


O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell

João Luzeilton de Oliveira 

Resumo

Mostramos a relação entre o retângulo de prata e a razão de prata, bem como algumas propriedades dessa razão e sua relação com o mundo que nos cerca, através do papel A4, e do octógono regular com sua presença na Arquitetura Ocidental. Além disso, apresentamos situações onde há evidências de que a razão de prata ocorre, também, na Arquitetura Oriental. Este artigo tem como objetivo mostrar como a razão de prata está intimamente ligada à sequência de Pell. Queremos com isso apresentar uma Matemática que pode ser trabalhada de forma interdisciplinar com outras áreas do conhecimento humano, evidenciando como a mesma está presente em nossas vidas, mesmo não a enxergando. É uma sinalização da importância de o professor conhecer bem o que ensina e, além disso, conhecer um pouco sobre outras áreas para facilitar a aprendizagem do aluno e aperfeiçoar cada vez mais o seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Retângulo de prata; Razão de prata; Sequência de Pell; Octógono regular; Arquitetura.

Abstract

We show the relationship between the silver rectangle and the silver ratio, as well as some properties of this ratio and its relationship with the world around us, through A4 paper, and the regular octagon with its presence in Western Architecture. Furthermore, we present situations where there is evidence that the proportion of silver also occurs in Eastern Architecture. This article aims to show how the silver ratio is closely linked to the Pell's sequence. With this we want to present a Mathematics that can be worked in an interdisciplinary way with other areas of human knowledge, showing how it is present in our lives, even if we do not see it. It is a sign of the importance of the teacher knowing well what he teaches and, in addition, knowing a little about other areas to facilitate student learning and increasingly improve their own knowledge.

Keywords: Silver rectangle; Silver ratio; Pell's sequence; Regular octagon; Architecture.

1. Introdução

Apresentamos a relação entre o retângulo de prata e a razão de prata e, como resultado principal deste artigo, a relação entre a razão de prata e a sequência de Pell. Inicialmente, vamos considerar a equação

$$x^2 - px - q = 0, \quad (1)$$

p e q inteiros positivos, cujas raízes são $x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} > 0$ e $x_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} < 0$, pois $p < \sqrt{p^2 + 4q}$. Para o nosso propósito, será necessário considerar apenas a raiz positiva da Equação (1), que representamos por

$$x_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}. \quad (2)$$

Os números $x_{p,q}$, em (2), são irracionais ou inteiros. De fato, quando $q = n(n + p)$ temos que $p^2 + 4n(n + p)$ é um quadrado perfeito e, portanto, $p + \sqrt{p^2 + 4n(n + p)}$ é múltiplo de 2, o que mostra, nesse caso, que $x_{p,q}$ é inteiro positivo. Agora, quando $p^2 + 4q$ não é quadrado perfeito, temos que $x_{p,q}$ é irracional positivo.

Em [5], Vera Spinadel¹ (Figura 1) introduziu uma família de números reais positivos, cujos membros são representados por (2), batizando-a de *Números Metálicos* ou *Razões Metálicas*, as quais passamos a tratá-los como *razões* (razão de ouro, razão de prata,...). Entre os membros dessa família estão, nessa ordem, a *razão de ouro*, a *razão de prata*, a *razão de bronze*, e outras mais, que levam sempre o nome de um metal. Por estarem ligados aos retângulos de tipos que iremos construir na Seção 2, entre os $x_{p,q}$ dados pela Equação (2), consideraremos apenas aqueles que são irracionais positivos, ou seja, os que são da forma

$$x_{p,1} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}, \quad (3)$$

com $q \geq 1$.



Figura 1: Vera Spinadel

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Vera_de_Spinadel

Observemos que se $p = 1$ e $q = 1$, então a equação $x^2 - x - 1 = 0$ tem $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ como raiz positiva, conhecida como razão de ouro, desde os gregos, com Euclides. Essa razão proporciona harmonia e beleza e aparece na Natureza e em diversas áreas do conhecimento humano, como Engenharia,

¹Vera Martha Winitzky de Spinadel, matemática argentina (1929 - 2017).

Arquitetura, Design, Música, Arte Renascentista e Cinema [6, 7, 8]. A razão de ouro é base de um sistema de proporções usado na Arquitetura Moderna, o *Modulor*, criado pelo arquiteto e urbanista francês Charles-Edouard Jeanneret-Gris (1887-1965), conhecido como *Le Corbusier*. É também conhecida sua relação com o retângulo de ouro (retângulo áureo), bem como sua estreita relação com a sequência definida pela recorrência $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, chamada *sequência de Fibonacci*, cujos termos 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... são chamados *números de Fibonacci*. O número ϕ está relacionado com a *sequência de Fibonacci* assim, $\phi = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$, como em [2].

Agora, se $p = 2$ e $q = 1$, então a equação $x^2 - 2x - 1 = 0$ tem $\delta = 1 + \sqrt{2}$ como raiz positiva, batizada por Spinadel como razão de prata em alusão à razão de ouro, a qual passamos a explorar e mostrar algumas de suas propriedades, relação com o retângulo de prata, com o octógono regular e sua presença nas arquiteturas antiga e moderna, tanto no ocidente quanto no oriente. Após escavações feitas nas Casas Jardim de Ostia, entre 1938 e 1942, em um antigo porto romano, perto da foz do rio Tibre, foram encontrados vestígios do uso de um Sistema Romano de Proporções. Existem fortes evidências de que os números δ e $\sqrt{2} = \delta - 1$ eram usados como bases desse sistema [10, 11].

A razão de prata, assim como a razão de ouro, é de relevante importância para a Matemática, pois além de suas conexões com a própria Matemática, tem suas propriedades ligadas ao mundo que nos cerca, como, por exemplo, na Arquitetura Romana, através de sistemas de proporções utilizados pelos romanos nos séculos 1 e 2 da era cristã [10, 11] e em alguns sistemas de proporções usados na música [12], além de ser empregada na indústria gráfica [9, 13]. Neste artigo, estudaremos as propriedades da razão de prata relacionando-as com o retângulo de prata, papel A4 e octógono regular, o qual dá forma ao cimborrio da Catedral de Burgos, bem como com a Arquitetura Japonesa [1, 4]. Além disso, estabeleceremos algumas identidades que envolvem os números de Pell, como determinar um número de Pell a partir da razão de prata, e a relação íntima entre a razão de prata e a sequência de Pell.

A título de curiosidade, se $p = 3$ e $q = 1$, $p = 1$ e $q = 2$, $p = 1$ e $q = 3$, e $p = 2$ e $q = 2$, então a Equação (2) fornece-nos as razões de bronze, cobre, níquel e platina, respectivamente. Essas razões não serão estudadas aqui, mas, assim como as razões de ouro e de prata, elas têm as suas devidas importâncias e apresentam propriedades ligadas a outros sistemas de proporções usadas, por exemplo, na Arquitetura [10, 11], e no estudo do comportamento das soluções de sistemas dinâmicos não lineares [5].

2. O retângulo de prata

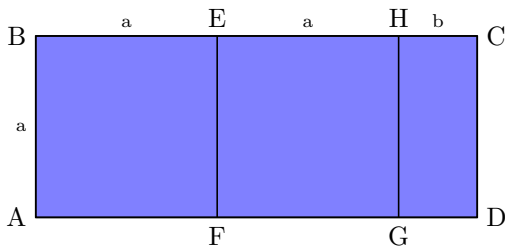
Nesta seção, vamos definir e construir o retângulo de prata e apresentar a sua relação com o mundo que nos cerca, mais precisamente com a indústria gráfica, através do papel A4.

Definição 1. Um retângulo ABCD (Figura 2a) será chamado retângulo de prata (retângulo romano) se dele forem suprimidos dois quadrados, como ABEF e EFGH, restando um retângulo HGDC, semelhante ao retângulo original. Isto significa que se $2a + b$ e a , com $a > b$, são as medidas dos lados do retângulo original, então

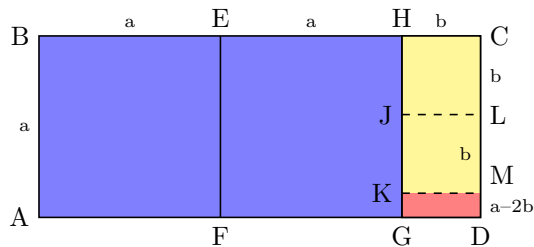
$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b}, \quad (4)$$

que é equivalente a

$$a^2 - 2ab - b^2 = 0. \quad (5)$$



(a)



(b)

Figura 2: Retângulo de prata

Fonte: Autoria própria

Observemos na Figura 2b que se do retângulo restante HGDC, de lados a e b , $a > b$, retiram-se dois quadrados de maior área possível (quadrado de lado b), restará um retângulo de lados b e $a - 2b$, $b > a - 2b$; se, deste, forem retirados dois quadrados de maior área possível (quadrado de lado $a - 2b$), restará um retângulo de lados $a - 2b$ e $5b - 2a$, $a - 2b > 5b - 2a$, e, assim, continuando esse processo, chega-se a um retângulo em que o maior lado é o lado menor do retângulo anterior, e o menor lado, o maior lado desse menos duas vezes o menor dos lados desse retângulo. Dessa maneira, se o retângulo de lados medindo $2a + b$ e a é um retângulo de prata, então o retângulo de lados a e b , também será um retângulo de prata, e assim, de (4), segue que

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a - 2b} = \frac{a - 2b}{5b - 2a} = \frac{5b - 2a}{5a - 12b} = \frac{5a - 12b}{29b - 12a} = \frac{29b - 12a}{29a - 70b} = \dots \quad (6)$$

e, portanto, também são de prata os retângulos de lados

$$b \text{ e } a - 2b, \quad a - 2b \text{ e } 5b - 2a, \quad 5b - 2a \text{ e } 5a - 12b, \quad 5a - 12b \text{ e } 29b - 12a, \dots \quad (7)$$

(Figura 2b). Assim, se a e b , $a > b$, são números positivos satisfazendo (6), então a sequência

$$2a + b, \quad a, \quad b, \quad a - 2b, \quad 5b - 2a, \quad 5a - 12b, \quad 29b - 12a, \dots \quad (8)$$

em que seus termos, a partir do terceiro, coincidem com os termos da sequência

$$2a + b, \quad a, \quad b, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \dots, \quad (9)$$

em que

$$a_2 = a - 2b, \quad a_3 = b - 2a_2 = 5b - 2a, \quad a_4 = (a - 2b) - 2a_3 = 5a - 12b, \quad \dots, \quad (10)$$

ou seja,

$$a_2 = a - 2b, \quad a_3 = b - 2a_2, \quad a_4 = a_2 - 2a_3, \quad \dots \quad (11)$$

Isso significa que se $a > b$ são lados do primeiro retângulo restante, então $b > a_2$ são os lados do segundo retângulo restante, e, assim, o n -ésimo retângulo restante, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, tem lados a_{n-1} e a_n , com $a_{n-1} > a_n$, e se origina de um retângulo de lados a_{n-2} e a_{n-1} , com $a_{n-2} = a_n + 2a_{n-1}$ e, portanto,

$$a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1}, \quad (12)$$

com $a_{n-2} > a_{n-1}$, $n \geq 4$. Todos os termos dessa sequência são positivos e tendem a zero, à medida que aumentamos o número de retângulos construídos como em (6), todos semelhantes ao retângulo original, e dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência são lados de um retângulo de prata.

No Lema 1, Seção 4, mostraremos que a_n , em (12), pode ser expressa em termos de a e b e de dois termos consecutivos da sequência de Pell.

Ainda sobre os retângulos de prata, um fato importante que demonstraremos a seguir é que seus lados são incomensuráveis, conforme a Figura 2a.

Demonstração. De fato, se fossem esses lados comensuráveis, então existiria um inteiro positivo u , de modo que

$$AD = (2a + b)u \quad \text{e} \quad AB = au,$$

em que a e b seriam inteiros positivos. E daí, todos os termos da sequência (8) seriam inteiros positivos, o que é um absurdo, pois não existe uma sequência infinita e decrescente formada por números inteiros positivos. Dessa maneira, os lados de um retângulo de prata são grandezas incomensuráveis. \square

2.1. Construção do retângulo de prata

Dado um segmento \overline{AG} de comprimento $2a$, tome $F \in \overline{AG}$ de modo que $AF = FG = a$. Construa por G , o segmento \overline{HG} , de modo que $HG = FG = a$ e $\overline{HG} \perp \overline{AG}$. Com centro em F e raio FH , trace o arco \widehat{HD} , com D pertencente à semirreta \overrightarrow{FG} , G entre F e D , e $GD = b$. Por um lado, $FH = FG + GD = a + b$ e, por outro, $FH = a\sqrt{2}$, e assim, $a + b = a\sqrt{2}$, ou seja, $a^2 - 2ab - b^2 = 0$, que é equivalente à Equação (4). Portanto, o retângulo $ABCD$ é um retângulo de prata.

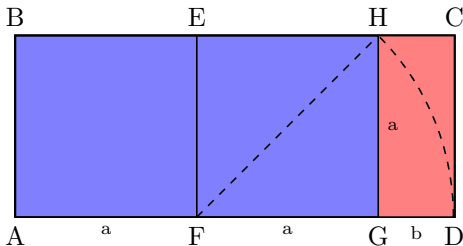


Figura 3: Construção do retângulo de prata
Fonte: Autoria própria

2.2. O retângulo de prata e o papel A4

Nesta subseção, vamos apresentar algumas propriedades do retângulo de prata e suas relações com o papel A4 e, para isso, algumas considerações serão necessárias. Um quadrado de lados medindo a tem, entre os mesmos, a proporção $1 : 1$, e será indicado por $Q(1 : 1)$ (ou Q); um retângulo de prata (retângulo romano), isto é, um retângulo de lados δa e a , que estão na proporção $\delta : 1$, será indicado por $RR(\delta : 1)$ (ou RR); e um retângulo de lados $a\sqrt{2}$ e a , e que estão na proporção $\sqrt{2} : 1$, será indicado por $QR(\sqrt{2} : 1)$ (ou QR). Com base nessas notações, o retângulo da Figura 4 é um $RR(\delta : 1)$, e é composto pelos quadrados $ABCD$ e $EFCH$, do tipo $Q(1 : 1)$, e pelo retângulo $DCFE$, um $RR(\delta : 1)$. Dessa maneira, sendo Q , QR e RR considerados na Figura 4, temos que

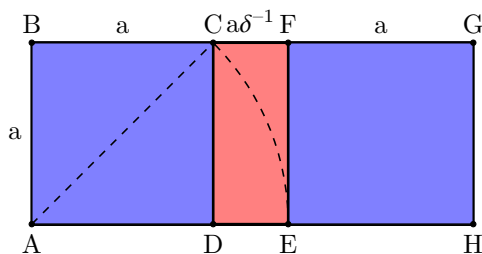


Figura 4: O retângulo românico e o papel A4
 Fonte: Autoria própria

1. $Q + RR = QR$

O retângulo ABFE é um QR e é formado pelo quadrado ABCD, um Q, e pelo retângulo DCFE, um RR, pois, $EF : CF = a : a\delta^{-1} = \delta : 1$ (DC é o lado comum). Como $BF = BG - FG = (a + a\sqrt{2}) - a = a\sqrt{2}$ e $AB = a$, temos que $BF : AB = \sqrt{2} : 1$.

2. $QR + Q = RR$

Neste caso, verificamos que, ao adicionarmos a um QR um Q, obtém-se um RR. O retângulo ABGH é formado pelo retângulo ABFE, que é um QR, e o quadrado EFGH, que é um Q. Tal propriedade é equivalente às quatro seguintes propriedades, que é de fácil justificativa.

3. $QR - RR = Q$

Suprimindo-se um RR de um QR, obtém-se um Q.

4. $QR - Q = RR$

Suprimindo-se um Q de um QR, obtém-se um RR.

5. $RR - QR = Q$

Suprimindo-se um QR de um RR, obtém-se um Q.

6. $RR - Q = QR$

Suprimindo-se um RR de um QR, obtém-se um Q, em que Q é o maior quadrado a ser suprimido.

7. $RR - Q - Q = RR$ Suprimindo-se de um RR, dois quadrados de maior área possível, obtém-se um RR (definição de retângulo de prata).

8. $Q + Q + RR = RR$

Neste caso, se a um RR forem somados dois Q, obtém-se um RR; esse caso é equivalente ao caso 4).

9. $QR + QR = QR$ (equivalentemente, $QR = QR + QR$)

Justapondo-se dois QR pelo maior lado comum aos dois, obtém-se um QR.

Subdividindo retângulos a fim de obter as proporções $1 : 1$, $\sqrt{2} : 1$ ou $\delta : 1$ entre os lados dos retângulos restantes, por exemplo, foi possível usar o retângulo de prata de modo prático: confecção e uso do papel A4, de acordo com as subdivisões feitas nas situações de **1 a 9**, logo acima. Os papéis da série A têm os seguintes tipos de folhas A0, A1, A2, A3, A4, ..., cujo primeiro membro, A0, tem área igual a 1m^2 , com seus lados medindo 1189mm e 841mm, e proporção entre esses lados igual $\frac{1189}{841} = 1,41\dots \cong \sqrt{2} : 1$. Como os demais membros dessa série, as folhas A1, A2, A3, A4, ..., são

obtidas dividindo-se o maior lado da folha anterior ao meio (situação 9), temos que essas folhas são retângulos do tipo QR($\sqrt{2} : 1$). Observe que

$$A_0 \rightarrow 2^0 = 1, A_1 \rightarrow 2^1 = 2, A_2 \rightarrow 2^2 = 4, A_3 \rightarrow 2^3 = 8, A_4 \rightarrow 2^4 = 16, \dots \quad (13)$$

Usando a notação $A_0(h_0, l_0)$ em que h_0 e l_0 , com $h_0 > l_0$, são os lados da folha A_0 , e como A_0 tem área $1m^2$ e lados na proporção $\sqrt{2} : 1$, temos que $h_0 l_0 = 1$ e $h_0 = l_0 \sqrt{2}$ e, portanto,

$$h_0 = 2^{\frac{1}{4}} \quad \text{e} \quad l_0 = 2^{-\frac{1}{4}}.$$

Para determinar os lados de uma folha qualquer dessa família, procede-se de maneira semelhante. Como os papéis da série A são retângulos do tipo QR e têm origem num RR pela remoção de um quadrado Q, o papel $A_4(h_4, l_4)$, em especial, comum nos trabalhos diários de escolas e escritórios, e utilizado em vários países, é tal que

$$h_4 = 2^{-\frac{7}{4}} \quad \text{e} \quad l_4 = 2^{-\frac{9}{4}}$$

e, portanto,

$$h_4 : l_4 = 2^{-\frac{7}{4}} : 2^{-\frac{9}{4}} = \sqrt{2} : 1.$$

Como vimos, o papel A_4 é obtido a partir do conceito de razão de prata, e por (13) tem-se que $A_4(h_4, l_4)$ é um retângulo do tipo QR obtido pela remoção de um quadrado do tipo Q de um retângulo do tipo RR, restando um retângulo RR; equivalentemente, o papel A_4 é formado pela junção de um RR e um quadrado Q. Quando QR é dobrado ao meio, obtêm-se duas folhas de mesmas proporções e metade da área do que foi dobrado. Se do RR forem removidos dois QR, restará um RR, como acima, nas situações de 1 a 9.

3. A razão de prata

Definição 2. Se os pontos C e D sobre um segmento de reta \overline{AB} são tais que $AC = CD > DB$ e satisfazem a igualdade

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BD}, \quad (14)$$

então $\frac{AB}{AC}$ é chamada razão de prata.

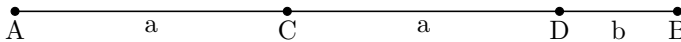


Figura 5: Segmento de prata
Fonte: Autoria própria

Se $C, D \in \overline{AB}$ são tais que $AC = CD = a$, $DB = b$ e $AB = 2a + b$, $a > b$, então as relações (14) e (4) são equivalentes, de modo que os segmentos AC e DB (ou AB e AC), na Figura 5, são lados de um retângulo de prata e, portanto, a e b satisfazem à Equação (5). Dividindo, membro a membro, a Equação (5) por b^2 , temos que $(\frac{a}{b})^2 - 2(\frac{a}{b}) - 1 = 0$, o que significa que $\frac{a}{b} = \delta$ é uma raiz positiva da equação $\delta^2 - 2\delta - 1 = 0$.

Da equivalência entre (14) e (4) obtemos uma relação entre o retângulo de prata e a razão de prata. Um retângulo de prata é um retângulo em que a razão entre o lado maior e o lado menor desse é igual à razão de prata:

$$\frac{a}{b} = \delta. \quad (15)$$

Agora, se C_1 e D_1 , C_2 e D_2 dividem o segmento \overline{AB} de modo que a relação (14) e as condições $AC_1 = C_1D_1 > D_1B$, $AC_2 = C_2D_2 = D_1B > D_2C_1$ são satisfeitas, e se marcarmos os pontos C_n e D_n sobre o segmento \overline{AB} , de modo que $AC_n = C_nD_n = D_{n-1}C_{n-2} > D_nC_{n-1}$, $n = 3, 4, 5, \dots$, então vale

$$\frac{AC_n}{AC_{n-1}} = \frac{D_nC_{n-1}}{AC_n}, \quad (16)$$

de acordo com (6). Isso significa que se C_n e D_n são pontos sobre o segmento \overline{AB} (Figura 6) satisfazendo as condições acima, então

$$\frac{AC_n}{AC_{n-1}} = \delta,$$

em que $AC_n = a_{n-1}$ e $D_nC_{n-1} = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, correspondem, respectivamente, ao maior e menor lados do n -ésimo retângulo, de acordo com a sequência (12).

Mostra-se, também, que AC_n e D_nC_{n-1} são incomensuráveis. Tal fato prova-se de maneira análoga a que foi usada para provar que os lados de um retângulo de prata são grandezas incomensuráveis, na Seção 2.

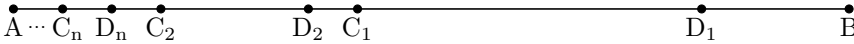


Figura 6: Segmentos de prata
 Fonte: Autoria própria

3.1. Construção da razão de prata

Esta seção é dedicada à solução do problema da divisão de um dado segmento de reta em três partes, da seguinte maneira: as duas primeiras partes devem ser iguais e maiores do que a terceira, e tais que uma das primeiras está para a parte menor, assim como o segmento todo está para uma das primeiras partes. De maneira equivalente, teremos o seguinte

Problema 1. Sendo A, C e D são pontos tais que $AC = CD$, determinar um ponto B sobre a reta que contém esses pontos, de modo que $AC = CD > DB$ e AB, AC, AC e DB, nessa ordem, satisfazem à Equação (14).

Construção. Dada uma reta r , tome os pontos $A, C, D \in r$ tais que $AC = CD$. Queremos determinar um ponto $B \in r$, tal que $AC = CD > DB$ e $2AC + DB$, AC, AC e DB satisfaçam, nessa ordem, à Equação (14). Por D construa uma reta s perpendicular a r e tome os pontos $O, Q \in s$ tais que $DO = OQ = AC = CD$. Com centro em Q, construa uma círculo c_1 de raio DQ, de modo que $\overleftrightarrow{AQ} \cap c_1 = \{E\}$. Com centros em A e em E e raios AE, construa os círculos c_2 e c_3 , respectivamente, de modo que $c_2 \cap c_3 = \{F, G\}$. O segmento \overline{FG} é tal que $\overline{FG} \perp \overleftrightarrow{AQ}$ e $\overline{FG} \cap \overleftrightarrow{AQ} = \{H\}$. Com centro em A e raio AH traça-se o círculo c_4 , de modo que $c_1 \cap r = \{B\}$, e, assim, $AH = AB$, $AB = 2AC + DB$, com $AC = CD > DB$. O ponto B é tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DB}$. □

Justificativa. No $\triangle ADQ$ (Figura 7), retângulo em D, temos que $AQ = 2(AC)\sqrt{2}$ e $QE = DQ = 2AC$. Daí, e do fato de que $AE = AQ + QE$, temos que $AE = 2(AC)\delta$. Agora, como $AB = AH = \frac{AE}{2}$, segue que $AB = (AC)\delta$, e como $DB = AB - AD$, segue que $DB = (AC)\delta^{-1}$. Assim,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{(AC)\delta}{AC} = \delta \quad \text{e} \quad \frac{AC}{DB} = \frac{AC}{(AC)\delta^{-1}} = \delta,$$

ou seja,

$$\frac{AB}{AC} = \delta = \frac{AC}{DB},$$

conforme (14). □

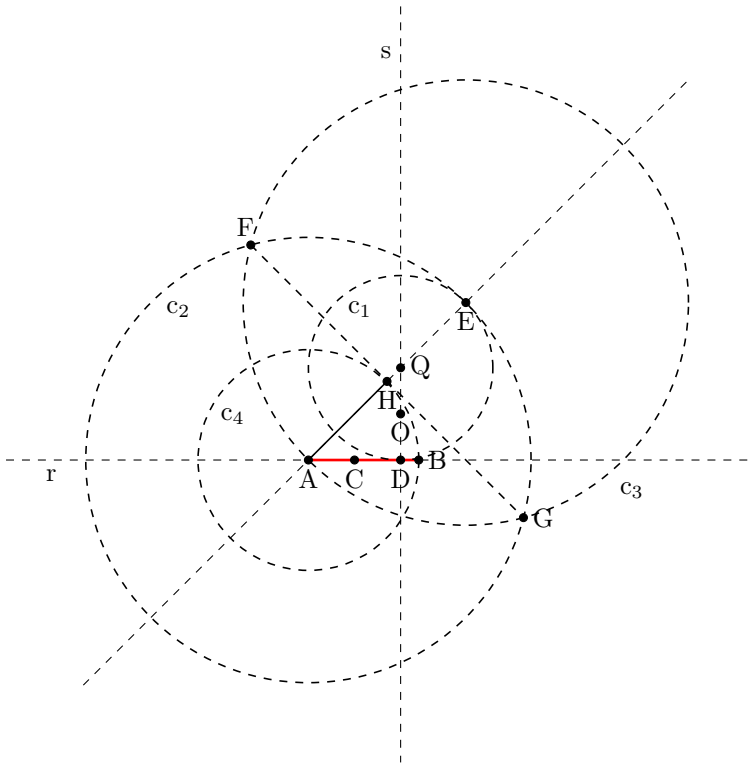


Figura 7: Construção da razão de prata
 Fonte: Autoria própria

De outra maneira, o problema, também, poderia ser o de determinar a razão de prata do segmento \overline{AC} (Figura 8).

Demonstração. Tomando-se os pontos E e F sobre \overline{AC} tais que $AE = EF = b$, como $AC = a$, temos que $FC = a - 2b$, e, assim,

$$\frac{a - 2b}{b} = \frac{b}{a}.$$

□

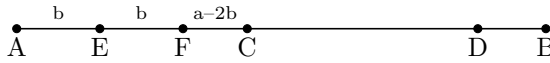


Figura 8: Construção razão de prata-2

Fonte: Autoria própria

3.2. A espiral de prata

”Espirais são encontradas em diversos objetos, movimentos e, também, na natureza. Por exemplo, no voo de gaviões em direção à sua presa, no náutilo, e em vários outros [...]”. (Azevedo, 2013, p. 35)

De maneira análoga à construção da espiral áurea, que é construída num retângulo de ouro [3], a construção da espiral de prata tem base num retângulo de prata. No retângulo $ABGH$ da Figura 9, que é um retângulo de prata, construiremos o arco \widehat{AC} , com centro no vértice D do quadrado $ABCD$ (base de construção do retângulo de prata) e raio $AD = DC$, no sentido horário. No segundo quadrado, à direita, com centro em F e raio $FE = FG$, construiremos o arco \widehat{GE} . Nos quadrados $CFLK$ e $JIED$, com centros em K e I , traçamos, respectivamente, os arcos \widehat{CL} e \widehat{EJ} (sentido horário). Procedendo dessa maneira, construindo os arcos \widehat{LP} e \widehat{JN} , ..., sempre no sentido horário, traçamos, assim, os arcos que formarão a espiral de prata. De modo análogo às etapas anteriores, a construção segue num processo infinito como na Figura 9.

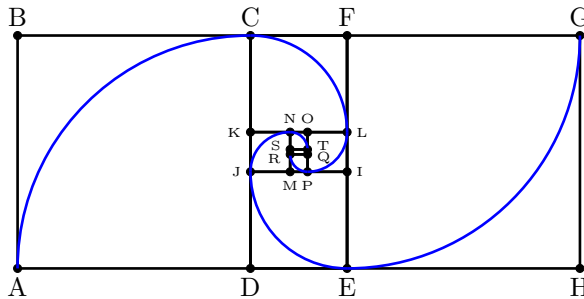


Figura 9: Espirais no retângulo de prata

Fonte: Autoria própria

3.3. O octógono regular e a razão de prata

Nesta subseção, apresentaremos evidências da ocorrência do número δ na Arquitetura e algumas relações desse número com as proporções encontradas na construção de alguns templos. Além da beleza e harmonia nas proporções desses templos, podem-se observar padrões matemáticos e propriedades geométricas que garantem a eles beleza, proporção e valor estético. Estudar a história dessas proporções e suas relações com a Arquitetura, além de uma busca pela chave da beleza, mostra como é possível fazer interdisciplinaridade entre essa área e a Matemática, estudando algumas propriedades do Sistema Romano de Proporções. A Arquitetura baseia-se em sistemas de proporções que têm sido usados ao longo dos tempos, na construção de templos, tendo

também como base a Matemática, principalmente, a Geometria e, no caso, de sistemas usados pelos romanos, nos séculos 1 e 2 da era Cristã, através do corte sagrado.

A partir do corte sagrado constroem-se um octógono regular e um octógono regular estrelado, mostrando-se sua relação com o cimborrio da Catedral de Burgos e destacando suas propriedades geométricas. Como veremos, é o corte sagrado que empresta harmonia aos detalhes geométricos dessas construções, como fachadas e proporções bem particulares.

O corte sagrado é a secção de um dos lados de um quadrado por um ponto desse lado, de modo que a razão da maior parte nessa divisão para o referido lado é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Para a construção de um corte sagrado, considere um quadrado ABCD, cujo lado mede l . O arco com centro em A e raio $\frac{l\sqrt{2}}{2}$, intercepta dois lados desse quadrado, e cada um dos pontos de interseção desse arco com dois lados consecutivos é um corte sagrado. Na Figura 10, os vértices A_i , $i = 1, \dots, 8$, do octógono regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ são cortes sagrados, pois o arco $\widehat{A_2A_7}$, por exemplo, com centro em A e raio $AA_2 = AA_7$, intercepta o lado \overline{AD} no ponto A_7 , $\frac{AA_7A}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

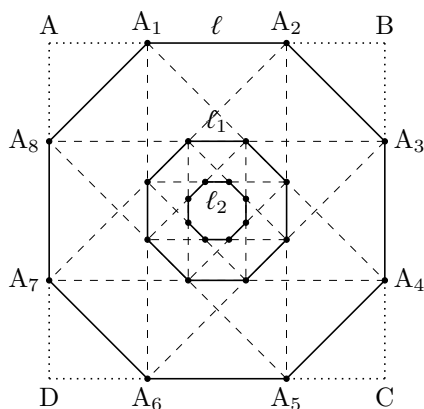


Figura 10: Octógono regular
 Fonte: Autoria própria

Veremos agora algumas propriedades matemáticas envolvidas em algumas construções em estilo romano (sistema de proporções baseados em nos números δ e $\sqrt{2}$), com o intuito de investigar como a Matemática, em algumas situações, relaciona-se com a Arquitetura, e, em especial, mostrar a necessidade de se estudar a Matemática e suas propriedades envolvidas nessas construções. Um exemplo que será mencionado aqui, é o cimborrio da Catedral de Burgos, na Espanha, que tem a forma de um octógono regular que contém vários octógonos regulares estrelados, inclusive, vários quadrados, construídos a partir do corte sagrado. Esse cimborrio é uma das mais belas cúpulas de Renascimento espanhol, um dos elementos mais importantes da catedral. Além de sua forma octogonal estrelada (Geometria), destacam-se ainda duas características, sua originalidade arquitetônica (Arquitetura) e sua abundância escultural (arte e beleza).

Esses octógonos regulares (estrelados ou não) e os quadrados que estão contidos no cimborrio têm seus vértices nas interseções das diagonais do octógono regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, como podem ser vistos nas Figuras 10, 11a, 11b e 11c.

Na figura 10, temos um octógono regular de lado l , cujas diagonais cruzam-se de modo que suas interseções são vértices de outros octógonos regulares de lados medindo $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$, tais que

$l_1 = l\delta^{-1}, l_2 = l_1\delta^{-1}, \dots, l_n = l_{n-1}\delta^{-1}, \dots$, ou seja,

$$\frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_3}{l_2} = \dots = \frac{l_n}{l_{n-1}} \dots = \delta^{-1},$$

e assim,

$$l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots, \quad (17)$$

formam uma P.G. infinita de razão δ^{-1} . Veja, também, na Figura 10 que o lado do quadrado ABCD mede δl , e que as diagonais do octógono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ se cruzam de modo que os pontos de interseção são vértices de quadrados, e que esses quadrados, a partir do segundo, possuem lados $l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots$, e, como

$$\frac{l}{\delta l} = \frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_3}{l_2} = \dots = \frac{l_n}{l_{n-1}} \dots = \delta^{-1},$$

tem-se, também, que a sequência

$$\delta l, l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots \quad (18)$$

é uma P.G. de razão δ^{-1} .

As P.G.s (17) e (18) geram números de Pell, com propriedades aditivas. Isso significa que

$$l_i + 2l_{i-1} = l_{i-2}, \quad (19)$$

para $i = 2, 3, 4, \dots$. Tal propriedade é satisfeita, também, pela sequência

$$1, \delta, \delta^2, \delta^3, \dots, \quad (20)$$

isto é,

$$\delta^{n-1} + 2\delta^n = \delta^{n+1}. \quad (21)$$

Além dessa propriedade, a sequência (20) também satisfaz à propriedade

$$\delta^n = p_n\delta + p_{n-1}, \quad (22)$$

em que p_n e p_{n-1} são números de Pell.

Essas sequências de octógonos regulares. Octógonos regulares estrelados e quadrados podem ser vistos no cimborrio da Catedral de Burgos (Figuras 11b e 11c), e que as razões entre dois elementos quaisquer desses octógonos e quadrados têm sempre alguma relação com a razão de prata. Isso se deve ao fato de a razão de prata gozar tanto de propriedades aditivas quanto geométricas, e este fato confere a essas razões características extremamente importantes e essenciais para se transformarem em bases de sistemas de proporções que são usados na Arquitetura.

3.4. A razão de prata na Arquitetura Japonesa

Hoje, para a Arquitetura Oriental, nem a razão de ouro, nem a razão de prata é vista como uma relação divina ou uma regra de *design*, mas essas razões ainda têm suas importâncias. É possível ver que existem projetos que as utilizaram como forma de criar uma orientação ou um sentimento de harmonia e serenidade. Dessa maneira, no Japão,

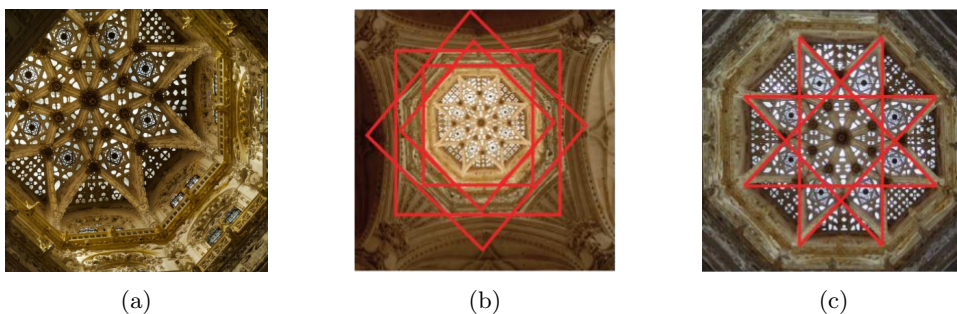


Figura 11: Cimborrio da Catedral de Burgos

Fonte: <https://www.flickr.com/photos/azuaje/4951726887/in/photostream/lightbox/>

”eles não acreditam muito no uso da Razão Áurea no design. Para eles, o uso da Razão de Prata cria um design mais bonito e sereno do que a Proporção Divina. Como a Razão de Prata obtém uma proporção menor (1,414), os objetos feitos com base nela estão mais próximos do quadrado do que os feitos com base na proporção oeste.”(ARCHITECTS ZONE, Golden and Silver Ratio in Architecture)

O uso da razão de prata na Arquitetura Oriental, em especial, na Arquitetura Japonesa, é evidenciado no templo *Horyu-ji* em Ikagura, Prefeitura de Nara, Japão. Esse templo budista, construído em madeira, é uma das construções do gênero mais antigas do mundo. Como podemos ver na Figura 12a, no prédio à direita, a razão entre o térreo e o seu segundo andar é de 1,414, e no prédio à esquerda, vemos que a razão entre o primeiro telhado e seu último telhado, também é de 1,414.

Na Figura 12b, temos a torre de radiodifusão *Tokyo Skytree*, na cidade de Tóquio, no Japão, uma das torres mais altas do mundo, com dois observatórios e uma antena de transmissão digital no topo. Nela, é possível observar que a razão das distâncias do piso ao topo da torre e do piso ao segundo observatório é de 1,414.

Observamos, nas Figuras 12a e 12b, um número comum: 1,414. Esse é um valor aproximado para $\sqrt{2}$ que, por sua vez, é tal que $\sqrt{2} = \delta - 1$, sendo essa a relação do templo *Horyu-ji* e da torre *Tokyo Skytree* com a razão de prata.

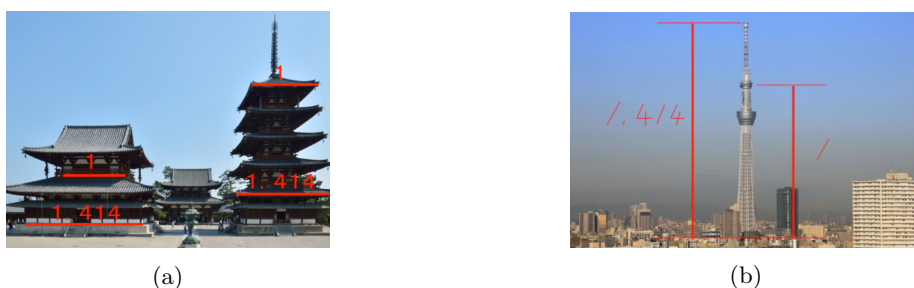


Figura 12: A razão de prata na arquitetura oriental: (a) Templo Horyu-ji; (b) Tokyo Skytree

Fonte: ARCHITECTS ZONE (2017)

Hishikawa Moronobu (1618 - 1694), que viveu durante a Era Edo, foi o primeiro grande pintor



Figura 13: Beauty Looking Back
 Fonte: BRITANNICA (2020)

japonês. Entre suas obras, destaca-se a *Beauty Looking Back*, Figura 13, de propriedade do Museu Nacional de Tóquio (BRITANNICA, 2020). A Figura 13, semelhante ao *Modulor* de *Le Corbusier*, é baseada no *Homem Vitruviano*, de Leonardo Da Vinci, que usava a razão de ouro para calcular as relações entre as partes do corpo humano. Na obra de *Hishikawa Moronobu* é possível observarmos a presença da razão de prata.

4. Sequência de Pell

Definição 3. Chama-se sequência de Pell², toda sequência definida pela recorrência $p_0 = 1$, $p_1 = 2$ e $p_n = p_{n-2} + 2p_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e seus termos 1, 2, 5, 12, 29, 70, ..., são chamados números de Pell.

O Lema a seguir mostra-nos a relação de um termo qualquer da sequência em (12) com os lados de um retângulo de prata e dois números consecutivos de Pell, e será útil na demonstração da relação da razão de prata com a sequência de Pell; na Seção 5.

Lema 1. Se a e b , $a > b$, são lados de um retângulo de prata, p_{n-2} e p_{n-1} são dois termos consecutivos da sequência de Pell, então

$$a_n = (-1)^n (p_{n-2}a - p_{n-1}b),$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Demonstração. Observemos, em (8), que os valores absolutos dos coeficientes de a e b são 1, 2, 5, 12, 29, sendo os de a , considerados a partir de 1, em a_2 , e os de b , a partir de 2, também em a_2 . Assim, a_n , em (12), pode ser reescrito como

$$a_n = (-1)^n (p_{n-2}a - p_{n-1}b), \quad (23)$$

em que p_{n-2} e p_{n-1} são números de Pell, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. De fato, para $n = 4$, a expressão (12) é verdadeira, pois,

$$a_4 = 5a - 12b = p_2a - p_3b = (-1)^4 (p_2a - p_3b).$$

²Matemático inglês (1611 - 1685)



Figura 14: John Pell

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Pell

Suponha agora que (12) seja válida para todo $k \in \mathbb{N}$, $4 < n \leq k$, isto é, $a_{k-1} = (-1)^{k-1}(p_{k-3}a - p_{k-2}b)$ e $a_k = (-1)^k(p_{k-2}a - p_{k-1}b)$. Para $n = k+1$, o termo geral da seqüência em (12), fica $a_{k+1} = a_{k-1} - 2a_k$, e, assim,

$$a_{k+1} = (-1)^{k-1}(p_{k-3}a - p_{k-2}b) - 2(-1)^k(p_{k-2}a - p_{k-1}b),$$

ou seja,

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}(p_{k-3}a - p_{k-2}b) + 2(-1)^{k+1}(p_{k-1}a - p_{k-1}b).$$

Daí,

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}[(p_{k-3} + 2p_{k-2}a) - (p_{k-2} + 2p_{k-1}b)] = (-1)^{k+1}(p_{k-1}a - p_k b).$$

Portanto, $a_n = (-1)^n(p_{n-2}a - p_{n-1}b)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. □

4.1. Algumas propriedades da seqüência de Pell

As identidades a seguir mostram algumas propriedades satisfeitas pelos números de Pell e, principalmente, o Teorema de Binet, que nos permite determinar um termo qualquer da seqüência de Pell, a partir dos números $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta' = 1 - \sqrt{2}$, raízes da equação $\delta^2 - 2\delta - 1 = 0$. Nas identidades 1 - 4, vamos considerar $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Identidade 1. (Soma dos n primeiros números de Pell)

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = \frac{p_{n+1} - p_n - 1}{2}.$$

Demonstração. Como $p_0 = \frac{p_1}{2}$ e $p_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$, temos que

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-2} + p_{n-1} &= \frac{p_1}{2} + \frac{p_2 - p_0}{2} + \frac{p_3 - p_1}{2} + \dots + \frac{p_{n-1} - p_{n-3}}{2} + \frac{p_n - p_{n-2}}{2} \\ &= \frac{-p_0 + (p_1 - p_1) + (p_2 - p_2) + \dots + (p_{n-2} - p_{n-2}) + p_{n-1} + p_n}{2} \\ &= \frac{p_{n+1} - p_n - 1}{2}. \end{aligned}$$

□

Identidade 2. (Soma dos n primeiros números de Pell de ordem ímpar)

$$p_1 + p_3 + p_5 + \dots + p_{2n-1} = \frac{p_{2n} - 1}{2}.$$

Demonstração. Como $p_{2i-1} = \frac{p_{2i} - p_{2i-2}}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$, temos que

$$\begin{aligned} p_1 + p_3 + p_5 + \dots + p_{2n-1} &= \frac{p_2 - p_0}{2} + \frac{p_4 - p_2}{2} + \dots + \frac{p_{2n-2} - p_{2n-4}}{2} + \frac{p_{2n} - p_{2n-2}}{2} \\ &= \frac{-p_0 + (p_2 - p_2) + (p_4 - p_4) + \dots + (p_{2n-2} - p_{2n-2}) + p_{2n}}{2} \\ &= \frac{p_{2n} - 1}{2}. \end{aligned}$$

□

Identidade 3. (Soma dos n primeiros números de Pell de ordem par)

$$p_0 + p_2 + p_4 + \dots + p_{2n-2} = \frac{p_{2n-1}}{2}.$$

Demonstração. Das identidades 1 e 2, seguem que $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{2n-1} = \frac{p_{2n+1} - p_{2n-1}}{2}$ e $p_1 + p_3 + p_5 + \dots + p_{2n-1} = \frac{p_{2n} - 1}{2}$, respectivamente. Como $p_0 + p_2 + p_4 + \dots + p_{2n-2} = (p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{2n-2} + p_{2n-1}) - (p_1 + p_3 + p_5 + \dots + p_{2n-1})$, temos que

$$p_0 + p_2 + p_4 + \dots + p_{2n-2} = \frac{p_{2n+1} - p_{2n-1}}{2} - \frac{p_{2n} - 1}{2} = \frac{p_{2n-1}}{2}.$$

□

Identidade 4. (Soma dos quadrados dos n primeiros números de Pell)

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{n-1}^2 = \frac{p_{n-1}p_n}{2}.$$

Demonstração. Como $p_0^2 = \frac{p_0p_1}{2}$ e $p_i^2 = \frac{p_i p_{i+1} - p_{i-1} p_i}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$, temos que

$$\begin{aligned} p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{n-1}^2 &= \frac{p_0p_1}{2} + \frac{p_1p_2 - p_0p_1}{2} + \frac{p_2p_3 - p_1p_2}{2} + \dots + \frac{p_{n-1}p_n - p_{n-2}p_{n-1}}{2} \\ &= \frac{(p_0p_1 - p_0p_1) + (p_1p_2 - p_1p_2) + \dots + (p_{n-2}p_{n-1} - p_{n-2}p_{n-1}) + p_{n-1}p_n}{2} \\ &= \frac{p_{n-1}p_n}{2}. \end{aligned}$$

□

Observações:

1. $\delta\delta' = -1$ e $\delta - \delta' = 2\sqrt{2}$
2. $1 + \delta^2 = \frac{4\delta}{\sqrt{2}}$ e $1 + (\delta')^2 = -\frac{4\delta'}{\sqrt{2}}$
3. $2 + \delta^2 + (\delta')^2 = (\delta - (\delta'))^2$
4. $1 + 2\delta = \delta^2$ e $1 + 2\delta' = (\delta')^2$

Identidade 5. (Teorema de Binet) Para $n \geq 0$, tem-se

$$P_n = \frac{\delta^{n+1} - (\delta')^{n+1}}{\delta - \delta'},$$

em que $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta' = 1 - \sqrt{2}$.

Demonstração. Usando indução sobre n , verificamos que $p_0 = \frac{\delta^{0+1} - (\delta')^{0+1}}{\delta - \delta'} = 1$. Suponhamos, agora, que p_n seja válida para todo $k \in \mathbb{N}$, $1 < n \leq k$. Assim, para $n = k + 1$,

$$P_{k+1} = P_{k-1} + 2P_k = \frac{\delta^k - (\delta')^k}{\delta - \delta'} + 2 \frac{\delta^{k+1} - (\delta')^{k+1}}{\delta - \delta'} = \frac{\delta^k(1 + 2\delta) - (\delta')^k(1 + 2\delta')}{\delta - \delta'}.$$

Da observação 4, segue que $p_{k+1} = \frac{\delta^{(k+1)+1} - (\delta')^{(k+1)+1}}{\delta - \delta'}$. Portanto, p_n é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Identidade 6. Para $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$, tem-se

$$P_{n+m} = P_{n-1}P_{m-1} + P_nP_m.$$

Demonstração. Da identidade 5 e das observações 1 e 2, seguem que

$$P_{n+m} = \frac{\delta^{(n+m)+1} - (\delta')^{(n+m)+1}}{\delta - \delta'} = \frac{\delta^{n+m}(\frac{4\delta}{\sqrt{2}}) - (\delta')^{n+m}(\frac{4\delta'}{\sqrt{2}})}{\delta - \delta'} = \frac{\delta^{n+m}(1 + \delta^2) + (\delta')^{n+m}(1 + (\delta')^2)}{(\delta - \delta')^2}.$$

Agora, das observações 1 e 3, podemos escrever p_{n+m} como

$$P_{n+m} = \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'} \cdot \frac{\delta^m - (\delta')^m}{\delta - \delta'} + \frac{\delta^{n+1} - (\delta')^{n+1}}{\delta - \delta'} \cdot \frac{\delta^{m+1} - (\delta')^{m+1}}{\delta - \delta'},$$

ou seja, $P_{n+m} = P_{n-1}P_{m-1} + P_nP_m$. \square

Identidade 7. Para $n \geq 1$, tem-se

$$P_{2n} = P_{n-1}^2 + P_n^2.$$

Demonstração. Fazendo $n = m$ na identidade 6, segue o resultado. \square

Identidade 8. Para $n \geq 1$, tem-se

$$P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} = (-1)^n.$$

Demonstração. O resultado segue imediatamente da identidade 6 e das observações 1 e 3. \square

5. A Razão de prata e a sequência de Pell

Mostraremos aqui como a razão de prata e a sequência de Pell estão relacionadas através do seguinte

Resultado 1. A razão de prata é o limite da sequência de Pell quando o número de termos cresce ilimitadamente, isto é,

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}}. \tag{24}$$

Demonstração. Vimos que o termo geral da seqüência (12) é dado por $a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1}$ e que, pelo Lema 1, pode ser escrito como $a_n = (-1)^n(p_{n-2}a - p_{n-1}b)$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Quando $n \rightarrow \infty$, temos que $a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1} \rightarrow 0$, e daí, $p_{n-2}a - p_{n-1}b \rightarrow 0$. Logo, $\frac{p_{n-1}b}{p_{n-2}b} - \frac{p_{n-2}a}{p_{n-2}b} \rightarrow 0$, ou seja, $\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} - \frac{a}{b} \rightarrow 0$. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} - \frac{a}{b} = \delta$. \square

Observemos que ao calcularmos o quociente entre dois termos consecutivos da seqüência de Pell, e considerando uma aproximação de 3 casas decimais, a Tabela 1 mostra-nos que, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, o algarismo da terceira casa decimal de $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ é sempre 4.

$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{29}{12}$	$\frac{70}{29}$	$\frac{169}{70}$	$\frac{498}{169}$	$\frac{985}{408}$	$\frac{2378}{985}$	$\frac{5741}{2378}$	$\frac{13860}{5741}$
2,000	2,500	2,400	2,416	2,413	2,414	2,414	2,414	2,414	2,414	2,414

Tabela 1: Quociente de um número da seqüência de Pell pelo seu anterior
Fonte: Autoria própria

Considerações Finais

A beleza da Matemática está presente em toda parte e é evidenciada nas possibilidades de aplicações em diversas áreas do conhecimento humano, apesar de serem desconhecidas por muitos. Tais aplicações podem ser mais exploradas em sala de aula e servirem de elo para a interdisciplinaridade entre conteúdos regularmente estudados, além de motivar os estudantes e deixar as aulas mais interessantes.

Não obstante ser um tema interessante, é pequeno o número de professores e de alunos que conhecem sobre a razão de prata, talvez porque não seja explorado nos livros didáticos, tornando-o pouco conhecido. Além de ser possível explorar as propriedades dessa razão, com os estudos feitos ao longo do texto, viu-se a possibilidade de explorar as propriedades matemáticas do retângulo de prata e da razão de prata, e mostrar que a Matemática está presente no nosso dia a dia, com aplicações na indústria gráfica e na Arquitetura, e relacionar a razão de prata com a seqüência de Pell.

Em linhas gerais, este artigo trouxe uma forma de trabalhar a Matemática e a interdisciplinaridade relacionada com o número de prata e mostrou que a Matemática necessária para isso é, de fato, acessível aos professores e alunos do Ensino Médio. Acreditamos que seja possível trabalhar diversos tópicos de Matemática em um contexto interdisciplinar, porém, para isso, além de conhecer o próprio conteúdo matemático a ser ensinado, é necessário que o professor mergulhe um pouquinho em outras áreas, o que não é tão simples, mas é factível.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a José Heldemir Moreira dos Santos, ex-aluno do Curso de Matemática da Feclesc/Uece, ex-bolsista e ex-orientando, por sua ajuda no L^AT_EX, na construção das figuras do texto.

Também, queria agradecer ao Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho que, na conversa que tive com ele no II Corem, em Mossoró - RN, em dezembro de 2019, incentivou-me a escrever um artigo sobre a razão de prata para a RPM. Este artigo é um dos frutos dessa conversa.

Referências

- [1] ARCHITECTES ZONE *Golden and Silver in Architecture*. Disponível em: <<https://architects.zone/golden-and-silver-ratio-in-architecture/>>. Acesso em: 23 set. 2021.
- [2] Ávila, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, n°6, p. 9-14, 1985.
- [3] Azevedo, N. C. *O Número de Ouro e Construções Geométricas*. Dissertação de Mestrado (Profmat), Universidade Federal do Goiás - UFG, 2013.
- [4] BRITANNICA. Moronobu, H. *Japanese printmaker*. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Hishikawa-Moronobu>>. Acesso em: 24 set. 2021.
- [5] Spinadel, V. W. *La familia de números metálicos*. Cuadernos del CIMBAGE, p. 17-44, 2004.
- [6] Huntley, H. E. *The divine proportion*. Massachusetts: Courier Corporation, 2012
- [7] Stakhov, A. *The mathematics of harmony: from Euclid to contemporary mathematics and computer science*. Singapore: World Scientific, v. 22, 2009.
- [8] Paulino, F. F., Santos, F. W. M. e Oliveira, J. L. O Código Da Vinci e o encontro entre Matemática, História e Arte. *Educação Matemática Debate*, v. 5, n°11, p. 10-26, 2021.
- [9] Oliveira, J. L. A Razão de Prata. *Revista do Professor de Matemática*, n°103, p. 42-46, 2021.
- [10] Kappraff, J. Connections: The geometric bridge between art and science. *Singapore: World Scientific*, v. 25, 2001.
- [11] Kappraff, J. Beyond measure: A guided tour through nature, Myth and Number. *Singapore: World Scientific*, v. 28, 2002.
- [12] Kappraff, J. *Systems of Proportion in Design and Architecture and their Relationship to Dynamical Systems Theory*. Mathematical Institute SASA, p. 27-40, 1999.
- [13] Silva, M. M. *Desmistificando o conjunto dos Números Irracionais*. Dissertação de Mestrado (Profmat), Universidade Estadual do Ceará - UECE, 2018.

João Luzeilton de Oliveira
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central
FECLESC
Universidade Estadual do Ceará - UECE
<joao.luzeilton@uece.br>

Recebido: 27/08/2022
Publicado: 06/04/2022