PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.1, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo86

Flexágonos

Nara Bobko Patrícia Massae Kitani William John Hirt

Resumo

Este trabalho aborda os flexágonos, dispositivos poligonias planos construídos através de dobraduras de papel que podem ser manipulados de maneira intrigante. Os flexágonos possuem um grande potencial como material concreto no ensino de geometria, pois são ricos em conceitos matemáticos, lúdicos, de baixo custo e de fácil construção. Apesar disso, ainda são pouco difundidos entre os professores de matemática no Brasil. considerando isso, este trabalho visa divulgar e explorar os flexágonos. Para tal, o trabalho apresentará um pouco da sua história, a construção e manipulação de alguns flexágonos e, por fim, sugestões de aplicação no ensino.

Palavras-chave: Flexágonos; Polígonos; Ensino de Geometria.

Abstract

This work deals with flexagons, a flat polygon device built through paper folds that can be intriguingly manipulated. Flexagons have great potential as a concrete material in the teaching of geometry because they are rich in mathematical concepts, playful, low cost and easily constructed. Despite this, they are still little known among math teachers in Brazil. In view of this, this work aims to disseminate and to exploit flexagons. To this end, the work will present some of its history, the construction and manipulation of some flexagons and, finally, suggestions for its application in teaching.

Keywords: Flexagons; Polygons; Geometry Teaching.

1. Introdução

Flexágonos são objetos maleáveis com formato de um polígono regular, feitos através de determinadas dobraduras (e uma colagem) em uma tira de papel. Apesar da semelhança com os origamis, o grande diferencial dos flexágonos é o fato de o polígono resultante ser flexível, permitindo, a partir de movimentos manipulativos, alternar faces deixando duas sempre visíveis e as restantes ocultas. É um objeto fascinante, de baixo custo e que pode ser utilizado pelos professores para auxiliar no ensino de geometria.

No Brasil, os flexágonos ainda são pouco conhecidos. Talvez isso ocorra porque a maioria da literatura matemática envolvendo esses objetos estejam em outro idioma. Uma das principais

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

referências sobre flexágonos é o livro *Hexaflexagons, Probability Paradoxes, and the Tower of Hanoi*, de Martin Gardner [4].

Segundo Martin Gardner [4], quem construiu o primeiro flexágono foi Arthur H. Stone, que na época tinha 23 anos e era um estudante de matemática. Stone era inglês e em 1939 mudou-se para os Estados Unidos. Para aproveitar o fichário inglês, cortou as folhas de papel americanas que eram maiores que as inglesas. Dobrando as tiras que sobraram, acabou formando um hexágono que, mediante certa manipulação, fazia surgir uma nova face hexagonal. Posteriormente, tal dispositivo recebeu o nome de Trihexaflexágono. Intrigado com essa descoberta, Stone analisou o Trihexaflexágono e conseguiu construir uma outra dobradura hexagonal que escondia quatro faces, além das duas que já ficavam à mostra (Hexahexaflexágono). Em pouco tempo os flexágonos tornaram-se a atração entre seus colegas, na Universidade de Princeton. Até um comitê dos flexágonos foi formado. Tal comitê era composto por Stone e Bryant Tuckerman, estudantes de matemática; Richard P. Feynman (Nobel de física de 1965), na época estudante de física; e John W. Tukey, professor de matemática. Eles construíram vários tipos de flexágonos e estudavam as propriedades matemáticas envolvidas. Descobriram inclusive como montar flexágonos com quantas faces desejassem. Todavia, esse comitê desapareceu com a Segunda Guerra Mundial. Apesar dessa popularidade na Universidade de Princeton, os flexágonos tornaram-se mundialmente conhecidos apenas na década de 50, através de um artigo de Martin Gardner, na *Scientific American* [3].

Para nomear cada tipo de flexágono, adotou-se o seguinte padrão: o primeiro prefixo refere-se ao número de faces existentes, e o segundo prefixo indica o formato do polígono regular resultante. Por exemplo, o primeiro flexágono feito por Stone é o Trihexaflexágono pois possui formato hexagonal e apresenta três faces (Figura 1). Outro exemplo é o Hexahexaflexágono, que tem seis faces (entre visíveis e ocultas) todas com formato de um hexágono. Existem flexágonos que não seguem a forma hexagonal, como é o caso do Tetratetraflexágono que possui quatro faces quadradas. Além dessa nomenclatura de acordo com o número de faces e o formato da face, classificam-se os flexágonos como regular e não regular. Os regulares são aqueles feitos a partir de uma tira de papel, como o Trihexaflexágono, o Hexahexaflexágono e o Nonahexaflexágono. Caso contrário é dito não regular. O Tetrahexaflexágono e o Tetratetraflexágono, que apresentaremos mais adiante, e cuja disposição dos triângulos, ou quadrados, não formam uma tira. Apesar do termo flexágono ter surgido com Stone, existe relato de que tais dobraduras já eram conhecidas no Japão como “byoubugai” [6].

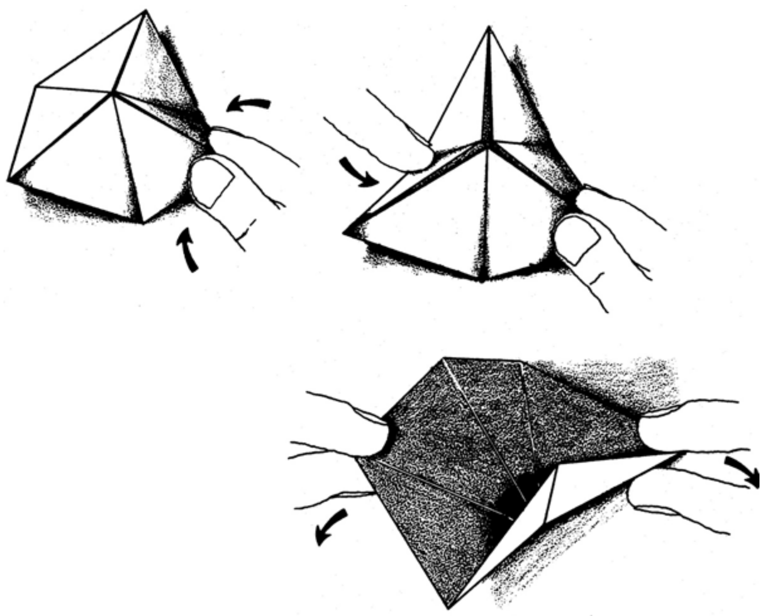

Figura 1: Trihexaflexágono. Fonte: Gardner [4].

2. Construindo o Trihexaflexágono

Para facilitar a descrição das dobraduras necessárias para a montagem dos flexágonos, utilizaremos uma notação proveniente dos Origamis. Chamaremos de dobra em "vale" quando o vinco desce e os lados sobem (indicado nos diagramas por uma linha tracejada). Chamaremos de dobra "montanha" quando o vinco sobe e os lados descem (indicado nos diagramas por uma linha composta de traços e pontos). A Figura 2 ilustra essas nomenclaturas.

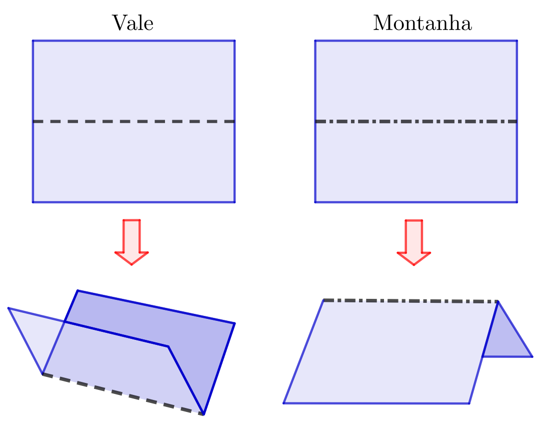

Figura 2: Dobra em vale e dobra em montanha.

Para a construção do Trihexaflexágono, iniciemos construindo um molde como na Figura 3.

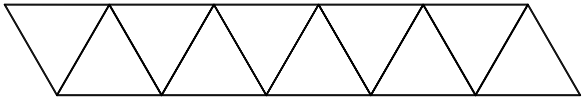

Figura 3: Molde do Trihexaflexágono.

Este molde é formado por 10 triângulos equiláteros em cada lado. Para quem está construindo pela primeira vez, sugerimos colorir os triângulos do molde como na Figura 4.

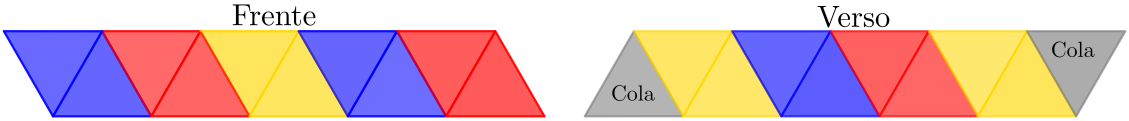

Figura 4: Molde do Trihexaflexágono colorido.

Dobrando a tira em vale e em montanha como na Figura 5, formaremos um hexágono regular no qual todos os triângulos de mesma cor estão numa mesma face hexagonal. Por fim, deve-se colar as partes identificadas com a palavra "cola". Para facilitar a visualização, indicamos na Figura 5, juntamente com as cores, letras: A para o azul, B para vermelho e C para amarelo.

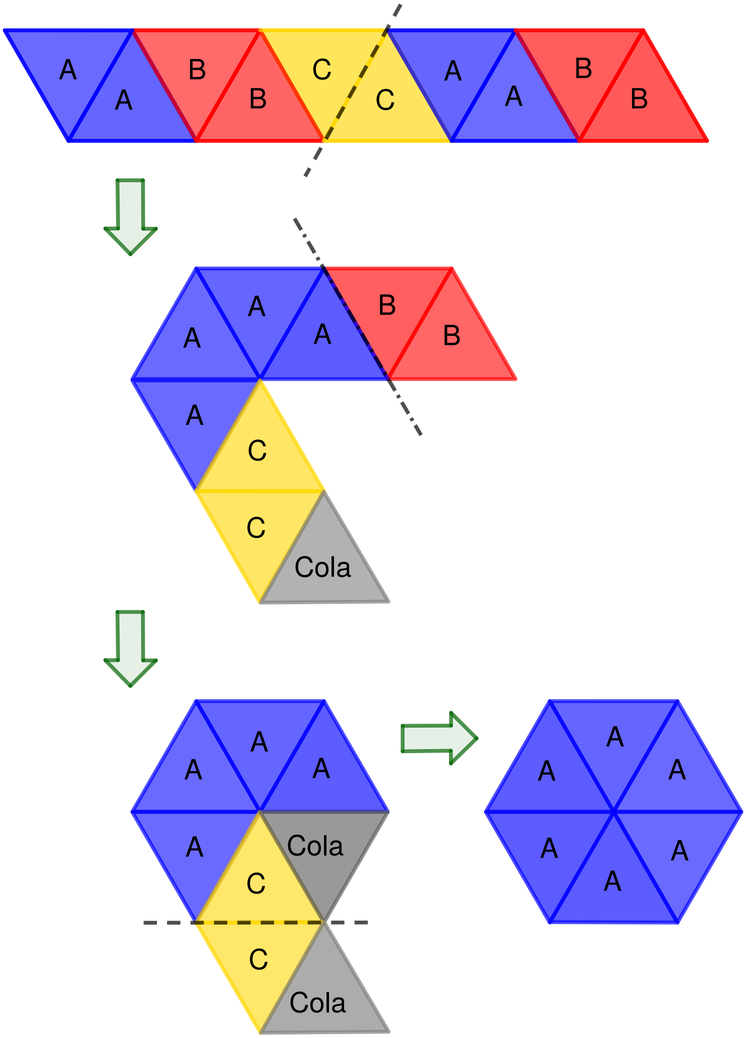

Figura 5: Dobras do Trihexaflexágono.

Finalizado as dobraduras (e a colagem), teremos o Trihexaflexágono com duas faces aparentes: uma face azul (A) e outra face vermelha (B). Ao flexionarmos, processo que será detalhado a seguir, a face de cor amarela (C) irá aparecer. Se continuarmos flexionando, entraremos em um ciclo em que as faces irão se repetir sempre na mesma ordem.

3. Como Flexionar?

Vamos entender primeiramente o funcionamento do Trihexaflexágono e em seguida explicaremos brevemente como os movimentos dos flexágonos podem ser analisados num diagrama. Cada face do Trihexaflexágono possui três fendas que atravessam internamente o flexágono da frente para o verso. Cada fenda está localizada em uma das arestas dos triângulos que formam o hexágono. Dobrando o hexágono de forma a evidenciar suas fendas (empurrando as arestas em que estão as fendas para cima e as demais para baixo), é possível abrir uma nova face (esse movimento é chamado de flexão), como mostra a Figura 6.

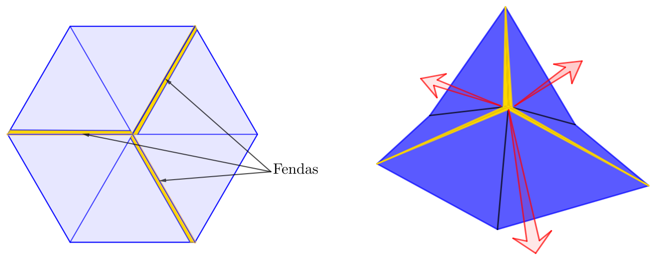

Figura 6: Flexão.

Assim, com a cor azul na frente e a cor vermelha no verso, realizando a flexão, uma face amarela emerge na frente enquanto a azul é levada para o verso. Após cada flexão, as fendas continuarão a existir, então, podemos realizar flexão após flexão. Ao repetir o movimento, percebe-se um ciclo no qual se repete o padrão azul-amarela-vermelha ou vermelha-amarela-azul, dependendo da face escolhida para começar a flexão. A Figura 7 ilustra esses movimentos. O leitor que desejar, poderá ainda acessar uma construção do GeoGebra que representa a flexão do Trihexaflexágono (diponível em www.ggbm.at/ry5vnhqy). Salientamos que se não for possível realizar esses movimentos, é porque algum engano foi cometido na construção.

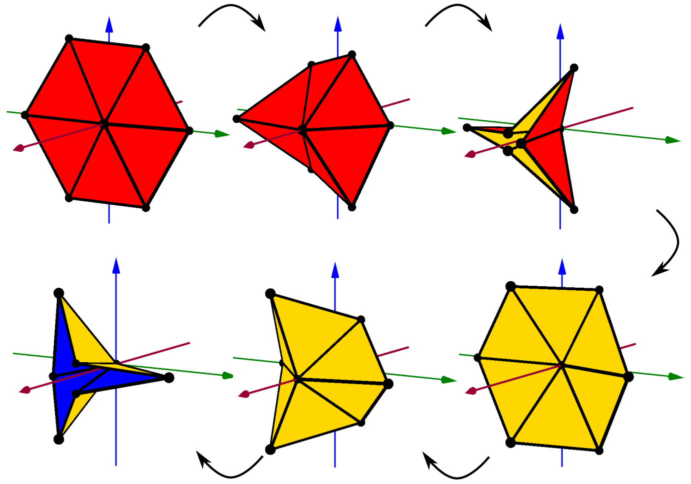

Figura 7: Movimento realizado pelo Trihexaflexágono.

Estes movimentos podem ser representados através de um mapa, conhecido também por diagrama de Tuckerman, conforme mostra a Figura 8. Neste mapa, os pontos coloridos (ou nomeados por A, B e C) representam cada uma das faces do flexágono, enquanto as setas orientadas indicam a sequência com que as faces serão reveladas quando se flexiona num mesmo sentido. O ponto de origem da seta indica a face que está no verso, e o ponto onde a seta chega indica a face da frente. Existem outras formas de representar o diagrama de Tuckerman, mas adotaremos a que aparece em (GARDNER, 1988). Esse diagrama ilustra o caminho mais simples de encontrar todas as faces.

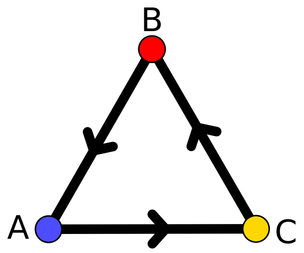

Figura 8: Diagrama de Tuckerman do Trihexaflexágono.

Note que o Trihexaflexágono possui no total dezoito triângulos, contando os da frente e do verso e excluindo os triângulos usados para colar, formando assim três faces com seis triângulos cada. Os mesmos seis triângulos sempre aparecem juntos; por exemplo, quando um triângulo azul aparece, os outros cinco azuis aparecem juntos com ele, nunca aparecendo triângulos de cores diferentes numa mesma face hexagonal.

Para que o dispositivo tenha quatro faces hexagonais em vez de somente três, devemos adicionar seis novos triângulos, como indicado na Figura 9. Observe que não basta acrescentar seis triângulos no molde do Trihexaflexágono, e sim uma nova disposição dos triângulos deverá ser feita. Serão vinte e quatro triângulos coloridos (mais dois para a colagem) que, com as dobras certas, ficarão distribuídos de seis em seis, formando um flexágono com quatro faces, o Tetrahexaflexágono.

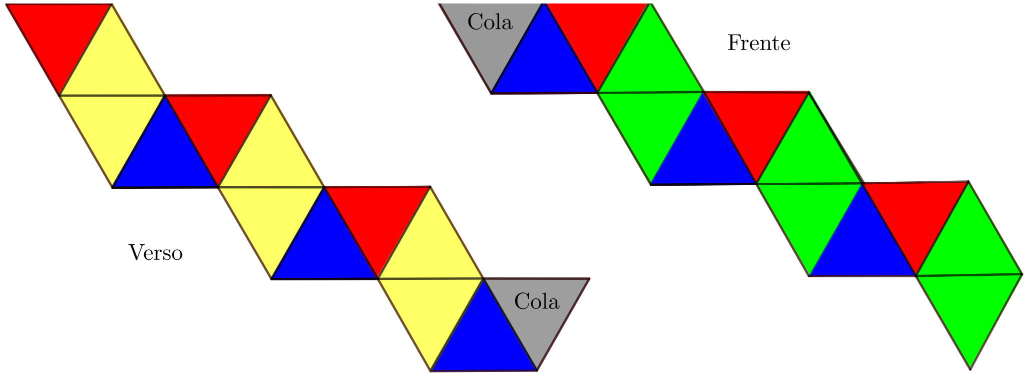

Figura 9: Molde do Tetrahexaflexágono.

Quando se adiciona uma nova face também se adiciona um conjunto de três novas fendas capazes de revelar, no movimento de flexão, esta nova face. Um conjunto de fendas, porém, não possibilita encontrar todas as faces, se levarmos em conta o sentido da flexão. Por exemplo, ao começar uma flexão com a cor amarela (C) na frente e a cor azul (A) no verso, temos um conjunto de fendas que revelam a face vermelha (B) e um outro conjunto que revela a face verde (D). Se escolhermos encontrar a face vermelha, ficamos com um hexágono com vermelho na frente e amarelo no verso. A partir da face vermelha não temos um conjunto de fendas que nos leve até a face verde, o único caminho (mantendo o sentido da flexão) nos levará até a face azul. Veja essa descrição no diagrama de Tuckerman do Tetrahexaflexágono (Figura 10).

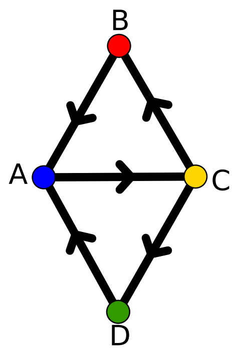

Figura 10: Diagrama de Tuckerman do Tetrahexaflexágono.

Agora vejamos um exemplo do diagrama de Tuckerman para o caso do Hexahexaflexágono (Figura 11). Neste caso as faces azul (A), amarela (C) e vermelha (B) possuirão duas opções de flexões, enquanto as faces verde (D), laranja (F) e rosa (E) possuirão apenas uma. Existe um ciclo principal formado pelas cores azul, amarela e vermelha apresentando sempre duas opções. Realizando a flexão e saindo do ciclo principal entramos num ciclo secundário fornecendo sempre uma única opção para realizar a próxima flexão. Os ciclos secundários são três: azul(A)-verde (D)-vermelho(B), amarelo(C)-rosa(E)-azul(A) e vermelho(B)-laranja(F)-amarelo(C).

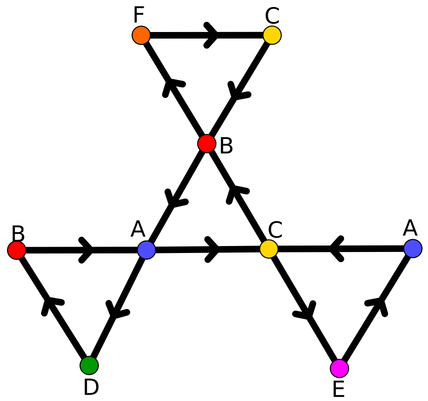

Figura 11: Diagrama de Tuckerman do Hexahexaflexágono.

Por exemplo, estando o Hexahexaflexágono com a face vermelha no verso e a face azul na frente, podemos optar por uma face amarela ou verde. Optando pela face verde, ficamos com verde na frente e azul no verso, e a próxima opção será somente a face vermelha. Por fim, estando com a face vermelha na frente e com a verde no verso, o único caminho disponível nos levará à face azul, fechando um ciclo. Para um dado flexágono, existe mais de um molde. Mudando o molde, muda-se também o diagrama de Tuckerman.

Além das formas hexagonais, existem outras formas geométricas para os flexágonos, como por exemplo o Tetratetraflexágono, cuja face é um quadrado (Figura 12). Um estudo mais detalhado dos hexaflexágonos, visando tanto à sua construção quanto à sua análise, pode ser encontrado em *The Mathematics of Pleated Folding*, de Nishiyama, Y. [6].

Na teoria, é possível fazer flexágonos com muitas faces. Todavia, levando em conta que o papel tem gramatura, quanto mais faces, mais difícil será para realizar as dobraduras e flexionar.

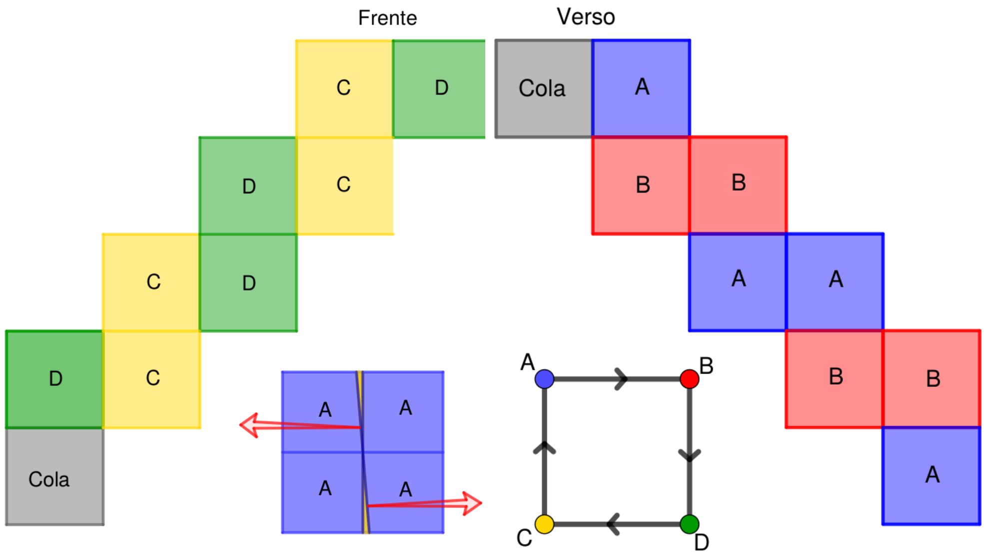

Figura 12: Tetratetraflexágono: Molde, Fendas de Abertura e Diagrama de Tuckerman.

O leitor que tiver interesse poderá encontrar outros moldes de flexágonos, bem como instruções de montagem no Livro Digital *Flexágonos* [1], disponível na plataforma GeoGebra.

4. O uso de flexágonos no ensino

Por serem ricos em conceitos matemáticos, os flexágonos podem ser utilizados como um material concreto lúdico atuando como um facilitador de aprendizagem. A manipulação e os movimentos realizados com tais formas propiciam a visualização em três dimensões (como destacado na Figura 7) e a observação de padrões sequenciais (diagramas de Tuckerman). Essas são habilidades essenciais da matemática que devem ser desenvolvidas na Educação Básica. Além disso, seja durante a confecção dos flexágonos ou na manipulação após pronto, os alunos podem observar e explorar várias conceitos matemáticos (polígonos, ângulos, soma de ângulos, lados, faces, perímetro, área, frações, entre outros).

Na sua construção, o professor pode apresentar a régua, o compasso, o jogo de esquadros e o transferidor. Pode-se ensinar como utilizá-los visto que muitos alunos concluem o ensino médio sem saber manipular esses materiais. Uma alternativa é trabalhar em conjunto com a disciplina de Artes. Caso não seja o foco ou a série apropriada, pode-se trabalhar diretamente com um molde pronto e iniciar uma atividade, como trabalhar frações. No entanto, quando o próprio aluno constrói desde o início, a atividade se torna mais rica e prazerosa. É necessário também que a construção seja exata, senão a flexão acabará por se tornar difícil e poderá rasgar o flexágono. Por exemplo, na construção do Trihexaflexágono, reforce que o hexágono deve ser regular e, portanto, os triângulos que formam o molde devem ser equiláteros. Se, no final, a face hexagonal não se formou corretamente, use-o como exemplo para concluir que o triângulo não era equilátero. Ainda na sua construção, as retas paralelas e concorrentes podem ser abordadas.

No Trihexaflexágono, o professor pode perguntar aos alunos quais polígonos eles conseguem visualizar em uma das faces. São eles: triângulo, hexágono, paralelogramo, losango e trapézio. Pode-se reforçar as propriedades de cada um desses polígonos, além de estudar áreas e perímetros.

Ao trabalhar ângulos, uma sugestão seria nomear cada um dos ângulos dos triângulos que formam o Hexaflexágono e a partir disso trabalhar com soma de ângulos de polígonos. Também é possível trabalhar com os conceitos de ângulos alternos, colaterais, correspondentes e opostos pelo vértice. Os alunos podem classificar cada um dos ângulos que foram nomeados. Estabelecida a classificação, os alunos podem flexionar e verificar se a classificação mantém-se após a flexão.

Além do Ensino Fundamental, é possível sua aplicação na Licenciatura em Matemática, na disciplina de Construções Geométricas. Os alunos devem construir com exatidão cada triângulo e/ou traçar retas paralelas perfeitas. Inicialmente a sua construção pode ser feita somente com régua e compasso. Após a fixação dos traçados somente com régua e compasso, pode-se permitir o uso de esquadros. Faça uma reflexão com os alunos e discuta quais conteúdos podem ser trabalhados em sala de aula. Assim, alunos que serão os futuros professores de matemática terão uma ferramenta a mais para usarem quando estiverem na prática.

Apresentamos aqui apenas algumas sugestões de aplicações no ensino. Mas muitas outras abordagens podem ser realizadas. O leitor que tiver interesse poderá acessar propostas detalhadas de atividades didáticas que utilizam Flexágonos na dissertação *Explorando Geometria com auxílio de flexágonos*, de Willian J. Hirt [5].

5. Conclusão

O uso de materiais concretos é um grande aliado no ensino de geometria. Existem vários materiais para ensinar geometria e apresentamos aqui mais uma opção para os professores trabalharem em sala de aula. Pode ser trabalhado em vários níveis de ensino, do fundamental à graduação. Os flexágonos são objetos curiosos, enriquecem o trabalho em grupo, aumentam a motivação até mesmo de um aluno desanimado, trabalha com a destreza manual, além de envolver vários conceitos matemáticos em um único material. Para essa atividade, utilizam-se somente materiais de baixo custo, tornando sempre possível sua aplicação.

Referências

[1] Bobko, N., Kitani, P. M. e Hirt, W. J. *Flexágonos.* Livro Virtual disponível na Plataforma GeoGebra. Disponível em: <http://www.geogebra.org/m/ggk5gwkj>. Acesso em: 13 de dezembro de 2019.

[2] Conrad, A. S. *The theory of the flexagon*, RIAS, 1960.

[3] Gardner, M. *Flexagons. Scientific American*, 195(6), 162-168. 1956.

[4] Gardner, M. *Hexaflexagons, Probability Paradoxes and the Tower of Hanoi.* Cambridge: Cambridge University Press, (pp. 1-15), 2008.

[5] Hirt, W. J. *Explorando Geometria com auxílio de flexágonos.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba). 2019.

[6] Nishiyama, Y. "*The Mathematics of Pleated Folding*". *Osaka Keidai Ronsyu*, v. 58, n^0 6, pp. 253-261, 2008.

[7] PooK, Les. *Flexagons inside out.* Cambridge University Press, 2003.

Nara Bobko
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<narabobko@utfpr.edu.br>

Patrícia Massae Kitani
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<kitani@utfpr.edu.br>

William John Hirt
Colégio Técnico Industrial de Araucária
<william_hirt@hotmail.com>

Recebido: 17/12/2019
Publicado: 28/02/2020