PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.7, n.2, 2019
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo714

Uma abordagem para o estudo da função quadrática no conjunto dos números complexos

Roberto do Nascimento Batista André Fabiano Steklain Lisbôa

Resumo

Este trabalho propõe o estudo da função quadrática complexa baseado em gráficos de duas e três dimensões, e, na sua analogia com o gráfico da função quadrática real, a parábola. Nesta abordagem são investigados os tipos de cônicas que surgem no caso da imagem de uma reta por esta função e ao se fazer a intersecção dos gráficos das partes real e imaginária com planos. Esta exploração pode enriquecer o estudo introdutório de funções complexas a nível de graduação.
Palavras-chave: números complexos; função quadrática; cônicas

Abstract

This paper proposes the study of the complex quadratic function based on two and three dimensional graphs and their analogy with the real quadratic graph, the parabola. In this approach we investigate the types of conics arising in the case of the image of a line by this function and considering the intersection of the real and imaginary parts graphics with planes. This exploration can enrich the introductory study of complex functions at undergraduate level.

Keywords: complex numbers; quadratic function; conics.

1. Introdução

As funções complexas em geral não são abordadas no Ensino Médio. Isso é justificável pelo nível de abstração exigido para o estudo de uma função cujo domínio e contradomínio não sejam subconjuntos dos números reais. No Ensino Superior é desejável que os estudantes possuam familiaridade com esses conceitos, mas a quantidade de tópicos a serem cobertos em curso típico limita a sua abordagem. A utilização de ferramentas computacionais pode auxiliar no sentido da visualização desses conceitos, abrindo caminho para uma compreensão mais ampla do estudante em estudos posteriores. A compreensão da função como uma transformação, em detrimento do gráfico, é particularmente impulsionada no estudo das funções complexas, já que não é possível visualizar um gráfico inserido em um espaço quadridimensional.

A escolha da função quadrática complexa deve-se principalmente a duas de suas características. A primeira é o fato de se tratar de uma função simples, podendo ser tratada a partir do momento em que o estudante é introduzido às operações (em particular, multiplicação) entre números complexos. A segunda é que a sua restrição ao caso real resulta em uma função familiar aos estudantes, a função quadrática real, amplamente estudada no Ensino Médio. Isso permite resgatar tais conceitos e estabelecer analogias entre os casos real e complexo.

Nesse conjunto de analogias entre o caso real e o caso complexo situa-se o estudo de cônicas. No caso real, o gráfico de uma função quadrática resume-se a uma parábola, mas o caso complexo possui uma estrutura mais rica, sendo possível obter hipérboles. De fato, como o estudo apresentado não vai além da determinação da parte real e imaginária da função, com alguma adaptação tal abordagem pode também ser trabalhada durante o estudo de cônicas na Geometria Analítica.

O presente artigo irá fazer uma abordagem do estudo de funções quadráticas complexas por meio dos seus gráficos. Primeiramente apresentaremos um resumo dos conceitos trabalhados no tratamento da função quadrática real. Em seguida apresentaremos uma exploração da função quadrática complexa e das cônicas resultantes da restrição da imagem da função complexa. Por fim, apresentamos nossas conclusões a respeito deste trabalho.

2. A Função Quadrática Real e Cônicas

Durante o Ensino Médio o estudante é introduzido ao conceito de função quadrática, dada pela definição [2], [5]:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} . \tag{1}$$

Essa função toma um número real e retorna, como a imagem deste número, a multiplicação deste número por ele mesmo. Tomando o conjunto dos pontos $P = (x, y)$, sendo $y = f(x) = x^2$ temos que tais pontos compõem uma parábola de equação

$$y = x^2. \tag{2}$$

Esta curva pode ser visualizada por meio da representação desses pontos em um plano cartesiano, sendo mostrada na figura 1.

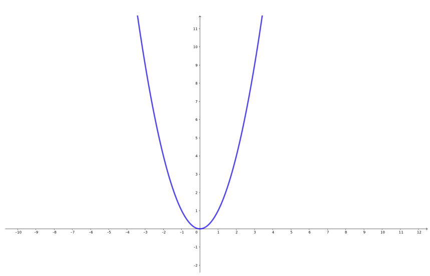

Figura 1: Gráfico da função $f(x) = x^2$.

A função quadrática pode ser generalizada para uma função do segundo grau, fazendo, por exemplo, $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Independentemente do valor dessas constantes, no entanto, o gráfico ainda corresponderá a uma parábola [6]. Outros tipos de cônica, como hipérboles e elipses, são obtidas por funções reais que não possuem nenhuma relação direta com a função quadrática.

3. A Função Quadrática Complexa e Cônicas

No caso das funções complexas a representação do gráfico não é trivial, devido a uma série de fatores. O principal a se considerar é o fato de o corpo dos números complexos não ser ordenável [7], o que impede de representar esses números em uma reta. De fato, os números complexos guardam relação com o $\mathbb{R}^2$, sendo representados, portanto, em um plano, chamado plano complexo de Argand-Gauss [1]. O gráfico de uma função complexa teria, portanto, que ser inserido em uma estrutura de ao menos quatro dimensões. Uma função complexa pode ser visualizada utilizando-se dois planos de Argand-Gauss. No primeiro plano ficam representados os pontos do domínio da função e, no segundo, as imagens desses pontos. Em uma abordagem mais simplificada é possível utilizar o mesmo plano para representar os pontos do domínio e da imagem. Nesse caso é preciso identificar quais são os pontos do domínio e quais pertencem à imagem da função. Essa última representação será utilizada neste trabalho.

É interessante verificar o que ocorre quando conjuntos de pontos do domínio são transformados pela função quadrática complexa. Para simplificar a discussão vamos nos deter na função, em sua forma mais simples:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & z^2 \end{array} . \tag{3}$$

Quando restringimos a atuação de f à reta real, a imagem correspondente é a semirreta real positiva. A parábola é perdida pois ao invés de considerarmos pontos de coordenadas (t, t^2), estamos fazendo a correspondência entre pontos do $(t, 0)$ eixo real com pontos $(t^2, 0)$ também pertencentes ao eixo real. De fato, é fácil verificar que, para qualquer reta passando pela origem do plano de Argand-Gauss a imagem correspondente será uma semirreta partindo da origem, conforme mostrado na figura 2.

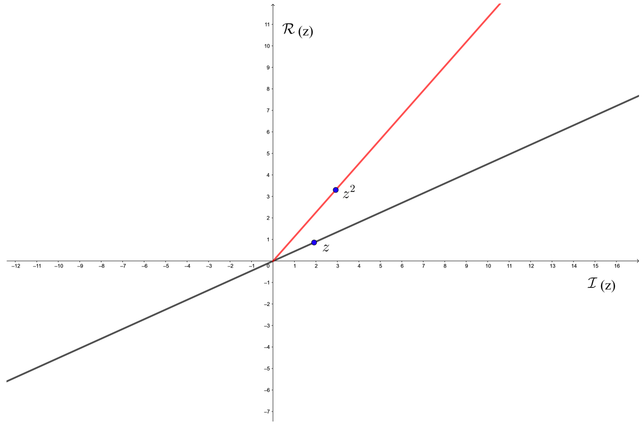

Figura 2: Imagem de uma reta (cor preta) passando pela origem pela função f no plano de Argand-Gauss. A imagem é uma semirreta passando pela origem (cor vermelha).

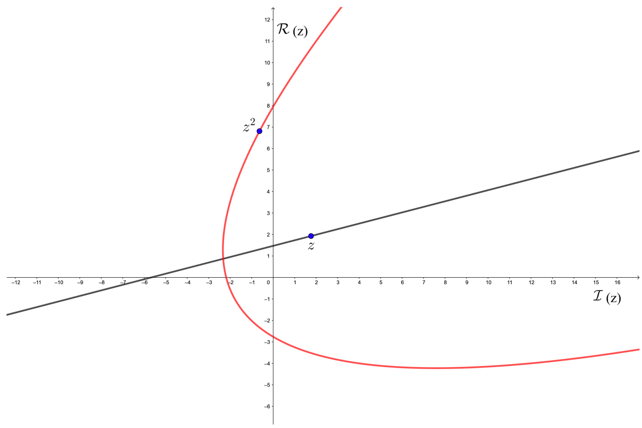

Figura 3: Imagem de uma reta (cor preta) que não passa pela origem pela função f no plano de Argand-Gauss. A imagem é uma parábola (cor vermelha).

A situação é diferente, no entanto, quando a reta não passa pela origem. Como pode ser visto na figura 3, a imagem dessa reta é uma curva bastante semelhante a uma parábola. Para demonstrarmos que de fato a curva é uma parábola, vamos tomar uma reta em $\mathbb{C}$ que não passe pela origem parametrizada por $z(t) = z_0 + wt$, sendo $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = w_x + iw_y$ complexos não nulos e t real. Nesse caso é conveniente escrever $z(t) = x(t) + iy(t)$ obtendo, assim, as equações da parte real e imaginária:

$$x(t) = x_0 + w_x t, \tag{4}$$

$$y(t) = y_0 + w_y t. \tag{5}$$

A função complexa f pode ser representada por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, sendo as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a parte real e imaginária de f. Ao considerarmos a função $f(z(t)) = z(t)^2$ temos, para a parte real e imaginária dessa função

$$u(t) = u_0 + \alpha t + \beta t^2, \tag{6}$$

$$v(t) = v_0 + \gamma t + \delta t^2, \tag{7}$$

onde $u_0 = x_0^2 - y_0^2$, $v_0 = 2x_0 y_0$, $\alpha = 2(x_0 w_x - y_0 w_y)$, $\beta = w_x^2 - w_y^2$, $\gamma = 2(x_0 w_y + y_0 w_x)$ e $\delta = 2w_x w_y$. Vamos considerar a mudança de variáveis dadas por

$$U = \delta(u - u_0) - \beta(v - v_0), \tag{8}$$

$$V = \gamma(u - u_0) - \alpha(v - v_0). \tag{9}$$

Neste novo sistema de coordenadas, fazendo $p = 1/(\gamma\beta - \alpha\delta)$, temos a seguinte relação entre U e V:

$$V = pU^2, \tag{10}$$

ou seja, nas novas coordenadas a curva gerada pela transformação da reta pela função quadrática é uma parábola. É fácil se convencer de que o mesmo ocorre nas coordenadas originais, utilizando a Equação (10) e a equação geral da cônica. Note que, para que a parábola não seja degenerada devemos ter a condição $\gamma\beta - \alpha\delta = 2(w_x^2 + w_y^2)(x_0 w_y - y_0 w_x) \neq 0$. Como w é não nulo, temos que $|w|^2 = w_x^2 + w_y^2 > 0$. Logo, a condição para que a parábola seja não degenerada é dada por

$$x_0 w_y - y_0 w_x \neq 0. \tag{11}$$

Essa condição equivale a dizer que os números complexos z_0 e w e a origem do plano complexo não são colineares.

A demonstração acima exige o domínio de conceitos como a equação geral da cônica, normalmente trabalhados em Geometria Analítica, que faz parte dos estudos iniciais na maioria dos cursos superiores na área de exatas. No entanto, esse resultado pode ser facilmente explorado utilizando *softwares* tais como o *GeoGebra* [4], para mostrar como a função atua sobre os elementos do domínio. Esta abordagem serve, entre outras coisas, como mecanismo para expandir o conceito de função, normalmente apresentado em sala de aula através de exemplos envolvendo funções reais e o conceito de gráfico cartesiano.

Em uma abordagem mais avançada é possível trabalhar com os gráficos das partes real e imaginária da função f, a saber:

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \tag{12}$$
$$v(x, y) = 2xy. \tag{13}$$

Os gráficos dessas duas funções são superfícies em um espaço tridimensional, conforme as figuras 4 e 5.

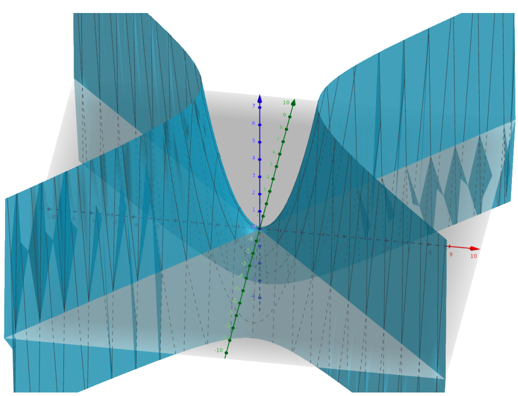

Figura 4: Parte real da função $f(z) = z^2$.

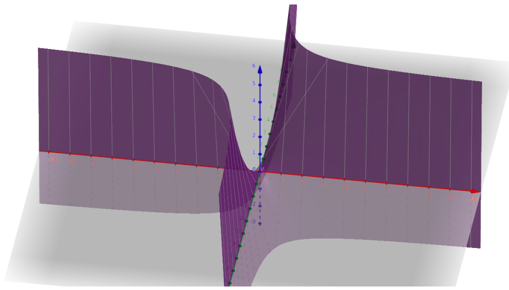

Figura 5: Parte imaginária da função $f(z) = z^2$.

A função real $f(x) = x^2$ é equivalente ao caso complexo ao tomarmos $y = 0$. Geometricamente isso equivale a fazer a interseção dos gráficos de u e v com o plano $y = 0$, conforme as figuras 6 e 7. Note que a interseção com o gráfico de u é a parábola, e a interseção com o gráfico de v é a reta referente ao eixo x.

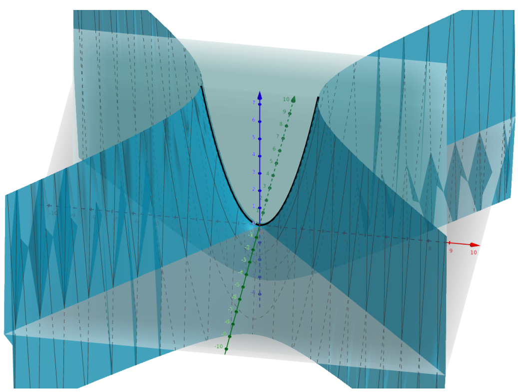

Figura 6: Interseção do gráfico de $u(x, y) = x^2 - y^2$ com o plano $y = 0$. A interseção é uma parábola (em preto).

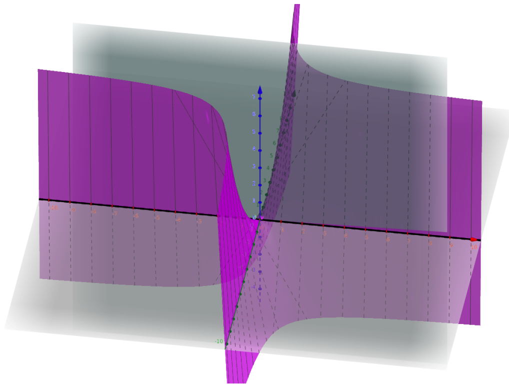

Figura 7: Interseção do gráfico de $v(x, y) = 2xy$ com o plano $y = 0$. A interseção é uma reta (em preto).

Essa discussão pode ser aprimorada ao se considerar a interseção dos gráficos de u e v com outros planos. Tome, por exemplo, o plano $z = 2$. A interseção com os gráficos de u e v são hipérboles, como podem ser vistas nas figuras 8 e 9. De fato, é

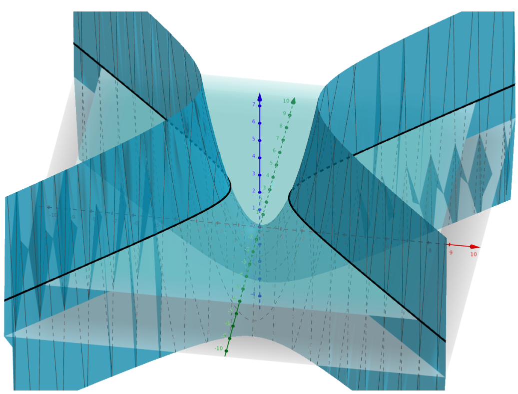

Figura 8: Interseção do gráfico de $u(x, y) = x^2 - y^2$ com o plano $z = 2$. A interseção é uma hipérbole (em preto).

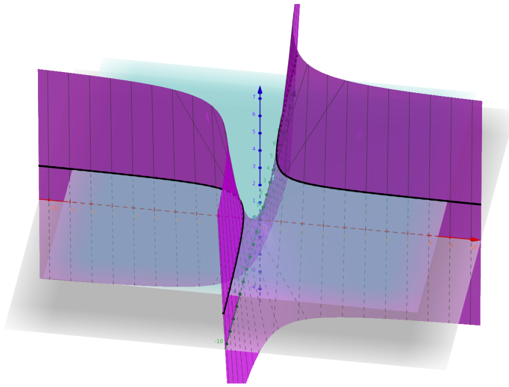

Figura 9: Interseção do gráfico de $v(x, y) = 2xy$ com o plano $z = 2$. A interseção é uma hipérbole (em preto).

Proposição 1. *Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função quadrática complexa. A interseção dos gráficos de u e v com um plano no espaço resultará em uma hipérbole ou uma parábola.*

Para demonstrar essa proposição, considere a função quadrática complexa na forma geral:

$$f(z) = az^2 + bz + c, \tag{14}$$

com $z, a, b, c \in \mathbb{C}$. Tomando $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ e $a = c_1 + ic_2$ temos

$$u(x, y) = a_1(x^2 - y^2) - 2a_2xy + b_1x - b_2y + c_1, \tag{15}$$
$$v(x, y) = a_2(x^2 - y^2) + 2a_1xy + b_2x + b_1y + c_2. \tag{16}$$

Vamos tomar a interseção dos gráficos dessas duas funções com um plano de equação geral dada por

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \tag{17}$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Vamos considerar primeiramente $\gamma \neq 0$. Nesse caso, temos

$$z = -\frac{\alpha}{\gamma}x - \frac{\beta}{\gamma}y - \frac{\delta}{\gamma}. \tag{18}$$

Fazendo $z = u(x, y)$ temos a seguinte equação:

$$a_1(x^2 - y^2) - 2a_2xy + \left(b_1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right)x - \left(b_2 - \frac{\beta}{\gamma}\right)y + c_1 + \frac{\delta}{\gamma} = 0. \tag{19}$$

Analogamente, fazendo $z = v(x, y)$, temos

$$a_2(x^2 - y^2) + 2a_1xy + \left(b_2 + \frac{\alpha}{\gamma}\right)x - + \left(b_1 + \frac{\beta}{\gamma}\right)y + c_2 + \frac{\delta}{\gamma} = 0. \tag{20}$$

Podemos analisar essa equação à luz da equação geral das cônicas, dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{21}$$

A natureza da cônica pode ser obtida através da análise do discriminante $\Delta_{conica} = B^2 - 4AC$. Caso $\Delta_{conica} < 0$ temos uma elipse, $\Delta_{conica} = 0$ corresponde a uma parábola e, se $\Delta_{conica} > 0$, trata-se de uma hipérbole. Em ambos os casos, nas Equações 19 e 20 temos, para o discriminante

$$\Delta_C = 4(a_1^2 + a_2^2) = 4|a|^2 > 0. \tag{22}$$

Note que a condição $|a| \neq 0$ corresponde ao fato de que a função é quadrática. Portanto, a interseção do gráfico de u e v com um plano que intersecta o eixo z é sempre uma *hipérbole*.

Resta estudar o caso $\gamma = 0$. Neste caso, para que tenhamos um plano, temos necessariamente α ou β diferentes de zero. Supondo $\beta \neq 0$, temos

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\delta}{\beta}. \tag{23}$$

Fazendo essa substituição do lado direito da equação $z = u(x, y)$ e $z = v(x, y)$, temos z como uma função quadrática de x, o que define uma *parábola*. Os casos degenerados corresponderão a retas e semirretas.

4. Conclusões

O ensino de números complexos pode ser aprimorado através de outras abordagens que contemplem conteúdos que são de domínio dos estudantes. O estudo da parábola referente ao gráfico da função quadrática é de domínio dos estudantes no momento em que eles são introduzidos aos números complexos. O estudo da função quadrática complexa, todavia, apresenta a necessidade de outras ferramentas de visualização. Felizmente os recursos computacionais podem fornecer tais instrumentos e permitem a exploração desses objetos. Durante a exploração é possível observar que a extensão dos conceitos utilizados para funções reais permite obter outro tipo de cônica, as hipérboles, servindo como conexão com a Geometria Analítica. As ferramentas computacionais são de grande valia na exploração matemática. Contudo, devem ser utilizadas com o devido cuidado [3], sem nunca dispensar a demonstração quando possível.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001. Agradecemos ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat.

Referências

[1] Brown, J. W e Churchill, R. V. *Variáveis Complexas e Aplicações*. São Paulo: McGraw Hill Brasil, 2015.

[2] Dante, L. *Matemática: Contextos e Aplicações*. 2ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2013. v. 3.

[3] Giraldo, V., Caetano, P. A. S. e Mattos, F. R. P. *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] Hohenwarter, M. *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*, Salzburg: IGI, 2002.

[5] Leonardo, F. M. de. *Conexões com a Matemática*. 2^a ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013. v. 3.

[6] Stewart, J. *Cálculo Volume 1 - Tradução da 6^a edição norte- americana*. Cengage Learning Edições Ltda., 2010.

[7] Zill, D. G. e Shanahan, P. D. *Curso introdutório à análise complexa com aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

Roberto do Nascimento Batista
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<robertonb1@hotmail.com>

André Fabiano Steklain Lisbôa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<steklain@utfpr.edu.br>

Recebido: 01/07/2019
Publicado: 06/09/2019