PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.9, n.3, 2021
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo935

Sobre como Arquimedes obteve suas aproximações 223/71 e 22/7 para o número π: uma abordagem histórica

Márcio Soares Albertino   Humberto José Bortolossi

Resumo

Já é bem difundido no âmbito escolar o fato de Arquimedes ter obtido aproximações para o número π usando polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma dada circunferência. Contudo, o encaminhamento normalmente apresentado é anacrônico, isto é, com o uso de recursos que não estavam disponíveis na época de Arquimedes. Neste trabalho, apresentamos como Arquimedes obteve suas famosas aproximações racionais 223/71 e 22/7 para π seguindo os passos descritos originalmente em sua obra *A Medida do Círculo*. Mostramos também como obter uma aproximação melhor do que 223/71, ainda seguindo a técnica de Arquimedes, mas fazendo outras escolhas em etapas intermediárias do seu argumento original.

Palavras-chave: História da Matemática; o número pi; aproximações racionais; Arquimedes.

Abstract

It is already well-known in the school context that Archimedes obtained approximations for the number π using regular polygons inscribed and circumscribed to a given circle. However, the procedure normally presented is anachronic, that is, with the use of resources that were not available at the time of Archimedes. In this work, we present how Arquimedes obtained his famous rational approximations 223/71 and 22/7 for π following the steps originally described in his work "The Measure of The Circle". We also show how to get a better approximation than 223/71, still following Archimedes' technique, but making other choices at intermediate stages of his original argument.

Keywords: History of Mathematics; the number pi; rational approximations; Archimedes.

1. Introdução

Os livros de História da Matemática normalmente usados nos cursos de formação de professores costumam trazer a informação de que Arquimedes obteve aproximações para o número π usando polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma dada circunferência. Considere, por exemplo, as páginas 43 de [2], 142 de [6], 101 de [7] e 59 de [12]. Contudo, tais referências não fornecem os detalhes de como, exatamente, Arquimedes fez isso. Outros trabalhos, como [4], [9] e [10], fazem uso de técnicas que não estavam disponíveis na época de Arquimedes, como o cálculo das expressões

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

trigonométricas $\cos(360°/n)$ e $\operatorname{tg}(180°/n)$ em $n\sqrt{2-2\cos(360°/n)} < 2\pi < 2n\operatorname{tg}(180°/n)$, para n natural maior do que ou igual a 6.

Neste contexto, nosso principal objetivo aqui é apresentar o raciocínio empregado originalmente por Arquimedes em sua obra "A Medida do Círculo" para obter as seguintes estimativas para o número π:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Além disso, mostramos como obter uma aproximação por baixo para π melhor do que 223/71, ainda seguindo a técnica de Arquimedes, mas fazendo outras escolhas em etapas intermediárias do seu argumento original. Antes de iniciarmos, destacamos algumas observações importantes.

- Nossa exposição segue os passos descritos por Arquimedes mas, para fins de melhor compreensão e conexão com o currículo escolar atual, tomamos a liberdade de usar notações e leituras modernas, como os Lemas 2 e 3, que podem ser interpretados em termos de cossecante e cotangente.
- É preciso ficar atento para a notação de número misto ao longo de todo o texto. Assim, por exemplo, $3\,\frac{10}{71}$ significa $3 + \frac{10}{71}$ e não $3 \cdot \frac{10}{71}$. Com números mistos, as desigualdades $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ são escritas como $3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$.
- No processo descrito por Arquimedes, ele obtém estimativas melhores do que $3\,\frac{10}{71}$ e $3\,\frac{1}{7}$:

  $$3\,\frac{10}{71} < 3\,\frac{1137}{8069} < \pi < 3\,\frac{1335}{9347} < 3\,\frac{1}{7}.$$

  Dessa maneira, a questão não parece ser apenas obter aproximações para π mas, sim, aproximações com frações com denominadores pequenos.
- Arquimedes não escreve todos os detalhes de cada cálculo. Em algumas situações ele explicita os primeiros casos e apenas enuncia os demais. Mesmo com o risco de tornar o texto repetitivo, optamos por incluir os vários detalhes omitidos para evidenciar o aspecto algorítmico da abordagem de Arquimedes.
- A ideia central de Arquimedes consiste de, a partir de um hexágono regular, circunscrever e inscrever polígonos regulares com 12, 24, 48 e 96 lados em uma circunferência unitária (isto é, de raio 1). O semiperímetro desses polígonos fornece, então, aproximações inferiores (para os polígonos inscritos) e superiores (para os polígonos circunscritos) para π.
- Logo de início, Arquimedes utiliza as seguintes aproximações racionais para $\sqrt{3}$, sem explicar como as obteve ([1]):

  ,

  $$1\,\frac{112}{153} = \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} = 1\,\frac{571}{780}.$$

  Existem, contudo, autores que levantam algumas conjecturas em como Arquimedes poderia ter conseguido essas aproximações de $\sqrt{3}$ ([3]).
- Usamos como fonte as traduções para o inglês feitas por [1], [5], [8] e [11] para a obra *A Medida do Círculo* de Arquimedes.

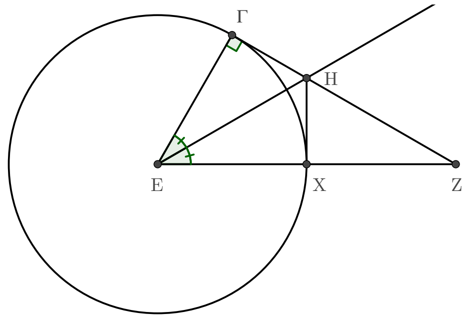
2. Três lemas de Arquimedes

Os três lemas a seguir são do trabalho original de Arquimedes. Contudo, ele apresenta uma demonstração apenas para os dois últimos.

Lema 1. Seja $Z\Gamma E$ um triângulo retângulo, com ângulo reto em Γ. Trace, a partir de E, a bissetriz de $ZE\Gamma$ que intercepta o lado $Z\Gamma$ em H. Então

$$\frac{ZH}{\Gamma H} = \frac{ZE}{\Gamma E}.$$

Demonstração. Construa a circunferência de centro em E passando por Γ. Como $Z\Gamma E$ é um triângulo retângulo, com ângulo reto em Γ, segue-se que $Z\Gamma$ é tangente à circunferência. Seja X o ponto de interseção da circunferência com EZ.



Pelo critério LAL, os triângulos $HE\Gamma$ e HEX são congruentes. Desse modo, o segmento XH é tangente à circunferência em X, pois o ângulo HXE é reto em X. Pelo critério AA, o triângulo ZXH é semelhante ao triângulo $Z\Gamma E$. Portanto, $\frac{ZE}{\Gamma E} = \frac{ZH}{HX}$. Como $HX = \Gamma H$, concluímos que $\frac{ZE}{\Gamma E} = \frac{ZH}{\Gamma H}$. □

Lema 2. Nas condições do Lema 1, vale que

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma H} = \frac{ZE + E\Gamma}{\Gamma Z}.$$

Demonstração. Pelo Lema 1, temos que

$$\frac{ZH}{\Gamma H} = \frac{ZE}{\Gamma E}.$$

Agora,

$$\frac{ZH}{\Gamma H} = \frac{ZE}{\Gamma E} \quad \Rightarrow \quad \frac{ZH + \Gamma H}{\Gamma H} = \frac{ZE + \Gamma E}{\Gamma E}.$$

Uma vez que $ZH + \Gamma H = ZH + H\Gamma = Z\Gamma = \Gamma Z$, podemos concluir que

$$\frac{\Gamma Z}{\Gamma H} = \frac{ZE + \Gamma E}{\Gamma E}$$

Multiplicando-se por ΓE e dividindo-se por ΓZ, obtemos o resultado

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma H} = \frac{ZE + E\Gamma}{\Gamma Z}.$$ □

Observação. Se x é o ângulo $ZE\Gamma$, então

$$\operatorname{cotg}(x/2) = \frac{\Gamma E}{\Gamma H} \quad \text{e} \quad \operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x) = \frac{ZE}{\Gamma Z} + \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{ZE + E\Gamma}{\Gamma Z},$$

de modo que este lema pode ler lido, usando-se notação moderna, como a identidade trigonométrica

$$\mathrm{cotg}(x/2) = \mathrm{cossec}(x) + \mathrm{cotg}(x). \tag{1}$$

Lema 3. Nas condições do Lema 1, vale que

$$\frac{(\mathrm{HE})^2}{(\Gamma\mathrm{H})^2} = \frac{(\Gamma\mathrm{E})^2 + (\Gamma\mathrm{H})^2}{(\Gamma\mathrm{H})^2}.$$

Demonstração.

HE é a hipotenusa do triângulo retângulo $\mathrm{HE}\Gamma$. Pelo Teorema de Pitágoras, $(\mathrm{HE})^2 = (\Gamma\mathrm{E})^2 + (\Gamma\mathrm{H})^2$ e, desse modo, $\frac{(\mathrm{HE})^2}{(\Gamma\mathrm{H})^2} = \frac{(\Gamma\mathrm{E})^2+(\Gamma\mathrm{H})^2}{(\Gamma\mathrm{H})^2}$. □

Observação. Se x é o ângulo $\mathrm{HE}\Gamma$, então

$$\mathrm{cossec}^2(x) = \left(\frac{\mathrm{HE}}{\Gamma\mathrm{H}}\right)^2 = \frac{(\mathrm{HE})^2}{(\Gamma\mathrm{H})^2} \quad \text{e} \quad \mathrm{cotg}^2(x) + 1 = \left(\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{H}}\right)^2 + 1 = \frac{(\Gamma\mathrm{E})^2 + (\Gamma\mathrm{H})^2}{(\Gamma\mathrm{H})^2},$$

de modo que esse lema pode ler lido, usando-se notação moderna, como a identidade trigonométrica

$$\mathrm{cossec}^2(x) = 1 + \mathrm{cotg}^2(x). \tag{2}$$

3. Argumento de Arquimedes para estabelecer que $\pi < \frac{22}{7}$

Considere um hexágono regular circunscrito a uma circunferência unitária de centro E. Seja Γ um ponto de tangência entre o hexágono regular e a circunferência. Seja Z uma das extremidades do lado do hexágono regular em que Γ é ponto médio. Observe que o triângulo $\mathrm{Z}\Gamma\mathrm{E}$ é retângulo. Construa, recursivamente, os pontos H, Θ, K e Λ no segmento $\Gamma\mathrm{Z}$ de modo que as semirretas EH, $\mathrm{E}\Theta$, EK e $\mathrm{E}\Lambda$ sejam bissetrizes, respectivamente, dos ângulos $\Gamma\mathrm{EZ}$, $\Gamma\mathrm{EH}$, $\Gamma\mathrm{E}\Theta$ e $\Gamma\mathrm{EK}$. Se H', Θ', K' e Λ' são, nesta ordem, os simétricos de H, Θ, K e Λ com relação a Γ, então HH', $\Theta\Theta'$, KK' e $\Lambda\Lambda'$ são lados de polígonos regulares com 12, 24, 48 e 96 lados, respectivamente, todos circunscritos à circunferência unitária de centro em E (conforme a Figura 1).

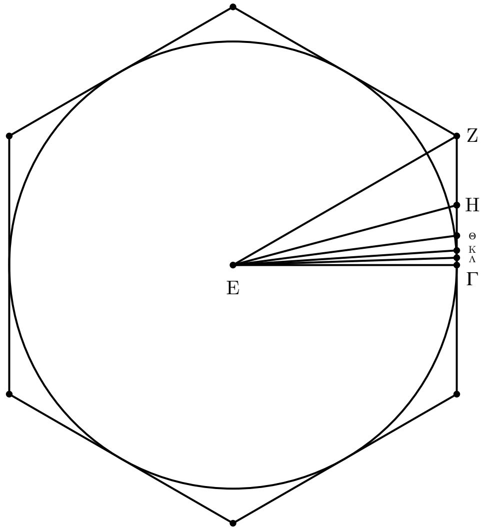


Figura 1: polígonos regulares circunscritos a uma circunferência.

Como o ângulo ΓEZ é igual a 30°, segue-se que

$$\operatorname{cotg}(\Gamma EZ) = \operatorname{cotg}(30^\circ) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Agora, como $\Gamma EH = \Gamma EZ/2$, pelo Lema 2, interpretado pela identidade trigonométrica (1), segue-se que

$$\operatorname{cotg}(\Gamma EH) = \operatorname{cotg}(\Gamma EZ) + \operatorname{cossec}(\Gamma EZ) \quad \Rightarrow \quad \frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} + \frac{EZ}{\Gamma Z} \quad \Rightarrow \quad \frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} + 2$$

e, consequentemente,

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} > \frac{265}{153} + 2 = \frac{571}{153} = 3\,\frac{112}{153}.$$

Por sua vez, $\Gamma E\Theta = \Gamma EH/2$. Assim, podemos empregar novamente a identidade (1) para obter

$$\operatorname{cotg}(\Gamma E\Theta) = \operatorname{cotg}(\Gamma EH) + \operatorname{cossec}(\Gamma EH) \quad \Rightarrow \quad \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H} + \frac{EH}{\Gamma H} \quad \Rightarrow \quad \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} > \frac{571}{153} + \frac{EH}{\Gamma H}.$$

Para estimar $\frac{EH}{\Gamma H}$, Arquimedes usa o Lema 3, aqui reescrito pela identidade (2):

$$\operatorname{cossec}^2(\Gamma EH) = 1 + \operatorname{cotg}^2(\Gamma EH) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{EH}{\Gamma H}\right)^2 = 1 + \left(\frac{E\Gamma}{\Gamma H}\right)^2 > 1 + \left(\frac{571}{153}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{EH}{\Gamma H}\right)^2 > \underbrace{\frac{153^2 + 571^2}{153^2}}_{\frac{349450}{23409}} \quad \Rightarrow \quad \frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591\,\frac{1}{8}}{153}.$$

A última implicação segue-se do fato de que $153^2 + 571^2 > (591\,\frac{1}{8})^2$, mas Arquimedes não justifica a escolha do “$\frac{1}{8}$”. Por exemplo, como $153^2 + 571^2 > (591\,\frac{1}{7})^2$, também é verdade que

$$\frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591\,\frac{1}{7}}{153}$$

e

$$\frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591\,\frac{1}{7}}{153} > \frac{591\,\frac{1}{8}}{153}.$$

Agora, uma vez que $\frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591\,\frac{1}{8}}{153}$, obtemos que

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} > \frac{571}{153} + \frac{EH}{\Gamma H} > \frac{571}{153} + \frac{591\,\frac{1}{8}}{153} = \frac{1162\,\frac{1}{8}}{153}.$$

Vamos agora repetir o processo para obter uma estimativa para $\frac{E\Gamma}{\Gamma K}$. Uma vez que $\Gamma EK = \Gamma E\Theta/2$, tem-se

$$\operatorname{cotg}(\Gamma EK) = \operatorname{cotg}(\Gamma E\Theta) + \operatorname{cossec}(\Gamma E\Theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{E\Gamma}{\Gamma K} = \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} + \frac{E\Theta}{\Gamma\Theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} > \frac{1162\,\frac{1}{8}}{153} + \frac{E\Theta}{\Gamma\Theta}.$$

Mas

$$\operatorname{cossec}^2(\Gamma E\Theta) = 1 + \operatorname{cotg}^2(\Gamma E\Theta) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{E\Theta}{\Gamma\Theta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta}\right)^2 > 1 + \left(\frac{1162\,\frac{1}{8}}{153}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{\mathrm{E\Theta}}{\Gamma\Theta}\right)^2 > \underbrace{\frac{153^2 + (1162\,\frac{1}{8})^2}{153^2}}_{\frac{1085585}{18496}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{E\Theta}}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\,\frac{1}{8}}{153}.$$

Arquimedes novamente não dá explicações para a escolha de "$\frac{1}{8}$". Outras frações poderiam ser usadas, como $\frac{1}{7}$:

$$\frac{\mathrm{E\Theta}}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\,\frac{1}{7}}{153} > \frac{1172\,\frac{1}{8}}{153}.$$

Uma vez que $\frac{\mathrm{E\Theta}}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\,\frac{1}{8}}{153}$, obtemos que

$$\frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma\mathrm{K}} > \frac{1162\,\frac{1}{8}}{153} + \frac{\mathrm{E\Theta}}{\Gamma\Theta} > \frac{1162\,\frac{1}{8}}{153} + \frac{1172\,\frac{1}{8}}{153} = \frac{2334\,\frac{1}{4}}{153}.$$

Repetindo o processo mais uma vez: dado que $\Gamma\mathrm{E}\Lambda = \Gamma\mathrm{EK}/2$, tem-se

$$\mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{E}\Lambda) = \mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{EK}) + \mathrm{cossec}(\Gamma\mathrm{EK}) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma\Lambda} = \frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma\mathrm{K}} + \frac{\mathrm{EK}}{\Gamma\mathrm{K}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma\mathrm{K}} > \frac{2334\,\frac{1}{4}}{153} + \frac{\mathrm{EK}}{\Gamma\mathrm{K}}.$$

Mas

$$\mathrm{cossec}^2(\Gamma\mathrm{EK}) = 1 + \mathrm{cotg}^2(\Gamma\mathrm{EK}) \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\mathrm{EK}}{\Gamma\mathrm{K}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma\mathrm{K}}\right)^2 > 1 + \left(\frac{2334\,\frac{1}{4}}{153}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{\mathrm{EK}}{\Gamma\mathrm{K}}\right)^2 > \underbrace{\frac{153^2 + (2334\,\frac{1}{4})^2}{153^2}}_{\frac{87554113}{374544}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{EK}}{\Gamma\mathrm{K}} > \frac{2339\,\frac{1}{4}}{153}.$$

Uma vez que $\frac{\mathrm{EK}}{\Gamma\mathrm{K}} > \frac{2339\,\frac{1}{4}}{153}$, obtemos que

$$\frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma\Lambda} > \frac{2334\,\frac{1}{4}}{153} + \frac{\mathrm{EK}}{\Gamma\mathrm{K}} > \frac{2334\,\frac{1}{4}}{153} + \frac{2339\,\frac{1}{4}}{153} = \frac{4673\,\frac{1}{2}}{153}.$$

Desta maneira, como $\mathrm{E}\Gamma$ tem medida 1, podemos escrever que

$$\Gamma\Lambda < \frac{153}{4673\,\frac{1}{2}}\,\mathrm{E}\Gamma = \underbrace{\frac{153}{4673\,\frac{1}{2}}}_{\frac{306}{9347}}.$$

Como $2\,\Gamma\Lambda$ é a medida do lado do polígono regular de 96 lados circunscrito à circunferência unitária de centro E, segue-se que

$$2\pi < 96\,(2\,\Gamma\Lambda) \quad\Rightarrow\quad \pi < 96\left(\frac{153}{4673\,\frac{1}{2}}\right) = \underbrace{\frac{14688}{4673\,\frac{1}{2}}}_{\frac{29376}{9347}} = 3 + \underbrace{\frac{667\,\frac{1}{2}}{4673\,\frac{1}{2}}}_{\frac{1335}{9347}} < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

4. Argumento de Arquimedes para estabelecer que $\frac{223}{71} < \pi$

Considere agora um hexágono regular inscrito em uma circunferência unitária. Seja $\Gamma\mathrm{B}$ um dos lados deste hexágono. Construa um diâmetro da circunferência com uma extremidade em Γ. Nomeie a outra extremidade de A (necessariamente um outro vértice do hexágono regular). Observe que o triângulo $\Gamma\mathrm{BA}$ é retângulo. Construa agora, na circunferência, de forma sucessiva, pontos H, Θ, K e Λ de modo que AH, $\mathrm{A}\Theta$, AK e $\mathrm{A}\Lambda$ sejam bissetrizes dos ângulos $\Gamma\mathrm{AB}$, $\Gamma\mathrm{AH}$, $\Gamma\mathrm{A}\Theta$ e $\Gamma\mathrm{AK}$, respectivamente. Como $\Gamma\mathrm{B}$ é lado do hexágono regular inscrito na circunferência, os segmentos $\Gamma\mathrm{H}$, $\Gamma\Theta$, $\Gamma\mathrm{K}$ e $\Gamma\Lambda$ são lados de polígonos regulares com 12, 24, 48 e 96 lados, respectivamente, todos inscritos na mesma circunferência (conforme Figura 2).

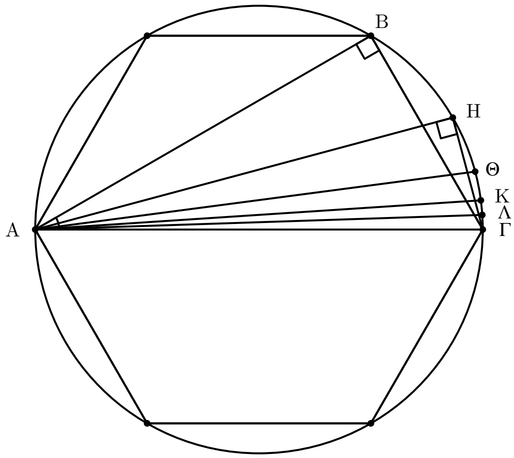


Figura 2: polígonos regulares inscritos em uma circunferência.

Como a medida do ângulo $\mathrm{A}\Gamma\mathrm{B}$ é igual a $60°$ e $\mathrm{AB}\Gamma$ é reto, segue-se que o ângulo $\Gamma\mathrm{AB}$ é igual a $30°$. Assim,

$$\mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{AB}) = \mathrm{cotg}(30°) = \sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B}\Gamma} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Agora, como $\Gamma\mathrm{AH} = \Gamma\mathrm{AB}/2$, pelo Lema 2, interpretado pela identidade trigonométrica (1), segue-se que

$$\mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{AH}) = \mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{AB}) + \mathrm{cossec}(\Gamma\mathrm{AB}) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{H}\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B}\Gamma} + \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{H}\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B}\Gamma} + 2$$

e, consequentemente,

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{H}\Gamma} < \frac{1351}{780} + 2 = \frac{2911}{780} = 3\,\frac{571}{780}.$$

Por sua vez, $\Gamma\mathrm{A}\Theta = \Gamma\mathrm{AH}/2$. Assim, podemos empregar novamente a identidade (1) para obter

$$\mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{A}\Theta) = \mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{AH}) + \mathrm{cossec}(\Gamma\mathrm{AH}) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{A}\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{H}\Gamma} + \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{H}\Gamma} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{A}\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{2911}{780} + \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{H}\Gamma}.$$

Para estimar $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{H}\Gamma}$, Arquimedes usa o Lema 3, aqui reescrito pela identidade (2):

$$\mathrm{cossec}^2(\Gamma\mathrm{AH}) = 1 + \mathrm{cotg}^2(\Gamma\mathrm{AH}) \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{H}\Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{H}\Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{2911}{780}\right)^2,$$

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

de modo que

$$\left(\frac{A\Gamma}{H\Gamma}\right)^2 < \underbrace{\frac{780^2+2911^2}{780^2}}_{\frac{9082321}{608400}} \quad\Rightarrow\quad \frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013\,\frac{3}{4}}{780}.$$

A última implicação segue-se do fato de que $780^2 + 2911^2 < (3013\,\frac{3}{4})^2$, mas Arquimedes não justifica a escolha do "$\frac{3}{4}$". Por exemplo, $780^2 + 2911^2 < (3013\,\frac{9}{13})^2$, também é verdade que

$$\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013\,\frac{9}{13}}{780}$$

e

$$\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013\,\frac{9}{13}}{780} < \frac{3013\,\frac{3}{4}}{780}.$$

Uma vez que $\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013\,\frac{3}{4}}{780}$, obtemos que

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{2911}{780} + \frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{2911}{780} + \frac{3013\,\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}.$$

Vamos agora repetir o processo para obter uma estimativa para $\frac{AK}{K\Gamma}$. Uma vez que $\Gamma AK = \Gamma A\Theta/2$, tem-se

$$\operatorname{cotg}(\Gamma AK) = \operatorname{cotg}(\Gamma A\Theta) + \operatorname{cossec}(\Gamma A\Theta) \quad\Rightarrow\quad \frac{AK}{K\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} \quad\Rightarrow\quad \frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1823}{240} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}.$$

Mas

$$\operatorname{cossec}^2(\Gamma A\Theta) = 1 + \operatorname{cotg}^2(\Gamma A\Theta) \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{1823}{240}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}\right)^2 < \underbrace{\frac{240^2+1823^2}{240^2}}_{\frac{3380929}{57600}} \quad\Rightarrow\quad \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1838\,\frac{9}{11}}{240}.$$

Arquimedes novamente não dá explicações para a escolha de "$\frac{9}{11}$". Outras frações poderiam ser usadas, por exemplo, $\frac{3}{4}$:

$$\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1838\,\frac{3}{4}}{240} < \frac{1838\,\frac{9}{11}}{240}.$$

Uma vez que $\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1838\,\frac{9}{11}}{240}$, obtemos que

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1823}{240} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1823}{240} + \frac{1838\,\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}.$$

Repetindo o processo mais vez: dado que $\Gamma A\Lambda = \Gamma AK/2$, tem-se

$$\operatorname{cotg}(\Gamma A\Lambda) = \operatorname{cotg}(\Gamma AK) + \operatorname{cossec}(\Gamma AK) \quad\Rightarrow\quad \frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} = \frac{AK}{K\Gamma} + \frac{A\Gamma}{K\Gamma} \quad\Rightarrow\quad \frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} < \frac{1007}{66} + \frac{A\Gamma}{K\Gamma}.$$

Mas

$$\operatorname{cossec}^2(\Gamma AK) = 1 + \operatorname{cotg}^2(\Gamma AK) \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{A\Gamma}{K\Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{AK}{K\Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{1007}{66}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{66^2 + 1007^2}{66^2}}_{\frac{1018405}{4356}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}} < \frac{1009\,\frac{1}{6}}{66}.$$

Consequentemente,

$$\frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}} < \frac{1007}{66} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}} < \frac{1007}{66} + \frac{1009\,\frac{1}{6}}{66} = \underbrace{\frac{2016\,\frac{1}{6}}{66}}_{\frac{12097}{396}}.$$

Por fim,

$$\operatorname{cossec}^2(\Gamma\mathrm{A}\Lambda) = 1 + \operatorname{cotg}^2(\Gamma\mathrm{A}\Lambda) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}}\right)^2 < 1 + \left(\frac{2016\,\frac{1}{6}}{66}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{66^2 + (2016\,\frac{1}{6})^2}{66^2}}_{\frac{146494225}{156816}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}} < \frac{2017\,\frac{1}{4}}{66} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{\Lambda\Gamma} > \frac{66\,\mathrm{A\Gamma}}{2017\,\frac{1}{4}} = \frac{132}{2017\,\frac{1}{4}},$$

pois $\mathrm{A\Gamma} = 2$. Lembrando que $\mathrm{\Lambda\Gamma}$ é lado do polígono regular de 96 lados inscrito na circunferência unitária, segue-se que $2\,\pi > 96\,\mathrm{\Lambda\Gamma}$ e, sendo assim,

$$2\,\pi > 96\,\mathrm{\Lambda\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \pi > \frac{96\,\mathrm{\Lambda\Gamma}}{2} = 48\left(\frac{132}{2017\,\frac{1}{4}}\right) = \frac{25344}{8069} = 3\,\frac{1137}{8069} > 3\,\frac{10}{71} = \frac{223}{71}.$$

5. Obtendo uma aproximação para π por baixo melhor do que $\frac{223}{71}$

Como vimos, em alguns cálculos intermediários, Arquimedes não justifica suas escolhas e, de fato, nem sempre elas são ótimas. Que estimativas para π seriam obtidas com outras escolhas? Vimos que, para o caso de polígonos regulares inscritos, Arquimedes estabelece inicialmente que

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} < \frac{1351}{780} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{H\Gamma}} < \frac{2911}{780}.$$

Para obter uma estimativa para $\frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{\Theta\Gamma}}$, ele usa (sem explicações) que

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{780^2 + 2911^2}{780^2}}_{\frac{9082321}{608400}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}} < \frac{3013\,\frac{3}{4}}{780}.$$

O número inteiro 3013 deve-se ao fato de que $3013^2 < 780^2 + 2911^2 < 3014^2$. Mas, por que $\frac{3}{4}$? Procurando por frações da forma expressão $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, com $1 \leq \mathrm{b} \leq 99$ e $1 \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b}$, que tornam a expressão

$$\left(3013\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)^2 - 780^2 - 2911^2$$

positiva e menor possível, encontramos, por inspeção, $\frac{51}{74}$. Assim,

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{780^2 + 2911^2}{780^2}}_{\frac{9082321}{608400}} \Rightarrow \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}} < \frac{3013\,\frac{51}{74}}{780},$$

de modo que

$$\frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{\Theta\Gamma}} < \frac{2911}{780} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}} < \frac{2911}{780} + \frac{3013\,\frac{51}{74}}{780} = \frac{438427}{57720} = \frac{1822\,\frac{472}{481}}{240}.$$

Uma vez que $\Gamma\mathrm{AK} = \Gamma\mathrm{A}\Theta/2$, tem-se

$$\mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{AK}) = \mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{A}\Theta) + \mathrm{cossec}(\Gamma\mathrm{A}\Theta) \Rightarrow \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{K\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{\Theta\Gamma}} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Theta\Gamma}} \Rightarrow \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{K\Gamma}} < \frac{1822\,\frac{472}{481}}{240} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Theta\Gamma}}.$$

Mas

$$\mathrm{cossec}^2(\Gamma\mathrm{A}\Theta) = 1 + \mathrm{cotg}^2(\Gamma\mathrm{A}\Theta) \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Theta\Gamma}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{\Theta\Gamma}}\right)^2 < 1 + \left(\frac{1822\,\frac{472}{481}}{240}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Theta\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{240^2 + (1822\,\frac{472}{481})^2}{240^2}}_{\frac{195549832729}{3331598400}}.$$

Posto que $1838^2 < 240^2 + (1822\,\frac{472}{481})^2 < 1839^2$, vamos procurar por fração $\frac{a}{b}$, com $1 \le b \le 99$ e $1 \le a \le b$ tal, que a expressão

$$\left(1838\,\frac{a}{b}\right)^2 - 240^2 - \left(1822\,\frac{472}{481}\right)^2$$

seja positiva e seja a menor possível. Por inspeção, encontramos $\frac{a}{b} = \frac{42}{59}$.Assim,

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Theta\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{240^2 + (1822\,\frac{472}{481})^2}{240^2}}_{\frac{195549832729}{3331598400}} \Rightarrow \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Theta\Gamma}} < \frac{1838\,\frac{42}{59}}{240},$$

de modo que

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{K\Gamma}} < \frac{1822\,\frac{472}{481}}{240} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Theta\Gamma}} < \frac{1822\,\frac{472}{481}}{240} + \frac{1838\,\frac{42}{59}}{240} = \frac{1006\,\frac{109613}{113516}}{66}.$$

Agora, dado que $\Gamma\mathrm{A}\Lambda = \Gamma\mathrm{AK}/2$, tem-se

$$\mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{A}\Lambda) = \mathrm{cotg}(\Gamma\mathrm{AK}) + \mathrm{cossec}(\Gamma\mathrm{AK}) \Rightarrow \frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{K\Gamma}} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}} \Rightarrow \frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}} < \frac{1006\,\frac{109613}{113516}}{66} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}}.$$

Mas

$$\mathrm{cossec}^2(\Gamma\mathrm{AK}) = 1 + \mathrm{cotg}^2(\Gamma\mathrm{AK}) \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{K\Gamma}}\right)^2 < 1 + \left(\frac{1006\,\frac{109613}{113516}}{66}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{66^2 + (1006\,\frac{109613}{113516})^2}{66^2}}_{\frac{108447558888577}{463891761216}}.$$

Posto que $1009^2 < 66^2 + (1006\,\frac{109613}{113516})^2 < 1010^2$, vamos procurar por fração $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, com $1 \leq \mathrm{b} \leq 99$ e $1 \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ tal que a expressão

$$\left(1009\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)^2 - 66^2 - \left(1006\,\frac{109613}{113516}\right)^2$$

seja positiva e seja a menor possível. Por inspeção, encontramos $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{12}{95}$. Assim,

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{66^2 + (1006\,\frac{109613}{113516})^2}{66^2}}_{\frac{108447558888577}{463891761216}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}} < \frac{1009\,\frac{12}{95}}{66},$$

de modo que

$$\frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}} < \frac{1006\,\frac{109613}{113516}}{66} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma}} < \frac{1006\,\frac{109613}{113516}}{66} + \frac{1009\,\frac{12}{95}}{66} = \underbrace{\frac{2016\,\frac{991407}{10784020}}{66}}_{\frac{7247191909}{237248440}}.$$

Por fim,

$$\operatorname{cossec}^2(\Gamma\mathrm{A}\Lambda) = 1 + \operatorname{cotg}^2(\Gamma\mathrm{A}\Lambda) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}}\right)^2 < 1 + \left(\frac{2016\,\frac{991407}{10784020}}{66}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{66^2 + (2016\,\frac{991407}{10784020})^2}{66^2}}_{\frac{5257807738815749788 1}{56286822282433600}}.$$

Posto que $2017^2 < 66^2 + (2016\,\frac{991407}{10784020})^2 < 2018^2$, vamos procurar por fração $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, com $1 \leq \mathrm{b} \leq 99$ e $1 \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ tal que a expressão

$$\left(2017\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)^2 - 66^2 - \left(2016\,\frac{991407}{10784020}\right)^2$$

seja positiva e seja a menor possível. Por inspeção, encontramos $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{16}{93}$. Assim,

$$\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}}\right)^2 < \underbrace{\frac{66^2 + (2016\,\frac{991407}{10784020})^2}{66^2}}_{\frac{52578077388157497881}{56286822282433600}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}} < \frac{2017\,\frac{16}{93}}{66},$$

de modo que

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}} < \frac{2017\,\frac{16}{93}}{66} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{\Lambda\Gamma} > \frac{66\,\mathrm{A\Gamma}}{2017\,\frac{16}{93}} = \frac{132}{2017\,\frac{16}{93}},$$

pois $\Lambda\Gamma = 2$. Lembrando que $\Lambda\Gamma$ é lado do polígono regular de 96 lados inscrito na circunferência unitária, segue-se que $2\,\pi > 96\,\Lambda\Gamma$ e, sendo assim,

$$\pi > \frac{96\,\Lambda\Gamma}{2} = 48\left(\frac{132}{2017\,\frac{16}{93}}\right) = \frac{589248}{187597} = 3\,\frac{26457}{187597}.$$

Vamos agora procurar por fração $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ com $1 \leq \mathrm{b} \leq 99$ e $1 \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ tal que a expressão

$$\frac{26457}{187597} - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

seja positiva e a menor possível. Por inspeção, a resposta é $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{11}{78}$. Como

$$\frac{223}{71} < \frac{245}{78} < \pi,$$

segue-se que a fração $\frac{245}{78} = 3\,\frac{11}{78}$ é uma estimativa melhor e de denominador com a mesma ordem grandeza da estimativa indicada originalmente por Arquimedes, sendo obtida por meio de sua própria técnica.

E para o caso da estimativa obtida por meio de polígonos regulares circunscritos? Fazendo outras escolhas ótimas nas etapas intermediárias, obteríamos uma aproximação racional por cima para π e com denominador não superior a 99 melhor do que $\frac{22}{7}$? A resposta é não. De fato, entre todas as frações do tipo $3\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ com $1 \leq \mathrm{b} \leq 99$, $1 \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ e $\pi < 3\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, por inspeção, é a fração $3\,\frac{1}{7}$ que está mais próxima de π.

6. Considerações finais

No processo descrito por Arquimedes, observamos que escolhas ótimas em cada etapa intermediária podem não implicar uma aproximação melhor no final do processo. O leitor encontrará um exemplo desse fenômeno, se proceder com as contas para aproximações obtidas por polígonos circunscritos.

Enquanto na seção anterior obtivemos uma aproximação por baixo para π melhor do que a de Arquimedes, existe uma fração ainda melhor: $\frac{311}{99} = 3\,\frac{14}{99}$. De fato, entre todas as frações do tipo $3\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ com $1 \leq \mathrm{b} \leq 99$, $1 \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ e $3\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} < \pi$, é $3\,\frac{14}{99}$ que está mais próxima de π.

Arquimedes considerou polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados. Que aproximações seriam obtidas caso o polígono regular de 192 lados fosse usado? E o polígono regular de 384 lados? Para o caso de polígonos regulares circunscritos, vimos que entre todas as frações do tipo $3\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ com $1 \leq \mathrm{b} \leq 99$, $1 \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ e $\pi < 3\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, por inspeção, é a fração $3\,\frac{1}{7}$ que está mais próxima de π. Para o caso de polígonos regulares inscritos, o leitor poderá verificar que, seguindo o método proposto por Arquimedes, o polígono regular inscrito de 192 lados fornece a aproximação $\frac{289}{92} = 3\,\frac{13}{92} < \pi$ e o polígono regular inscrito de 382 lados, por sua vez, gera a aproximação $\frac{311}{99} = 3\,\frac{14}{99} < \pi$, que é a melhor possível entre as frações de denominador entre 1 e 99.

Observe que o uso das identidades trigonométricas nas deduções feitas anteriormente dá-se apenas por conveniência. De fato, elas podem ser removidas sem prejuízo algum, e cada passo pode ser iniciado com a versão original em termos de razões. Assim, o anacronismo das identidades trigonométricas em nosso texto é em forma e não em conteúdo. Também são anacronismos em forma de emprego de frações com numerador maior do que o denominador (as assim deominadas "frações impróprias") e da adoção da notação "/" e não ":" para indicar razões (por exemplo, $\frac{3013\,\frac{51}{74}}{780}$ no lugar de $3013\,\frac{51}{74} : 780$).

Em termos de representações decimais, observe que $\pi = 3{,}14159265\ldots$, $\frac{22}{7} = 3\,\frac{1}{7} = 3{,}14285714\ldots$, $\frac{223}{71} = 3\,\frac{10}{71} = 3{,}14084507\ldots$, $\frac{245}{78} = 3\,\frac{11}{78} = 3{,}14102564\ldots$ e $\frac{311}{99} = 3\,\frac{14}{99} = 3{,}14141414\ldots$.

Os cálculos simbólicos e a pesquisa por inspeção das frações foram realizados com a Janela CAS do GeoGebra e planilhas eletrônicas.

Como trabalho futuro, pretendemos investigar como outras aproximações para $\sqrt{3}$ usadas no início do processo afetam as aproximações obtidas para π seguindo o método proposto por Arquimedes.

Agradecimentos

Agradecemos a Andreza da Costa Gonçalves, Thatianne da Silva Souza, Carlos Tomei e Lhaylla dos Santos Crissaff pela leitura e pelas várias sugestões dadas para aprimorar o texto.

Referências

[1] Berggren, L., Borwein, J., Borwein, P. *Pi: A Source Book*. Third Edition. Springer-Verlag, 2004.

[2] Boyer, C. B. *História da Matemática*. Edgar Blücher, Editora da Univesidade de São Paulo, 1974.

[3] Davies, E. B. *Archimedes' Calculations of Square Roots*. arXiv, 2011. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1101.0492.pdf>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.

[4] Dias, M. M. *De Trabalhos de Arquimedes: Estudos e Aplicações*. Dissertação de Mestrado, Profmat, Universidade Estadual de Londrina, 2016.

[5] Dijksterhuis, E. J. *Archimedes*. Princeton University Press, 1987.

[6] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*. Editora Unicamp, 2011.

[7] Katz, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. Third Edition, Pearson Education, Inc., 2009.

[8] Lit, L. W. C. E. *"The Measurement of The Circle" of Archimedes in Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī's Revision of The 'Middle Books' (Taḥrīr al-Mutawassiṭāt)*. Bachelor Thesis, Utrecht University, 2008. Disponivel em: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.145.9039&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.

[9] Marangon, M. D. *O Número π*. Dissertação de Mestrado Profmat, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2017.

[10] Ribeiro, M. *O Número π na Educação*. Dissertação de Mestrado Profmat, Universidade Federal do ABC, 2014.

[11] Rosenberg, B. *Archimedes and Pi*. University of Miami, 2003. Disponível em: <https://www.cs.miami.edu/home/burt/manuscripts/archimedes/meas_circle.pdf>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.

[12] Stillwell, J. *Mathematics and Its History*. Third Edition, Springer-Verlag, 2010.

Márcio Soares Albertino
Escola Estadual Embaixador Raul Fernandes
<marcio.44180446@prof.educa.rj.gov.br>

Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
<humbertobortolossi@id.uff.br>

Recebido: 16/01/2021
Publicado: 13/07/2021