são importantes na análise do comportamento do método. Não exploramos tais conceitos neste artigo, contudo indicamos a referência [2].

## 5. Applet no Geogebra para soluções numéricas de PVIs

Realizar cálculos, de forma manual, dos métodos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de 4ª ordem é tedioso e oneroso. Contudo, esses métodos podem ser implementados, através de rotinas, em diversos *softwares*, tais como *Maple*, *Matlab*, *Maxima* e *Mathematica*.

No entanto, é necessário ter noções de programação para a implementação de tais métodos nos referidos *softwares*. Nesta seção é apresentado um *applet* que de forma interativa e dinâmica fornece a solução exata de um PVI, bem como as soluções numéricas pelo método de Euler, método de Euler melhorado e pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem. O *applet* também exibe o erro absoluto e a poligonal da solução aproximada para cada método. Além disso, é possível escolher qual solução se quer exibir ou até mesmo todas elas. O *applet* foi criado no software de geometria dinâmica *Geogebra 5.0* e está disponível em <https://geogebra.org/m/xTz9CaRY>. De acordo com Deitel [3], *applet* é um software que é executado no contexto de outro programa. Geralmente, os *applets* apresentam algum tipo de interface para usuário e possuem a vantagem de serem executados diretamente em uma página *web*. De modo geral, *applets* são programas leves, necessitam de pouco tempo para carregar no computador, *notebook*, *smartphone* ou *tablet* e são de fácil utilização.

Ao iniciar os estudos e pesquisas, para a elaboração deste trabalho, referente aos métodos de Euler, Euler melhorado e ao método de Runge-Kutta de 4ª ordem, percebemos a necessidade de uma ferramenta didática, interativa, dinâmica e com uma interface agradável, que pudesse colaborar para o ensino e aprendizagem de tais métodos. Foi então que surgiu a ideia de se criar um *applet* no software *Geogebra*, uma vez que o *Geogebra* permite a construção de *applets* dispensando conhecimentos prévios de programação, é de fácil manipulação e configuração e dispõe de uma página *web* onde os *applets* ficam hospedados. Na Seção 6 mostraremos como o *applet* intitulado *Métodos numéricos para EDO* (Fig. 1) foi construído. A vantagem de conhecer como é feita a construção do *applet* é poder fazer modificações que forem convenientes para quem quer utilizá-lo no ensino de métodos numéricos para EDOs de primeira ordem. Ou seja, do *applet* apresentado neste trabalho podem derivar diversas outras versões mais sofisticadas.

No *applet* da Fig. 1, um usuário entra com uma EDO de primeira ordem  $y' = f(x, y)$  e uma condição inicial  $(x_0, y_0)$ , então ao clicar *Enter* a solução exata do PVI surgirá na janela de visualização.

O usuário pode optar por visualizar a solução aproximada do PVI pelo método de Euler, Euler melhorado ou Runge-Kutta de 4ª ordem. Além disso, ele pode escolher o tamanho do passo  $h$ . Como resposta, o usuário visualizará a poligonal, com dez passos, do método selecionado e uma tabela contendo as soluções aproximadas, as soluções exatas e os erro absolutos. Escolhemos exibir dez passos, por acreditar que, didaticamente, essa quantidade seja suficiente para o entendimento da relação existente entre os métodos e o tamanho do passo  $h$ . Durante a construção do *applet* é possível alterar a quantidade de passos que se quer exibir.

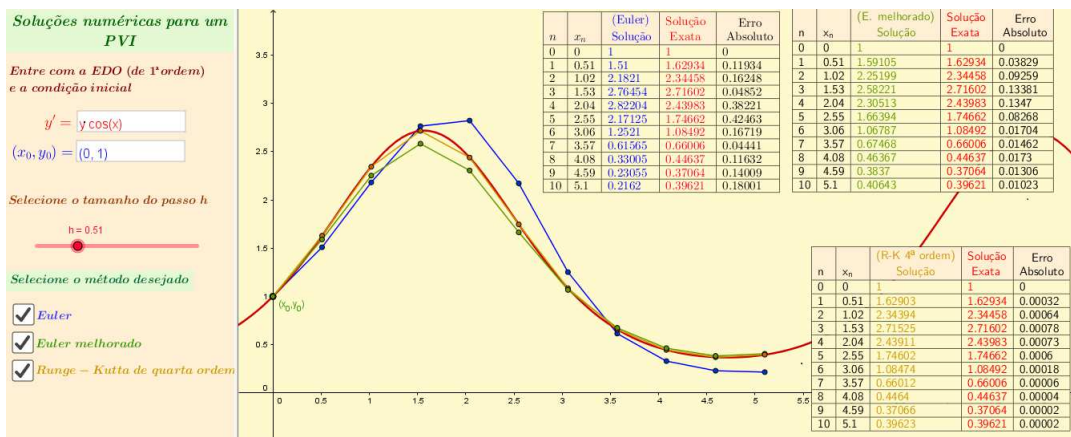


Figura 1: Applet: Métodos numéricos para EDO. Disponível em <https://geogebra.org/m/xTz9CaRY>.

## 6. Construção do *applet*

Nesta seção apresentaremos o roteiro para a construção do *applet* em 12 passos.

**Passo 1 - Criando ponto inicial e controle deslizante.** Ao abrir o *Geogebra*, na barra de *menus*, selecione a opção *Exibir* e em seguida a opção *Planilha* (Fig. 2).

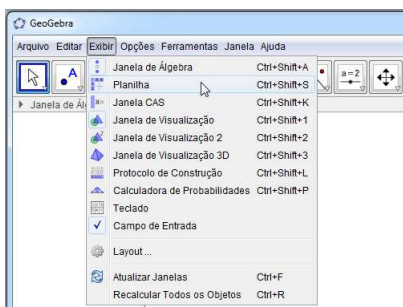



Figura 2: Exibindo a planilha.

Após a planilha aparecer, clique com o botão direito do *mouse* em qualquer célula; em seguida, clique na opção  **Opções da Planilha ...** e depois desmarque a opção  **Exigir "=" Antes dos Comandos**. Agora, digite na célula A2 o ponto  $(0, 1)$ , como na Fig. 3.

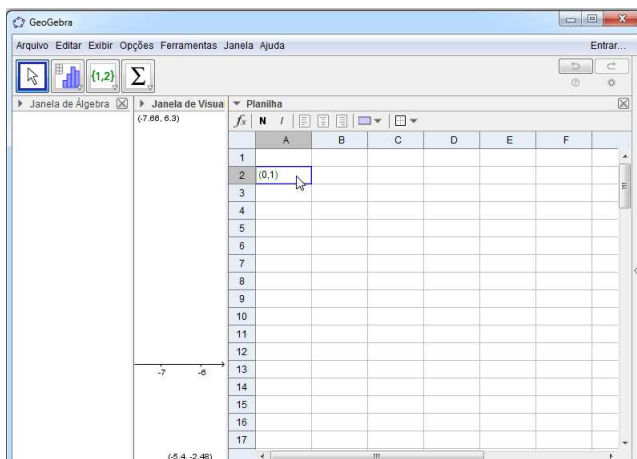



Figura 3: Criando o ponto inicial.

Após clicar *Enter* o ponto A2 surgirá nas janelas de visualização e de álgebra. Logo, na barra de ferramentas, clique na ferramenta  *Controle Deslizante*. Ao clicar em qualquer lugar da janela de visualização, surgirá uma caixa para a configuração do controle deslizante. Configure o controle deslizante de acordo com a Fig. 4. Após clicar *OK*, o controle deslizante aparecerá na janela de visualização (Fig. 5).

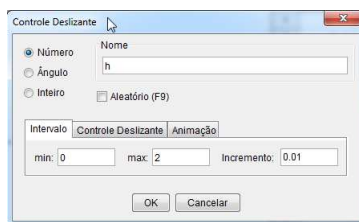


Figura 4: Configurando o controle deslizante.

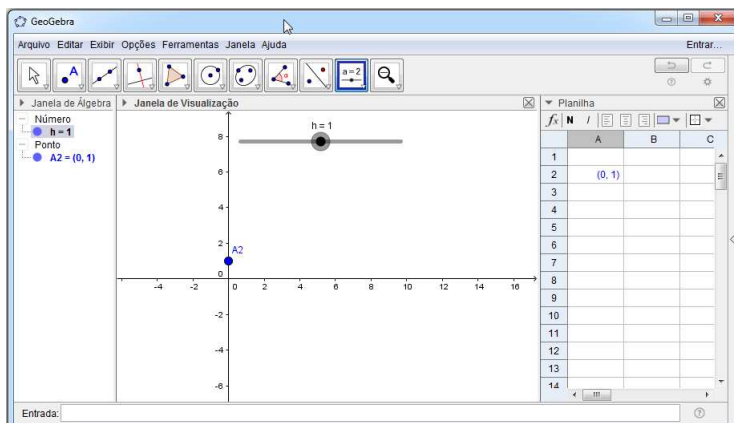


Figura 5: Controle deslizante  $h$ .

**Passo 2 - Obtendo a solução exata do PVI.** No Campo de Entrada, digite a EDO  $y' = y * \cos(x)$ . Logo, digite  $g(x) = \text{ResolverEDO}[y', A2]$ . A solução exata  $g(x)$  aparecerá na janela de álgebra e seu gráfico surgirá na janela de visualização, como na Fig. 6. Escolhemos a EDO  $y' = y * \cos(x)$  por conveniência, contudo na construção pode ser usada qualquer outra EDO de primeira ordem.

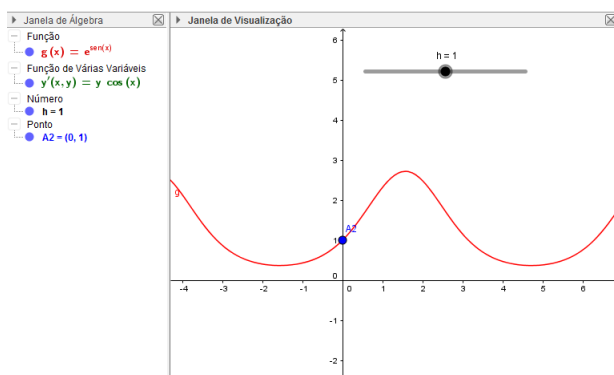


Figura 6: Solução exata.

**Passo 3 - Implementando o método de Euler.** Com o controle deslizante fixado em  $h = 0,51$ , digite na célula A1 da planilha a palavra *Pontos*. Na célula A3, entre com a fórmula do método de Euler  $(x(A2) + h, y(A2) + h * y'(x(A2), y(A2)))$  (Fig. 7).



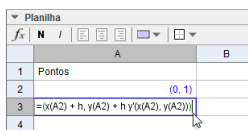


Figura 7: Método de Euler.

Clique na alça de preenchimento (canto inferior direito) da célula A3 e arraste até a célula A12. Note que uma sequência de pontos surgirá na janela de visualização (Fig. 8).

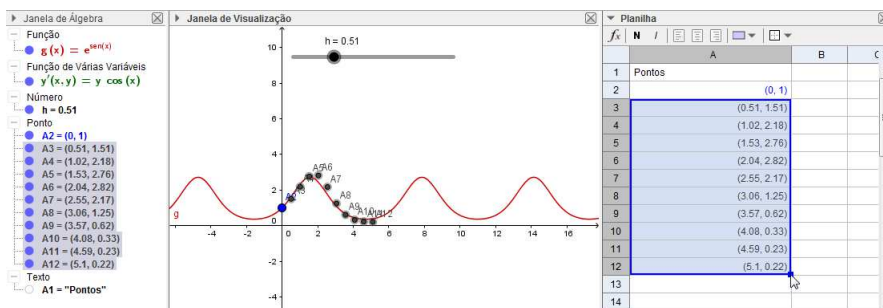


Figura 8: Pontos do método de Euler.

Selecione da célula A2 até a célula A12, clique o botão direito do *mouse* e clique na opção **AA Exibir Rótulo**, para que os rótulos dos pontos na janela de visualização desapareçam. Clicando no botão direito do *mouse* nas células selecionadas, clicando em *Propriedades*, e em seguida na aba *Cor*, é possível escolher a cor dos pontos. Os procedimentos para esconder o rótulo e para escolher a cor são realizados de igual forma para qualquer objeto do *Geogebra*. Escolhemos a cor azul para os pontos A2, A3, ..., A12. Agora, digite no campo de entrada o comando *CaminhoPoligonal*[A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12]. Esse comando cria uma poligonal dos pontos A2, A3, ..., A12. Depois mude a cor do caminho poligonal para a mesma cor dos pontos, veja Fig. 9.

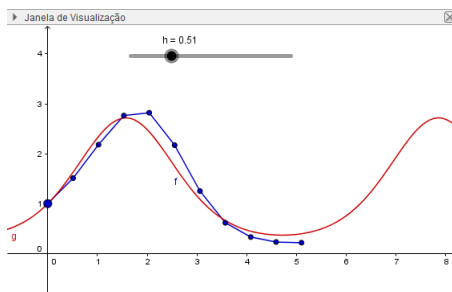


Figura 9: Poligonal do método de Euler.

Ao mover o controle deslizante podemos notar que a poligonal de Euler muda conforme os valores de  $h$  se alteram.

**Passo 4 - Criando a tabela do método de Euler.** Na planilha, nomeie a célula B1 de  $n$  e nas células B2:B12 digite 0, 1, ..., 10, respectivamente. Logo, nomeie a célula C1 de  $x_n$  e na célula C2 digite  $x(A2)$ . Logo após, clique na alça de preenchimento da célula C2 e arraste até a célula C12. Nomeie a célula D1 como *Euler solução* e na célula D2 digite  $y(A2)$ . Logo após, clique na alça de preenchimento da célula D2 e arraste até a célula D12. Entre com o texto *Solução exata* na célula E1, na célula E2 digite a fórmula  $g(x(A2))$ , em seguida, estenda a fórmula para as demais células da coluna E até a célula E12. Digite o texto *Erro absoluto* na célula F1, e na célula F2 digite a fórmula  $|D2 - E2|$ . Logo após, estenda a fórmula até a célula F12. Assim, criamos uma tabela que apresenta a solução numérica do PVI (pelo método de Euler), a solução exata e o erro absoluto para 10 valores de  $x$  definidos a partir do ponto inicial A2 e do tamanho do passo  $h$ ; veja Fig. 10.

$f_x$	n	t	□	□	□	□
	A	B	C	D	E	F
1	Pontos	n	$x_n$	Euler solução	Solução exata	Erro Absoluto
2	(0, 1)	0	0	1	1	0
3	(0.51, 1.51)	1	0.51	1.51	1.62934	0.11934
4	(1.02, 2.1821)	2	1.02	2.1821	2.34458	0.16248
5	(1.53, 2.76454)	3	1.53	2.76454	2.71602	0.04852
6	(2.04, 2.82204)	4	2.04	2.82204	2.43983	0.38221
7	(2.55, 2.17125)	5	2.55	2.17125	1.74662	0.42463
8	(3.06, 1.2521)	6	3.06	1.2521	1.08492	0.16719
9	(3.57, 0.61565)	7	3.57	0.61565	0.66006	0.04441
10	(4.08, 0.33005)	8	4.08	0.33005	0.44637	0.11632
11	(4.59, 0.23055)	9	4.59	0.23055	0.37064	0.14009
12	(5.1, 0.2162)	10	5.1	0.2162	0.39621	0.18001
13						

Figura 10: Tabela do método de Euler.

Note que alteramos as cores dos elementos da colunas D e E. Além disso, centralizamos todos os elementos das células preenchidas, selecionando-as e clicando em centralizar . O número de casas decimais dos valores da tabela também podem ser escolhidos; para isso, veja Fig. 11. Apresentamos os valores com 5 casas decimais.

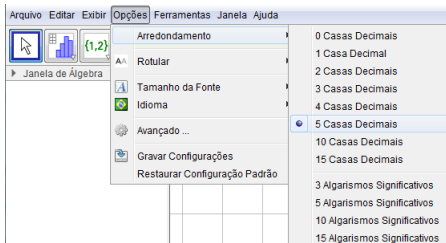


Figura 11: Arredondamento.

**Passo 5 - Implementando o método de Euler melhorado.** O objetivo nesse passo é criar a poligonal do método de Euler melhorado. Na célula H2, digite  $A2$ . Na célula H3, entre com a fórmula do método de Euler  $(x(H2) + h, y(H2) + h * y'(x(H2), y(H2)))$ . Logo, na célula I1 digite o texto *pontos*, na célula I2 digite  $A2$  e na célula I3 entre com a fórmula do método de Euler melhorado  $(x(H2) + h, y(H2) + h/2 * (y'(x(H2), y(H2)) + y'(x(H3), y(H3))))$  (Fig. 12).

H	I
	Pontos
(0, 1)	(0, 1)
(0.51, 1.51)	$(x(H2) + h, y(H2) + h/2 * (y'(x(H2), y(H2)) + y'(x(H3), y(H3))))$

Figura 12: Fórmula do método de Euler melhorado.

Agora, na célula H4 digite a fórmula de Euler atualizada  $(x(H3) + h, y(I3) + h * y'(x(H3), y(I3)))$  e na célula I4 a fórmula de Euler melhorado atualizada  $(x(H4) + h, y(I3) + h/2 * (y'(x(H3), y(I3)) + y'(x(H4), y(H4))))$  (Fig. 13).

H	I
	Pontos
(0, 1)	(0, 1)
(0.51, 1.51)	(0.51, 1.59105)
(1.02, 2.29923)	$(x(H4), y(I3) + h/2 * (y'(x(H3), y(I3)) + y'(x(H4), y(H4))))$

Figura 13: Fórmula do método de Euler melhorado atualizada.

Logo após, clique na célula H4 e arraste até a célula H5, faça o mesmo com as células I4 e I5 (Fig. 14 e 15). Repita esse processo com as células da coluna H e da coluna I, nesta ordem, até as células H12 e I12, respectivamente.

Ao final do procedimento teremos os valores da Fig. 16.

H	I
	Pontos
(0, 1)	(0, 1)
(0.51, 1.51)	(0.51, 1.59105)
(1.02, 2.29923)	(1.02, 2.25199)
(1.53, 2.85308)	

H	I
	Pontos
(0, 1)	(0, 1)
(0.51, 1.51)	(0.51, 1.59105)
(1.02, 2.29923)	(1.02, 2.25199)
(1.53, 2.85308)	(1.53, 2.58221)

Figura 14: De H4 para H5.

Figura 15: De I4 para I5.

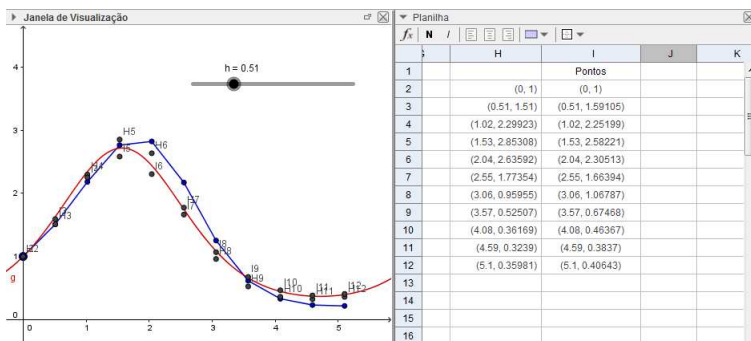


Figura 16: Método de Euler melhorado.

Note que os pontos H2:H12 também surgem na janela de visualização. No entanto, só queremos que os pontos I2:I12 apareçam, uma vez que eles são os pontos do método de Euler melhorado.

Sendo assim, selecione da célula H2 até H12, clique com o botão direito do *mouse* na seleção e clique na opção **Exibir Objeto**, para que os pontos H2:H12 desapareçam da janela de visualização. Daí, esconda o rótulo dos pontos I2:I12, assim como fizemos com os pontos A2:A12. Logo, mude a cor dos pontos I2:I12 para a cor verde. Para criar a poligonal do método de Euler melhorado, digite no campo de entrada *CaminhoPoligonal*[I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12]. Logo após, esconda o rótulo do caminho poligonal e altere sua cor para verde. Com isso, teremos a Fig. 17.

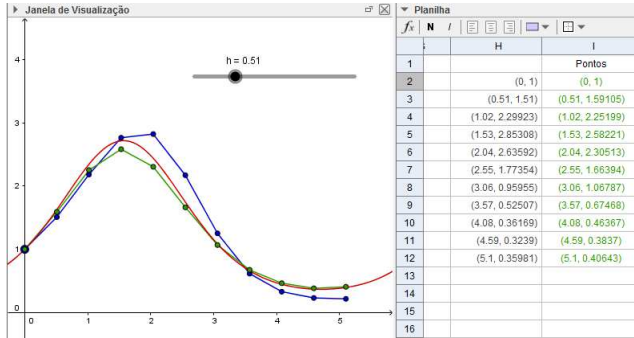


Figura 17: Poligonal do método de Euler melhorado.

**Passo 6 - Criando a tabela do método de Euler melhorado.** Na planilha, nomeie a célula J1 de  $n$  e nas células J2:J12 digite 0, 1, ..., 10, respectivamente. Logo, nomeie a célula K1 de  $x_n$  e na célula K2 digite  $x(I2)$ . Logo após, clique na alça de preenchimento da célula K2 e arraste até a célula K12. Nomeie a célula L1 como *Euler melhorado solução* e na célula L2 digite  $y(I2)$ . Logo após clique na alça de preenchimento da célula L2 e arraste até a célula L12. Entre com o texto *Solução exata* na célula M1, na célula M2 digite a fórmula  $g(x(I2))$ , em seguida, estenda a fórmula para as demais células da coluna M até a célula M12. Digite o texto *Erro absoluto* na célula N1, e na célula N2 digite a fórmula  $|L2 - M2|$ . Logo, estenda a fórmula até a célula N12.

Dessa forma, criamos uma tabela que apresenta a solução numérica do PVI (pelo método de Euler melhorado), a solução exata e o erro absoluto (Fig. 18).

	I	J	K	L	M	N
1	Pontos	$n$	$x_n$	Euler melhorado solução	Solução exata	Erro absoluto
2	(0, 1)	0	0	1	1	0
3	(0.51, 1.59105)	1	0.51	1.59105	1.82934	0.03829
4	(1.02, 2.25199)	2	1.02	2.25199	2.34458	0.09259
5	(1.53, 2.58221)	3	1.53	2.58221	2.71602	0.13381
6	(2.04, 2.30513)	4	2.04	2.30513	2.43983	0.1347
7	(2.55, 1.66394)	5	2.55	1.66394	1.74682	0.08268
8	(3.06, 1.06787)	6	3.06	1.06787	1.08492	0.01704
9	(3.57, 0.67468)	7	3.57	0.67468	0.65006	0.01462
10	(4.08, 0.46367)	8	4.08	0.46367	0.44637	0.0173
11	(4.59, 0.3837)	9	4.59	0.3837	0.37064	0.01306
12	(5.1, 0.40643)	10	5.1	0.40643	0.39521	0.01023
13						

Figura 18: Poligonal do método de Euler melhorado.

Note que alteramos as cores dos elementos da colunas L e M.

**Passo 7 - Implementando o método Runge-Kutta de 4ª ordem.** Com o objetivo de criar a poligonal do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, nomeie as células P1, Q1, R1, S1 e T1 de *Pontos*,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ , respectivamente. Na célula P2 digite  $A2$  e nas células Q2, R2, S2, T2 digite as fórmulas  $y'(x(P2), y(P2))$ ,  $y'(x(P2) + h/2, y(P2) + Q2 * h/2)$ ,  $y'(x(P2) + h/2, y(P2) + R2 * h/2)$  e  $y'(x(P2) + h/2, y(P2) + S2 * h)$ , respectivamente, como na Fig. 19.

P	Q	R	S	T
Pontos	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
A2	$y(x(P2), y(P2))$	$y(x(P2) + h/2, y(P2) + Q2 h/2)$	$y(x(P2) + h/2, y(P2) + R2 h/2)$	$y(x(P2) + h, y(P2) + S2 h)$

Figura 19: Definindo os parâmetros.

Logo, na célula P3 digite a fórmula do método de Runge-Kutta de 4ª ordem  $(x(P2) + h, y(P2) + (h/6) * (Q2 + 2 * R2 + 2 * S2 + T2))$  (Fig. 20).

P
Pontos
(0, 1)
$(x(P2)+h,y(P2) + h/6 (Q2 + 2R2 + 2S2 + T2))$

Figura 20: Fórmula do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Para obter os parâmetros  $k_1, k_2, k_3, k_4$  da linha 3, clique na célula Q2 e arraste até a célula Q3, faça o mesmo para as células R2, S2, e T2. Depois que os valores de  $k_1, k_2, k_3, k_4$  da linha 3 forem obtidos, faremos o mesmos procedimento para encontrar os valores das células P4, Q4, R4, S4 e T4, ou seja, clique na célula da linha de cima e arraste. Realizando esse procedimento em todas as linhas até a linha 12, na ordem P, Q, R, S e T, obtêm-se os valores da Fig. 21.

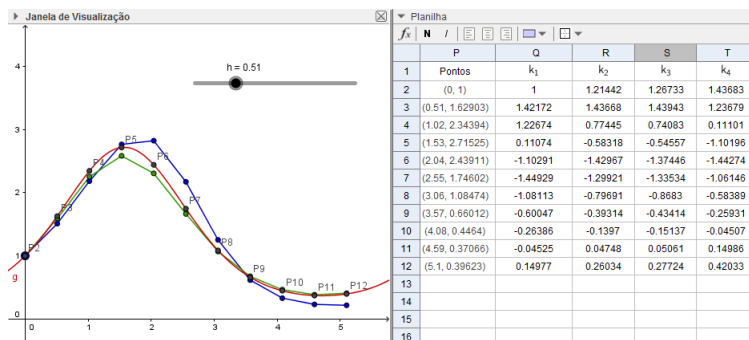


Figura 21: Pontos do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Agora, assim como fizemos no método de Euler e no método de Euler melhorado, esconda os rótulos dos pontos P2:P12 e altere sua cor para marrom.

Para criar a poligonal do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, digite no campo de entrada *CaminhoPoligonal*[P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P12]. Logo após, esconda o rótulo do caminho poligonal e altere sua cor para marrom. Assim, teremos a construção da Fig. 22.

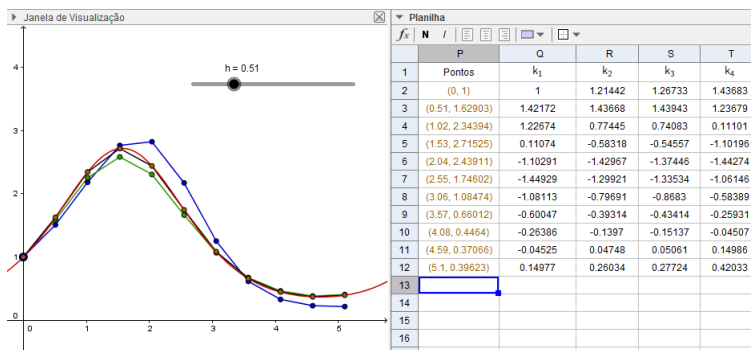


Figura 22: Poligonal do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

**Passo 8 - Criando a tabela do método de Runge-Kutta.** De forma análoga à construção das tabelas do método de Euler e do método de Euler melhorado, nomeie a célula U1 de  $n$  e nas células U2:U12 digite 0, 1, ..., 10, respectivamente. Logo, nomeie a célula V1 de  $x_n$  e na célula V2 digite  $x(P2)$ . Logo após, clique na alça de preenchimento da célula V2 e arraste até a célula V12. Nomeie a célula W1 como *R-K solução* e na célula W2 digite  $y(P2)$ .

Logo após, clique na alça de preenchimento da célula W2 e arraste até a célula W12. Entre com o texto *Solução exata* na célula X1, na célula X2 digite a fórmula  $g(x(P2))$ ; em seguida, estenda a fórmula para as demais células da coluna X até a célula X12. Digite o texto *Erro absoluto* na célula Y1, e na célula Y2 digite a fórmula  $|W2 - X2|$ . Logo após, estenda a fórmula até a célula Y12. Assim, criamos uma tabela que apresenta a solução numérica do PVI (pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem), a solução exata e o erro absoluto (Fig. 23).

	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	Pontos	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$n$	$x_n$	R-K1 solução	Solução exata	Erro absoluto
2	(0, 1)	1	1.21442	1.26733	1.43683	0	0	1	1	0
3	(0.51, 1.62903)	1.42172	1.43668	1.43943	1.23679	1	0.51	1.62903	1.62934	0.00032
4	(1.02, 2.34394)	1.22674	0.77445	0.74083	0.11101	2	1.02	2.34394	2.34458	0.00064
5	(1.53, 2.71525)	0.11074	-0.58318	-0.54557	-1.10196	3	1.53	2.71525	2.71602	0.00078
6	(2.04, 2.43911)	-1.10291	-1.42967	-1.37446	-1.44274	4	2.04	2.43911	2.43983	0.00073
7	(2.55, 1.74602)	-1.44929	-1.29921	-1.33534	-1.06146	5	2.55	1.74602	1.74662	0.0006
8	(3.06, 1.08474)	-1.08113	-0.79691	-0.8683	-0.58389	6	3.06	1.08474	1.08492	0.00018
9	(3.57, 0.66012)	-0.60047	-0.39314	-0.43414	-0.25931	7	3.57	0.66012	0.66006	0.00006
10	(4.08, 0.4464)	-0.26386	-0.1397	-0.15137	-0.04507	8	4.08	0.4464	0.44637	0.00004
11	(4.59, 0.37066)	-0.04525	0.04748	0.05061	0.14986	9	4.59	0.37066	0.37064	0.00002
12	(5.1, 0.39623)	0.14977	0.26034	0.27724	0.42033	10	5.1	0.39623	0.39621	0.00002
13										

Figura 23: Poligonal do método de Euler melhorado.

Note que alteramos as cores dos elementos da colunas W e X.

**Passo 9 - Transferindo as tabelas para a janela de visualização.** Neste passo, vamos transferir as tabelas da planilha para a janela de visualização. Selecione da célula B1 até a célula F12; em seguida, clique com o botão direito do *mouse* e selecione a opção *Criar*, depois clique na opção *Tabela* (Fig. 24). Dessa forma, a tabela selecionada aparecerá na janela de visualização.

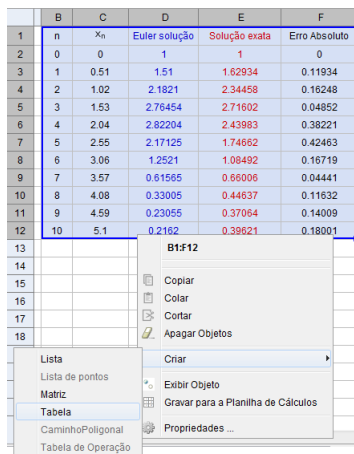


Figura 24: Transferindo a Tabela.

Repita o procedimento para as tabelas que vão da célula J1 até a célula N12, e da célula U1 até a célula Y12. Dessa forma, as tabelas do método de Euler, do método de Euler melhorado e do método de Runge-Kutta de 4ª ordem irão surgir na janela de visualização, como na Fig. 25.

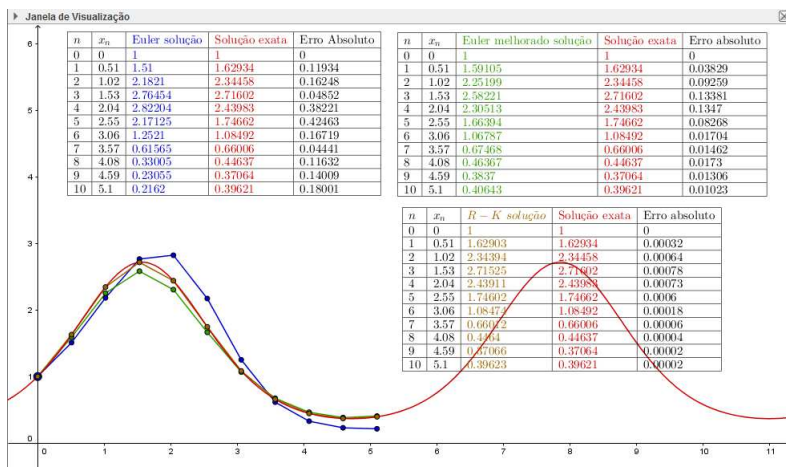



Figura 25: Tabelas na janela de visualização.

**Passo 10 - Abrindo outra janela de visualização e criando textos.** Abriremos uma outra janela de visualização e nela inseriremos textos. Na barra de *menus*, clique em *Exibir* e depois na opção **Janela de Visualização 2**. Uma nova janela de visualização surgirá. Logo, clique no controle deslizante com o botão direito do *mouse*, logo depois, clique em *Propriedades*, clique na aba *Avançado*, desmarque a opção *Janela de Visualização* e marque a opção *Janela de visualização 2*.



Seguindo esses passos, o controle deslizante desaparece da janela de visualização e aparece na janela de visualização 2. Para criar textos, selecione a ferramenta  **Texto** na barra de ferramentas. Logo, clique na janela de visualização 2. A caixa da Fig. 26 surgirá. Digite o texto da Fig. 26, marque a opção  **Fórmula LaTeX** e logo depois clique em *OK*. O texto *Soluções numéricas para um PVI* aparecerá na janela de visualização 2. Marcar a opção *Fórmula LaTeX*, na caixa de texto, permite que textos e fórmulas sejam digitados usando os mesmos comandos com sintaxe do LaTeX. Para configurar o texto, alterando cor, tamanho e tipo da fonte, clique com o botão direito do *mouse* em cima do texto e selecione a opção *Propriedades*.

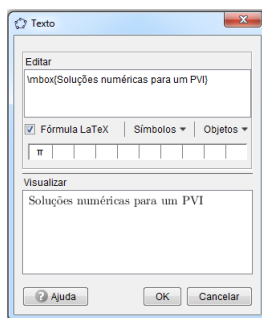


Figura 26: Caixa de texto.

Todos os textos do *applet*, já configurados e posicionados convenientemente, foram criados da mesma forma e estão na Fig. 27.

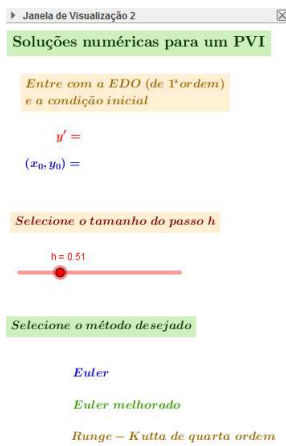



Figura 27: Textos do *applet*.

Vale lembrar que em todos os textos é marcada a opção *Posição absoluta na tela*, clicando sobre

os mesmos com o botão direito do *mouse* e selecionando esta opção.

**Passo 11 - Campos de entrada, poligonais e tabelas.** Vamos criar dois campos de entrada: um para a EDO e outro para a condição inicial. Na barra de ferramentas, selecione a ferramenta

 Campo de Entrada. Logo, clique em qualquer local da janela de visualização 2. A caixa da Fig. 28 aparecerá. Digite  $y'$  como legenda para o campo de entrada e vincule o objeto  $y'(x, y) = y \cos(x)$ , como mostra a Fig. 28

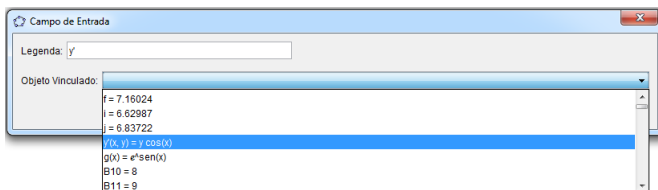


Figura 28: Configurando o campo de entrada.

Ao criar o campo de entrada na janela de visualização, clique nele com o botão direito do *mouse* e selecione a opção *Propriedades*, na aba *Básico*; desmarque a opção *Exibir Rótulo*, e, na aba *Estilo*, digite 10 para o comprimento do campo de texto. Também é possível configurar a cor da fonte e a cor de fundo do campo de entrada na aba *Cor*.

Crie outro Campo de entrada, da mesma forma que o anterior, com a legenda  $(x_0, y_0)$  e vinculado ao objeto A2. Aplique as mesmas configurações do campo de entrada anterior a esse segundo campo. Logo, posicione-os conforme a Fig. 29.

### Soluções numéricas para um PVI


Entre com a EDO (de 1ª ordem)  
e a condição inicial

$$y' = y \cos(x)$$

$$(x_0, y_0) = (0, 1)$$

Figura 29: Campos de entrada.

Agora, para criar as caixas que permitem a exibição (ou não) das poligonais e tabelas, selecione a

ferramenta  Caixa para Exibir / Esconder Objetos e clique em qualquer local da janela de visualização 2. Ao clicar na janela de visualização 2, surgirá uma caixa na qual podem-se escolher os objetos que se deseja exibir/esconder. De acordo com a Fig. 30, digite *Euler* para a legenda e Selecione os objetos: *CaminhoPoligonal*  $f$ , os pontos A2:A12 e o texto2 que corresponde à tabela do método de Euler.

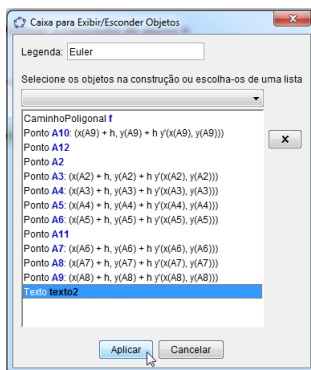


Figura 30: Exibindo/escondendo a poligonal e a tabela do método Euler.

Ao clicar em *Aplicar* a caixa que Exibe/esconde a poligonal, e a tabela do método de Euler aparecerá na janela de visualização 2. Logo, esconda o rótulo da caixa e a posicione de acordo com a Fig. 31.



Figura 31: Caixa para Exibir/esconder a poligonal e a tabela do método Euler.

Quando a caixa estiver marcada, a poligonal e a tabela do método de Euler serão exibidas na janela de visualização. Crie mais duas caixas de acordo com as Fig. 32 e 33, em seguida, oculte os rótulos dessas caixas e as posicione de acordo com a Fig. 34.

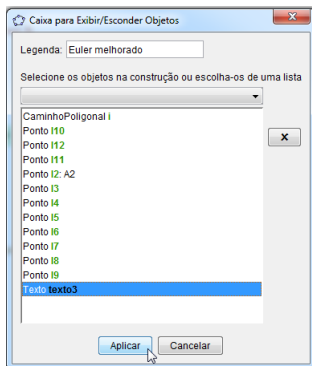


Figura 32: Exibindo/escondendo a poligonal e a tabela do método Euler melhorado.

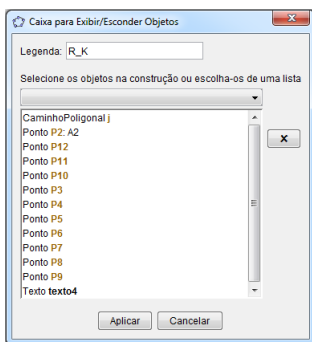



Figura 33: Exibindo/escondendo a poligonal e a tabela do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

*Selecione o método desejado*

- Euler
- Euler melhorado
- Runge – Kutta de quarta ordem

Figura 34: Caixa para Exibir/esconder as poligonais e as tabelas dos métodos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de 4ª ordem.

Assim, clicando com o botão direito do *mouse* em qualquer local da janela de visualização, e selecionando a opção *Propriedades*, é possível alterar a cor de fundo da janela. Da mesma forma, pode-se alterar cor, fonte, tamanho, localização etc ... de qualquer objeto das janelas de visualização. Sendo assim, é possível configurar a interface do *applet* de diversas formas. A versão final, do *applet* apresentado neste trabalho é a da Fig. 1.

**Passo 12 - Disponibilizando o *applet* na *web*.** Após a finalização do *applet*, para que seja possível disponibilizá-lo na *web*, é necessário criar uma conta no *site* oficial do *Geogebra* em <https://accounts.geogebra.org/user/create/expiration/129600/clientinfo/website>. Logo após, na barra de *menus* do arquivo da construção do *applet*, clique em *Arquivo*; em seguida, selecione a opção *Exporta* e clique em  Planilha Dinâmica como Página WEB (html) ... **Ctrl+Shift+W**. Ao abrir a janela da Fig. 35, edite o título e as descrições do *applet*.

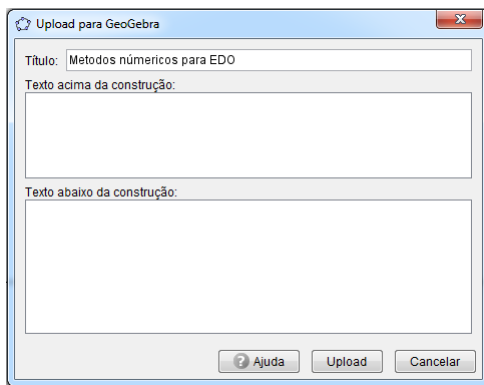


Figura 35: *Upload* do *applet*.

Ao clicar em *Upload*, o *applet* será, de fato, criado e estará disponível na *web*, no *site* de materiais do *Geogebra*. Para fazer modificações no *applet* criado, basta abrir a construção (arquivo .ggb), proceder às alterações necessárias e salvá-las. Essas modificações aparecerão, automaticamente, quando o *applet* for aberto, uma vez que o mesmo está associado à construção feita no *Geogebra*. No *applet* é possível realizar ações diversas, mas, ao fechá-lo, esse retornará ao seu estado original. Contudo, qualquer usuário pode fazer o *download* do arquivo .ggb, do *applet*, e assim, modificá-lo ou melhorá-lo.

## Referências

- [1] Arenales, S.; Darezzo, A. *Cálculo Numérico: Aprendizagem com Apoio de Software*. São Paulo: Thomson Learning, 2008.
- [2] Butcher, J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2<sup>a</sup> ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.
- [3] Deitel, H. M.; Deitel, P. J. *Java, como programar*. 8<sup>a</sup> ed. São Paulo: Pearson, 2010.

F flank David Morais Bezerra  
Universidade Federal da Paraíba,  
Departamento de Matemática,  
João Pessoa, PB, 58051-900, Brasil.  
<[flank@mat.ufpb.br](mailto:flank@mat.ufpb.br)>

Manoel Wallace Alves Ramos  
Instituto Federal da Paraíba,  
João Pessoa, PB, 58051-900, Brasil.  
<[wallace.ifpb@gmail.com](mailto:wallace.ifpb@gmail.com)>

Recebido: 29/10/2019  
Publicado: 27/01/2020