PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.1, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo109

Um outro olhar sobre as indeterminações

Diego Mathias Desanti   Roy Wilhelm Probst

Resumo

Este trabalho mostra um estudo sobre as sete indeterminações matemáticas. A proposta é fornecer explicações mais completas e adequadas ao entendimento de estudantes, professores e entusiastas da Matemática sobre indeterminações. O texto contém uma lista de exemplos sobre todas as possibilidades de indeterminações através de limites cujo resultado pode ser igual: a zero, infinito, constante não nula, ou limite não existente. Além disso, traz uma análise contextualizada dessas expressões através da História da Matemática, contribuindo para a resolução de problemas como o hotel de Hilbert e os paradoxos de Zenão.

Palavras-chave: Indeterminações; Cálculo Diferencial e Integral; História da Matemática.

Abstract

This work is about the seven mathematical indeterminate forms. This study aims to provide a more general explanation of indeterminate forms to Math students, teachers, and enthusiasts. For each indeterminate form, it shows examples of limits that are equal to zero, infinite, a non-zero constant, or does not exist. It also discusses how the notion of infinity solved paradoxes in Mathematics and Philosophy throughout the history, such as Hilbert Hotel and Zeno paradoxes.

Keywords: Indeterminate forms; Differential and Integral Calculus; History of Mathematics.

1. Introdução

No dicionário da língua portuguesa a palavra indeterminação significa aquilo que não está determinado, que é indefinido. No âmbito da Matemática, Lima afirma que essas fórmulas são "desprovidas de significado matemático" [13]. Na Álgebra Linear, por exemplo, a palavra indeterminação aparece para descrever um sistema de equações lineares que possui infinitas soluções [9]. No Cálculo, são sete formas de indeterminações que descrevem limites, das quais, duas envolvem um quociente, $0/0$ e ∞/∞, uma multiplicação, $0 \cdot \infty$, uma subtração, $\infty - \infty$ e três potências, 0^0, ∞^0 e 1^∞.

Ao analisar qualquer uma dessas expressões, o questionamento sobre seu valor ou o resultado produzido é inevitável. Será que todo número elevado ao expoente zero é igual a um, portanto deve-se ter $0^0 = 1$? Ou então, $\infty - \infty = 0$, pois essa é uma subtração de um mesmo elemento? Ou ainda, $1^\infty = 1$ pois nesse caso, há infinitos fatores iguais a um e um multiplicado por ele mesmo só pode ser um? Parece natural deduzir que essas afirmações são verdadeiras devido às definições, propriedades e teoremas da aritmética que o estudante tem contato ao longo dos anos escolares.

Porém, devem-se analisar essas expressões com maior cuidado. Por exemplo, o significado de 1^∞ é um limite em que

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

com $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Assim, deve-se ter clareza que escrever 1^∞ é um abuso de notação. Ao esquecer disso, se poderia escrever

$$1^\infty = \underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1\cdot \ldots}_{\text{infinitos fatores}},$$

porém, pela propriedade da divisão de potências de mesma base, tem-se

$$\frac{1^\infty}{1^\infty} = 1^{\infty-\infty}.$$

Mas o que significa $\infty - \infty$? Como resolver essa subtração? Lima afirma, "deve-se observar enfaticamente que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais" [12], assim, não é possível concluir que $\infty-\infty$ é igual, necessariamente, a zero, como se imagina. Vale ressaltar que expressões que envolvem o símbolo infinito não aparecem com muita frequência nos níveis básicos de ensino, o que leva o estudante a cometer o erro de operar esses símbolos como se fossem números, o que não deve ocorrer.

Ao iniciar o estudo do conjunto dos números naturais e suas operações no Ensino Fundamental, a divisão de dois números naturais é definida como o inverso da multiplicação, isto é, $k = x/y$ significa que $k \cdot y = x$, desde que $y \neq 0$. Nessa fase do ensino é bastante comum que os livros didáticos evitem expressões da forma $1/0$, tendo em vista a dificuldade em explicar a impossibilidade dessa divisão. O fato é que expressões desse tipo causam curiosidades, e sua compreensão não é imediata. Dessa forma, o professor deve ter condições de explicar para o estudante a restrição $y \neq 0$, sem fazer menção ao limite

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y}.$$

Para isso, uma alternativa seria expor algebricamente esse resultado através da definição de divisão, mostrando-lhe que não existe um número natural k tal que x seja divisível por zero, ou seja, essa divisão é impossível. Outra alternativa seria mostrar aritmeticamente a divisão de um por valores cada vez mais próximos de zero, tanto positivos, quanto negativos, para que o estudante perceba intuitivamente que ao tomar como divisor valores positivos próximos de zero, o quociente torna-se cada vez maior, eventualmente superando qualquer número positivo fixado [11]. Verificar os quocientes da divisão de um por valores pequenos próximos de zero é análogo a tomar valores no domínio da função f dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

e observar suas imagens. Kaplan afirma, "não podemos dizer que $f(x)$ se aproxima de nenhum número real", isto é, sua imagem cresce ou decresce indefinidamente [11].

No campo de estudo dos números racionais, representado pelo conjunto

$$\mathbb{Q} = \{x = a/b;\, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{N}^*\},$$

onde $\mathbb{N}^*$ e $\mathbb{Z}$ são o conjunto dos números naturais não nulos e o conjunto dos números inteiros, respectivamente, tem-se a restrição de o denominador b ser um número natural diferente de zero, enquanto que o número a pode ser qualquer inteiro, inclusive o próprio zero. Afinal de contas, o que acontece se ambos os números fossem iguais a zero? O que significa matematicamente a expressão $0/0$? Por que essa expressão é dita indeterminada? Essas são questões que causam uma certa curiosidade no estudante, ao mesmo tempo que causa desconforto ao professor em fornecer-lhe explicações de forma adequada e didática.

O aparecimento de indeterminações matemáticas no Ensino Fundamental não se resume à expressão $0/0$. No estudo da potenciação de números racionais a compreensão da expressão $a^0 = 1$, para $a \neq 0$, não é imediata.

Dado um número real positivo a, para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a a. Para $n = 1$, como não há produto de um só fator, põe-se $a^1 = a$, por definição [15]. A definição indutiva de a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$ tem-se $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, pois em ambos os membros dessa igualdade tem-se o produto de $m+n$ fatores iguais a a. Assim, a igualdade $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, logo $a^0 \cdot a = a$ implica a única definição possível: $a^0 = 1$ [15]. Dessa forma, o estudante é convencido de que a^0 é realmente igual a um. Mas, então, qual é o valor de 0^0? É totalmente natural o estudante concluir então que 0^0 também é igual a um. No entanto, ele deve ter o entendimento das definições e propriedades da potenciação, onde a potência a^n só é válida para valores de a diferentes de zero.

Já no Ensino Superior, no estudo de limites e derivadas de uma função real, a indeterminação $0/0$ geralmente aparece pela primeira vez no cálculo de limite de funções racionais, por exemplo,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2},$$

que graficamente representa uma reta com um ponto de descontinuidade de coordenadas $(2, 4)$. Como $x = 2$ é um zero das funções envolvidas no numerador e no denominador da expressão sob o limite, tem-se a indeterminação da forma $0/0$. Nesse caso, a estratégia de resolução consiste em fatorar o numerador, tal que $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ e efetuar a simplificação com o denominador, isto é,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4.$$

Ainda sobre a indeterminação $0/0$, ela aparece também na definição de derivada cuja interpretação geométrica é o coeficiente angular m da reta tangente a uma curva $y = f(x)$ no ponto $P = (a, f(a))$, dada pela expressão

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Os limites fundamentais trigonométrico e exponencial geram as indeterminações $0/0$ e 1^∞, respectivamente. O limite trigonométrico fundamental é dado por

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

cujo limite é igual a um. Note que efetuar a substituição direta de $x = 0$ gera a indeterminação $0/0$, pois $\operatorname{sen} 0 = 0$. Já o limite exponencial fundamental é dado por

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

e produz a indeterminação 1^∞. No entanto, é possível provar que o limite exponencial fundamental é igual ao número irracional e, cujo valor aproximado é 2,718281828459... [6].

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar as sete formas indeterminadas e entender essas expressões sob outra perspectiva. Além disso, o objetivo é mostrar aos estudantes e professores de Matemática que as indeterminações surgem em diversas situações e em diferentes contextos da Matemática, bem como propiciar ao leitor explicações mais adequadas sobre o significado de cada forma indeterminada, ampliando a compreensão desse tema em outros contextos dentro da Matemática além do que é apresentado em tópicos do Cálculo Diferencial e Integral na aplicação da Regra de L'Hôpital.

2. As sete indeterminações

As sete indeterminações do Cálculo são $0/0$, 0^0, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 e 1^∞. Na Tabela 1 são apresentados exemplos elementares de limites que geram as sete formas indeterminadas cujos resultados podem: **(a)** ser igual a zero, **(b)** ser igual a ∞, **(c)** ser igual a $k \in \mathbb{R}$ $(k \neq 0)$ ou **(d)** não existir.

Tipo	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**
$0/0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\|x\|}{x}$
0^0	$\lim\limits_{x\to 0^+} 0^x$	$\lim\limits_{x\to -\infty} (2^{-x^2})^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to -\infty} (2^x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to 0^-} (2^{1/x})^{x \operatorname{sen}(1/x)}$
∞/∞	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2}{x}$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{x}$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x(2+\operatorname{sen} x)}{x}$
$0 \cdot \infty$	$\lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \frac{1}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to \infty} x^2 \cdot \frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
$\infty - \infty$	$\lim\limits_{x\to \infty} (x - x)$	$\lim\limits_{x\to \infty} (x^2 - x)$	$\lim\limits_{x\to \infty} [(x-1) - x]$	$\lim\limits_{x\to \infty} [(x + \operatorname{sen} x) - x]$
∞^0	$\lim\limits_{x\to \infty} (2^{x^2})^{-1/x}$	$\lim\limits_{x\to \infty} (x^x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to \infty} (2^x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to 0^+} (2^{1/x})^{x \operatorname{sen}(1/x)}$
1^∞	$\lim\limits_{x\to -\infty} (2^{1/x})^{x^2}$	$\lim\limits_{x\to \infty} (2^{1/x})^{x^2}$	$\lim\limits_{x\to \infty} (2^{1/x})^{x}$	$\lim\limits_{x\to \infty} \left(2^{\operatorname{sen}(x)/x}\right)^x$

Tabela 1: Exemplos das sete formas indeterminadas.

Ao observar todas as formas indeterminadas, parece faltar uma combinação de símbolos, a forma 0^∞. Essa expressão não faz parte desse rol, isto é, 0^∞ não é indeterminado [19] . Para mostrar que tal expressão não é uma indeterminação, considere $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ onde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

Como a função exponencial e logarítmica são inversas uma da outra, tem-se

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = 0, \tag{1}$$

pois o expoente tende a $-\infty$. Note que a função exponencial é contínua, permitindo que seu cálculo ocorra após a aplicação do limite no expoente.

2.1. Zero dividido por zero

Poder-se-ia pensar que $0/0 = 1$ tendo em vista que $1/1 = 1$, $2/2 = 1$, $3/3 = 1$, e assim por diante. Isto é, todo número real dividido por ele mesmo é igual a 1. No entanto, essa afirmação não é totalmente verdadeira. Devem-se observar as restrições que envolvem essa definição [8].

Definição 1. Dados os números $x, y \in \mathbb{R}$, diz-se que x é divisível por y se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $x = y \cdot k$.

Afirmar que um número x dividido por $y \neq 0$ é igual a um número k é análogo a afirmar que k multiplicado por y é igual a x, isto é, $x/y = k$ implica que $k \cdot y = x$.

Analisando as possibilidades de substituição de valores para x e y na definição, observe que ao tomar $x = 0$ e $y = 1$ tem-se que para $0/1$ deve existir um k tal que $0 = k \cdot y$. Como $y \neq 0$ a única possibilidade para k é que ele seja nulo. Logo, $0/y = 0$ para todo y diferente de zero.

Tomando $x = 1$ e $y = 0$ tem-se $1/0$. O resultado dessa divisão não é igual a zero. Para verificar, basta observar a definição de divisão. A pergunta a ser feita é: existe um número k tal que $1 = 0 \cdot k$? De fato, não existe, e a constatação é trivial. Não há nenhum valor que multiplicado por 0 resulte em 1, pois qualquer que seja o valor k quando multiplicado por 0 sempre resultará em 0 e jamais em 1. Portanto, a divisão $1/0$ é indefinida, mais genericamente, $x/0$ é indefinida para todo x não nulo.

Ao analisar, por exemplo, as divisões de 1 por números próximos de zero, percebe-se que o quociente tende a valores cada vez maiores à medida que o divisor se aproxima cada vez mais de zero, ou seja,

$$\frac{1}{0,1} = 10; \quad \frac{1}{0,01} = 100; \quad \frac{1}{0,001} = 1000$$

e assim por diante. Nesse caso, diz-se que esses quocientes tendem ao infinito. Analogamente, ao tomar como divisor valores negativos próximos de zero, os quocientes tendem a valores grandes em módulo; assim, tem-se que esses quocientes tendem ao infinito negativo.

Portanto, pode-se afirmar que $1/0 = \pm\infty$? A resposta é não. O símbolo ∞ não é um número, tampouco significa que o limite existe [19], pois $1/x$ pode ser tão grande quanto queira, ou seja, fornece uma noção do comportamento da divisão de um número x não nulo por números de valor absoluto pequeno. A ideia por trás dessa análise é o conceito de limites que pode ser apresentado aos níveis básicos de ensino sem a carga da notação de Cálculo em que o estudante não está habituado. Assim, conclui-se novamente que a divisão $1/0$ é indefinida. A forma matemática de expressar essas ideias é escrever

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Observe o seguinte exemplo em que "efetuar a divisão por zero inadvertidamente conduz a absurdos" [7]. Suponha dois números reais m e n tal que $m = n$.

$$
\begin{array}{rcll}
m & = & n & \text{multiplicando ambos os membros por } n \\
mn & = & n^2 & \text{subtraindo } m^2 \text{ da equação} \\
mn - m^2 & = & n^2 - m^2 & \\
m(n-m) & = & (n+m)(n-m) & \text{dividindo ambos os membros por } (n-m) \\
m & = & n + m & \text{como } mn \text{ por hipótese segue que} \\
m & = & m + m & \\
m & = & 2m & \text{dividindo a equação por } m \\
1 & = & 2 & \text{o que é um absurdo.}
\end{array}
$$

Esse processo chegou a um resultado absurdo devido ao passo em que foi efetuada a divisão de ambos os membros da igualdade por $(m - n)$, que é uma diferença nula, pois $m = n$ por hipótese. Prosseguindo com as possíveis substituições de valores para x e y, segue a análise da definição da divisão em que $x = y = 0$, tem-se $0/0$. Novamente, deve-se provar a existência de um número k tal que $0 = k \cdot 0$. Nesse caso, k pode assumir qualquer valor visto que todo k é tal que $0 \cdot k = 0$, ou seja, o número k não está determinado, pois ele assume infinitas possibilidades. Observe, por exemplo,

$$\frac{k}{1} = k; \ \frac{0,k}{0,1} = k; \ \frac{0,0k}{0,01} = k; \ \frac{0,00k}{0,001} = k,$$

para qualquer $k = 1, 2, \ldots, 9$, e assim por diante. Analogamente se ambos os termos, numerador e denominador, forem negativos.

De fato, os resultados das divisões entre números iguais é um independente da grandeza do número envolvido; no entanto, Lima afirma que "$0/0$ é uma indeterminação, pois a expressão x/y, para valores muito pequenos de x e de y não assume necessariamente valores próximos de um" [13]. Ainda, "se nos derem de antemão um número arbitrário c, podemos escolher números x, y tão pequenos quanto desejemos, de tal forma que $x/y = c$" [13].

Agora, observe as seguintes divisões: $\frac{0}{1} = 0$; $\frac{0}{0,1} = 0$; $\frac{0}{0,001} = 0$ e assim por diante. O resultado igual a zero é imediato da definição já mostrada no caso $0/y$ para $(y \neq 0)$, assim, quando o numerador é igual a zero e o denominador tende a valores extremamente pequenos, tão perto de zero quanto se queira, imagina-se que $0/0 = 0$.

Afinal, $0/0$ é igual a 1, igual a 0 ou igual a c (constante não nula diferente de 1)? Na impossibilidade de se determinar um valor único e inquestionável, a expressão $0/0$ é uma indeterminação matemática.

2.2. Zero elevado a zero

A potenciação de expoente natural é definida de forma indutiva como:

Definição 2. Sejam a um número real e n um número natural. A potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a \quad \forall n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Ao substituir valores para n obtêm-se:

$$\begin{aligned} a^1 &= a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 &= a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 &= a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a. \end{aligned}$$

De modo que, para $p \geq 2$, tem-se que a^p é um produto de p fatores iguais a a.

Há obras em que a expressão a^0 é apresentada como uma propriedade da potenciação e não como definição. Nesse sentido, a potenciação é definida da seguinte forma:

Definição 3. Sejam a um número real e n um número natural, $n \geq 2$ então a potência a^n é dada por

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}},$$

em que o expoente n indica o número de fatores iguais a a que estão sendo multiplicados.

A propriedade da potenciação que envolve a divisão de potências de mesma base é consequência imediata dessa definição, isto é,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Daí segue que para uma base $a \neq 0$ e $m = n$ tem-se

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0,$$

isto é, aplicada a propriedade da divisão de potências de mesma base, chega-se à expressão a^0, cujo valor não se pode definir de imediato. Porém, observando a expressão por outro lado, sabe-se que um número não nulo dividido por ele mesmo é igual a 1, ou seja,

$$\frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Portanto, conclui-se que $a^0 = 1$.

Note que ambas as definições não mencionam explicitamente que a base a deve ser diferente de zero. Caso fosse, haveria a possibilidade 0^0, que se poderia pensar ser igual a um. No entanto, Paiva afirma que "não há unanimidade entre os matemáticos quanto à adoção do valor 1 para a potência 0^0" [18].

Mas afinal, 0^0 tem valor? Lima afirma que "a resposta mais simples é: 0^0 é uma expressão sem significado matemático" [13]. Como explicar que uma expressão matemática não tem significado na Matemática? Parece contraditório, mas a explicação não é complicada. Lima completa dizendo que "uma resposta mais informativa seria: 0^0 é uma expressão indeterminada" [13].

Para melhorar a compreensão, suponha $a^n = b$, logo $b/b = b^0$ se $b \neq 0$. Portanto, se $b = 0$ − que ocorre se, e somente se, a base $a = 0$– tem-se $0^0 = 0/0$, que é uma indeterminação apresentada na seção anterior.

Por outro lado, observe as possíveis substituições de valores na expressão a^n. Se $a = 0$, então $0^n = 0$ para todo $n \neq 0$, logo se poderia supor que $0^0 = 0$; por outro lado, $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$, assim se poderia concluir que $0^0 = 1$. Logo o símbolo 0^0 não possui um valor que se imponha naturalmente, o que leva a considerá-la uma expressão indeterminada [13].

Em uma ideia intuitiva de limites, mantendo fixo o expoente igual a zero e fazendo a base tender a zero, chega-se à conclusão que essas potências são iguais a um, ou seja, $0,1^0 = 1$; $0,01^0 = 1$; $0,001^0 = 1$ e assim por diante. Por outro lado, mantendo a base fixa igual a zero e variando o expoente com valores que se aproximam de zero, tem-se que essas potências são iguais a zero, isto é, $0^1 = 0$; $0^{0,1} = 0$; $0^{0,01} = 0$; $0^{0,001} = 0$ e assim por diante. Por fim, variando a base e o expoente com valores de mesma grandeza tendendo a zero, conclui-se que essas potências tendem a um, pois, $0,1^{0,1} \approx 0,794328$; $0,01^{0,01} \approx 0,954992$; $0,001^{0,001} = 0,993116$ e assim por diante, de modo que $0,00...01^{0,00...01} \to 1$.

Note que $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} = e^{\frac{\ln x}{1/x}}$, logo

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} (-x)} = e^0 = 1,$$

utilizando a regra de L'Hôpital na terceira igualdade. Nesse exemplo a base e o expoente são iguais, e ambos tendem a zero.

2.3. O infinito

O símbolo ∞ foi introduzido pela primeira vez pelo matemático britânico John Wallis (1616-1703) [5], no entanto sua ideia é bastante antiga e vem motivando não só os matemáticos mas também outras áreas do conhecimento ao longo da História. O cientista Galileu Galilei "deu exemplos de propriedades paradoxais dos números infinitos e admitiu que não os compreendia" [17].

Os primeiros a terem uma consciência sobre o infinito foram os gregos, em particular os pitagóricos, ao tentar exprimir através de um número a medida da diagonal do quadrado de lado unitário. Eles sabiam que $\sqrt{2}$ não podia ser expresso por meio de uma fração, o que implica que esse número não é racional e é composto por infinitas casas decimais com dízima periódica inexistente. Segundo Eves, "a descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos" [5].

A ideia de infinito também está presente na constante π. O cálculo de uma aproximação de número irracional $3,1415...$ deu-se de forma científica por Arquimedes [5] ao tentar determinar o comprimento de uma circunferência, construindo dois polígonos regulares – um inscrito e outro circunscrito a uma circunferência – e fazendo com que o número de lados aumentasse, e assim aproximar o perímetro desses polígonos ao comprimento da circunferência. Utilizando polígonos regulares de 96 lados, Arquimedes mostrou que $233/71 < \pi < 22/7$ (ou seja, $3,1408 < \pi < 3,1429$). No entanto, Arquimedes não admitia um número infinito de parcelas; naquela época "os gregos sempre evitavam lidar com o infinito, pois esse conceito lhes trazia dificuldades que eles nunca souberam resolver" [1]. Esse método de determinação do número π, chamado de método clássico de cálculo de π, foi publicado por Arquimedes em um tratado chamado "A medida de um círculo" [5]. Em notação atual, essa ideia pode ser expressa como

$$\lim_{n\to\infty} I_n \leq \text{comprimento do círculo} \leq \lim_{n\to\infty} C_n,$$

em que I_n e C_n são os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito, respectivamente, e n é o número de lados desses polígonos.

Segundo Eves, “o método de exaustão pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão” [5]. Os paradoxos da dicotomia e da corrida de Aquiles contra a tartaruga argumentam que o movimento é impossível, sob a hipótese de subdivisibilidade infinita do espaço e do tempo [3]. Segundo Morris “embora certos filósofos mais antigos tenham falado de uma infinidade de mundos, o primeiro a examinar o conceito de infinito em detalhe foi o filósofo grego Zenão” [17].

Ao longo do tempo diversas mentes brilhantes trataram do infinito em seus estudos, como o engenheiro Simon Stevin (1548-1620), com a determinação dos centros de gravidade de figuras planas através do método de exaustão para um número infinito de termos; Johannes Kepler (1531-1630) que, considerava somas infinitas; Bonaventura Cavalieri (1598-1647), que considerava uma reta composta por infinitos pontos bem como seu *método dos indivisíveis*, o qual diz que “um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção, e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido” [5]. Assim, uma porção plana é considerada como infinitas cordas paralelas e um sólido é formado por infinitas seções planas e paralelas.

Outros importantes matemáticos trataram do infinito como Bernhard Bolzano (1781-1848), Richard Dedekind (1831-1916) e George Cantor (1845-1918). Bolzano mostrou muitas propriedades importantes dos conjuntos infinitos em um trabalho chamado “Paradoxos do Infinito” [5]. Nesse trabalho pioneiro publicado postumamente em 1859, Bolzano “abordou várias questões de natureza filosófica e matemática acerca dos conjuntos infinitos” [1]. Coube a Dedekind definir efetivamente conjuntos infinitos, e a Cantor demonstrar a enumerabilidade dos números racionais e não enumerabilidade dos reais. Um maior aprofundamento do estudo filosófico e matemático sobre o infinito foge do escopo deste trabalho.

2.4. Infinito dividido por infinito

A expressão ∞/∞ está no rol das indeterminações matemáticas. Essa expressão não pode ser vista como uma divisão de dois números iguais, o que resultaria em um. A indeterminação ∞/∞ ocorre quando, dadas duas funções f e g tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, tem-se o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty},$$

que pode ser transformado na indeterminação $0/0$ ao reescrever o limite como $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

O símbolo $\pm\infty$ é utilizado para indicar a existência de uma assíntota vertical ou horizontal da curva de uma dada função. Segundo Thomas, “Se a distância entre o gráfico de uma função e uma reta fixa aproxima-se de zero à medida que a curva se afasta da origem, dizemos que a curva aproxima-se, assintoticamente, da reta e que a reta é uma assíntota do gráfico” [21].

No caso de limites infinitos, denotado por $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, significa que à medida que x se aproxima de um número real a, a função supera qualquer número no seu conjunto imagem, isto é, f cresce ou decresce indefinidamente de modo que a curva que representa f aproxima-se tanto quanto queira de uma reta vertical $x = a$. A tal reta é dado o nome de assíntota vertical.

Definição 4. A reta $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(a) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

(b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

(c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

(d) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Um exemplo clássico é a função tangente definida como $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Para valores de x iguais a $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, a tangente não está definida, pois nesses pontos tem-se $\cos x = 0$. Logo, o gráfico da função tangente, mostrado na Figura 1, possui infinitas assíntotas verticais passando por $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ em que k é um número inteiro.

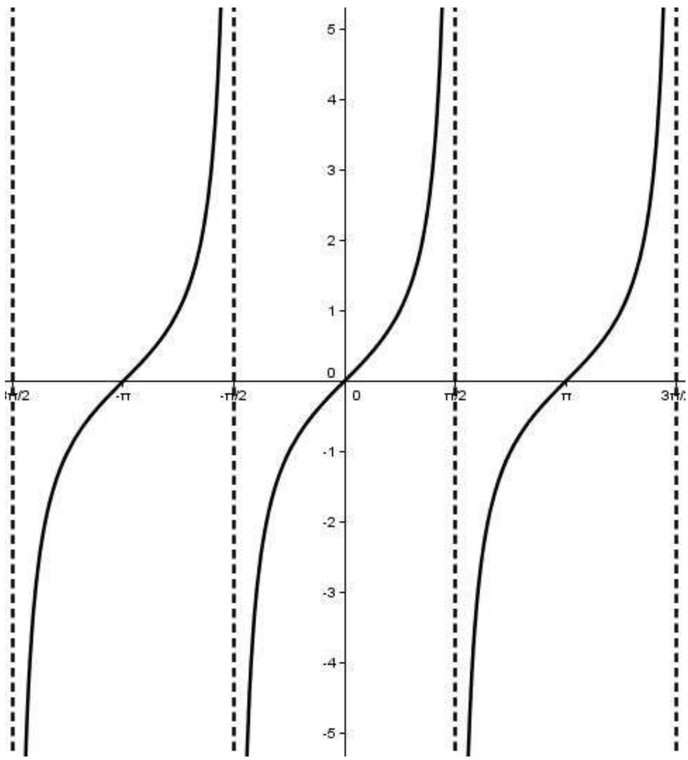

Figura 1: Exemplo de assíntota vertical: gráfico de $f(x) = \tan x$.

Definição 5. A reta $y = c$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $y = f(x)$ se uma das seguintes afirmações ocorrer:

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$.

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$.

Para exemplificar esse caso, considere a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$, que gera a indeterminação ∞/∞ quando $x \to \infty$. Esse é um caso em que a Regra de L'Hôpital não funciona, pois, ao derivar sucessivas vezes o numerador e o denominador, a indeterminação não é eliminada. Para tal, usam-se artifícios algébricos e conclui-se que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3} = \dfrac{1}{2}$. Logo, pela definição tem-se que a reta $y = \dfrac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f, conforme a Figura 2.

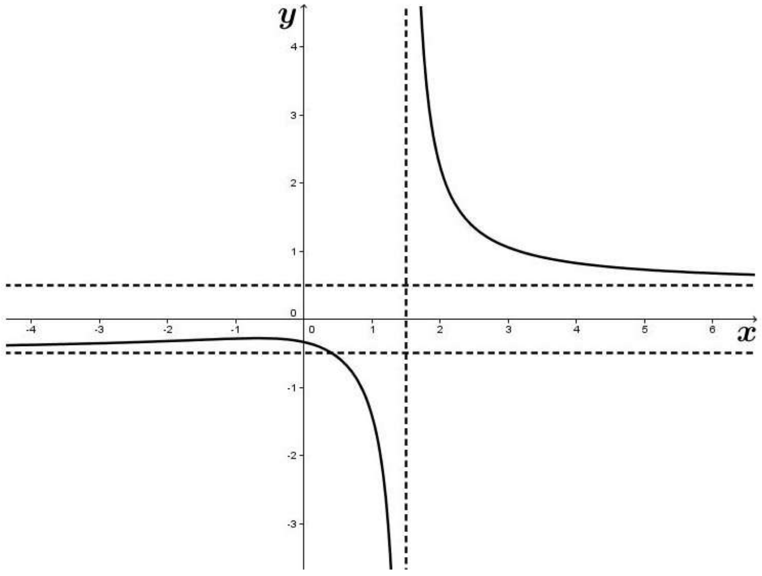

Figura 2: Exemplo de assíntota horizontal: gráfico de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$.

2.5. Zero vezes infinito

A discussão desta seção envolve o produto de dois importantes elementos da Matemática. Um elemento é o número zero, algarismo criado pelos hindus para indicar o vazio em seu sistema de numeração posicional. Eves afirma que "a ideia de valor posicional e um zero devem ter sido introduzidos na Índia algum tempo antes do ano 800 d.C." [5]. O outro é o símbolo ∞, já apresentado na seção anterior, que não é um número, e, portanto, as regras da aritmética não são aplicáveis. Afinal, o que pode surgir do produto desses dois símbolos? O que representa $0 \cdot \infty$?

Sabe-se do produto de números reais que para toda constante c multiplicado por zero o resultado é zero, isto é, $0 \cdot c = 0$. Por outro lado, dada uma função f tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, então para todo número $c > 0$ $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = \infty$, o que dá a ideia de que $c \cdot \infty = \infty$. Dessa forma, $0 \cdot \infty$ é igual a zero ou igual a ∞? A resposta depende do contexto em que tais elementos estão envolvidos. A partir dessa ideia, será aprensentado como contexto dessa indeterminação o paradoxo de Zenão da corrida de Aquiles contra a tartaruga e o paradoxo da dicotomia.

Zenão de Eleia foi um filósofo, professor e político que viveu no século V a.C. na cidade de Eleia da Magna Grécia, atual sul da Itália. Era discípulo de Parmênides da escola eleática e propôs alguns paradoxos relacionados ao movimento. Uma questão discutida na época entre as diferentes correntes do pensamento era a validade da admissão da subdivisibilidade indefinida de uma grandeza ou se a grandeza seria dividida em um número muito grande de partes indivisíveis, assim, "há evidências de que na Grécia antiga desenvolveram-se escolas de raciocínio matemático que abraçaram uma ou outra dessas premissas" [5].

Um dos paradoxos de Zenão diz respeito à corrida entre o veloz herói Aquiles e uma tartaruga, em que Aquiles dá à lenta tartaruga a vantagem de sair com uma certa distância à frente. O paradoxo diz que Aquiles jamais alcançaria a tartaruga, pois quando Aquiles alcançasse o ponto inicial em que a tartaruga se encontrava, ela já teria andado uma determinada distância. Quando Aquiles alcançasse o segundo ponto em que a tartaruga se encontrava, ela já teria andado mais uma certa distância e assim sucessivamente, admitindo a divisão da distância a ser percorrida em infinitas partes, o que tornaria a vitória de Aquiles impossível. A Figura 3 ilustra a corrida.

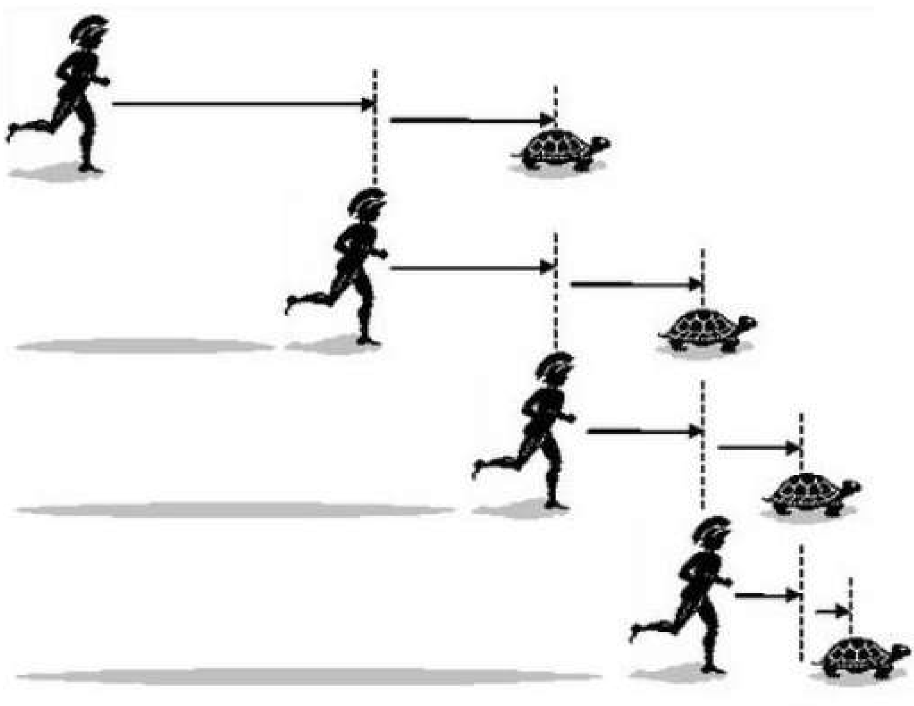

Figura 3: Corrida entre Aquiles e a tartaruga. Fonte: The Center of Math Blog [20].

Já o paradoxo da dicotomia diz que para percorrer uma determinada distância, por exemplo, um segmento de reta AB, antes de obter o deslocamento total do ponto A ao ponto B, deve-se alcançar antes o ponto médio desse segmento; no entanto, antes do ponto médio deve-se alcançar o ponto correspondente a um quarto da medida do segmento, e um oitavo, um dezesseis avos e assim sucessivamente, pois "se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente então o movimento é impossível" [5]. Ou seja, não poderia partindo de A chegar ao ponto B, pois "como o móvel tem de passar por uma infinidade de posições intermediárias num tempo finito, nunca se chegará ao ponto B, nem sequer começará a se mover" [2]

Esses paradoxos foram um desafio para a lógica, exercendo grande influência no pensamento filosófico. Os gregos do século V a.C. sentiram muita dificuldade em conhecer o movimento contínuo [2]. Os paradoxos desafiam ideias intuitivas "de que a soma de um número infinito de quantidades positivas é infinitamente grande, mesmo que cada uma delas seja extremamente pequena e que a soma de um número finito ou infinito de quantidade de dimensão zero seja zero" [5].

Suponha que a tartaruga inicie a corrida com uma vantagem de 100 metros em relação a Aquiles e que a velocidade de Aquiles seja 10 vezes maior do que a velocidade da tartaruga. Então, quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá percorrido 10 metros. Quando Aquiles vencer os 10 metros, a tartaruga terá andado 1 metro, depois $0,1$ metro, e assim por diante. Dessa forma, as distâncias percorridas por Aquiles vão decrescendo a uma razão geométrica de $1/10$, logo as distâncias percorridas pelo herói é a soma das frações

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \ ...$$

Apesar de essa soma possuir infinitas parcelas, ela converge para um número real. O resultado dessa soma dá-se por meio da soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica, resultando em uma distância total de $1000/9$ metros. Nessas condições, Aquiles alcançará e ultrapassará a lenta tartaruga nos primeiros $1000/9$ metros de percurso. A mesma ideia é usada no paradoxo da dicotomia. O fato é que movimento existe, isto é, Aquiles alcançará a tartaruga assim como é possível percorrer a distância de um segmento de reta AB unitário. A incoerência dos paradoxos de Zenão é que se considera apenas um intervalo de tempo fixo, ou seja, deve-se "efetuar uma série infinita de atos, algo que não pode ser feito em um período de tempo finito" [17], pois sabe-se que o tempo não é finito.

2.6. Infinito menos infinito

Essa indeterminação ocorre quando tem-se a subtração de duas funções quando ambas tendem ao infinito, gerando então a expressão $\infty - \infty$. Como ∞ não é um número real, não se pode empregar a aritmética de maneira usual e o resultado desse limite não é igual a zero necessariamente.

Em outro contexto, tem-se o famoso paradoxo do Hotel de Hilbert que envolve conjuntos infinitos. David Hilbert (1862-1943) foi um matemático alemão, e seu trabalho foi excepcionalmente abrangente e talentoso, como provam suas muitas e importantes contribuições a diversas áreas [5].

Para falar do paradoxo do Hotel de Hilbert é necessário entender alguns conceitos de conjuntos infinitos cuja teoria foi proposta por Georg Cantor (1845-1918). Segundo Lima, "deve-se a Cantor a descoberta fundamental de que há diversos tipos de infinito, bem como a análise desses tipos" [12]. Antes de Cantor, Richard Dedekind (1831-1916) definiu precisamente conjuntos infinitos [10]. Quanto ao número de elementos de um conjunto, ele pode ser finito, enumerável e não enumerável. Nesse sentido "a maior contribuição de Cantor nesta área não foi a adoção de linguagem e da notação dos conjuntos e sim suas descobertas sobre os números cardinais de conjuntos infinitos" [14].

Cantor em sua teoria descobriu “que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades ao provar que não pode haver uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e o conjunto $\mathbb{R}$”[14]. Assim, Cantor estabeleceu uma hierarquia entre conjuntos infinitos, mostrando que o conjunto dos números Reais e Complexos tem cardinalidade superior à dos conjuntos enumeráveis como os naturais, inteiros e racionais, por exemplo.

Definição 6. Seja I_n o conjunto dos números naturais de 1 até n, isto é,

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}/1 \leq p \leq n\}.$$

Um conjunto A não vazio é finito se existe uma função bijetora $f : I_n \to A$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e nesse caso o conjunto A possui exatamente n elementos.

Para a análise do paradoxo do Hotel de Hilbert interessa determinar a cardinalidade de um conjunto infinito. Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito. Como efetuar a contagem de conjunto infinito? Nesse caso tem-se a ideia de enumerabilidade: um conjunto A é chamado de enumerável se é finito ou quando existe uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, isto é, existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$.

O paradoxo do Hotel de Hilbert considera um hotel com infinitos quartos todos enumerados com números naturais, isto é, o primeiro quarto corresponde ao quarto de número 1, o segundo quarto corresponde ao quarto de número 2 e assim por diante. O hotel encontra-se lotado, ou seja, os infinitos quartos estão ocupados por infinitos hóspedes. Ao chegar um novo hóspede, mesmo com o hotel lotado, o gerente do hotel consegue acomodá-lo, afinal, o hotel possui infinitos quartos. Para tal, o gerente solicita que o hóspede do quarto número 1 mude-se para o quarto de número 2, o hóspede que se encontrava no quarto número 2 mude-se para o quarto de número 3, o hóspede que se encontrava no quarto de número n mude-se para o quarto de número $n + 1$ e assim por diante, tendo em vista que na numeração através do conjunto dos números naturais, sempre haverá um próximo termo. Com essa manobra, o quarto de número 1 está vago para o novo hóspede. A estratégia é a mesma se chegar um grupo de n hóspedes para se acomodar no hotel; o gerente terá que deslocar o hóspede do quarto de número 1 para o quarto de número $n + 1$, e assim por diante de modo que os n primeiros quartos fiquem vagos.

Ao chegar um ônibus com infinitos passageiros, para acomodar todos eles, o gerente solicita aos hóspedes do hotel que se mudem de quarto novamente de modo que cada um deve ir para o quarto cujo número é o dobro do quarto em que se encontra, isto é, o hóspede do quarto de número 1 muda-se para o quarto de número 2, o hóspede do quarto de número 2 muda-se para o quarto de número 4, o hóspede do quarto número n muda-se para o quarto de número $2n$ e assim por diante. Desse modo, todos os quartos cujos números são ímpares encontram-se disponíveis para os infinitos novos hóspedes.

O desafio do gerente aumenta ao ter que acomodar uma excursão de infinitos ônibus com infinitos passageiros em cada ônibus. Para tal, o gerente solicita que os hóspedes mudem-se de quarto novamente, de modo que o número do novo quarto é igual a 2 elevado ao número do quarto em que se encontrava, isto é, o hóspede que se encontra no quarto de número 1 muda-se para o quarto de número 2, pois $2^1 = 2$; o hóspede que se encontra no quarto de número 2 muda-se para o quarto de número 4, pois $2^2 = 4$; o hóspede que se encontra no quarto de número n muda-se para o quarto de número 2^n e assim por diante. Assim, para alocar os infinitos novos hóspedes dos infinitos ônibus da excursão, o gerente usa a seguinte estratégia: os passageiros do primeiro ônibus serão acomodados nos quartos cujo número é igual a 3 elevado ao número do seu assento do ônibus, ou seja, o passageiro do assento número 1 será acomodado no quarto de número 3, pois $3^1 = 3$; o passageiro do assento número 2 será acomodado no quarto de número 9, pois $3^2 = 9$; o passageiro do assento número n, será acomodado no quarto de número 3^n e assim por diante. Os próximos infinitos ônibus deverão seguir a sequência dos números primos; logo, os passageiros do segundo ônibus serão acomodados em quartos cujos números sejam o resultado de 5 elevado ao número do seu assento no ônibus, e assim por diante: para cada ônibus, uma potência cuja base é um número primo.

A questão que deve ser levantada é se com essa estratégia traçada pelo gerente ocorre o risco de dois hóspedes serem acomodados no mesmo quarto. Felizmente isso não acontece; por exemplo, os passageiros do primeiro ônibus estão acomodados em quartos de números da forma 3^n, e do segundo ônibus, estão acomodados em quartos de números da forma 5^m. Supondo que tenha um quarto com dois hóspedes, isso implica admitir que $3^n = 5^m$, portanto, como 3^n é divisível por 3, então tem-se 5^m também divisível por 3 o que implica que 5 é divisível por 3, o que é um absurdo, pois, sabe-se que 5 não é divisível por 3. Isso ocorre para quaisquer dois números primos distintos.

Com essa estratégia, ainda estão vagos os quartos cujos números são divisíveis por mais de um número primo, tendo em vista que o gerente acomodou os infinitos passageiros dos infinitos ônibus em quartos de número da forma p^n, onde p é um número primo correspondente ao ônibus e n corresponde ao número do assento do ônibus p. Dessa forma, por exemplo, o quarto de número 6 está vago, pois 6 é divisível por 2 e por 3, podendo, então, acomodar mais infinitos novos hóspedes, pois todos os múltiplos de 6 também estão vagos.

Ao fechar um determinado tempo de hospedagem, os passageiros do primeiro ônibus da excursão fazem o *check-out* e seguem seu destino. Para atualizar o número de quartos disponíveis para futuras hospedagens, o gerente percebe que se o hotel possui infinitos quartos e saíram infinitos hóspedes, então o hotel conta com $\infty - \infty$ quartos disponíveis ou ainda há $\infty - \infty$ hóspedes no hotel. Na impossibilidade de operar aritmeticamente com esses símbolos, pois "o símbolo ∞ não representa um número" [19], tampouco $-\infty$, o gerente conclui que $\infty - \infty = \infty$ nesse caso. Portanto, ainda restam infinitos quartos disponíveis e infinitos hóspedes no hotel. Por outro lado, se todos os hóspedes do hotel fizerem o *check-out*, então haverá $\infty - \infty = 0$ pessoas hospedadas no hotel.

2.7. Infinito elevado a zero

Em termos de limites, a forma indeterminada ∞^0 ocorre quando se tem duas funções f e g, tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, como, por exemplo,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{sen} x}$$

pois $1/x^2$ cresce indefinidamente quando $x \to 0$ e $\operatorname{sen} x$ tende a zero quando $x \to 0$, porém seu limite é igual a 1.

Da definição de potenciação de um número real, tem-se que o expoente indica quantas vezes a base deve ser multiplicada por ela mesma; assim, intuitivamente, ∞^0 pode ser entendido como um número extremamente grande, tão grande quanto queira, elevado ao expoente zero, ressaltando, porém, que ∞ não é um número. Desse princípio, todo número real não nulo elevado a zero é igual a um. Por outro lado, ao pensar que a base é infinita, então o resultado poderia ser infinito mesmo que o expoente esteja decrescendo. Ou poderia haver um equilíbrio entre os dois elementos e resultar em uma constante. Todas essas possibilidades dependem da escolha desses elementos.

Observe o que pode ocorrer efetuando substituições na base e no expoente. Primeiramente, tomando valores cada vez maiores para a base e mantendo fixo o expoente igual a zero: $1^0 = 1$, $100^0 = 1$, $1.000^0 = 1$ e assim por diante. Como já mostrado, para uma base não nula e expoente igual a zero, mesmo que a base esteja crescendo indefinidamente, a potência será igual a 1.

Por outro lado, suponha a função f_1 com a forma $f_1(x) = x^{0,1}$. A função f_1 pode ser reescrita como $f_1(x) = x^{1/10} = \sqrt[10]{x}$. Observe que ao tomar valores cada vez maiores para x tem-se: $f_1(1) = \sqrt[10]{1} = 1$, $f_1(10^{10}) = \sqrt[10]{10^{10}} = 10$, $f_1(10^{20}) = \sqrt[10]{10^{20}} = 10^2$, $f_1(10^{100}) = \sqrt[10]{10^{100}} = 10^{10}$ e assim por diante, de modo que $f_1(10^{10k}) = \sqrt[10]{10^{10k}} = 10^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Dessa forma, percebe-se que à medida que $x \to \infty$, então $f_1(x) \to \infty$. Seguindo o mesmo raciocínio para a função $f_2(\mathrm{x}) = x^{0,01}$, que pode ser reescrita como $f_2(x) = \sqrt[100]{x}$. Fazendo $x \to \infty$ tem-se que $f_2(x)$ também tende ao infinito. E isso pode ser generalizado para uma função $f_n(x) = x^{0,000\ldots001}$ que pode ser reescrita como $f_n(x) = \sqrt[100\ldots000]{x}$ (índice da raiz com n zeros). Fazendo $x \to \infty$ tem-se que $f_n(x)$ também tende ao infinito. À medida que o índice da raiz aumenta, a função tende ao infinito mais lentamente.

Para finalizar a análise intuitiva do comportamento dessas expressões, suponha que a base cresça na mesma proporção em que o expoente decresce, isto é, tomando valores da função $f(x) = x^{1/x}$ para $x \to \infty$. Nesse caso, tomando para x os valores $10, 100, 1.000, \ldots, 1.000...000$ e substituindo na função, tem-se as seguintes imagens, respectivamente, com aproximação de cinco casas decimais, $1,25892,\ 1,04712,\ 1,00693, \ldots, 1$. Analisando por esse lado, é sugerido que o resultado é igual a 1. De fato, isso decorre do limite

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1/x}{1}} = e^0 = 1,$$

em que a base x cresce indefinidamente e o expoente $1/x$ decresce indefinidamente.

2.8. Um elevado ao infinito

Poder-se-ia pensar que 1^∞ é igual a 1, tendo em vista que pela definição de potenciação o expoente indica o número de fatores iguais à base que devem ser multiplicados entre si, isto é, dado um número a real e n natural, a potência a^n é definida por

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}},$$

portanto para $a = 1$ e $n \to \infty$ tem-se

$$1^\infty = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \ldots}_{\text{infinitos fatores}}.$$

Como o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, então o produto de 1 por ele mesmo é igual a 1, independentemente do número de fatores. No entanto, pela propriedade da divisão de potências de mesma base, tem-se que $a^m/a^n = a^{m-n}$, isto é, mantém-se a base e subtraem-se os expoentes, logo $1^\infty/1^\infty$ implica $1^{\infty-\infty}$.

Por outro lado, reescrevendo a potência 1^∞ tem-se

$$\frac{1^\infty}{1^\infty} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \ldots}{1 \cdot 1 \cdot \ldots}$$

que transmite a ideia de que essa divisão é igual a 1, pois a divisão de um número não nulo por ele mesmo é sempre igual a 1. Pode-se concluir então que $1^\infty = 1$? Para responder tal questão deve-se analisar o significado de $1^{\infty-\infty}$. Se ∞ fosse um número qualquer, sujeito às leis da aritmética, essa expressão seria simplesmente igual a zero e $1^0 = 1$. No entanto, foi mostrado que $\infty - \infty$ é uma expressão indeterminada, o que implica que a expressão 1^∞ também é uma indeterminação [16].

No campo do Cálculo, a expressão 1^∞ tem estreita relação com o número e, chamado de número de Euler. O número de Euler é assim chamado em homenagem ao matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783). Euler foi um matemático que proporcionou grande contribuição em termos de volume de produção dentro das diversas áreas da Matemática e criou muitas das notações usadas na Matemática moderna; por exemplo, $f(x)$ para funções, $\sum$ para somatórios, i para a unidade imaginária no conjunto dos números complexos, a notação e para o número irracional $2,718281828459...$ que é a base dos logaritmos naturais, dentre outras notações e fórmulas como a fórmula "que relaciona cinco dos mais importantes números da Matemática, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, que para $x = \pi$ transforma-se em $e^{i\pi} + 1 = 0$" [5].

O logaritmo de base e, $\log_e x$ denotado por $\ln x$, chamado de logaritmo natural, é conhecido também por logaritmo neperiano em homenagem a John Napier, criador da primeira tábua de logaritmos, "entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois o logaritmo originalmente definido por Napier não coincide com o logaritmo natural"[14]. O número e já "era conhecido pelos matemáticos pelo menos meio século antes da invenção do Cálculo [...] uma explicação virtual é a de que o número e teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos" [16].

A forma indeterminada 1^∞ aparece no cálculo do limite exponencial fundamental

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

, cujo valor é igual ao número de Euler. Esse limite é importante, pois é uma ferramenta necessária para determinar a derivada de uma função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = a^x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$. Por definição, o limite em questão implica uma assíntota horizontal da função $f(x) = (1 + 1/x)^x$.

Intuitivamente, ao atribuir valores cada vez maiores para x na função $f(x) = (1 + 1/x)^x$ é possível observar uma tendência dos resultados. Analisando primeiramente a expressão $(1+1/x)$; tomando valores cada vez maiores para x, a fração $1/x$ torna-se cada vez menor, isto é, aproxima-se de zero. Consequentemente $1 + 1/x$ aproxima-se de 1. Como 1 elevado a qualquer expoente é igual a 1, então 1^x – tal que x seja um natural suficientemente grande – pode-se concluir que $(1+1/x)^x = 1$. Por outro lado, sabendo que $1+1/x$ é um número maior do que 1, se elevado a expoentes cada vez maiores, então $1 + 1/x$ tende ao infinito. Afinal, $(1 + 1/x)^x$ tende a 1 ou ao infinito?

O fato é que "em cada indeterminação existe uma luta entre duas quantidades, uma tendendo a tornar a expressão numericamente grande e a outra tendendo a torná-la numericamente pequena" [16], e a resposta para tal pergunta não é nem 1 e nem ∞. Ao efetuar substituições para x cada vez maiores, observam-se os seguintes resultados com aproximação de cinco casas decimais, conforme mostra a Tabela 2.

x	$1+1/x$	$(1+1/x)^x$
1	2	2
5	$1,2$	$2,48832$
10	$1,1$	$2,59374$
100	$1,01$	$2,70481$
1.000	$1,001$	$2,71692$
10.000	$1,0001$	$2,71815$
100.000	$1,00001$	$2,71827$
1.000.000	$1,000001$	$2,71828$
10.000.000	$1,0000001$	$2,71828$

Tabela 2: Substituição de valores em $f(x) = (1+1/x)^x$.

A tendência dos resultados sugere "que qualquer aumento posterior em x quase não afetará o resultado"[16], o que dá a intuição de que à medida que $x \to \infty$, essa função aproxima-se do número irracional $2,718281828459...$. A prova de que o limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

será aqui omitida, mas poderá ser encontrada na referência [4].

Uma interessante aplicação desse limite fundamental pode ser encontrada em Matemática Financeira utilizando juros compostos. Suponha investir um capital inicial c_0 reais em uma instituição financeira que paga uma taxa i ao ano, $(0 < i \leq 1)$ sobre o capital investido. Ao final de um ano, o juro a ser recebido é igual a $(c_0 \cdot i)$ reais, e o montante acumulado é igual a $M = c_0 + c_0 \cdot i = c_0 \cdot (1+i)$. Reaplicando esse saldo por mais um ano, tem-se um montante de $M = c_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = c_0 \cdot (1+i)^2$ e assim por diante, de modo que se aplicar em t anos terá um montante de $M = c_0 \cdot (1+i)^t$. Considere agora que em vez de efetuar o resgate ou reaplicar o montante ao final do período ao qual a taxa i está submetida, o investidor deseje resgatar o montante acumulado na metade do tempo, isto é, seis meses, logo o juro a ser contabilizado é igual à metade do que ele receberia ao final de um ano, isto é, o montante para seis meses é igual a $c_0 \cdot (1+i/2)$ reais. Reaplicando esse valor por mais seis meses, o montante acumulado é de $c_0 \cdot (1+i/2)^2$ que é maior do que $c_0 \cdot (1+i)$ pela desigualdade de Bernoulli ($(1+x)^n \geq 1+nx$ sempre que $x > -1$ e $n \in \mathbb{R}$ com $n \geq 1$) [14]. Caso o investidor deseje resgatar mensalmente e reaplicar o montante, ao final de um ano, será acumulado $c_0 \cdot (1+i/12)^{12}$ reais. Procedendo dessa forma, imagina-se que quanto mais vezes efetuar a divisão do tempo e reaplicar o montante, maior será o capital acumulado, pois

$$\left(1+\frac{i}{n}\right)^n < \left(1+\frac{i}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Fazendo $n \to \infty$ tem-se

$$c_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n,$$

porém a sequência cujo termo é dado por $(1+i/n)^n$ é limitada. Para determinar esse limite faz-se a troca de variável, isto é, $i/n = 1/k \Rightarrow n = i \cdot k$, e quando $n \to \infty$ então $k \to \infty$. Substituindo no limite tem-se

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{ki} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{\mathrm{i}} = e^i.$$

Portanto, o montante total não ultrapassará de $(c_0 \cdot e^i)$ reais.

Exemplificando com números, suponha que se deseja investir R\$ 1000,00 na poupança cujo rendimento é de 8,3% ao ano ou $i = 8,3/100 = 0,083$ ao ano. Portanto, ao final de um ano o montante é de $1000(1 + 0,083) = 1083,00$ Reais. Efetuando o resgate do dinheiro em 6 meses, o montante acumulado é de

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{0,083}{2}\right) = 1000 \cdot (1 + 0,0415) = 1000 \cdot 1,0415 = 1041,50 \text{ Reais.}$$

Reaplicando esse montante por mais um semestre tem-se

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{0,083}{2}\right)^2 = 1084,72 \text{ Reais.}$$

Se resgatar e reaplicar mensalmente o dinheiro, o investidor terá ao final de um ano um montante de

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{0,083}{12}\right)^{12} \approx 1000 \cdot 1,08623 = 1086,23 \text{ Reais.}$$

Seguindo esse raciocínio, ao dividir o período por n intervalos de resgate e reinvestimento tem-se

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{0,083}{n}\right)^n.$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ tem-se o limite

$$1000 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0,083}{n}\right)^n.$$

Para resolver esse limite, basta efetuar a substituição da variável n. Segue que

$$\frac{0,083}{n} = \frac{1}{k} \Longleftrightarrow n = 0,083k.$$

Logo, se $n \longrightarrow \infty$, tem-se $k \longrightarrow \infty$. Portanto, o montante M acumulado no período n é:

$$\begin{aligned} M &= 1000 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0,083}{n}\right)^n &&= 1000 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{0,083k} \\ &= 1000 \cdot \left[\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{0,083} &&= 1000 \cdot e^{0,083} \\ &\approx 1000 \cdot 2,71828182^{0,083} &&\approx 1086,54 \text{ Reais,} \end{aligned}$$

tomando o número de Euler com aproximação de 8 casas decimais. Dessa forma, conclui-se que o montante acumulado não ultrapassará o limite de R\$ 1086,54.

3. Conclusão

A percepção da inexistência de um material compacto que tratasse das sete formas indeterminadas de forma contextualizada foi o que motivou a escolha do tema desenvolvido como trabalho de dissertação do Profmat [4].

As indeterminações não são expressões que ocorrem apenas no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral. Algumas delas aparecem no Ensino Básico, quando há a necessidade de mostrar a inexistência de uma divisão por zero e, consequentemente, o significado de $0/0$. Ao tratar de potenciação e suas propriedades, a estratégia não é diferente. O estudante comumente questiona o resultado de um número real não nulo elevado ao expoente zero, o que implica a indagação sobre 0^0 e até mesmo o significado de 1^∞. Expressões que envolvem ∞, por exemplo, não são objetos de fácil compreensão, principalmente no Ensino Fundamental e Médio em que o currículo não contempla com muita ênfase tal elemento.

Assim, procurou-se nesse trabalhou desenvolver de forma contextualizada o significado das sete formas indeterminadas com o objetivo de prestar apoio aos estudantes, professores e entusiastas da Matemática na obtenção de explicações mais adequadas para essas expressões.

Sendo assim, ficou evidenciado que é totalmente possível trabalhar as indeterminações, fornecendo explicações mais simples sobre cada uma das sete formas indeterminadas com a utilização de uma carga menor da teoria de limites e da aplicação da Regra de L'Hôpital. Dessa forma, procurou-se apresentar o tema através de diferentes contextos que abordam outras interessantes áreas da Matemática, tornando assim a aprendizagem do tema mais abrangente.

Referências

[1] Ávila, G. *Várias Faces da Matemática: Tópicos para Licenciatura e Leitura Geral*. Blucher, São Paulo, 2010.

[2] Ávila, G. *Cálculo das Funções de uma Variável*. LTC, Rio de Janeiro, 2012.

[3] Boyer, C. B. e Merzbach, C. *História da Matemática*. Blucher, São Paulo, 2012.

[4] Desanti, D. M. *Indeterminações*. Dissertação de Mestrado, UTFPR/Curitiba, 2017.

[5] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*. Unicamp, Campinas, 2004.

[6] Flemming, D. M. e Gonçalves, M. B. *Cálculo A*. Pearson, Florianópolis, 2006.

[7] Granville, W. A. e Longley, W. R. *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*. Editora Científica, Rio de Janeiro, 1961.

[8] Hefez, A. *Aritmética*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

[9] Iezzi, G. e Hazzan, S. *Fundamento de Matemática Elementar: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. Atual, São Paulo, 1977.

[10] Iezzi, G. e Murakami, C. *Fundamentos de Matemática Elementar 1: conjuntos, funções*. Atual, São Paulo, 2004.

[11] Kaplan, W. e Lewis, D. L. *Cálculo e Álgebra Linear*. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1977.

[12] Lima, E. L. *Curso de Análise*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2008.

[13] Lima, E. L. *Meu Professor de Matemática*. SBM, Rio de Janeiro, 2011.

[14] Lima, E. L. *Números e Funções Reais*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[15] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. *A Matemática no Ensino Médio*. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[16] Maor, E. *e: a história de um número*. Record, Rio de Janeiro, 2008.

[17] Morris, R. *Uma Breve História do Infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico*. Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 1998.

[18] Paiva, M. *Matemática aula*. Moderna, São Paulo, 2005.

[19] Stewart, J. *Cálculo*. Cengage Learning, São Paulo, 2016.

[20] The Center of Math Blog. *4 Mathematical Paradoxes (and How to Solve Them!)*. Disponível em: <www.centerofmathematics.blogspot.com/2019/08/4-mathematical-paradoxes-and-how-to.html>. Acesso em: 31 de maio de 2021.

[21] Thomas, G. B. *Cálculo*. Pearson-Addison Wesley, São Paulo, 2002.

Diego Mathias Desanti
Instituto Federal do Paraná
Campus Quedas do Iguaçu
<diego.desanti@ifpr.edu.br>

Roy Wilhelm Probst
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba
<rwprobst@utfpr.edu.br>

Recebido: 28/06/2021
Publicado: 25/03/2022