


As seções cônicas, as primeiras leis de Kepler e o parabolóide de revolução

Gilsânia Abreu Lopes Ribeiro 

Jean Fernandes Barros 

Resumo

Neste trabalho, nós usamos uma construção menos conhecida, através de parabolóides de revolução inscritos em um cone de revolução, para demonstrar que as seções cônicas, nesse contexto, são as elipses e as hipérboles. E então, como uma aplicação à Mecânica Celeste, descrevemos as órbitas keplerianas elípticas e hiperbólicas.

Palavras-chave: Seções cônicas; Leis de Kepler; Parabolóide de revolução.

Abstract

In this work, we use a less known construction, through of paraboloids of revolution inscribed into the cone of revolution, to demonstrate that the conic sections are ellipses and hyperbolas. And then, as an application to Celestial Mechanics, we completely describe the elliptical and hyperbolic Keplerian orbits.

Keywords: Conic sections; Kepler's laws; Paraboloid of revolution.

1. Introdução

Nosso interesse é demonstrar que as interseções de um cone de revolução com planos que tangenciam parabolóides de revolução inscritos no cone são as elipses e as hipérboles. E como uma aplicação à Mecânica Celeste, mais precisamente, à geometria do *Problema de Kepler*, descrevemos as órbitas keplerianas elípticas e hiperbólicas. Bem, a restrição aos planos que não são paralelos às geratrizes mostra que não consideramos o caso da parábola; veja a seção 4.

Para efeito de informação, observamos que existe uma outra demonstração bastante criativa do resultado mencionado, usando as *esferas de Dandelin*, a qual inclui o caso da parábola, veja [1, 5]. Aqui, desejamos obter o mesmo resultado, usando uma construção menos conhecida, para os casos da elipse e da hipérbole.

O ponto de partida são duas descrições das elipses e das hipérboles vistas nas definições 1 e 2. Em seguida, utilizando as formas reduzidas das equações das elipses, das parábolas e das hipérboles, daremos uma primeira demonstração de que essas são seções cônicas.

Na seção 3, descrevemos a relação entre as primeiras *leis de Kepler* e as seções cônicas. De fato, compreenderemos melhor a geometria do *problema de Kepler*, quando observarmos a trajetória do

movimento sobre o cone de revolução, cujo eixo de simetria é o z-eixo, que tem como equação $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Na última seção, a partir de propriedades importantes do parabolóide de revolução, demonstramos que as seções cônicas são as elipses e as hipérbolles. Em seguida, descrevemos as órbitas keplerianas elípticas e hiperbólicas.

2. As Seções Cônicas

As demonstrações que omitimos nesta seção podem ser vistas em [3].

Inicialmente, partimos da seguinte definição:

Definição 1. O lugar geométrico dos pontos no plano com razão de proporcionalidade fixa, denominada de *excentricidade*, e denotada por e , entre as distâncias a um dado ponto, denominado de *foco*, e a uma dada reta, denominada de *diretriz*, é uma curva quadrática denominada de *elipse*, se $0 < e < 1$, de *parábola*, se $e = 1$ e de *hipérbole*, se $e > 1$.

Observação 1. O caso em que $e = 0$ é o caso em que a elipse é um círculo. Neste caso, a diretriz localiza-se no infinito.

Equivalentemente, relativas à elipse e à hipérbole, nós temos as seguintes definições:

Definição 2. Sejam F_1 e F_2 dois pontos no plano euclidiano \mathbb{R}^2 e a um número real positivo. Sendo assim,

- Para $2a > |F_1F_2|$, a *elipse de focos* F_1 e F_2 e *semieixo maior* a é o conjunto

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF_1| + |PF_2| = 2a\}.$$

- Para $2a < |F_1F_2|$, a *hipérbole de focos* F_1 e F_2 e *semieixo real* a é o conjunto

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF_2| - |PF_1| = \pm 2a\}.$$

A Definição 1, relativa à parábola, diz-nos que: *dados* d *uma reta em* \mathbb{R}^2 *e um ponto* $F \in \mathbb{R}^2$ *que não pertence à reta* d . *A parábola de foco* F *e diretriz* d *é o conjunto*

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF| = \text{dist}(P, d)\}.$$

Decorre, através de um cálculo direto, os seguintes resultados:

1. A elipse de focos A e $O = (0, 0)$, e semieixo maior a é dada pela equação

$$r + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle = a(1 - e^2),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico de \mathbb{R}^2 , \vec{r} é o vetor raio com origem no foco O , cuja norma é r , e $\vec{e} := -\frac{1}{2a} \overrightarrow{OA}$ é o *vetor excentricidade*, cuja norma é a excentricidade e , como na Definição 1.

2. A parábola com foco O e diretriz d , a uma distância ρ de O , é dada pela equação

$$r + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle = \rho,$$

onde \vec{e} é o vetor unitário ortogonal a d , direcionado de O a d .

3. A hipérbole com os focos O e A e semieixo real a é dada pela equação

$$r \pm \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle = \pm a(e^2 - 1),$$

$$\text{onde } \vec{e} := \frac{1}{2a} \overline{OA}.$$

Seja $f = f(\vec{r})$ o ângulo entre \vec{e} e \vec{r} , ver a figura 1, que exemplifica o caso da hipérbole, e reescrevendo os resultados acima em coordenadas polares, obtemos a *equação focal* de uma cônica, que é

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f},$$

onde $p = a(1 - e^2)$, no caso da elipse, $p = \rho$, no caso da parábola, e $p = a(e^2 - 1)$, no caso da hipérbole, em que se considera o *ramo principal* da hipérbole, que é o ramo relativo ao foco O , identificado na figura 1 por \mathcal{H}^+ .

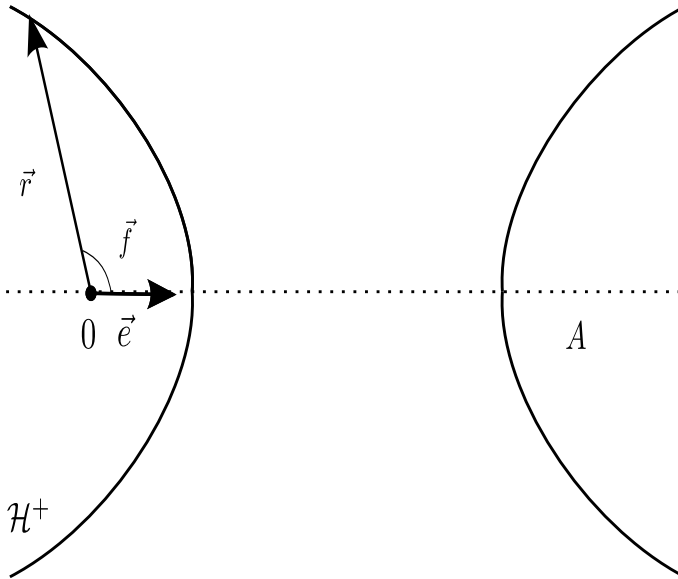


Figura 1: O Ramo Principal de uma Hipérbole e as Coordenadas Polares

Fonte: [3]

Para o que se segue, sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$; lembremos que X aplica-se isometricamente sobre Y , se existe uma aplicação $T : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $T(X) = Y$ e T preserva distâncias; isto é, para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, tem-se que

$$|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Uma tal T é dita uma *isometria de X sobre Y* . Sabe-se, da Álgebra Linear, que T é a restrição de um operador ortogonal seguido de uma translação. Os seguintes fatos serão necessários para a próxima proposição.

1. Seja \mathcal{E} uma elipse com semieixo maior a e excentricidade e . A menos de uma isometria, podemos assumir que \mathcal{E} está centrada na origem, e os focos são

$$F_1 = (-ea, 0) \quad \text{e} \quad F_2 = (ea, 0).$$

Então,

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

onde $b = a\sqrt{1 - e^2}$.

2. A parábola \mathcal{P} de foco $F = (0, p)$ e diretriz d , de equação $y = -p$, é o conjunto

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 4py\}.$$

3. Seja \mathcal{H} uma hipérbole de semieixo a e excentricidade e . A menos de uma isometria, podemos assumir que \mathcal{H} está centrada na origem, e os focos são

$$F_1 = (-ea, 0) \quad \text{e} \quad F_2 = (ea, 0).$$

Então,

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

onde $b = a\sqrt{e^2 - 1}$.

A próxima proposição descreve a elipse, a hipérbole e a parábola como seções cônicas. Nesta mesma proposição, incluímos o caso em que $e = 0$.

Proposição 1. *A curva \mathbb{P} dada pela interseção do cone*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\},$$

com o plano afim

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = my + c\},$$

onde $c > 0$,

1. *é uma elipse, se $0 \leq m < 1$.*
2. *é uma parábola, se $m = 1$.*
3. *é uma hipérbole, se $m > 1$.*

Demonstração. Inspirados pelas considerações do Capítulo 2 da referência [3], não somente mostramos que a interseção do cone com o plano é uma das seções cônicas, mas descrevemos suas equações cartesianas no plano $z = 0$. Para tanto, substituindo $z = my + c$ em $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, chegamos à equação

$$(1 - m^2)y^2 - 2mcy + x^2 - c^2 = 0,$$

cujos primeiros membros são polinômios quadráticos em y , e os coeficientes são polinômios em x .

1. Para $m = 0$, temos que \mathbb{P} é a curva $x^2 + y^2 = c^2$, que é um círculo no plano $z = c$. Projetando esta curva ortogonalmente sobre o plano $z = 0$, obtemos um círculo congruente, centrado em $(0, 0)$ e de raio c .
2. Para $0 < m < 1$, obtemos

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{-x^2 + \frac{c^2}{1 - m^2}} + \frac{mc}{1 - m^2}$$

e

$$z = \pm \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{-x^2 + \frac{c^2}{1 - m^2}} + \frac{c}{1 - m^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq \frac{c}{\sqrt{1 - m^2}}$.

Considerando a translação $(x, y, z) \xrightarrow{\tau_m} \left(x, y - \frac{mc}{1 - m^2}, z - \frac{c}{1 - m^2}\right)$ e a rotação, em torno do x -eixo, $(x, y, z) \xrightarrow{R_m} \left(x, \frac{y + mz}{\sqrt{1 + m^2}}, \frac{z - my}{\sqrt{1 + m^2}}\right)$, temos que a curva

$$\mathbb{P} = \left\{ \left(x, \pm \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{-x^2 + \frac{c^2}{1 - m^2}} + \frac{mc}{1 - m^2}, \pm \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{-x^2 + \frac{c^2}{1 - m^2}} + \frac{c}{1 - m^2} \right) : |x| \leq \frac{c}{\sqrt{1 - m^2}} \right\}$$

aplica-se isometricamente sobre a elipse

$$\frac{y^2}{\frac{1 + m^2}{(1 - m^2)^2} c^2} + \frac{x^2}{\frac{c^2}{1 - m^2}} = 1.$$

3. Para $m = 1$, obtemos

$$y = \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}.$$

E, conseqüentemente,

$$z = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}.$$

E assim, considerando a translação $(x, y, z) \xrightarrow{\tau_1} \left(x, y + \frac{c}{2}, z - \frac{c}{2}\right)$, seguida da rotação, sobre o x -eixo, $(x, y, z) \xrightarrow{R_1} \left(x, \frac{y + z}{\sqrt{2}}, \frac{z - y}{\sqrt{2}}\right)$, temos que a curva

$$\mathbb{P} = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}, \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

aplica-se isometricamente sobre a parábola

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{2}c}.$$

4. Para $m > 1$, obtemos

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{m^2-1}} + \frac{mc}{1-m^2}$$

e

$$z = \pm \frac{m}{\sqrt{m^2-1}} \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{m^2-1}} + \frac{c}{1-m^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Considerando a translação $(x, y, z) \xrightarrow{\tau_m} \left(x, y - \frac{mc}{1-m^2}, z - \frac{c}{1-m^2}\right)$ e a rotação, em torno do x -eixo, $(x, y, z) \xrightarrow{R_m} \left(x, \frac{y+mz}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{z-my}{\sqrt{1+m^2}}\right)$, temos que a curva

$$\mathbb{P} = \left\{ \left(x, \pm \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{m^2-1}} + \frac{mc}{1-m^2}, \pm \frac{m}{\sqrt{m^2-1}} \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{m^2-1}} + \frac{c}{1-m^2} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

aplica-se isometricamente sobre a hipérbole

$$\frac{y^2}{\frac{m^2+1}{(m^2-1)^2} c^2} - \frac{x^2}{m^2-1} = 1.$$

□

Finalizando a seção, tudo o que foi visto permite-nos concluir que

Teorema 1. *As elipses, as hipérbolas e as parábolas são curvas planas simples, isto é, sem auto-interseções, e contínuas, que podem ser fechadas, no caso das elipses, e abertas, no caso das hipérbolas e das parábolas.*

3. O Problema de Kepler e as Seções Cônicas

Nós apresentaremos a relação entre as primeiras leis de Kepler e as seções cônicas. E então, veremos que a geometria do problema de Kepler é mais bem compreendida quando observamos a trajetória do movimento sobre o cone $r^2 = x^2 + y^2$, como é proposto em [4]. Além disso, fixaremos a nomenclatura necessária para a descrição das órbitas keplerianas, que faremos na próxima seção.

3.1. As Primeiras Leis de Kepler e as Seções Cônicas

A seguir, usando a descrição de seções cônicas dada pela Definição 1, vemos uma reformulação da Proposição 1 em termos puramente geométricos. No espaço tridimensional, com coordenadas (x, y, r) , consideramos o cone de equação $r^2 = x^2 + y^2$.

Teorema 2. A projeção de uma seção cônica no (x,y) -plano é uma curva quadrática, cujo foco é o vértice do cone, a diretriz é a reta de interseção do plano cortante com o plano $r = 0$ e a excentricidade é igual à tangente do ângulo entre os planos.

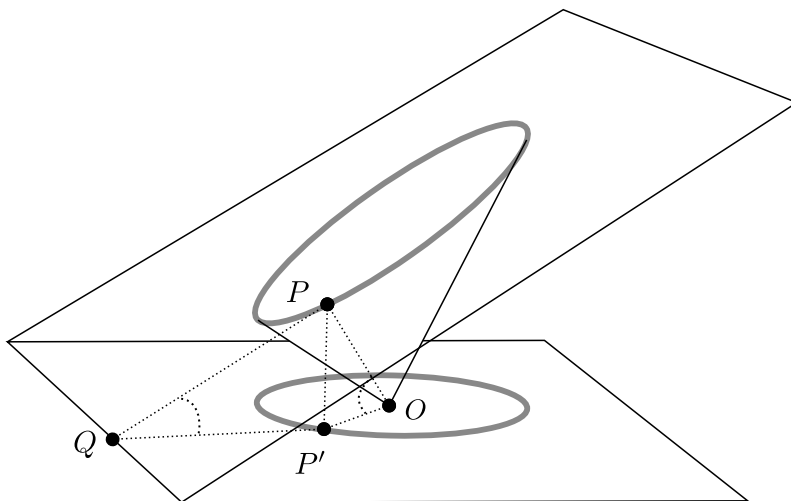


Figura 2: O Foco, a Diretriz e a Excentricidade de uma Cônica

Fonte: [4]

Demonstração. Como a geratriz PO do cone $r^2 = x^2 + y^2$ faz 45° com o plano $r = 0$, ver figura 2, a distância de um ponto P do cone à sua projeção ortogonal P' no (x,y) -plano é igual à distância de P' ao vértice do cone O , isto é, $|PP'| = |OP'|$. Para pontos na mesma seção plana, conforme figura 2, a distância do ponto P' à reta diretriz, que é $|QP'|$, é proporcional ao comprimento do segmento $|OP'|$, cuja razão de proporcionalidade é $\tan(PQP')$, já que

$$|OP'| = |PP'| = \tan(PQP') \cdot |QP'|$$

isto é, $|OP'| = e \cdot |QP'|$, onde $e = \tan(PQP')$, como queríamos. \square

Para o que se segue, fixamos a terminologia da Mecânica Celeste necessária para a descrição que daremos das órbitas do *Problema de Kepler*. O Problema de Kepler é o movimento de uma partícula sobre a superfície do cone $r^2 = x^2 + y^2$ cuja projeção no plano $r = 0$ é governada pela equação diferencial

$$\ddot{\vec{r}} = -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

As soluções do Problema de Kepler são conhecidas como *as órbitas (ou trajetórias) keplerianas*. Sabe-se que o problema de Kepler é um *problema de campo de força central*. Donde, conclui-se que o *momento angular é conservado*. Agora, da conservação do momento angular decorre a *2ª lei de Kepler*, que pode ser enunciada da seguinte forma: *a taxa de variação instantânea da área varrida pelo vetor \vec{r} é constante*. Essa taxa de variação instantânea é denominada de *velocidade setorial*, cujo valor constante é $\frac{M}{2m}$, onde M é o comprimento do momento angular e m é a massa

da partícula. Para uma exposição sistemática desses fatos, consultem os primeiros capítulos das referências [3, 6].

Seja \vec{r} uma órbita kepleriana. Levantando o vértice do cone de ℓ unidades ao longo do eixo do cone, cuja direção é dada pelo vetor $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, e considerando \vec{R} a posição do ponto sobre o cone relativa ao extremo final do vetor $\ell \vec{e}_3$, conforme a figura 3, temos que

$$\vec{R} := \vec{r} + |\vec{r}| \vec{e}_3 - \ell \vec{e}_3.$$

Escolhendo o valor da velocidade setorial dado pela relação $\ell = \frac{M^2}{k m^2}$, temos, pela conservação do momento angular, que o mesmo ℓ serve para todos os pontos cuja órbita é dada por \vec{R} . Donde, obtemos a seguinte proposição

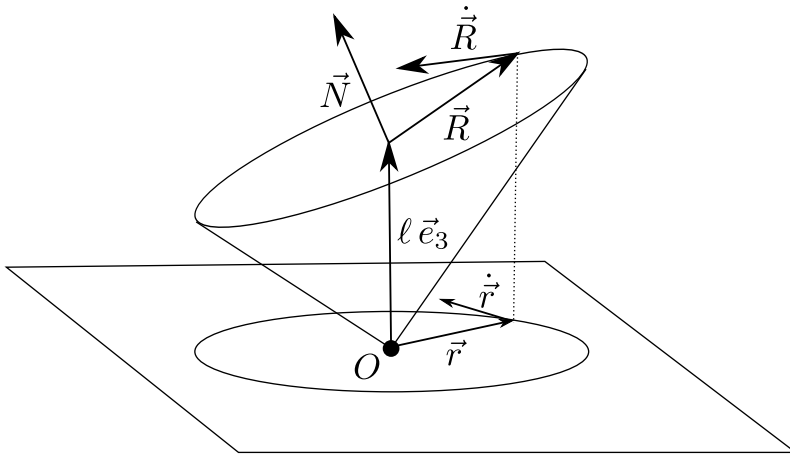


Figura 3: O Momento Angular Fictício.
Fonte: [4]

Proposição 2. Para cada valor da velocidade setorial, a órbita dada por \vec{R} é solução da equação de movimento

$$\ddot{\vec{R}} = -k \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}.$$

Demonstração. Derivando \vec{R} com respeito ao tempo, obtemos

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{r}} + \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|} \vec{e}_3.$$

Derivando mais uma vez, chegamos a

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{r}} + \frac{\langle \ddot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|} \vec{e}_3 + \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle}{|\vec{r}|} \vec{e}_3 - \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle^2}{|\vec{r}|^3} \vec{e}_3.$$

Como a projeção obedece à equação $\ddot{\vec{r}} = -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, temos que

$$\ddot{\vec{R}} = -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \frac{k}{|\vec{r}|^2} \vec{e}_3 + \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle - \langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle^2}{|\vec{r}|^3} \vec{e}_3.$$

Observando que

$$\langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle - \langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle^2 = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|^2 = \frac{M^2}{m^2} = k \ell,$$

temos que

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \frac{k}{|\vec{r}|^2} \vec{e}_3 + \frac{k \ell}{|\vec{r}|^3} \vec{e}_3 \\ &= -k \frac{\vec{r} + |\vec{r}| \vec{e}_3 - \ell \vec{e}_3}{|\vec{r}|^3} \\ &= -k \frac{\vec{R}}{|\vec{r}|^3}. \end{aligned}$$

□

Corolário 1. O momento angular fictício $\vec{N} = m(\vec{R} \times \dot{\vec{R}})$ é conservado.

Demonstração. Vejamos,

$$\dot{\vec{N}} = m(\dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}}) + m(\vec{R} \times \ddot{\vec{R}}) = 0,$$

pois $\ddot{\vec{R}}$ é proporcional a \vec{R} .

□

Em particular, a direção do vetor \vec{N} é conservada. Sendo assim, a órbita está na seção do cone pelo plano que passa pelo extremo final do vetor $\ell \vec{e}_3$ e é gerado pelos vetores $\vec{R}(0)$ e $\dot{\vec{R}}(0)$.

Como consequência da conservação do momento angular fictício, obtemos a *Primeira Lei de Kepler*.

Corolário 2. Quando levantadas do plano para o cone, as órbitas keplerianas tornam-se seções planas do cone.

4. O Parabolóide de Revolução e as Seções Cônicas

Existe uma forma bastante criativa de demonstrar que as elipses, as parábolas e as hipérbolas são seções cônicas, usando as *esferas de Dandelin*. Para uma tal demonstração, consulte [1, 5].

Aqui, o que propomos, tendo como referências [2, 4], é demonstrar que as seções cônicas, por planos que não são paralelos, e nem perpendiculares, ao eixo do cone, e também não são paralelos a alguma geratriz do cone, são as elipses e as hipérbolas. Além disso, localizaremos o segundo foco de uma órbita kepleriana. O fato de não incluirmos as seções cônicas por planos paralelos a alguma geratriz, isto é, não considerarmos as parábolas, ficará claro na construção proposta.

Inicialmente, relembremos alguns resultados importantes sobre o parabolóide de revolução. Sabemos que *um parabolóide de revolução é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de*

seu foco, que está sobre o eixo de revolução, e do plano diretriz perpendicular ao mesmo eixo. De acordo com a figura 4, vemos que o parabolóide é o conjunto dos P do espaço tais que $|PO'| = |PP'|$. Conseqüentemente, o plano tangente ao parabolóide num determinado ponto é o lugar dos pontos equidistantes do foco e do pé da perpendicular baixada do ponto de tangência ao plano diretriz, isto é, é o conjunto dos pontos Q do espaço tais que $|QO'| = |QP'|$. Para justificar essa afirmação, consideremos o plano de todos os pontos equidistantes do foco e do pé da perpendicular baixada do ponto de tangência. Qualquer outro ponto deste plano está mais distante do pé da perpendicular, e conseqüentemente do foco, do que do plano diretriz. E assim, não pertence ao parabolóide. Sendo assim, o plano tem apenas um ponto em comum com o parabolóide. Decorre dessa caracterização de plano tangente a um parabolóide de revolução uma propriedade famosa da óptica geométrica para espelhos parabólicos, que é: *os raios que incidem no espelho parabólico paralelos ao eixo de revolução refletem-se no foco*. De fato, como o plano tangente ao parabolóide num dado ponto é o plano medidor do segmento que une o foco ao pé da perpendicular baixada do dado ponto, segue-se, conforme figura 4, que a direção normal ao plano tangente, que é a direção do vetor $\vec{O'P'}$, faz ângulos iguais com a direção da reta suporte do ponto de tangência ao foco, que é a direção do vetor $\vec{O'P}$, e a direção do eixo do cone, que é a direção do vetor $\vec{O'O}$.

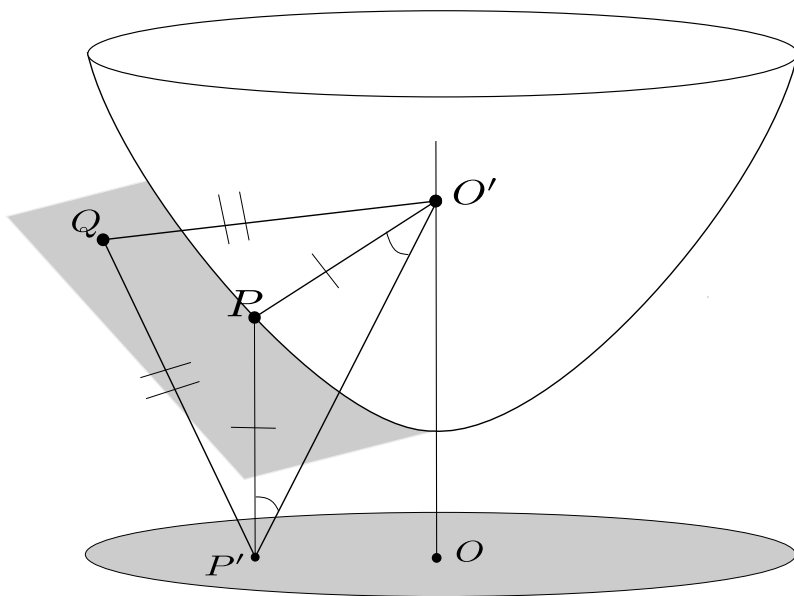


Figura 4: Plano tangente ao parabolóide

E, ainda, é imediato que a família de paraboloides de revolução dada por $z = \frac{1}{4\alpha}(x^2 + y^2) + \alpha$, indexada pelo parâmetro $\alpha > 0$, é tangente à folha do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ no semiespaço $z \geq 0$, na família de círculos $x^2 + y^2 = 4\alpha^2$. E mais: considerando o plano $z = my + c$, para $0 < m \neq 1$, com $c \neq 0$, tomando $\alpha = \frac{c}{1-m^2}$, temos que o parabolóide de revolução

$$z = \frac{1-m^2}{4c}(x^2 + y^2) + \frac{c}{1-m^2}$$

tangencia o cone no círculo $x^2+y^2 = \frac{4c^2}{(1-m^2)^2}$ e o plano $z = my+c$ no ponto $\left(0, \frac{2m}{1-m^2}c, \frac{1+m^2}{1-m^2}c\right)$.

Resumindo,

Proposição 3. Dados $c \neq 0$ e $0 < m \neq 1$, o parabolóide de revolução

$$z = \frac{1-m^2}{4c}(x^2+y^2) + \frac{c}{1-m^2}$$

tangencia o cone no círculo $x^2+y^2 = \frac{4c^2}{(1-m^2)^2}$ e o plano $z = my+c$ no ponto $\left(0, \frac{2m}{1-m^2}c, \frac{1+m^2}{1-m^2}c\right)$.

Observação 2. A construção delineada acima mostra a impossibilidade de construirmos um parabolóide de revolução que tangencia o cone e um plano paralelo a uma geratriz. Por isso, nós descartamos o caso da parábola. No caso das esferas de Dandelin, é possível construirmos uma esfera que tangencia o cone e um plano paralelo a uma geratriz. De fato, é imediato que a esfera

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{8}$$

tangencia o cone no círculo $x^2 + y^2 = \frac{c^2}{16}$ e o plano $z = y + c$, por baixo, no ponto $\left(0, -\frac{c}{4}, \frac{3c}{4}\right)$.

Para a demonstração do Teorema 3, precisamos do seguinte resultado:

Lema 1. Os parabolóides de revolução inscritos no cone $z^2 = x^2+y^2$ têm o plano $z = 0$ como diretriz e o centro do círculo de tangência como foco.

Demonstração. No círculo de tangência os planos tangentes fazem 45° com a direção do eixo. Conforme a figura 5, isso significa que todo ponto P no círculo de tangência é tal que $|PO'| = |PP'|$, onde O' é o foco e P' é o pé da perpendicular baixada de P. E assim, o centro do círculo é o foco, e o plano $z = 0$ é o plano diretriz. \square

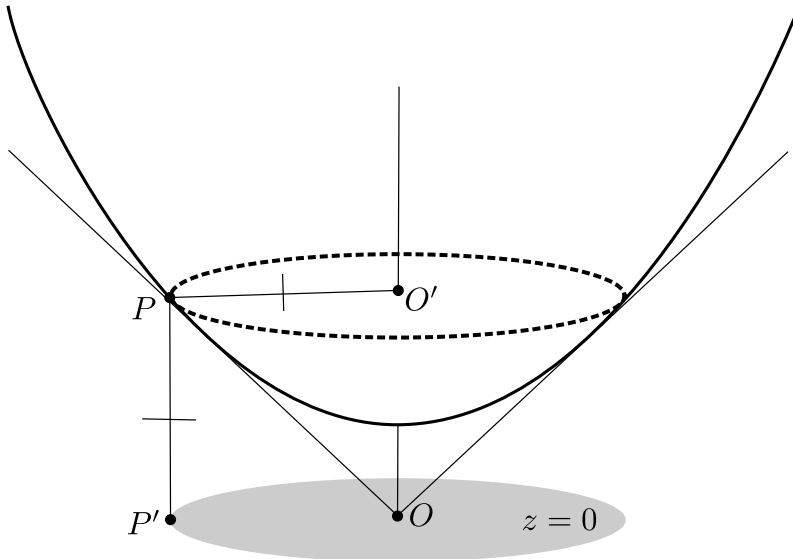


Figura 5: Parabolóide Inscrito no Cone

O próximo resultado é fundamental para a descrição das órbitas keplerianas elípticas e hiperbólicas, como veremos nos Corolários 3 e 4.

Teorema 3. *Seja o parabolóide de revolução inscrito no cone que tangencia um dado plano secante ao cone. Então, a projeção ortogonal do ponto de tangência no plano horizontal é o segundo foco da seção cônica projetada, onde o vértice do cone é o primeiro foco.*

Demonstração. Inicialmente, consideremos o caso em que o plano secante ao cone é dado por $z = my + c$, com $c > 0$ e $0 < m < 1$, que é o caso ilustrado pela figura 6. Observemos que o círculo de interseção do parabolóide com o cone está acima da seção plana, já que $(1 + m^2)\alpha < 2\alpha$, para $\alpha = \frac{c}{1 - m^2} > 0$. Seja P um ponto da seção do cone pelo plano tangente ao parabolóide no ponto F . Consideremos P' e P'' as projeções de P nos planos horizontais através do foco O' do parabolóide e do vértice O do cone. Analogamente, F' e F'' são as projeções do ponto F . Como $|PO'| = |PF'|$ e $|P'O'| = |P''O| = |P''P|$, temos que os triângulos retângulos $PP'O'$ e $F''P''P$ são congruentes, pelo caso de congruência cateto-hipotenusa. Como $|P''F''| = |P'P|$, temos que

$$|P''O| + |P''F''| = |P''P| + |P'P| = |P'P''| = |O'O|.$$

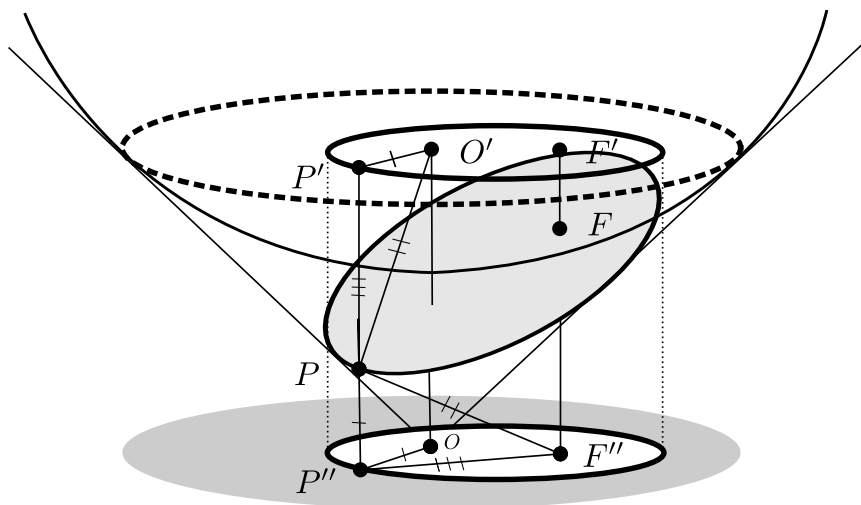


Figura 6: Órbita Elíptica

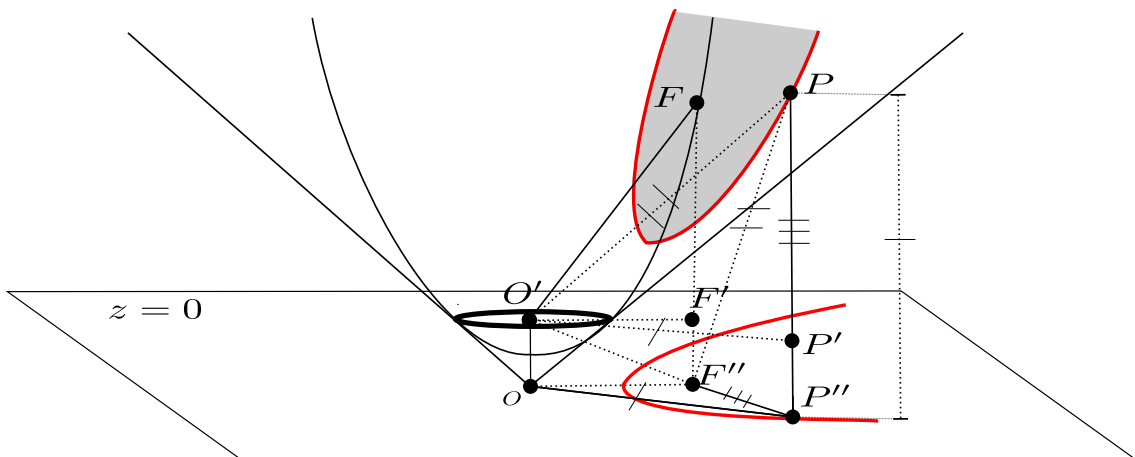


Figura 7: Órbita Hiperbólica

E isso mostra que a projeção da seção cônica no plano diretriz é uma elipse de focos O e F'' .

As demonstrações para os casos em que $c < 0$ e $m > 1$ são análogas, observando que o círculo de interseção do parabolóide com o cone está abaixo da seção plana, como mostra a figura 7, já que $(1 + m^2)\alpha > 2\alpha$, para $\alpha = -\frac{c}{m^2 - 1} > 0$. Além disso, observa-se que os triângulos $PO'P'$ e $PF''P''$ são congruentes. \square

Como consequências imediatas do teorema acima, descrevemos as órbitas keplerianas elípticas e hiperbólicas, localizando o segundo foco dessas.

Corolário 3. *Órbitas keplerianas elípticas com comprimento fixo de seu eixo maior correspondem às seções do cone por planos tangentes ao mesmo parabolóide de revolução inscrito no cone.*

Demonstração. Seja a um número real positivo. Conforme figura 6, consideremos no plano $z = 0$ a elipse de focos O e F'' e de eixo maior $2a$. Agora, seja o parabolóide de revolução inscrito no cone de foco O' e plano diretriz $z = 0$ tal que a distância do foco ao plano diretriz é $2a$. Sabemos que O' é o centro do círculo de tangência. Pelo corolário 2, a elipse corresponde a uma seção plana sobre o cone. Observando a figura 6, para cada ponto P'' sobre a elipse correspondem um ponto P sobre a seção plana e um ponto P' no plano do círculo de tangência tais que $|PP''| = |P''O|$ e $|PP'| = |P''F''|$. Como $|P'O'| = |P''O|$, segue-se que $|PO'| = |PF''|$. Dessa forma, a seção plana sobre o cone é tangente ao parabolóide, como queríamos. Lembramos que, pelo teorema 3, F'' é a projeção ortogonal do ponto de tangência sobre o plano diretriz. \square

De forma análoga, temos que

Corolário 4. *Órbitas keplerianas hiperbólicas com comprimento fixo de seu eixo real correspondem às seções do cone por planos tangentes ao mesmo parabolóide de revolução inscrito no cone, cujo comprimento é igual à distância do foco do parabolóide ao plano diretriz.*

Agradecimentos

A autora é agradecida à SBM pela iniciativa de propor e promover o Profmat, e à CAPES por todo o investimento destinado ao Profmat-Uefs. O autor é agradecido ao apoio da Universidade Estadual de Feira de Santana, através do projeto de pesquisa sob a Resolução Consepe 059/2013.

Referências

- [1] ARNOLD, V. I., *Real Algebraic Geometry*. Translated by Gerald G. Gould and David Kramer. UNITEXT - La Matematica per il 3+2, Vol. 66. New York: Springer, 2013.
- [2] ARNOLD, V. I., KOZLOV, V. V., NEISHTADT, A. I. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Dynamical Systems III - Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 3. New York: Springer, 1988.
- [3] GEIGES, Hanjorg. *The Geometry of Celestial Mechanics*. Cambridge University Press: University of Cologne, 2016.
- [4] GIVENTAL, Alexander. Kepler's Laws and Conic Sections. *Arnold Mathematical Journal*. Volume 2, pages 139–148 (2016).
- [5] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Geometria*: Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [6] POLLARD, Harry. *Celestial Mechanics: The Carus Mathematical Monographs*, Number Eighteen. The Mathematical Association of America, 1976.

Gilsânia Abreu Lopes Ribeiro
Escola Estadual Reverendo Severino Soares
Feira de Santana, Bahia
<gilsania.10@hotmail.com>

Jean Fernandes Barros
Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciências Exatas
Feira de Santana, Bahia
<jfb@uefs.br>

Recebido: 19/04/2021
Publicado: 01/04/2022