PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.9, n.4, 2021
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo944

Algumas desigualdades matemáticas: históricas, da Análise e sugestões de atividades para o Ensino Médio

Lucas Bastioni   Ricardo de Sá Teles

Resumo

Neste artigo discorremos sobre como as desigualdades são abordadas no Ensino Básico, com foco no Ensino Médio. Trazemos à tona algumas desigualdades notórias, seja por sua importância histórica, elegância ou importância dentro da Análise Matemática. Propomos aplicações de algumas dessas desigualdades em problemas diversos.

Palavras-chave: Desigualdades; Análise Matemática; Ensino Médio.

Abstract

In this paper we talk as inequalities are treated in Basic School with focus on High School. We bring to light some notorious inequalities, either because of their historical importance, elegance or relevance in particular to Mathematical Analysis. We propose applications of some of these inequalities in diverse problems.

Keywords: inequalities; Mathematical Analysis; High School.

1. Introdução

Este artigo é fruto da dissertação de mestrado do Profmat UNnesp/Rio Claro defendida em 2019 e intitulada: "Algumas desigualdades matemáticas: históricas, da Análise e sugestões de atividades para o Ensino Básico".

Sabe-se desde o início da educação formal que os números apresentam uma ordem. Comparam-se os naturais, inteiros, racionais e, por fim, os reais. Embora seja visto apenas ao final da Educação Básica – quando se estuda o conjunto dos números complexos – o símbolo de desigualdade, em uma espécie de encanto, desaparece. Isso deve-se ao fato de o conjunto dos números reais ser um corpo ordenado, e o conjunto dos complexos ser apenas um corpo sem relação de ordem. Neste trabalho consideramos apenas os números reais e estudamos alguns resultados interessantes sobre a relação de ordem existente nesse corpo. Admitimos conhecidas todas as propriedades e fatos elementares sobre essa relação.

No Seção 2 fazemos uma análise dos documentos oficiais do Ministério da Educação sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais, seguida de uma análise de alguns livros didáticos. Ainda nesta seção, apresentamos algumas desigualdades que são utilizadas no Ensino Médio. Na Seção 3, de cunho histórico, exibimos algumas desigualdades demonstradas ou assumidas por matemáticos da antiguidade. Na Seção 4 abordamos algumas desigualdades importantes da Análise Matemática. Na Seção 5 propomos alguns problemas que consideramos interessantes e cuja resolução emprega as desigualdades da seção anterior. Além disso, fazemos comentários breves explicando quais são os objetivos dos problemas propostos, seguindo as orientações dadas nos documentos do Ministério da Educação.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2. Algumas Desigualdades Cotidianas e o Tratamento das Desigualdades na Educação Básica

Nesta seção apresentamos alguns problemas elementares que envolvem desigualdades, fazemos comentários que explicam de que forma acreditamos que o ensino de desigualdades adequa-se ao que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e analisamos o modo como alguns livros didáticos da Educação Básica abordam as desigualdades.

2.1. Alguns problemas elementares com desigualdades

Vamos descrever dois problemas cotidianos e elementares com o uso de desigualdades. Não serão necessárias técnicas avançadas, raciocínios complicados ou a evocação de alguma desigualdade notória para a resolução desses problemas. A intenção é apenas mostrar que, de fato, as desigualdades são comuns em situações rotineiras.

2.1.1 Combustível no automóvel

Antes de viajar, o motorista prudente faz algumas verificações básicas dos elementos de segurança do seu carro, tais como: analisa faróis, palhetas do parabrisa, calibra os pneus, verifica estepe e, principalmente, examina se há combustível suficiente para realizar a viagem, e no caso de viagens mais longas, se há combustível suficiente até encontrar algum posto na rodovia.

Automóveis modernos possuem computador de bordo com uma função que mostra a autonomia, o volume de combustível do tanque, o consumo médio e instantâneo do veículo etc. Suponhamos que a viagem será realizada em um automóvel sem esse acessório.

Nesse caso, a maneira mais comum é analisar o indicador do volume de combustível presente no painel do automóvel, dado geralmente em forma de fração, e, conhecendo o consumo médio de combustível do automóvel e a distância que será percorrida, pode-se saber se há combustível suficiente.

Sejam d a distância de uma viagem, q o consumo médio de combustível do veículo que fará a viagem e l a quantidade de combustível presente no tanque. Conhecendo-se a capacidade máxima do tanque e a fração do mesmo que está preenchida de combustível, é possível estimar um valor para l. Veremos que se uma certa desigualdade for satisfeita, o motorista pode realizar a viagem.

A quantidade de combustível consumida durante a viagem é dada por $\frac{d}{q}$. Então, se $\frac{d}{q} \leq l$ há combustível suficiente. É importante lembrar que a opção mais segura é quando $\frac{d}{q} < l$, pois o artigo 180 do Código de Trânsito diz que a pane seca é considerada uma infração de trânsito, de natureza média e punida com multa.

2.1.2 Ida ao supermercado

Ao fazer compras em um supermercado temos diante de nós uma vasta gama de produtos à nossa disposição. Muitos deles são vendidos em embalagens de diversos tamanhos ou com diferentes quantidades. Alguns possuem preço proporcional, outros podem apresentar vantagem se comprados em embalagens de maior quantidade ou tamanho.

Essa diferença dá-se principalmente pelo fato de que as embalagens têm custos, e uma vez que ela consegue armazenar mais coisas, pode ser vendida por um preço mais acessível. Como saber se ao comprar uma embalagem maior estamos pagando de forma proporcional ou se, de fato, estamos pagando um pouco mais barato?

É claro que quando dizemos um pouco mais barato isso não significa em termos absolutos. Obviamente uma embalagem com mais produto será mais cara do que outra com menos produto. A questão que propomos é que se as embalagens tivessem o mesmo tamanho, quanto custaria cada uma delas? Se feito esse procedimento de transformá-las em uma embalagem de mesmo tamanho e elas custarem o mesmo preço, então a maior é proporcional à menor. Caso contrário, se a embalagem menor custar mais caro do que a maior, então a segunda opção é mais vantajosa para a compra.

Como proceder? Sejam a e b as quantidades (podem ser peso, volume etc) de duas embalagens de um mesmo produto, onde $\mathrm{b} > \mathrm{a}$. Suponha que cada uma delas seja vendida por x e y reais, respectivamente. É claro que $\mathrm{y} > \mathrm{x}$, pois há mais produto na segunda embalagem do que na primeira. Mas veremos que em termo relativos, comprar a embalagem maior pode ser mais vantajoso.

Como a primeira embalagem custa x e tem quantidade a, a razão $\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}$ dá-nos o preço relativo do produto quando vendido nesta embalagem. Usando o mesmo raciocínio, a razão $\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}$ dá-nos o preço relativo do produto vendido na segunda embalagem.

Se $\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} = \dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}$, então o preço da embalagem maior é proporcional ao da menor, e é indiferente comprar qualquer uma delas. Se $\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} > \dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}$, mesmo que $\mathrm{y} > \mathrm{x}$, é mais vantajoso comprar a embalagem maior.

Esse raciocínio pode ser levado em conta quando compramos um produto que geralmente é consumido em grandes quantidades e, consequentemente, levar uma embalagem com mais quantidade pode ser mais vantajoso do que levar várias embalagens com menos quantidade. Pensando de forma sustentável, às vezes é mais econômico comprar uma embalagem maior, mas se o seu conteúdo não for consumido até a data de validade gera-se desperdício. O consumidor consciente deve ponderar entre essas duas variáveis, economia $\times$ sustentabilidade, para fazer uma compra ideal.

2.2. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Citamos abaixo alguns trechos de BRASIL[3] e em seguida fazemos comentários buscando associá-los ao estudo de desigualdades. A referência BRASIL[4] faz comentários complementares acerca de BRASIL[3]. As ideias desses documentos nortearão as aplicações dadas na Seção 5. Iniciamos com o trecho a seguir ,

> [...] no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

A respeito desse trecho, salientamos que ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental o aluno aprende a comparar dois números, geralmente dois naturais, com o uso dos símbolos $>, <, \geq$ e $\leq$. Depois, a comparação estende-se ao conjunto dos inteiros e, por fim, em uma aplicação interessante das frações equivalentes, comparam-se os racionais. Ainda no Ensino Fundamental, aprende-se a resolver inequações, cujas técnicas são muito parecidas com a resolução de equações, exceto pelo fato de que quando se multiplica uma inequação por um número real negativo deve-se tomar o cuidado de trocar o símbolo da desigualdade. Uma vez compreendido e amadurecido o conceito de desigualdade, o aluno está preparado para entender as desigualdades que aparecerão no Ensino Médio, que o ajudarão a resolver, investigar, analisar e compreender problemas diversos.

Destacamos outro trecho ,

> Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento.

Conforme apresentado nos exemplos iniciais deste trabalho, com o auxílio de desigualdades o aluno pode confiar em seu próprio conhecimento para, por exemplo, calcular a autonomia de um automóvel e entender como funcionam os preços de produtos no supermercado.

A referência BRASIL[3] apresenta uma série de finalidades do ensino da Matemática no Ensino Médio. Destacamos algumas a seguir.

- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Quanto ao primeiro item, já destacamos o uso das desigualdades nas atividades cotidianas. No entanto, as desigualdades surgem naturalmente nas demais ciências e nas atividades tecnológicas. Por exemplo, a quantidade máxima de antibiótico que deve ser administrada de tal forma que o organismo do paciente não seja prejudicado, o peso máximo de água que uma barragem suporta, o torque mínimo que um motor deve gerar para colocar um automóvel em movimento. O aluno deve estar ciente de que esses problemas envolvem desigualdades.

Quanto ao segundo item, enfatizamos que vivemos em uma época de revolução tecnológica, que nos cerca de várias informações, muitas delas contraditórias, e somos levados a tomar uma decisão baseando-nos em múltiplas variáveis. O conhecimento das desigualdades pode nos auxiliar nessa tomada de decisão de forma coerente e justificada. Escolher entre um pagamento à vista ou a prazo, entender o porquê da destinação de recursos públicos ser maior para uma determinada área do que para outra, escolher abastecer o automóvel com etanol ou gasolina, escolher o plano telefônico para o dispositivo móvel são alguns dos problemas em que há muitas opiniões e informações e devemos comparar diversos valores para tomar uma decisão ou formar uma opinião.

O terceiro item é associado ao que já dissemos no parágrafo acima, uma vez tomada uma decisão é necessário estarmos convencidos ou convencer a outrem sobre o motivo de tê-la tomado. Isso exige correta linguagem e raciocínio. Manipular algebricamente uma desigualdade, invocar alguma desigualdade notória e construir um raciocínio que mostra que a desigualdade explica bem o motivo da tomada da decisão são desafios que esse item nos apresenta.

O último item mostra-nos que o aluno deve estar seguro e confiante quanto à decisão tomada. Uma vez que isso se verifica, ele fica realizado em saber que está tomando uma decisão que as desigualdades mostraram ser a mais eficiente, segura ou vantajosa. Saber que o dinheiro renderá mais na aplicação escolhida, que o automóvel andará quando o motor fornecer o torque julgado como mínimo, que a compra a prazo trará mais vantagem e que a barragem não vai se romper mostram que o professor obteve êxito em provocar o sentimento de satisfação ao aluno que pôde tomar uma decisão baseando-se no que aprendeu. Seguro da decisão, ele poderá compartilhá-la.

Outro trecho interessante é dado a seguir ,

> O trabalho com números pode também permitir que os alunos apropriem-se da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível.

Aqui vemos o uso de $a \leq x \leq b$, ou seja, estimamos que um valor x é maior ou igual do que um número a e também menor ou igual do que um número b. O trabalho com estimativas exige conhecimento de desigualdades e manipulações algébricas para a sua resolução. Quanto à estimativa do resultado de um determinado problema, veremos mais adiante que isso é uma ferramenta importante quando trabalhamos com variáveis que já sabemos pertencer a um intervalo fixo como o valor das funções seno e cosseno e da função probabilidade. A técnica de obter estimativas é empregada desde os tempos remotos, como veremos na seção seguinte.

Por fim, apresentamos um último trecho ,

> Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso em uma enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e os computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações.

Nesse tópico, os parâmetros apenas reforçam o que já discutimos acima com respeito a tomada de decisões baseadas em um conjunto de informações. Aqui assume-se que as Ciências Humanas também fazem parte do rol de aplicações. Além, é claro, de enfatizar o uso de computadores para auxiliarem os cálculos ou servirem como fonte de pesquisa. Citamos aqui como exemplo o poder de persuasão de uma pesquisa de intenção de votos. Quando o eleitor vê em alguma mídia uma pesquisa como essa, e nota que a intenção de votos de um determinado candidato é muito maior ou muito menor do que a de outro, essa informação tem um papel decisivo em sua escolha. Uma pessoa sem ideologia política, ou que vota apenas por obrigação ou que não tem o menor interesse por política tem grande probabilidade de votar com base nessa pesquisa. Mesmo alguém que tenha algum interesse e que veja em algum candidato propostas das quais tenha simpatia, pode desistir de votar nele ao vê-lo com uma quantidade ínfima de intenção de votos quando comparado aos outros concorrentes.

2.3. Análise de livros e materiais didáticos

Analisamos [1], [5], [9] e [13], que são livros didáticos recomendados no PNLD de 2018; e também [6] e[10], que são volumes de uma conhecida coleção de livros de Matemática Elementar. Fazemos comentários de como os autores abordam desigualdades.

Todos os livros didáticos e [10] têm um capítulo que aborda os conjuntos numéricos. Nas seções em que tratam dos números reais, os autores apresentam a reta real, combinando a ideia de desigualdade com o tratamento geométrico, a saber: um número real a é menor do que um número real b se o ponto que representa a na reta real está à esquerda do ponto que representa b; ou um número real a é maior do que um número real b se o ponto que representa a na reta real está à direita do ponto que representa b.

O único que traz uma definição algébrica é [5], ou seja, um número real a é menor do que um número real b se a diferença $b - a$ for maior do que zero, ou suas formas equivalentes.

O tratamento geométrico é interessante, principalmente quando é necessário verificar alguma desigualdade em que pelo menos um dos números seja real negativo. Fica evidente ao desenhar a reta real e inserir os pontos que representam os números que, por exemplo, -3 e maior do que -5, pois o ponto que representa -3 está à direita do ponto que representa -5. Já o tratamento algébrico é interessante na resolução de problemas.

As aplicações imediatas são os intervalos de números reais, a função módulo e a resolução de inequações afim. Os problemas que os livros propõem nesse tópico são interessantes, pois a maioria segue as orientações de [3] e relaciona a solução do problema com um fato cotidiano. Vejamos um exercício presente em [1].

Exemplo 1. Para uma visita agendada, um técnico de informática cobra uma taxa fixa de R$20,00 mais uma taxa de R$25,00 por hora trabalhada. Em uma única visita, quantas horas esse técnico precisa trabalhar para receber mais de R$120,00?

Exercícios desse tipo repetem-se nos demais livros. Todo eles também fazem o estudo das desigualdades com a função quadrática.

Abaixo destacamos algumas desigualdades encontradas em todos os livros didáticos supracitados e que representam as desigualdades mais estudadas no Ensino Médio.

2.3.1 As funções seno e cosseno

Com o auxílio da circunferência unitária centrada na origem e com a definição de seno e cosseno de um ângulo agudo do triângulo retângulo, podemos definir as funções reais seno e cosseno.

A princípio define-se o contradomínio dessas funções como sendo o conjunto $\mathbb{R}$. Com a análise da geometria da definição dessas funções conclui-se que a imagem de ambas é o intevalo $[-1, 1]$, ou seja, sen : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ e cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, de onde podemos concluir que para qualquer número real x valem as seguintes desigualdades

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ e } -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

2.3.2 Probabilidade

Se Ω é o espaço amostral de um determinado experimento aleatório e $E \subset \Omega$, definimos a probabilidade do evento E como sendo o número real $P(E)$, em que $P(E) = 0$, se $E = \emptyset$ e $P(E) = 1$, se $E = \Omega$. Um dos axiomas que definem o número $P(E)$ é a desigualdade

$$0 \leq P(E) \leq 1. \tag{1}$$

Uma aplicação interessante para (1) é que ao final da resolução de um exercício sobre probabilidade, o aluno terá uma condição necessária (mas não suficiente) para saber se seu resultado está correto, isto é: se o valor que ele encontrou for menor do que zero ou maior do que um, então sua solução está errada. Aqui percebemos uma aplicação do que [3] diz no trecho a respeito de estimativas e controle da ordem de grandeza de uma variável.

2.3.3 Função quadrática

Considere a função real $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. A função f é denominada função quadrática. Sabemos que seu gráfico é uma parábola cujo vértice V é dado pelas coordenadas

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Podemos afirmar que para qualquer número real x valem as seguintes desigualdades

$$f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ se } a > 0.$$

$$f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ se } a < 0.$$

Surgem situações interessantes de máximos e mínimos em problemas que envolvem mais do que uma variável. Geralmente conseguimos obter um sistema de duas equações, sendo que em uma delas aparece um produto entre as duas variáveis e na outra temos uma da soma. Ao resolver esse sistema encontramos uma equação quadrática em uma variável. Vejamos um exercício proposto em [9].

Exemplo 2. Entre todos os retângulos de perímetro 20cm, determine aquele cuja área é máxima. Qual é essa área?

Vamos à solução desse problema. Se considerarmos x e y as medidas dos lados do retângulo, queremos maximizar a área $x \cdot y$ sabendo o perímetro $2x + 2y = 20$, ou seja, $x + y = 10$. Se escrevemos que $y = 10 - x$, então a expressão para a área torna-se $x \cdot (10 - x) = -x^2 + 10x$, ou seja, uma equação quadrática na variável x.

2.3.4 Geometria analítica

Definindo a circunferência como sendo o conjunto dos pontos do plano cuja distância a um ponto dado é igual a um número real positivo dado, podemos definir o círculo como o conjunto de pontos do plano cuja distância a um ponto dado é menor ou igual do que um número real positivo dado. Matematicamente, obtemos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

que é o círculo de raio r e centro no ponto (x_0, y_0), ou seja, a sua descrição é feita por meio de uma desigualdade.

Ainda na geometria analítica, usam-se desigualdades para estudar a posição relativa entre uma reta e uma circunferência. Usando a notação $d(s, O)$ para representar a distância da reta s ao ponto O, dizemos que uma reta s é secante a uma circunferência de centro O e raio r se $d(s, O) < r$; elas são tangentes se $d(s, O) = r$; e s é exterior à circunferência se $d(s, O) > r$.

Além da circunferência, as desigualdades também podem ser usadas para descrever regiões diversas do plano. Uma desigualdade pode nos dar a região interna ou externa de uma elipse, a região acima ou abaixo de uma reta e uma região um pouco mais sofisticada pode ser representada por um sistema de inequações.

3. Algumas Desigualdades Históricas

Esta seção traz algumas desigualdades encontradas por grandes matemáticos do passado ou que envolvem números notáveis da Matemática. Nosso objetivo aqui é mostrar que desde tempos remotos os matemáticos já trabalhavam com desigualdades, seja para exibir resultados elegantes ou fazer estimativas.

3.1. A desigualdade triangular

A Proposição 20 do livro I de *Elementos* é um importante resultado em Geometria. Nesta seção, veremos como Euclides a demonstrou, listamos os resultados utilizados por ele e fazemos a demonstração. Os detalhes podem ser encontrados no livro I de *Elementos*. Esse resultado é de aproximadamente 300 a.C.. A versão que usamos aqui está disponível no *site* da *Clark University*[1].

Noção Comum 1 (Quinta Noção Comum). O todo é maior do que as suas partes.

Postulado 1 (Primeiro Postulado). Sempre é possível traçar um linha reta entre dois pontos.

Postulado 2 (Segundo Postulado). Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente em ambas as direções.

Proposição 1 (Terceira Proposição). Dadas duas linhas retas desiguais, é possível cortar da maior uma parte igual à menor.

Proposição 2 (Quinta Proposição). Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos que estão na base são iguais. E, produzidos lados iguais, os ângulos que estão na base também são iguais.

Proposição 3 (Décima Nona Proposição). Em qualquer triângulo o lado maior fica oposto ao maior ângulo.

Temos agora os requisitos para enunciar e demonstrar o resultado a seguir.

Teorema 1 (Vigésima Proposição). Em qualquer triângulo a soma de quaisquer dois lados é maior do que o lado restante.

Demonstração. Seja ABC um triângulo.

Pelo Postulado 2 e pela Proposição 1 podemos inserir um ponto D na reta AB, de modo que A e D fiquem de um mesmo lado em relação a B e que AD seja igual a AC.

Pelo Postulado 1 desenhamos o segmento CD.

Como AD é igual a AC, então pela Proposição 2 segue que o ângulo $A\hat{D}C$ é igual ao ângulo $A\hat{C}D$. Então, pela Noção Comum 1, o ângulo $B\hat{C}D$ é maior do que o ângulo $A\hat{D}C$.

Como DCB é um triângulo que tem o ângulo $B\hat{C}D$ maior do que o ângulo $B\hat{D}C$, pela Proposição 3, segue que DB é maior do que BC.

Mas DA é igual a AC, assim a soma de BA e AC é maior do que BC.

De forma similar, podemos provar que a soma de AB com BC é maior do que AC, e que a soma de BC com CA é maior do que AB.

Então, em qualquer triângulo a soma de quaisquer dois lados é maior do que o lado restante.

□

[1] O acesso dá-se por https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html. Caso o leitor não consiga acessar, verifique se o símbolo ~ aparece antes de 'djoyce' no endereço que aparece em seu navegador.

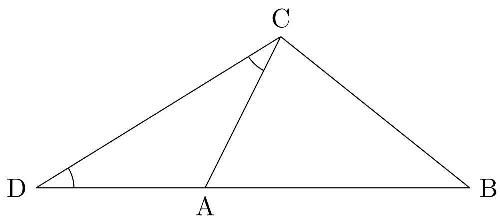

Figura 1: A desigualdade triangular.

3.2. Aproximação para π

Em [8], vemos que na terceira Proposição do livro *A medida do círculo*, Arquimedes encontra um limitante superior e um limitante inferior para o número π. Isso aconteceu por volta de 250 a.C..

Ao longo da demonstração, Arquimedes usou algumas aproximações racionais para as raízes quadradas sem justificar como as encontrou. Na demonstração que exibimos a seguir, vamos omitir as raízes e escrever apenas as aproximações racionais. Usamos a notação original para representar um número que possui parte inteira e fracionária.

Proposição 4. A razão entre a circunferência de qualquer círculo pelo seu diâmetro é menor do que $3\frac{1}{7}$ e maior do que $3\frac{10}{71}$.

Demonstração. Nesta primeira parte, encontraremos um limitante superior para π.

Sejam AB o diâmetro de uma circunferência de centro O, e AC a tangente à circunferência passando por A de modo que $\mathrm{A\hat{O}C}$ seja um terço de um ângulo reto. Então

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}} > \frac{265}{153} \text{ e } \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{AC}} > \frac{306}{153}.$$

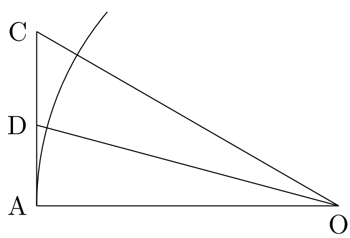

Figura 2: Limitante superior I.

Considere OD a bissetriz de $\mathrm{A\hat{O}C}$ onde D é um ponto da reta AC. Então, pela Proposição 3 do livro VI de *Elementos*[2], segue que

$$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}}$$

ou seja,

$$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}} \Rightarrow \frac{\mathrm{CO+OA}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CD+DA}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{DA}} \Rightarrow \frac{\mathrm{CO+OA}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{DA}}.$$

[2]Essa proposição é a que hoje conhecemos como teorema da bissetriz interna.

Sendo assim

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{CO}+\mathrm{OA}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CA}} + \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{CA}} > \frac{306}{153} + \frac{265}{153} = \frac{571}{153}.$$

Por Pitágoras, $\mathrm{OD}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AD}^2$, o que implica

$$\frac{\mathrm{OD}^2}{\mathrm{AD}^2} = \frac{\mathrm{OA}^2}{\mathrm{AD}^2} + 1 > \left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1 = \frac{349450}{23409}$$

ou seja,

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}.$$

Considere OE a bissetriz de $\mathrm{A\hat{O}D}$, sendo E um ponto da reta AC. Usando novamente a Proposição 3 do livro VI de *Elementos*, e usando o mesmo raciocínio acima, segue que

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{EA}} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

e

$$\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EA}} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

Sendo OF a bissetriz de $\mathrm{A\hat{O}E}$ em que F é um ponto da reta AC, se repetirmos os argumentos acima, obtemos

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AF}} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

e

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{FA}} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}.$$

Considere OG a bissetriz de $\mathrm{A\hat{O}F}$ sendo G um ponto da reta AC, temos que

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AG}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Como $\mathrm{A\hat{O}C}$ foi bisseccionado quatro vezes, então $\mathrm{A\hat{O}G}$ é a quadragésima oitava parte de um ângulo reto. Considere o ponto H na reta AC de modo que ele esteja do lado oposto à semirreta que contém os pontos A e C e de tal forma que o ângulo $\mathrm{A\hat{O}H}$ tenha a mesma medida de $\mathrm{A\hat{O}G}$. Então $\mathrm{G\hat{O}H}$ é a vigésima quarta parte de um ângulo reto, e GH é um lado do polígono regular de 96 lados circunscrito à circunferência.

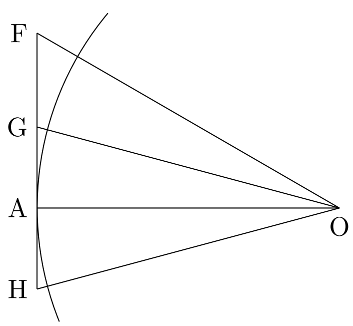

Figura 3: Limitante superior II.

Sendo $\mathrm{AB} = 2\mathrm{AO}$ e $\mathrm{GH} = 2\mathrm{AG}$, segue que

$$\frac{\mathrm{AB}}{96 \cdot \mathrm{GH}} > \frac{1}{96}\frac{4673\frac{1}{2}}{153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}.$$

Mas

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}.$$

Conclui-se que a razão entre o perímetro de um polígono regular de 96 lados circunscrito a uma circunferência e o seu diâmetro é menor do que $3\frac{1}{7}$.

Agora encontraremos um limitante inferior para π.

Sejam AB o diâmetro de uma circunferência de centro O e C um ponto da circunferência de tal forma que $\mathrm{C\hat{A}B}$ seja igual a um terço de um ângulo reto. Então

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} < \frac{1351}{780}.$$

Considere a bissetriz AD de $\mathrm{B\hat{A}C}$ em que D é um ponto da circunferência e $\mathrm{D'}$ é a interseção da bissetriz com o segmento BC. Observe que $\mathrm{A\hat{C}B}$ e $\mathrm{A\hat{D}B}$ são retos. Sendo AD bissetriz e $\mathrm{D\hat{B}D'}$ e $\mathrm{D\hat{A}C}$ inscritos sob o mesmo arco DC, segue que

$$\mathrm{B\hat{A}D} = \mathrm{D'\hat{A}C} = \mathrm{D\hat{B}D'}.$$

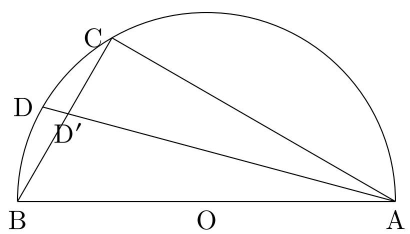

Figura 4: Limitante inferior I.

Concluímos que os triângulos ADB e $\mathrm{BDD'}$ são semelhantes, de onde segue que

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DD'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD'}} = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}{\mathrm{BD'}+\mathrm{CD'}} = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}.$$

Como $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{2}{1}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} &= \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} + \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\\ &< \frac{2}{1} + \frac{1351}{780} = \frac{2911}{780}.\end{aligned}$$

Por Pitágoras, $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2$ e como

$$\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{BD}^2} = \frac{\mathrm{AD}^2}{\mathrm{BD}^2} + 1 < \frac{2911^2}{780^2} + 1 = \frac{9082321}{608400}$$

podemos escrever

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Considere a bissetriz AE de $\mathrm{B\hat{A}D}$ sendo E um ponto da circunferência. Usando o mesmo raciocínio acima, obtemos

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}} < \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$$

e

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Sendo a bissetriz AF de $\mathrm{B\hat{A}E}$ em que F é um ponto da circunferência, repetindo os argumentos acima, ficamos com

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{BF}} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}$$

e

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BF}} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}.$$

Considere a bissetriz AG de $\mathrm{B\hat{A}F}$ onde G é um ponto da circunferência, temos que

$$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{BG}} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

e

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BG}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

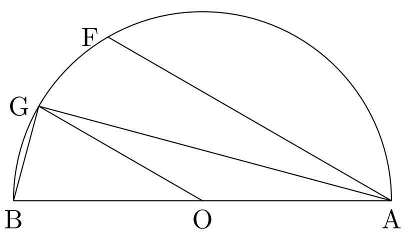

Figura 5: Limitante inferior II.

Como $\mathrm{B\hat{A}C}$ foi bisseccionado quatro vezes, então $\mathrm{B\hat{A}G}$ é a décima sexta parte de $\mathrm{B\hat{A}C}$, ou a quadragésima oitava parte de um ângulo reto. Então o ângulo central $\mathrm{B\hat{O}G}$ é a vigésima quarta parte de um ângulo reto ou a nonagésima sexta parte de quatro ângulos retos. Assim, BG é o lado de um polígono regular de 96 lados inscrito na circunferência.

Daí,

$$\frac{96 \cdot \mathrm{BG}}{\mathrm{AB}} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}.$$

Mas
$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$

Conclui-se que a razão entre o perímetro de um polígono regular de 96 lados inscrito em uma circunferência e o seu diâmentro é maior do que $3\frac{10}{71}$.

Portanto,
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

□

3.3. Propriedade de Arquimedes

Em [8], encontramos que no Quinto Axioma do livro I de *Sobre a esfera e o cilindro*, Arquimedes escreve [3] que: se $x > 0$ e y são dois números reais quaisquer, então existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$. Isso foi em torno de 225 a.C.

Geometricamente, isso quer dizer que um segmento pode ser unido a si mesmo um número finito de vezes, de forma que o segmento resultante tenha comprimento maior do que qualquer outro segmento dado.

Embora tenha sido admitido como axioma por Arquimedes, esse resultado pode ser demonstrado para os números reais, admitindo-se a propriedade do supremo. Seguiremos [7].

Definição 1. Seja A um conjunto de números reais. O maior elemento de A, quando existe, denomina-se máximo de A. Dizemos que um número m é um limitante superior de A se m for máximo de A ou se m for estritamente maior que todo número de A. O menor limitante superior de A, quando existe, denomina-se supremo de A.

Exemplo 3. (a) É fácil ver que o conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$ é limitado superiormente. Afirmamos que o supremo de X é 1. Caso contrário, existiria $a < 1$, tal que $x \leqslant a$, para todo $x \in X$. Mas $1 \in X$, logo seria absurdo.
(b) Seja $X = (0, 1)$. Afirmamos que o supremo de X é 1. Caso contrário, existiria limitante superior $a \in (0, 1)$. Observe que $0 < a < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{a+1}{2} < 1$, mas $a < \dfrac{a+1}{2}$, logo chegamos em um absurdo.

Axioma 1 (Propriedade do supremo). Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo.

Teorema 2 (Propriedade de Arquimedes). Se $x > 0$ e y são dois números reais quaisquer, então existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$.

Demonstração. Vamos supor que para qualquer natural n, tenhamos $nx \leq y$. Considere o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Então A é não vazio, pois $1 \cdot x = x \in A$ e é limitado superiormente, pois, por hipótese, $nx \leq y$. Logo, A admite supremo, que denotaremos por s. Como $x > 0$, então $s - x < s$ e $s - x$ não é cota superior de A. Daí, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - x < mx$. Disso concluímos que $s < (1 + m)x$. Sendo $1 + m$ um natural, segue que $(1 + m)x \in A$. Mas s é o supremo de A. Absurdo!

Portanto existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. □

[3] Em linguagem moderna

3.4. O número e

Sabemos que a sequência cujo termo geral é dado por

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2}$$

é convergente e converge para a importante constante matemática e, a saber: o número de Euler, cuja história remonta ao século XVII. Seguindo [7], vamos mostrar que $a_n < 3$, para todo $n \geq 1$. Para isso, precisamos de um lema auxiliar.

Lema 1. Considere $n \in \mathbb{N}$. Então $2^n \leq (n+1)!$.

Demonstração. Vamos usar o princípio da indução finita. Para $n = 1$, segue que $2^n = 2$ e que $(n+1)! = 2! = 2$. Logo, $2^n \leq (n+1)!$.

Suponha, por hipótese, que $2^k \leq (k+1)!$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, $2^{k+1} = 2^k 2 \leq 2(k+1)!$. Como $k \in \mathbb{N}$, então $2 \leq (k+2)$. Segue que $2^{k+1} \leq (k+2)(k+1)! = ((k+1)+1)!$.

Concluímos por indução que $2^n \leq (n+1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 3. Considere a sequência (2). Então $a_n < 3$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Reescrevemos o termo geral de (2) como

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{1}{3!} + \ldots + \frac{n!}{n^n}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Observe que as frações que multiplicam os números $\frac{1}{i!}$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, são todas menores do que 1. Assim,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}.$$

Do Lema 1, temos que

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

e segue que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}.$$

Sabemos que a soma infinita dos termos da progressão geométrica cujo termo geral é dado por $b_n = \frac{1}{2^n}$ é igual a 2. Portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3.$$

Portanto $a_n < 3$, para todo $n \geq 1$. □

4. Algumas Desigualdades Notáveis da Análise Matemática

Nesta seção apresentamos algumas desigualdades da Análise em sua forma elementar. Não faremos todas as demonstrações, mas os interessados podem encontrá-las em [2].

Se p e q são números reais com $p > 1$, satisfazendo a relação $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, dizemos que eles são índices conjugados.

Proposição 5 (Desigualdade de Holder). Sejam $(a_i)_{i=1}^n$ e $(b_i)_{i=1}^n$ sequências de números reais positivos. Então

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

A próxima desigualdade é um caso particular da desigualdade de Holder.

Proposição 6 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz). Sejam $(a_i)_{i=1}^n$ e $(b_i)_{i=1}^n$ sequências de números reais positivos. Então,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2}. \tag{4}$$

Observe que (4) fornece-nos um limitante superior para a soma $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i b_i$. Vejamos que sob certas condições essa soma possui um limitante inferior. Para isso o lema a seguir é importante.

Lema 2. Seja $(x_i)_{i=1}^n$ uma sequência não decrescente de números reais positivos. Usaremos a notação $\bar{x} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ para representar a média aritmética dessa sequência. Então existe um índice $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq \bar{x} \leq x_{k+1} \leq \ldots \leq x_n.$$

Empregando o Lema 2 conseguimos demonstrar a próxima desigualdade.

Proposição 7 (Desigualdade de Chebyshev). Sejam $(a_i)_{i=1}^n$ e $(b_i)_{i=1}^n$ sequências não decrescentes de números reais positivos. Então

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i. \tag{5}$$

Demonstração. Seja k o índice mencionado no Lema 2. Como as sequências são não decrescentes é fácil notar que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tem-se que

$$0 \leq (a_i - \bar{a})(b_i - b_k).$$

Daí,

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - b_k). \tag{6}$$

Desenvolvendo a desigualdade (6), obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (a_1 - \bar{a})(b_1 - b_k) + \ldots + (a_n - \bar{a})(b_n - b_k) \\
0 &\leq a_1 b_1 - a_1 b_k - \bar{a} b_1 + \bar{a} b_k + \ldots + a_n b_n - a_n b_k - \bar{a} b_n + \bar{a} b_k \\
a_1 b_k + \bar{a} b_1 - \bar{a} b_k + \ldots + a_n b_k + \bar{a} b_n - \bar{a} b_k &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\
(\sum_{i=1}^{n} a_i - n\bar{a}) b_k + \bar{a}(\sum_{i=1}^{n} b_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\
(\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i) b_k + \bar{a}(\sum_{i=1}^{n} b_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\
\bar{a}(\sum_{i=1}^{n} b_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\
\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.
\end{aligned}
$$

□

Vejamos mais uma desigualdade bastante conhecida.

Teorema 4 (Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica). Seja $(a_j)_{j=1}^{n}$ uma sequência de números reais positivos. Então

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{n} \geq \prod_{j=1}^{n} a_j^{\frac{1}{n}}. \tag{7}$$

Uma consequência imediata da desigualdade (7) é a desigualdade entre as médias geométrica e harmônica.

Teorema 5 (Desigualdade das Médias Geométrica e Harmônica). Seja $(a_j)_{j=1}^{n}$ uma sequência de números reais positivos. Então

$$\prod_{j=1}^{n} a_j^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}. \tag{8}$$

Demonstração. Como $(a_j)_{j=1}^{n}$ é uma sequência de reais positivos, então $\left(\frac{1}{a_j}\right)_{j=1}^{n}$ também é uma sequência de reais positivos. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}{n} \geq \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{a_j}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{9}$$

Basta inverter as frações e mudar o sinal da desigualdade (9). □

Por último, vamos enunciar e demostrar a relação entre as médias quadrática e aritmética.

Teorema 6 (Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética). Seja $(a_j)_{j=1}^{n}$ uma sequência de números reais positivos. Então

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{n}} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{n}. \tag{10}$$

Demonstração. Como $n \in \mathbb{N}$, considere as sequências de números reais positivos $\left(\frac{a_j}{n}\right)_{j=1}^{n}$ e $\{1, \ldots, 1\}$, esta última com n números iguais a 1. A desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz assegura-nos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{n} \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{n^2} \sum_{j=1}^{n} 1^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{n^2} n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{n}}.$$

Portanto, segue o resultado desejado. □

5. Aplicações na Educação Básica

Após a apresentação de algumas desigualdades da Análise Matemática em suas formas elementares, propomos problemas em que elas podem ser empregadas no contexto do Ensino Médio. Baseamos-nos nas referências [11] e [12]. E a escolha desses problemas levou em consideração os comentários feitos na Subseção 2.2.

5.1. Problema 1

Pedir aos alunos para que se sentem em grupos e propor o seguinte desafio: se possível, encontre quatro números reais positivos a, b, c e d de tal forma que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 2. \tag{11}$$

Façamos a resolução. Esse problema não tem solução, pois a desigualdade (7) diz-nos que

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}},$$

logo,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4. \tag{12}$$

Este problema tem como objetivo inicial fazer com que os alunos estimem que o número que deveria aparecer no lugar do 2 em (11) é o 4. Ao notarem que o número obtido após somar as frações é sempre maior ou igual a 4, espera-se que eles descubram, sem usar uma demonstração rigorosa, que o 2 não deveria estar ali.

Após alguns grupos conseguirem notar a inviabilidade do problema, o professor poderá apresentar a desigualdade das médias aritmética e geométrica (7). Por fim, propor que os grupos utilizem essa desigualdade para verificar (12).

Conhecida a desigualdade (7), os alunos podem protestar caso algum professor sugira usar a média geométrica em vez da média aritmética para calcular as notas.

5.2. Problema 2

Vamos dar uma aplicação para a desigualdade tringular. É famoso o problema que nos dá uma reta r, e dois pontos A e B de um mesmo lado dessa reta e pede para encontrarmos o ponto P em r de tal forma que $\mathrm{AP} + \mathrm{PB}$ tenha o menor comprimento possível.

Enunciado dessa forma, parece que temos um simples problema matemático de minimização de distâncias. Podemos propô-lo de forma mais interessante para que o aluno perceba uma ferramenta poderosa para resolver um problema cotidiano.

Suponha que um rio passe por uma cidade por meio de um trecho retilíneo. Suponhamos que a prefeitura de uma certa cidade precise construir uma estação de tratamento d'água que ficará na margem desse rio. A água não irá diretamente da estação para as casas. Após sair da estação, ela será direcionada a duas grandes caixas de água localizadas de um mesmo lado do rio, as quais irão distribuir a água pela cidade. Como a água sai da estação com uma grande pressão, o encanamento que ligará a estação às caixas deve ser feito de um material resistente e com canos de grande diâmetro, ou seja, a construção desses canos é cara.

Temos um problema concreto em que os pontos A, B e P têm um significado. Minimizar a distância é essencial devido ao alto custo da obra. A estação deve ser construída em um lugar ideal, de tal forma que o preço total da obra seja o mínimo possível. Ainda assim, faltam dados ao problema que o professor pode abordar em sala de aula, apenas para que os alunos vejam que existem vários fatores que devem ser levados em conta. Mesmo dando um contexto ao problema, ele ainda é abstrato. Pode ser que o ponto ideal encontrado seja em um lugar que os engenheiros consideram que não possui solo adequado para sustentar a construção, ou que ele esteja em um nível inapropriado para a obra, ou que ali já esteja ocupado por uma outra construção etc. De qualquer modo, cumpre-se o papel de mostrar que a Matemática auxilia na resolução de um problema de utilidade pública.

Vamos apresentar uma solução. Considere A' o simétrico de A em relação a reta r. Façamos o segmento $\mathrm{A}'\mathrm{B}$. Afirmamos que o ponto P procurado é a interseção de r com $\mathrm{A}'\mathrm{B}$.

Seja C a interseção de r com AA'. Como $\mathrm{AC} = \mathrm{CA}'$, $\mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{P} = \mathrm{A}'\hat{\mathrm{C}}\mathrm{P}$ e CP é lado comum, os triângulos ACP e $\mathrm{A}'\mathrm{CP}$ são congruentes. Logo, $\mathrm{AP} = \mathrm{A}'\mathrm{P}$, ou seja, $\mathrm{A}'\mathrm{B} = \mathrm{A}'\mathrm{P} + \mathrm{PB} = \mathrm{AP} + \mathrm{PB}$.

Seja Q um ponto qualquer de r diferente de P, então temos o triângulo $\mathrm{A}'\mathrm{QB}$. De forma análoga ao que fizemos acima, temos por congruência de triângulos que $\mathrm{AQ} = \mathrm{A}'\mathrm{Q}$. Pela desigualdade triangular, segue que $\mathrm{A}'\mathrm{Q} + \mathrm{QB} > \mathrm{A}'\mathrm{B} = \mathrm{AP} + \mathrm{PB}$, ou seja, $\mathrm{AQ} + \mathrm{QB} > \mathrm{AP} + \mathrm{PB}$. Portanto, P é o ponto que minimiza a distância.

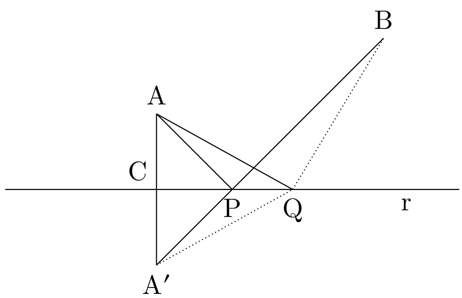

Figura 6: Minimização da distância.

5.3. Problema 3

Podemos considerar um problema interessante de maximização da soma de duas funções bastante estudadas no Ensino Médio, a saber: seno e cosseno. Como sabemos que ambas estão limitadas ao intervalo $[-1, 1]$, então é natural que a soma das duas funções seja limitada. Mas qual é o maior valor possível para $\sin(x) + \cos(x)$?

Intuitivamente alguns poderão afirmar que é 2, pois cada uma delas possui valor máximo igual a 1. Embora o raciocínio esteja correto, ele nos dá apenas um limitante superior para essa soma, mas seria 2 o supremo?

Para encontrar o valor máximo de uma soma é interessante retirar os valores negativos dessas funções, ou seja, restringiremos o domínio de modo que os valores sejam apenas positivos. Assim, para o cosseno tomamos $x \in]0, \frac{\pi}{2}] \bigcup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ e para o seno consideramos $x \in]0, \pi[$. Logo, os valores de x que tornam as funções ambas positivas estão no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Considerando a sequência de dois termos $(\sin(x), \cos(x))$, temos que a desigualdade (7) assegura que

$$\sqrt{\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{2}} \geq \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2}.$$

Como $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, segue que

$$\sin(x) + \cos(x) \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Logo, o supremo para essa soma é, na verdade, $\sqrt{2}$. Era mesmo de se esperar que 2 não fosse o supremo, pois é fácil ver que não existe $x_0 \in \mathbb{R}$ que faça simultaneamente $\sin(x_0) = \cos(x_0) = 1$.

5.4. Problema 4

Considere a circunferência de raio r inscrita no triângulo ABC, cujos lados medem a, b e c. Sejam T_a, T_b e T_c os pontos de tangência dos lados do triângulo com a circunferência, onde T_i é o ponto localizado no lado de medida i. Definindo $AT_b = AT_c = x, BT_c = BT_a = y$ e $CT_a = CT_b = z$ temos, $a = y + z, b = x + z$ e $c = x + y$. Queremos verificar a desigualdade

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}. \tag{13}$$

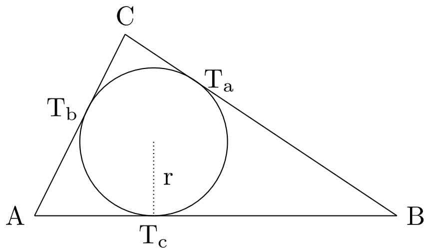

Figura 7: Aplicação da desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz.

Por (7), temos que

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{yz}}$$
$$\frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz} \Leftrightarrow \frac{1}{x+z} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{xz}}$$
$$\frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Assim, podemos reescrever a soma do lado esquerdo de (13) da seguinte forma

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right). \tag{14}$$

O termo do lado direito de (14) é equivalente a

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}}.$$

Considerando as sequências $\{\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\}$ e $\{1, 1, 1\}$, aplicando a desigualdade (4), obtemos

$$(\sqrt{x}\cdot 1+\sqrt{y}\cdot 1+\sqrt{z}\cdot 1)^2 \leq ((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2)\cdot(1^2+1^2+1^2). \tag{15}$$

Fazendo o cálculo, aplicando a raiz quadrada em ambos os lados de (15) e dividindo por $2\sqrt{xyz}$, ficamos com

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}} \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{x+y+z}}{2\sqrt{xyz}}.$$

Na página 56 de [11] encontramos uma aplicação da fórmula de Herão para área de um triângulo, de onde segue que

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}.$$

Então,

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{x+y+z}}{2\sqrt{xyz}} = \frac{\sqrt{3}}{2r}.$$

Portanto, temos o resultado (13).

Apesar de a fórmula da área de um triângulo ser uma das mais elementares da Geometria, poucas vezes é abordada a fórmula de Herão, que nos dá essa área independentemente de qualquer altura do triângulo. Nesse problema é fundamental conhecermos essa fórmula e associá-la ao raio da circunferência inscrita.

5.5. Problema 5

Vamos mostrar que se ABC é um triângulo acutângulo, então a soma das distâncias do ortocentro aos lados é menor ou igual do que o triplo do raio da circunferência inscrita nesse triângulo.

Com a notação usual de medida dos lados e sem perda de generalidade, suponhamos que $c \leq b \leq a$. Suponhamos também que H seja o ortocentro, r seja o raio da circunferência inscrita e que AA', BB' e CC' sejam as três alturas. Denotamos as seguintes medidas: $HA' = a'$, $HB' = b'$ e $HC' = c'$.

Como $b \leq a$, usamos o fato de que ao maior lado opõe-se o maior ângulo, para concluir que $\hat{B} \leq \hat{A}$. Então, analisando os triângulos retângulos $CC'B$ e $CC'A$ concluímos que $B'\hat{C}H \leq A'\hat{C}H$. Daí, observando que CH é hipotenusa comum aos triângulos retângulos CHA' e CHB', e que a função seno é crescente entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, concluímos que $b' \leq a'$.

De forma análoga, vemos que $c' \leq b'$. Logo, $c' \leq b' \leq a'$.

Se S é a área do triângulo ABC, então $aa' + bb' + cc' = 2S$. Sabemos também que $(a + b + c)r = 2S$.

Usando o desigualdade de Chebyshev (5) para as sequências não decrescentes (a, b, c) e (a', b', c'), temos que

$$\frac{1}{3}(a + b + c)(a' + b' + c') \leq aa' + bb' + cc' = 2S = (a + b + c)r. \qquad (16)$$

Dividindo os dois lados de (16) por $(a + b + c)$ e multiplicando-os por 3, segue que

$$a' + b' + c' \leq 3r.$$

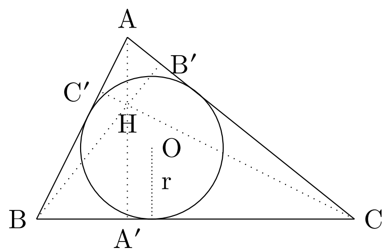

Figura 8: Aplicação da desigualdade de Chebyshev.

Tal como no problema 5.2, podemos pensar em uma aplicação para esse problema. Suponhamos que a circunferência seja uma praça e os lados do triângulo sejam ruas que a tangenciam. A empresa de saneamento básico deseja instalar uma caixa d'água no centro da praça e conectá-la às três ruas. Sabemos que serão necessários $3r$ (digamos, metros) de tubulação para realizar o projeto. Porém, o problema demonstra que existe um ponto mais adequado para instalação da estrutura. É necessário menos tubulação (ou, na pior das hipóteses, uma quantidade igual) para conectar a caixa às ruas se ela for instalada no ortocentro.

Referências

[1] Balestri, R. *Matemática: interação e tecnologia - volumes 1, 2 e 3*. Leya, São Paulo, 2ª edição 2016.

[2] Bartle, R. G. *The Elements of Integration*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1966.

[3] Brasil *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação, Brasília.

[4] Brasil *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação, Brasília.

[5] Dante, L. R. *Matemática: contexto e aplicações - voluemes 1, 2 e 3*. Ática, São Paulo, 3ª edição, 2016.

[6] Dolce, O. e Nicolau, J. *Fundamentos de matemática elementar: geometria plana - volume 9*. Atual, São Paulo, 7ª edição, 1993.

[7] Guidorizzi, H. L. *Um curso de Cálculo - volume 1*. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 5ª edição, 2001.

[8] Heath, T. L. *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press, 1897.

[9] Iezzi, G. *Matemática: ciência e aplicações - volumes 1, 2 e 3*. Saraiva, São Paulo, 9ª edição, 2016.

[10] Iezzi, G e Murakami, C. *Fundamentos de matemática elementar: conjuntos e funções - volume 1*. Atual, São Paulo, 7ª edição, 1993.

[11] Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G. e Delgado, R. V. *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*. Birkhäuser Verlag AG, 2009.

[12] Rezende, E. Q. F. e Queiroz, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. Editora Unicamp, 2ª edição, 2008.

[13] Souza, J. R. *Contato Matemática - volumes 1, 2 e 3*. FTD, São Paulo, 1ª edição, 2016.

Lucas Bastioni
SAMAE: Serviço Autônomo Municipal de Água e Esgoto de Mogi Guaçu
<lucas.bastioni@gmail.com>

Ricardo de Sá Teles
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Londrina
<ricardo.sa.teles@gmail.com>

Recebido: 25/04/2020
Publicado: 19/11/2021