PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.1, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo85

Um método alternativo para o cálculo de determinantes

Jadielson Silva de Oliveira   Luiz Antônio da Silva Medeiros

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma relação surpreendente entre o determinante de uma matriz A de ordem $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ com um determinante de uma matriz de ordem 2, cujas entradas consistem de menores da matriz A. Essa relação permite estabelecer um método alternativo ao Desenvolvimento de Laplace para o cálculo do determinante de A. Um caso particular dessa relação pode ser enunciando da seguinte forma: se $A = [a_{i,j}]$ é uma matriz de ordem n e $m_{i,j}$ é o **menor** da matriz A associado ao $ij-$ésimo elemento $a_{i,j}$ de A, então vale a seguinte relação:

$$det(A) \cdot det(\Delta) = det \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,n} \end{bmatrix},$$

onde Δ é a submatriz de A, de ordem $n-1$, obtida de A eliminando-se a primeira e última linhas e primeira e última colunas de A.

Palavras-chave: Determinante. Menor. Matriz.

Abstract

In this work, we present a surprising relationship between the determinant of a matrix A of order $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ with a determinant of a matrix of order 2, whose entries consist of minors of matrix A. This relationship allows the establishment of an alternative method to Laplace's development to calculate the determinant of A. A particular case of this relationship can be stated as follows: if $A = [a_{i,j}]$ is a matrix of order n and $m_{i,j}$ is the **minor** of matrix A associated with the ij–th element of A, then the following relation holds:

$$det(A) \cdot det(\Delta) = det \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,n} \end{bmatrix},$$

where Δ is the submatrix of A, of order $n-1$, obtained from A by eliminating the first and last lines and first and last columns of A.

Keywords: Determinant. Minor. Matrix.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

1. Introdução

A busca pela excelência no ensino e aprendizagem nas escolas de educação básica tem sido objeto de muita reflexão. Visando um ensino de qualidade e a melhoria dos índices escolares brasileiros, o governo estabelece diretrizes pedagógicas para os professores a partir de uma Base Nacional Comum Curricular [2] e propõe algumas orientações pedagógicas descritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais [3].

Entre as estratégias descritas nesses documentos para o ensino de matemática, destacamos o uso de tecnologias como recurso potencializador da aprendizagem. Os computadores, por exemplo, podem ser utilizados para trabalhar habilidades tais como formular hipóteses, estabelecer e validar conjecturas, prever resultados, distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos e produzir argumentos convincentes.

Segundo os PCNs, o computador deve ser considerado uma ferramenta que pode auxiliar no ensino e aprendizado da matemática, onde a ênfase está na formação e construção do conhecimento, em que "se aprende a conhecer, aprendendo a fazer e refletindo sobre esse fazer".

> "O uso do computador é, ao mesmo tempo, uma ferramenta e um instrumento de mediação. É uma ferramenta porque permite ao usuário realizar atividades que, sem ele, seriam muito difíceis ou mesmo impossíveis. É um instrumento de mediação na medida em que possibilita o estabelecimento de novas relações para a construção do conhecimento e novas formas de atividade mental. O uso do computador possibilita a interação e a produção de conhecimento no espaço e no tempo: A incorporação de computadores no ensino não deve ser apenas a informatização dos processos de ensino já existentes, pois não se trata de aula com "efeitos especiais". O computador permite criar ambientes de aprendizagem que fazem surgir novas formas de pensar e aprender"' (PCN, pp. 146 e 147)

Diante dessa perspectiva, em [4] utilizamos o computador para analisar alguns padrões envolvendo matrizes e determinantes. Para tanto, fizemos uso do *software* máxima[1], que permite a manipulação algébrica e simbólica de variáveis. Como resultado obtivemos uma relação surpreendente envolvendo o determinante de uma matriz, ao qual denominamos *método alternativo para o cálculo de determinantes* e passamos a descrever na próxima Seção.

2. Método Alternativo para o Cálculo de Determinantes

Quando pensamos em uma matriz quadrada, logo a associamos ao cálculo do seu determinante. Um número que indica se a matriz é ou não invertível e ajuda a obter soluções de sistemas lineares, bem como sua classificação quanto ao número de soluções. Além disso, o determinante está associado ao cálculo de área de figuras planas [6] e cálculo de volumes de sólidos tridimensionais [5] ou [7], sendo portanto um tema bem atraente do ponto de vista de pesquisa escolar.

Apesar de o determinante de uma matriz estar associado a aplicações práticas, inclusive com interpretações geométricas compreensíveis, o tema não atrai empatia dos alunos por envolver cálculos enormes e cansativos e aplicações desprovidas de significados. Pior ainda, são apresentadas várias

[1] http://maxima.sourceforge.net/

técnicas para se calcular o determinante de matrizes de ordens 3 que não servem para matrizes de ordem superiores, o que pode induzir o aluno ao erro.

Diante do exposto e almejando utilizar o computador em sala de aula para desenvolver atividades de investigação científica com um *software* capaz de manipular expressões simbólicas, deparamo-nos com uma propriedade de determinantes surpreendente. Para compreender essa propriedade, vamos considerar um caso particular, $n = 3$.

Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Quando selecionamos as submatrizes de A, de ordem 2, que destacam os "cantos" da matriz A, e observamos as quatro submatrizes, notamos um elemento em comum (Figura 1), o elemento $a_{2,2}$. O que gostaríamos de investigar é como esse elemento relaciona-se com os determinantes dessas quatro submatrizes.

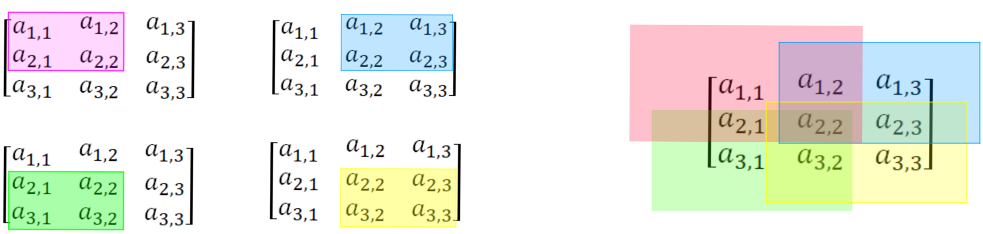

Figura 1: Submatrizes de ordem 2 que destacam os "cantos" da matriz A.

Ao definirmos as matrizes

$$M_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{1,2} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$M_{2,1} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{2,2} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

e operarmos com os seus determinantes, percebemos que a expressão

$$det(M_{1,1}) \cdot det(M_{2,2}) - det(M_{1,2}) \cdot det(M_{2,1}) \tag{2}$$

pode ser expressa como

$$a_{2,2} \cdot (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}). \tag{3}$$

Ora, a equação (2) é exatamente o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} det(M_{1,1}) & det(M_{1,2}) \\ det(M_{2,1}) & det(M_{2,2}) \end{bmatrix},$$

enquanto que o fator multiplicativo do termo $a_{2,2}$ em (3) é o determinante da matriz A. Ou seja,

$$det(M) = a_{2,2} \cdot det(A). \tag{4}$$

A igualdade (4) não só é interessante do ponto de vista de que podemos calcular o determinante de A se $a_{2,2} \neq 0$, mas porque o método estende-se a matrizes de ordens mais elevadas, permitindo estabelecer um método mais natural do que aquele conhecido como "regra de Sarrus". Além disso, através das propriedades de determinantes que envolvem permutações de linhas e colunas da matriz, o método torna-se viável quando ao menos um elemento da matriz é não nula (uma submatriz tem determinante não nulo).

Além disso, a propriedade estabelece que para obter o determinante de uma matriz de ordem n são necessários apenas quatro determinantes de ordem (n-1) e um determinante de ordem (n-2), bem menor do que os n determinantes de ordem $n-1$ utilizados pelo Desenvolvimento de Laplace em relação a uma linha ou coluna da matriz.

3. Resultados principais

Dado $n \in N$ um número natural, escrevemos I_n para representar o conjunto dos números naturais compreendidos entre 1 e n, ou seja, $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Se I é um subconjunto de I_n, o conjunto $I_n \backslash I$ representará a diferença entre os conjuntos I_n e I, isto é

$$I_n \backslash I = \{x : x \in I_n \ \text{ e } \ x \notin I\}.$$

No que segue, sejam $I, J \subset I_n$, subconjuntos distintos, com $n-1$ elementos ordenados de forma crescente e considere $K = I \cap J$. Para cada $I, J \subset I_n$, como definido anteriormente, considere a matriz $A = [a_{i,j}]$ de ordem n e as seguintes submatrizes,

$$M_{I,I} = [(a_{i,j})]_{i \in I, j \in I}$$

$$M_{I,J} = [(a_{i,j})]_{i \in I, j \in J}$$

$$M_{J,I} = [(a_{i,j})]_{i \in J, j \in I}$$

$$M_{J,J} = [(a_{i,j})]_{i \in J, j \in J}$$

$$M_{K,K} = [(a_{i,j})]_{i,j \in K}$$

Por exemplo, se $I = \{1, 2, ..., n-1\}$, $J = \{2, ..., n\}$ então, $K = I \cap J = \{2, ..., n-1\}$. Além disso,

$$M_{I,J} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

e

$$M_{K,K} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Com essa notação, estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 1.

$$det(A) \cdot det(M_{K,K}) = \begin{vmatrix} det(M_{I,I}) & det(M_{I,J}) \\ det(M_{J,I}) & det(M_{J,J}) \end{vmatrix} \tag{5}$$

Demonstração. Desde que

$$det \begin{bmatrix} det(M_{I,I}) & det(M_{I,J}) \\ det(M_{J,I}) & det(M_{J,J}) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} det(M_{J,J}) & det(M_{J,I}) \\ det(M_{I,J}) & det(M_{I,I}) \end{bmatrix},$$

ou seja, permutar I com J não altera o determinante de M; para o caso $n = 3$, temos apenas três casos a considerar:

Caso 1. $I = \{1, 3\}$, $J = \{1, 2\}$ e $K = \{1\}$.

Caso 2. $I = \{1, 3\}$, $J = \{2, 3\}$ e $K = \{3\}$.

Caso 3. $I = \{1, 2\}$, $J = \{2, 3\}$ e $K = \{2\}$.

Os comandos abaixo representam os comandos executados no *software* máxima e seus respectivos resultados possíveis para o Caso 1, com adaptações na notação para facilitar a leitura do texto.

$A : matrix([a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}], [a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}], [a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \tag{A}$$

$MII : matrix([a_{1,1}, a_{1,3}], [a_{3,1}, a_{3,3}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} \tag{MII}$$

$MIJ : matrix([a_{1,1}, a_{1,2}], [a_{3,1}, a_{3,2}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \tag{MIJ}$$

$MJI : matrix([a_{1,1}, a_{1,3}], [a_{2,1}, a_{2,3}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{bmatrix} \tag{MJI}$$

$MJJ : matrix([a_{1,1}, a_{1,2}], [a_{2,1}, a_{2,2}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \tag{MJJ}$$

deltaii : determinant(MII);

$$a_{1,1}\, a_{3,3} - a_{1,3}\, a_{3,1} \tag{deltaii}$$

deltaij :determinant(MIJ);

$$a_{1,1}\, a_{3,2} - a_{1,2}\, a_{3,1} \tag{deltaij}$$

deltaji: determinant(MJI);

$$a_{1,1}\, a_{2,3} - a_{1,3}\, a_{2,1} \tag{deltaji}$$

deltajj : determinant(MJJ);

$$a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1} \tag{deltajj}$$

$delta : expand(a_{1,1} * determinant(A) - determinant(matrix([deltaii, deltaij], [deltaji, deltajj])));$

$$0 \tag{\% o19}$$

Como $delta = 0$, segue que $det(M_{K,K}) \cdot det(A) - det(M) = 0$. Os demais casos são tratados de maneira análaga. Para o caso geral necessitamos do resultado seguinte, cuja demonstração o leitor pode consultar em [1].

Teorema 2. *Seja M a matriz de menores de uma matriz quadrada A de ordem n. Para cada submatriz quadrada de ordem k; $M_k = [M_{i,j}]$, de M, defina δ_k como o determinante da submatriz de A de ordem $(n-k)$, tomando os complementos das posições de linha/coluna que foram usadas em M_k, e $1 \leq k \leq n$, isto é:*

$$\delta_k = det([a_{p,q}]), \qquad 1 \leq p, q; \qquad p \neq i, q \neq j.$$

Então,

$$det(M_k) = [det(A)]^{k-1} \cdot \delta_k. \tag{1}$$

Demonstração do Caso Geral Considere os conjuntos $I, J \subset I_n$, com $I \neq J$ e seja $K = I \cap J$. Considere $i_0 \in I_n \backslash I$ e $j_0 \in I_n \backslash I$ elementos arbitrários, fixados.

Considerando $m_{i,j}$ o “menor” da matriz A associado ao elemento $a_{i,j}$, isto é, $m_{i,j}$ é o determinante da submatriz de A, eliminando a i-ésima linha e j-ésima coluna de A. Observe que :

(i) $det(M_{I,I}) = m_{i_0,i_0}$

(ii) $det(M_{I,J}) = m_{i_0,j_0}$

(iii) $det(M_{J,I}) = m_{j_0,i_0}$

(iv) $det(M_{J,J}) = m_{j_0,j_0}$

(v) $K = I_n \backslash \{i_0, j_0\}$

(vi) $$\delta_2 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i_0-1} & a_{1,i_0+1} & \cdots & a_{1,j_0-1} & a_{1,j_0+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_0-1,1} & \cdots & a_{i_0-1,i_0-1} & a_{i_0-1,i_0+1} & \cdots & a_{i_0-1,j_0-1} & a_{i_0-1,j_0+1} & \cdots & a_{i_0-1,n} \\ a_{i_0+1,1} & \cdots & a_{i_0+1,i_0-1} & a_{i_0+1,i_0+1} & \cdots & a_{i_0+1,j_0-1} & a_{i_0+1,j_0+1} & \cdots & a_{i_0+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_0-1,1} & \cdots & a_{j_0-1,i_0-1} & a_{j_0-1,i_0+1} & \cdots & a_{j_0-1,j_0-1} & a_{j_0-1,j_0+1} & \cdots & a_{j_0-1,n} \\ a_{j_0+1,1} & \cdots & a_{j_0+1,i_0-1} & a_{j_0+1,i_0+1} & \cdots & a_{j_0+1,j_0-1} & a_{j_0+1,j_0+1} & \cdots & a_{j_0+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i_0-1} & a_{n,i_0+1} & \cdots & a_{n,j_0-1} & a_{n,j_0+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Com essa notação, observamos que, das definições de $M_{K,K}$ e δ_k, tem-se a igualdade $M_{K,K} = \delta_k$. Aplicando o Teorema 2 para $k = 2$, obtemos

$$det(A) \cdot det(M_{K,K}) = [det(A)]^{2-1} \cdot \delta_2 = det\begin{pmatrix} m_{i_0,i_0} & m_{i_0,j_0} \\ m_{j_0,i_0} & m_{j_0,j_0} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} det(M_{I,I}) & det(M_{I,J}) \\ det(M_{J,I}) & det(M_{J,J}) \end{pmatrix},$$

onde δ_2 é o determinante da matriz A eliminando-se a linha i_0 e a coluna j_0. □

Corolário 3.1. Se $A = [a_{i,j}]$ é uma matriz de ordem $n, m_{i,j}$ é o **menor** da matriz A associado ao $ij-$ésimo elemento de A e Δ é a submatriz de A, eliminando-se a primeira e última linhas e a primeira e última colunas de A, então vale a seguinte relação:

$$det(A) \cdot det(\Delta) = det\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Basta considerar $I = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e $J = \{2, 3, \ldots, n\}$ e aplicar o Teorema 1. □

4. Exemplos

Nesta secção, exemplificamos o emprego da fórmula (5) para o caso $n = 3$ e $n = 4$.

Exemplo 1. Calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando o Corolário do Teorema 1, temos

$$\begin{aligned} det(A) \cdot a_{2,2} &= det\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,n} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ det(A) \cdot (2) &= det\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = -12. \end{aligned}$$

Logo, $det(A) = \frac{-12}{2} = -6$.

Exemplo 2. Calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como visto acima, para calcular o determinante desse tipo de matriz devemos escolher subconjuntos $I, J \subset \{1,2,3\}$ tais que o elemento a_{k_0,k_0} com $k_0 \in I \cap J$ seja não nulo. Como o elemento $a_{22} = 0$ e $a_{1,1} \neq 0$, escolhemos $I = \{1,2\}$ e $J = \{1,3\}$ de maneira que $K = \{1\}$. Formamos então as matrizes

$$M_{I,I} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, M_{I,J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, M_{J,I} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } M_{J,J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perceba que $M_{K,K} = [a_{11}] = [1]$. Assim,

$$det(A) = \frac{det\begin{pmatrix} det(M_{I,I}) & det(M_{I,J}) \\ det(M_{J,I}) & det(M_{J,J}) \end{pmatrix}}{det(M_{K,K})} = \frac{det\begin{pmatrix} -15 & -3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}}{1} = 30 - 21 = 9.$$

Exemplo 3. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Como o determinante da submatriz central de ordem é diferente de zero, é natural escolher $I = \{1,2,3\}$ e $J = \{2,3,4\}$, de sorte que $K = \{2,3\}$. Dessa forma, temos

$$M_{I,I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, M_{I,J} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, M_{J,I} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } M_{J,J} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando a fórmula (5), obtemos

$$det(A) = \frac{det\begin{pmatrix} det(M_{I,I}) & det(M_{I,J}) \\ det(M_{J,I}) & det(M_{J,J}) \end{pmatrix}}{det(M_{K,K})} = \frac{det\begin{pmatrix} -24 & -7 \\ -38 & 10 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{-506}{-22} = 23.$$

5. Conclusão

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma experiência de aprendizagem que se baseia na utilização do computador, mais especificamente do *software* máxima, viabilizando estudos qualitativos tais como compreender e estabelecer proposições, criar e testar conjecturas, de maneira a promover novas formas de pensar e saber.

Apesar do resultado principal desse artigo derivar de um Teorema, sua descoberta deu-se de forma completamente independente, e a relação obtida é apresentada sob um novo viés, diferente da abordagem apresentada em [1]. Neste sentido, o computador ajudou a criar um ambiente de aprendizagem autônomo, dinâmico, de investigação científica, onde os agentes tornaram-se participantes ativos do próprio conhecimento.

Acreditamos que o modelo proposto, visto como dispositivo prático, é uma alternativa ao método de Laplace e bem mais interessante de se trabalhar em sala de aula do que os dispositivos práticos, a exemplo da regra de Sarrus, uma vez que sua utilização não se restringe às matrizes de ordem 3. Acreditamos ainda que a Propriedade (5) estabelecida no trabalho pode ser generalizada pelo Teorema 2 para subconjuntos $I \subset I_n$ de dimensão menor do que $n-1$.

Agradecimentos

Agradecemos a todo corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática (Profmat) da Universidade Federal de Campina Grande, pelo esforço em ensinar com zelo e qualidade, especialmente aos professores Alciônio Saldanha de Oliveira, Daniel Cordeiro de Morais Filho e Victor Augusto Giraldo, pelas dicas valiosas na construção desse trabalho.

Referências

[1] Ajibade, A. O.; Rashid, M. A.; *A strange property of the determinant of minors. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 38, n^o 6, (2007), pp. 852-858.

[2] Brasil: *Base Nacional Comum Curricular.* Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCEIEF110518. Versão final site.pdf>. Acesso em 04 Maio 2019.

[3] Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacional: Ensino Médio.* Ministério da Educação. 1999.

[4] Oliveira, J. S. *Investigações com o Máxima no Cálculo de Determinantes.* Universidade Federal de Campina Grande, 2019. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 13 de agosto de 2019.

[5] Poole, D. *Linear Álgebra. A modern introduction.* Tradução: Martha Salerno Monteiro [et alli]. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2004.

[6] Santos, F. B. *Interpretação Geométrica do Determinante* 2×2 *e de suas Propriedades com Aplicações na Geometria Analítica.* Universidade Federal de Dourados, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=37519>. Acesso em: 13 de agosto de 2019.

[7] Winterle, P. *Vetores e Geometria Analítica* . São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

Jadielson Silva de Oliveira
EREM - Rodolfo Paiva, São Bento do Una-PE.
<jadielson_so@outlook.com>

Luiz Antônio da Silva Medeiros
Universidade Federal de Campina Grande
<medeiros@ufcg.edu.br>

Recebido: 26/09/2019
Publicado: 12/02/2019