

# Contando quadrados coloridos com o Lema que não é de Burnside

Diogo Diniz<sup>1</sup> Caio Antony Gomes<sup>2</sup>

## Resumo

Neste artigo contamos quantos quadrados coloridos podem ser construídos utilizando palitos de picolé pintados, cada um, com uma de  $m$  cores. Duas situações são consideradas, pintamos apenas um ou os dois lados de cada palito. Veremos que para construir um quadrado com palitos que tenham os dois lados pintados da mesma cor, gastamos mais tinta, porém, o número de quadrados que podemos construir é menor que usando palitos com apenas um lado pintado. O processo de contagem dos quadrados coloridos envolve as rotações e reflexões que preservam o quadrado, chamadas simetrias. No primeiro caso o conjunto de simetrias que consideramos consiste apenas das rotações que preservam o quadrado enquanto, no segundo caso, devemos considerar também reflexões. Em cada caso, com a composição de funções, o conjunto de simetrias que consideramos constitui uma estrutura algébrica denominada grupo. No decorrer do artigo, apresentaremos o conceito de ação de grupo e um resultado relacionado que, entre várias denominações, ficou também conhecido como o Lema que não é de Burnside.

**Palavras-chave:** Grupos; ação de grupos; órbitas.

## Abstract

In this paper we count how many colored squares may be constructed with popsicle sticks painted, each one, with one of  $m$  colors. Two situations are considered, we paint one or both sides of each stick. We will see that in order to construct a square with sticks that have both sides painted, with the same color, we use more paint, however, the number of squares that may be constructed is smaller than using sticks with only one side painted. The method used to count the coloured squares involves rotations and reflections that preserve the square, called symmetries. In the first case the symmetries that we consider are the rotations that preserve the square while, in the second, case we also need to consider reflections. In each case, with the composition of functions, the set of symmetries considered forms an algebraic structure known as group. Throughout the paper we present the notion of group actions and a related result that, among many eponymous, became known also as The Lemma that is not Burnside's.

**Keywords:** Groups; group actions; orbits.

<sup>1</sup>Apoiado pelo CNPq, projeto 301704/2019-8

<sup>2</sup>Apoiado pela Capes com uma bolsa de Mestrado

## 1. Introdução

Os amigos Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo constroem um quadrado utilizando palitos de picolé com um dos lados pintados de azul ou verde. Cada um escolhe um palito de uma cor e o coloca formando um dos lados do quadrado; em seguida desenha a representação do quadrado que vê, como na Figura 1.

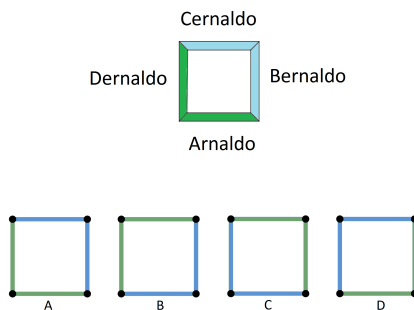


Figura 1: Quadrado colorido construído e suas representações

Arnaldo propõe ao grupo o problema de contar quantos quadrados podem ser formados desse modo. Bernaldo afirma, rapidamente, invocando o princípio multiplicativo de contagem, que existem duas escolhas de cor para cada um dos quatro lados do quadrado e que, portanto, podem ser construídos  $2^4 = 16$  quadrados coloridos. Cernaldo, entretanto, observando as representações construídas, diz que há representações do mesmo tipo de quadrado, no seguinte sentido: há representações em que as posições entre as cores são as mesmas. Dernaldo, observando as representações A, B, C e D na Figura 1, afirma que, de modo geral, as representações de um mesmo quadrado podem ser obtidas uma a partir de outra por meio de uma rotação em torno do centro do quadrado de um múltiplo de  $\frac{\pi}{2}$  radianos.

Os 4 amigos põem-se a construir quadrados e desenhar as suas representações. Dessa forma resolveram analisar representações que correspondem ao mesmo quadrado, uma obtida da outra por meio de uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  ou  $\frac{3\pi}{2}$  radianos, em torno do centro do quadrado (o centro do círculo no qual o quadrado está inscrito). Ao total foram obtidos os 6 conjuntos de representações na Figura 2; cada um é o conjunto das possíveis representações de um quadrado; o total de elementos nesses conjuntos é 16. Desse modo, os 4 amigos concluíram que existem ao todo 6 quadrados coloridos que podem ser construídos.

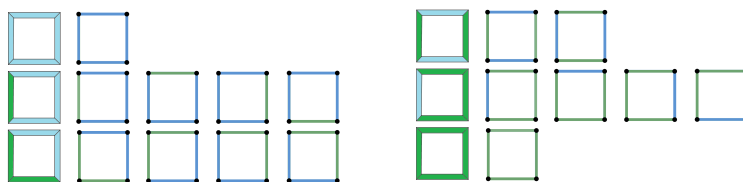


Figura 2: Os 6 quadrados coloridos e suas representações

## 2. Contando quadrados coloridos

O problema e a solução dos quatro amigos, naturalmente, nos levam a outras perguntas. Se tivermos um número  $m$  cores à disposição quantos quadrados coloridos podem ser construídos? Nosso objetivo nesta seção é apresentar a resposta para essa questão; para  $m = 2$  vimos que a resposta é 6. Podemos também indagar o que ocorre se construímos polígonos regulares em vez de quadrados. De fato, as ideias apresentadas pelos 4 amigos na Introdução permitem-nos desenvolver um método para abordar a questão a seguir.

**Questão 1.** Para  $n = 3, 4, 5, \dots$ , quantos polígonos regulares coloridos de  $n$  lados podem ser construídos com palitos de picolé pintados, de um dos lados, com uma de  $m$  cores?

Iremos considerar as representações dos polígonos que podem ser construídos no plano com centro no ponto  $O$ , como na Figura 3.

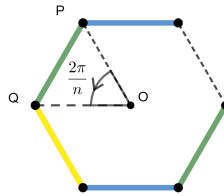


Figura 3: Representação de um polígono colorido

Denotamos por  $X$  o conjunto de todas as representações dos polígonos; o princípio multiplicativo de contagem utilizado por Bernaldo permite concluir que  $X$  tem  $m^n$  elementos, pois para cada um dos  $n$  lados do polígono temos  $m$  escolhas de cores. Consideremos  $O$  o centro do polígono regular de  $n$  lados. A rotação  $r$  de um ângulo  $\frac{2\pi}{n}$ , em torno do ponto  $O$ , no sentido anti-horário<sup>3</sup>, é a função do plano que fixa o ponto  $O$  e para  $P \neq O$ , associa o ponto  $Q = r(P)$  de modo que o ângulo  $\angle POQ$  mede  $\frac{2\pi}{n}$  radianos (Figura 3) e seja  $R$  o conjunto das rotações de  $\frac{2k\pi}{n}$  radianos,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , em torno do ponto  $O$ .

Podemos fazer a composição de quaisquer funções em que o domínio e contradomínio coincidem com um conjunto dado. Em particular, a composta  $r \circ r$ , que denotaremos por  $r^2$ , é a rotação de  $\frac{4\pi}{n}$  radianos. De modo geral para  $0 < k < n$  a composta

$$r^k = \underbrace{r \circ \dots \circ r}_{k \text{ parcelas}}$$

é a rotação de um ângulo igual a  $\frac{2k\pi}{n}$ . Vamos denotar por  $I$  a função identidade, vale a igualdade  $r^n = I$ . Temos então

$$R = \{I, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}.$$

Adotaremos a convenção que  $r^0 = I$ . Dada uma rotação  $s$  em  $R$  existe  $s^{-1} \in R$  de modo que  $s \circ s^{-1} = I = s^{-1} \circ s$ ,<sup>4</sup> de fato sendo  $s = r^k$ , com  $0 \leq k < n$ , então  $s^{-1}$  é a rotação de  $\frac{2(n-k)\pi}{n}$  radianos.

<sup>3</sup>Iremos assumir que as rotações são no sentido anti-horário

<sup>4</sup>Note que  $s^{-1}$  é a função inversa de  $s$ , o que justifica a notação.

Observe que a composição de rotações em  $R$  é comutativa, ou seja, se  $s, t \in R$  então  $s \circ t = t \circ s$ . Tal propriedade será utilizada adiante no Lema 2.

Sejam  $s \in R$  e  $x \in X$ , denotamos por  $s \cdot x$  a representação obtida aplicando a rotação  $s$  à representação  $x$ .

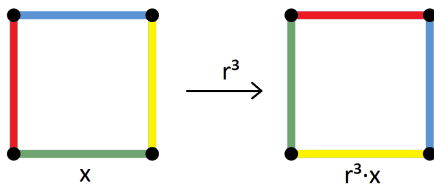


Figura 4: Representações  $x$  e  $s \cdot x$  para  $s = r^3$

É simples verificar que para qualquer  $x$  em  $X$  e para quaisquer  $r_1, r_2 \in R$  temos

$$I \cdot x = x, \quad r_1 \cdot (r_2 \cdot x) = (r_1 r_2) \cdot x \quad (1)$$

Dado  $x \in X$  sabemos que  $R \cdot x := \{s \cdot x \mid s \in R\}$  é o conjunto das possíveis representações de um dos polígonos coloridos, portanto o número de polígonos coloridos que podemos construir é o número de tais conjuntos. Iremos nos referir a  $R \cdot x$  como a *órbita* de  $x$ . Denotamos por  $X/R$  o conjunto das órbitas dos elementos de  $X$ , isto é,

$$X/R = \{R \cdot x \mid x \in X\}.$$

Com essa notação, o número de polígonos coloridos que podem ser construídos é igual a  $|X/R|$ , em que  $|X/R|$  denota o número de elementos de  $X/R$ .

Com essas considerações obtemos os resultados que apresentamos a seguir.

**Lema 1.** *Se  $x'$  é um elemento de uma órbita  $A \in X/R$ , então  $R \cdot x' = A$ .*

*Demonstração.* Seja  $x$  um elemento de  $X$  tal que  $A = R \cdot x$ . Vamos utilizar as igualdades em (1) para mostrar que  $R \cdot x' = R \cdot x$ . De fato, como  $x' \in R \cdot x$  existe uma rotação  $s \in R$  de modo que  $x' = s \cdot x$ . Assim, para qualquer  $t \in R$ , temos

$$t \cdot x' = t \cdot (s \cdot x) = (ts) \cdot x \in R \cdot x,$$

daí segue que  $R \cdot x' \subseteq R \cdot x$ . Como  $x' = sx$  segue das igualdades em (1) que  $x = (s^{-1}) \cdot x'$ . De modo análogo concluímos que  $R \cdot x \subseteq R \cdot x'$ . Assim obtemos a igualdade  $R \cdot x = R \cdot x'$ .  $\square$

**Teorema 1.** *Seja  $c = |X/R|$  e sejam  $A_1, \dots, A_c$  as distintas órbitas em  $X/R$ . Então*

1.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  sempre que  $i \neq j$ ,
2.  $X = A_1 \cup \dots \cup A_c$ .

*Demonstração.* Vamos demonstrar primeiro o item 1 do enunciado. Sejam  $i, j \in \{1, \dots, c\}$  tais que  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , nesse caso podemos considerar um elemento  $x \in A_i \cap A_j$ . O Lema 1 implica que  $A_i = R \cdot x$  e  $A_j = R \cdot x$ , logo  $A_i = A_j$ . Lembramos que as órbitas  $A_1, \dots, A_c$  são distintas, portanto da igualdade  $A_i = A_j$  segue que  $i = j$ . Assim concluímos que se  $i \neq j$  então  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Agora iremos provar a igualdade no item 2 do enunciado. Dado  $x \in X$  o conjunto  $R \cdot x$  é uma órbita, logo existe um índice  $i$  tal que  $R \cdot x = A_i$ . Como  $x = I \cdot x \in R \cdot x$  concluímos que  $x \in A_i$ , portanto  $x \in A_1 \cup \dots \cup A_c$ . Daí segue que  $X \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_c$ . A inclusão contrária é claramente verdadeira, portanto  $X = A_1 \cup \dots \cup A_c$ .  $\square$

Como consequência dos resultados acima podemos provar a igualdade no corolário a seguir, que determina o número de órbitas  $|X/R|$  em termos da quantidade de representações na órbita de cada  $x \in X$ . Mais precisamente, para cada  $x \in X$  associamos o número  $\frac{1}{|R \cdot x|}$ , em que  $|R \cdot x|$  denota o número de elementos de  $R \cdot x$ . Em seguida, enumeramos os elementos de  $X$  e somamos os valores associados a cada um deles; tal soma é denotada por  $\sum_{x \in X} \frac{1}{|R \cdot x|}$ . Mostraremos a seguir que essa soma coincide com o número de órbitas. Esse corolário é nosso primeiro passo em direção ao Teorema 2 que nos permite determinar  $|X/R|$ , e é o principal resultado desta seção.

**Corolário 1.** *Vale a igualdade*

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|R \cdot x|} = |X/R|.$$

*Demonstração.* Vamos provar primeiro que para cada órbita  $A_i \in X/R$  temos

$$\sum_{x \in A_i} \frac{1}{|R \cdot x|} = 1. \tag{2}$$

De fato, segue do Lema 1 que  $R \cdot x = A_i$  para qualquer  $x \in A_i$ . Desse modo, cada uma das parcelas na soma (2) é igual a  $\frac{1}{|A_i|}$ , por outro lado o número de parcelas é  $|A_i|$ , portanto

$$\sum_{x \in A_i} \frac{1}{|R \cdot x|} = \frac{1}{|A_i|} + \dots + \frac{1}{|A_i|} = |A_i| \cdot \frac{1}{|A_i|} = 1.$$

O Teorema 1 implica que cada elemento de  $X$  pertence a uma, e somente uma, órbita. Podemos então agrupar as parcelas da soma  $\sum_{x \in X} \frac{1}{|R \cdot x|}$  que pertencem a uma mesma órbita. Procedendo dessa forma e utilizando a igualdade em (2) temos

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|R \cdot x|} = \sum_{x \in A_1} \frac{1}{|R \cdot x|} + \dots + \sum_{x \in A_c} \frac{1}{|R \cdot x|} = 1 + \dots + 1 = c = |X/R|.$$

$\square$

Como próximo passo em direção ao Teorema 2, para cada  $x \in X$  denotamos por  $E_x$  o conjunto  $\{r \in R \mid r \cdot x = x\}$  das rotações em  $R$  que fixam  $x$ . Iremos obter, utilizando o Corolário 1 e os dois lemas a seguir, a igualdade na Proposição 1 que relaciona as quantidades de elementos nos conjuntos  $E_x$ , denotado por  $|E_x|$ , e o número de órbitas.

**Proposição 1.** *A soma das quantidades de elementos em cada um dos conjuntos  $E_x$  é igual ao produto  $|R| \cdot |X/R|$ , mais precisamente*

$$\sum_{x \in X} |E_x| = |R| \cdot |X/R|.$$

Antes de demonstrar a proposição acima precisamos dos seguintes lemas.

**Lema 2.** *Seja  $x \in X$ . Se  $x' \in R \cdot x$  então  $E_{x'} = E_x$ .*

*Demonstração.* Como  $x' \in R \cdot x$  temos  $x' = s \cdot x$  para alguma rotação  $s \in R$ . Seja  $t$  uma rotação em  $E_x$ . Utilizando a segunda igualdade em (1) e a comutatividade em  $R$  temos

$$t \cdot x' = t \cdot (s \cdot x) = (ts) \cdot x = (st) \cdot x = s \cdot (t \cdot x) = s \cdot x = x',$$

assim  $t \in E_{x'}$ . Concluimos portanto que  $E_x \subseteq E_{x'}$ . Utilizando mais uma vez as igualdades em (1) concluimos que  $x = s^{-1} \cdot x'$  e de modo análogo provamos que  $E_{x'} \subseteq E_x$ .  $\square$

**Lema 3.** *Para cada  $x \in X$  temos*

$$|E_x| = \frac{|R|}{|R \cdot x|}.$$

*Demonstração.* Sejam  $I, r, \dots, r^{n-1}$  as rotações em  $R$ , onde  $r$  é a rotação de  $\frac{2\pi}{n}$  radianos. Os elementos de  $R \cdot x$  são

$$x, r \cdot x, \dots, (r^{n-1}) \cdot x. \tag{3}$$

Note que o elemento  $x' \in R \cdot x$  aparece  $|E_{x'}|$  vezes na lista (3). Segue do Lema 2 que  $E_{x'} = E_x$ , portanto cada elemento listado em (3) é repetido  $|E_x|$  vezes. Assim concluimos que o número de elementos na órbita determinada por  $x$  é  $\frac{|R|}{|E_x|}$ , isto é,

$$|R \cdot x| = \frac{|R|}{|E_x|},$$

donde segue a igualdade no enunciado do lema.  $\square$

O resultado acima nos permite concluir que para qualquer  $x \in X$  o número de rotações que fixam  $x$  divide  $n$ , fato que é em si interessante. Além disso, juntamente com o Corolário 1, tem como consequência a Proposição 1.

A igualdade na Proposição 1 parece ser a solução para determinar o número de órbitas; por outro lado pode não ser prático calcular a soma  $\sum_{x \in X} |E_x|$ . Com efeito, no caso dos quadrados coloridos, i.e.,  $n = 2$ , a soma tem  $m^4$  parcelas. Para superar tal dificuldade, o próximo, e último, passo para provar o Teorema 2 é interpretar essa soma e escrevê-la de outra maneira, mais conveniente. Com esse objetivo marcamos na tabela abaixo as entradas em que  $r \cdot x = x$ .

$\cdot$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_{m^n}$
$I$	$I \cdot x_1$	$I \cdot x_2$	$\dots$	$I \cdot x_{m^n}$
$r$	$r \cdot x_1$	$r \cdot x_2$	$\dots$	$r \cdot x_{m^n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$r^{n-1}$	$r^{n-1} \cdot x_1$	$r^{n-1} \cdot x_2$	$\dots$	$r^{n-1} \cdot x_{m^n}$

O número de entradas marcadas na coluna correspondente a um elemento  $x$  de  $X$  é  $|E_x|$ . Assim  $\sum_{x \in X} |E_x|$  é o número de entradas marcadas na tabela, i. e., o número de pares  $(r, x)$  com  $r \in R$  e  $x \in X$  tais que  $r \cdot x = x$ . Podemos determinar esse número de outra forma; para isso, dada uma

rotação  $r \in R$ , considere o conjunto  $X^r := \{x \in X \mid r \cdot x = x\}$  das representações fixadas por  $r$ . Então o número de entradas marcadas na linha  $r$  é  $|X^r|$ . Portanto a soma  $\sum_{r \in R} |X^r|$  também é o total de pares  $(r, x) \in R \times X$  com  $r \cdot x = x$ . Assim temos a igualdade

$$\sum_{r \in R} |X^r| = \sum_{x \in X} |E_x|.$$

Com isso podemos simplificar, e muito, os cálculos. De fato, no caso dos quadrados ( $n = 4$ ), por exemplo, a soma do lado esquerdo tem 4 parcelas. Essa igualdade juntamente com a Proposição 1 implicam o teorema que enunciaremos a seguir.

**Teorema 2.** *Vale a igualdade*

$$|X/R| = \frac{1}{|R|} \sum_{r \in R} |X^r|.$$

Esse resultado tem uma interpretação interessante: a quantidade de órbitas é igual ao número médio de elementos fixados por rotações.

Vamos agora utilizar o Teorema 2 para resolver a Questão 1 para quadrados; então assumimos até o final da seção que  $n = 4$ . O conjunto  $X$  tem  $m^4$  elementos. Lembramos que  $r$  é a rotação de  $\frac{2\pi}{4}$  radianos. Podemos verificar diretamente que  $X^I = X$  e também que  $X^r, X^{r^3}$  consistem dos quadrados em que todos os lados têm a mesma cor. O conjunto  $X^{r^2}$  consiste dos quadrados em que os lados paralelos têm a mesma cor, como na Figura 5.

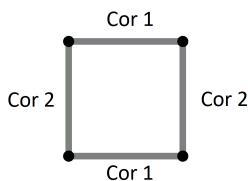


Figura 5: Elemento genérico de  $X^{r^2}$

Temos então  $m$  escolhas para a Cor 1 e também para a Cor 2. Assim concluímos que  $|X^{r^2}| = m^2$ . Desse modo obtemos a igualdade

$$\sum_{r \in R} |X^r| = |X^I| + |X^r| + |X^{r^2}| + |X^{r^3}| = m^4 + m + m^2 + m = m^4 + m^2 + 2m.$$

Portanto concluímos, utilizando o Teorema 2, que podem ser construídos  $\frac{m^4+m^2+2m}{4}$  quadrados coloridos quando pintamos os palitos de picolé de um dos lados escolhendo uma entre  $m$  cores.

É interessante observar que como  $\frac{m^4+m^2+2m}{4}$  é um número natural, então  $m^4 + m^2 + 2m$  é múltiplo de 4 para qualquer natural  $m$ , fato esse que não é trivial. Encerramos esta seção convidando o leitor a experimentar e resolver o problema de contar quantos são os triângulos, pentágonos e hexágonos coloridos podem ser construídos e, de modo geral, como o Teorema 2 pode ser utilizado para resolver a Questão 1.

### 3. Contando novamente quadrados coloridos

Nesta seção iremos determinar quantos quadrados coloridos podem ser construídos com palitos de picolé pintados dos dois lados com a mesma cor escolhida entre  $m$  cores.

Veremos adiante que o número de quadrados coloridos que podem ser construídos neste caso é, em geral, menor que o número de quadrados que podem ser construídos pintando os palitos de apenas um dos lados. Para  $m = 2$  podem ser construídos 6 quadrados coloridos, assim como ocorreu na situação da Introdução. Porém com 3 cores podemos construir apenas 21 quadrados coloridos neste caso (veja a Figura 6), enquanto pintando os palitos apenas de um dos lados temos 24 quadrados coloridos, como vimos na Seção 2.

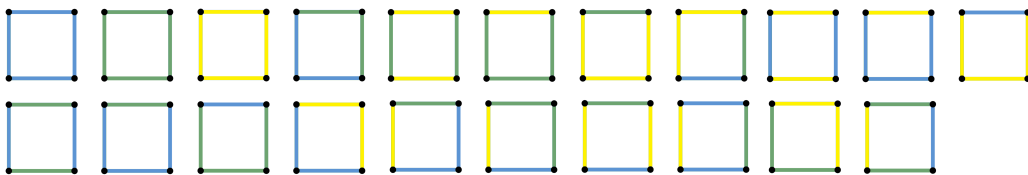


Figura 6: Os 21 quadrados coloridos construídos com palitos pintados dos dois lados e  $m = 3$

A diferença é que quando pintamos os palitos apenas de um dos lados, os quadrados na Figura 7 são diferentes.

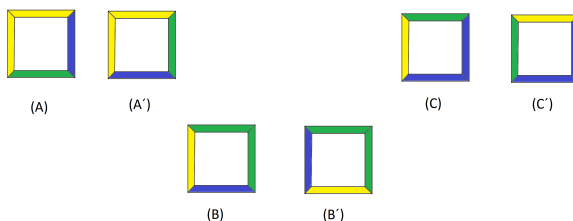


Figura 7: Pares de quadrados

Porém, quando pintamos cada um dos palitos dos dois lados com uma das cores, temos em (A) e (A') um mesmo quadrado em duas posições diferentes: podemos pegar o quadrado (A) e girar no espaço e posicioná-lo como está em (A'). Analogamente em (B) e (B') temos o mesmo quadrado em posições diferentes e também em (C) e (C'). Então, se pintamos cada palito dos dois lados, para obter as representações de um mesmo quadrado a partir de uma representação dada, utilizamos, além das rotações  $I, r, r^2, r^3$  no plano, as reflexões  $R_{D_1}, R_{D_2}$  em torno das diagonais  $D_1$  e  $D_2$ , na Figura 8, e também as reflexões  $R_M, R_N$  em torno das retas  $M, N$ .

Essas transformações constituem o conjunto  $D_4$  das simetrias do quadrado que, com a composição de funções, tem propriedades de uma estrutura algébrica chamada grupo. Essas são as isometrias do plano que preservam o quadrado, i. e., que associam a um ponto do quadrado outro ponto que pertence também ao quadrado.



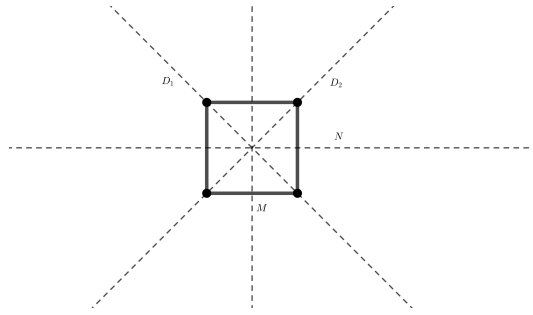


Figura 8: Retas que determinam as reflexões que preservam o quadrado

**Definição 1.** Seja  $G$  um conjunto não vazio com uma operação binária  $\circ$ , isto é, uma aplicação que associa a cada par  $(g_1, g_2)$  em  $G \times G$  um elemento  $g_1 \circ g_2$  de  $G$ . Dizemos que  $G$ , com essa operação, é um grupo se:

- (i) A operação  $\circ$  é associativa, isto é,  $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$  para quaisquer  $g_1, g_2, g_3$  em  $G$ .
- (ii) Existe um elemento  $e$  em  $G$ , chamado de elemento neutro, de modo que  $e \circ g = g = g \circ e$  para qualquer elemento  $g$  de  $G$ .
- (iii) Para cada  $g$  em  $G$  existe um elemento  $g^{-1}$  em  $G$ , chamado inverso de  $g$ , tal que  $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$ .

Podemos verificar que, com a composição, o conjunto  $D_4$  das simetrias do quadrado é um grupo. Na Figura 9 vemos, por exemplo, que  $R_M \circ R_N = r^2$  e que  $R_{D_1} \circ r = R_M$ .

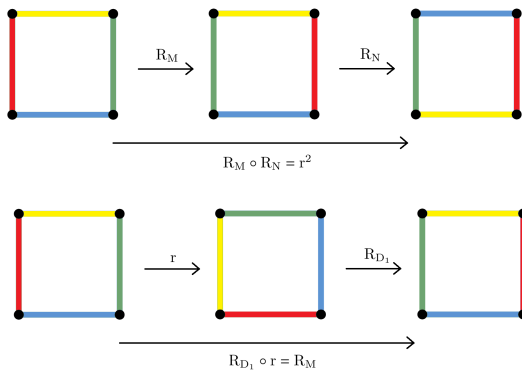


Figura 9: As compostas  $R_M \circ R_N$  e  $R_{D_1} \circ r$

Com a operação de composição obtemos a seguinte tabela de composições de elementos de  $D_4$ . Observe que a composição não é comutativa.

o	I	r	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	R <sub>N</sub>	R <sub>M</sub>	R <sub>D<sub>1</sub></sub>	R <sub>D<sub>2</sub></sub>
I	I	r	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	R <sub>N</sub>	R <sub>M</sub>	R <sub>D<sub>1</sub></sub>	R <sub>D<sub>2</sub></sub>
r	r	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	I	R <sub>D<sub>2</sub></sub>	R <sub>D<sub>1</sub></sub>	R <sub>N</sub>	R <sub>M</sub>
r <sup>2</sup>	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	I	r	R <sub>M</sub>	R <sub>N</sub>	R <sub>D<sub>2</sub></sub>	R <sub>D<sub>1</sub></sub>
r <sup>3</sup>	r <sup>3</sup>	I	r	r <sup>2</sup>	R <sub>D<sub>1</sub></sub>	R <sub>D<sub>2</sub></sub>	R <sub>M</sub>	R <sub>N</sub>
R <sub>N</sub>	R <sub>N</sub>	R <sub>D<sub>1</sub></sub>	R <sub>M</sub>	R <sub>D<sub>2</sub></sub>	I	r <sup>2</sup>	r	r <sup>3</sup>
R <sub>M</sub>	R <sub>M</sub>	R <sub>D<sub>2</sub></sub>	R <sub>N</sub>	R <sub>D<sub>1</sub></sub>	r <sup>2</sup>	I	r <sup>3</sup>	r
R <sub>D<sub>1</sub></sub>	R <sub>D<sub>1</sub></sub>	R <sub>M</sub>	R <sub>D<sub>2</sub></sub>	R <sub>N</sub>	r <sup>3</sup>	r	I	r <sup>2</sup>
R <sub>D<sub>2</sub></sub>	R <sub>N</sub>	R <sub>N</sub>	R <sub>D<sub>1</sub></sub>	R <sub>M</sub>	r	r <sup>3</sup>	r <sup>2</sup>	I

Assim concluímos que  $D_4$  com a composição é de fato um grupo, chamado grupo Diedral. Do mesmo modo que no problema proposto na Seção 2 o conjunto  $X$  das representações dos quadrados tem  $m^4$  elementos. Para cada  $d \in D_4$  e  $x \in X$  também denotamos por  $d \cdot x$  a representação obtida aplicando  $d$ , que é uma rotação ou uma reflexão, à representação  $x$ . Valem igualdades análogas às que estão em (1); elas refletem a ideia de que temos uma ação do grupo  $D_4$  no conjunto  $X$  das representações dos quadrados coloridos.

**Definição 2.** Sejam  $G$  um grupo com elemento neutro  $e$ , seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma ação de  $G$  em  $X$  é uma aplicação que associa a cada par  $(g, x)$  em  $G \times X$  um elemento  $g \cdot x$  de  $X$  de modo que para qualquer  $x \in X$  e quaisquer  $g_1, g_2$  em  $G$  temos

$$e \cdot x = x, \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \circ g_2) \cdot x, \tag{4}$$

onde, na segunda igualdade,  $\circ$  é a operação binária do grupo  $G$ .

Na Seção 2 o conjunto  $R$  com a composição é um grupo e temos uma ação de  $R$  no conjunto  $X$  das representações dos polígonos coloridos. A terminologia que utilizamos neste caso particular é utilizada em geral.

**Definição 3.** Sejam  $G$  um grupo,  $X$  um conjunto não vazio e  $(g, x) \rightarrow g \cdot x$ , onde  $g \in G$  e  $x \in X$ , uma ação de  $G$  em  $X$ . Se  $x \in X$ , então dizemos que o conjunto  $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$  é a órbita de  $x$ . O conjunto das órbitas é denotado por  $X/G$ . Para um elemento  $g$  do grupo  $G$  denotamos  $X^g$  o conjunto  $\{x \in X \mid g \cdot x = x\}$  dos elementos de  $X$  fixados por  $g$ .

O Teorema 2 é um caso particular de um resultado que vale, de modo geral, para ações de um grupo em um conjunto, o número de órbitas da ação é igual ao número médio de pontos fixos de um elemento do grupo.

**Lema 4 (Cauchy-Burnside-Frobenius).** *Seja  $G$  um grupo finito e seja  $X$  um conjunto não vazio finito com uma ação  $(g, x) \rightarrow g \cdot x$ ,  $g \in G$ ,  $x \in X$ , de  $G$  em  $X$ . Então*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

O resultado que enunciamos com Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius é também conhecido com Teorema de contagem de Burnside, Lema de Cauchy-Frobenius, Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius, Lema de contagem de órbitas e, algumas vezes, é referido na literatura como o Lema que não é de Burnside (veja, por exemplo, [2], [3]). É possível comparar as demonstrações do caso particular que fizemos na Seção 2 e a demonstração do resultado acima que pode ser encontrada em [4] e verificar que com algumas adaptações temos a demonstração do Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius.

Observamos que na prova do Lema 2 foi utilizada a comutatividade da operação em  $R$ ; mesmo a operação em  $D_4$  não sendo comutativa ainda vale a igualdade no Lema 3. Tal resultado não será provado aqui, uma prova pode ser encontrada em [4, Teorema 6.1].

Vamos agora usar esse lema para determinar quantos quadrados coloridos podemos construir com os palitos de picolé pintados dos dois lados. Seja então  $X$  o conjunto das  $m^4$  representações dos quadrados coloridos. Dois elementos de  $X$  representam o mesmo quadrado se, e somente se, estão na mesma órbita pela ação de  $D_4$  em  $X$ . O número de quadrados coloridos nesse caso é então igual a  $|X/D_4|$ . Verificamos na Seção 1 que

$$|X^I| = m^4, |X^r| = m, |X^{r^2}| = m^2, |X^{r^3}| = m.$$

O conjunto  $X^{R_M}$  consiste dos elementos de  $X$  em que os lados verticais têm a mesma cor e as cores dos lados horizontais são escolhidas independentemente, como na Figura 10 a seguir.

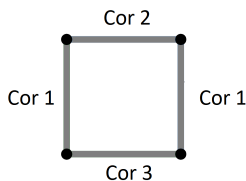


Figura 10: Elemento genérico de  $X^{R_M}$

Temos então  $m$  escolhas para cada uma das três cores, portanto  $|X^{R_M}| = m^3$ . De modo análogo  $X^{R_N}$  consiste dos elementos de  $X$  em que os lados horizontais têm a mesma cor e  $|X^{R_N}| = m^3$ . Os elementos de  $X^{R_{D_1}}$  são as representações em que os lados que têm em comum um dos vértices da diagonal  $D_1$  têm a mesma cor, como na Figura 11.

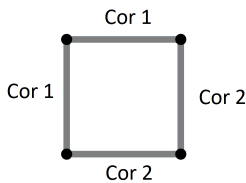


Figura 11: Elemento genérico de  $X^{R_{D_1}}$

Temos  $m$  escolhas para cada uma das duas cores, portanto  $|X^{R_{D_1}}| = m^2$ . Analogamente concluímos que  $|X^{R_{D_2}}| = m^2$ . Utilizando o Lemma de Cauchy-Burnside-Frobenius concluímos que podem ser construídos

$$\frac{m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m}{8}$$

quadrados coloridos quando pintamos cada palito de picolé dos dois lados.

Lembramos que  $X/D_4$  denota o conjunto das órbitas pela ação de  $D_4$ , sejam  $x_1, \dots, x_{|X/D_4|}$  elementos de  $X$  tais que  $D_4 \cdot x_1, \dots, D_4 \cdot x_{|X/D_4|}$  são as distintas órbitas em  $X/D_4$ . Temos a inclusão  $R \subset D_4$ , logo  $R \cdot x_i \subseteq D_4 \cdot x_i$  para  $i = 1, \dots, |X/D_4|$ . O Teorema 1 vale para ações de grupos de modo geral, portanto duas órbitas distintas em  $X/D_4$  são disjuntas. Assim se  $i \neq j$  temos

$$(R \cdot x_i) \cap (R \cdot x_j) \subseteq (D_4 \cdot x_i) \cap (D_4 \cdot x_j) = \emptyset,$$

donde segue que  $R \cdot x_1, \dots, R \cdot x_{|X/D_4|}$  são elementos dois a dois distintos em  $X/R$ . Portanto vale a desigualdade  $|X/D_4| \leq |X/R|$ . Vemos, então, que utilizando palitos de picolé pintados dos dois lados podemos construir menos quadrados coloridos do que com os palitos pintados de apenas um lado.

O Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius também pode ser utilizado para contar polígonos coloridos de modo análogo ao que fizemos para quadrados coloridos nesta seção.

**Questão 2.** Para  $n = 3, 5, 6, 7, \dots$ , quantos polígonos regulares regulares de  $n$  lados podem ser construídos com palitos de picolé coloridos dos dois lados com  $m$  cores?

Para abordar essa questão utilizando o Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius é necessário conhecer o grupo das simetrias de um polígono regular de  $n$  lados, o grupo diedral  $D_n$  (veja, por exemplo, [1]), que é muitas vezes estudado em disciplinas de "Estruturas Algébricas" ou "Álgebra" de um curso de graduação em Licenciatura ou Bacharelado em Matemática.

Os problemas considerados aqui são exemplos de contagem que não são facilmente resolvidos com os métodos usuais apresentados no Ensino Médio. Apontamos a relevância desses para os professores motivarem seus alunos a ir além do conteúdo curricular trazendo à tona conceitos abstratos como grupo a partir de enunciados elementares. Esperamos que este texto possa servir para motivar professores e alunos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática a estudarem os conceitos e resultados de Álgebra que usualmente fazem parte da grade curricular desses cursos.

#### 4. Agradecimentos

Os autores agradecem ao revisor pelas sugestões que ajudaram a melhorar a versão final do artigo. O primeiro autor agradece ao CNPq e à Fapesq pelo apoio através dos projetos 301704/2019-8 e 3099/2021, respectivamente.

## Referências

- [1] A. Gonçalves, *Introdução à Álgebra*. 5<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides/Impa, 1999.
- [2] P. Neumann, *A lemma that is not Burnside's*, Math. Sci. **4**, 133-141, 1979.
- [3] V. Vatter, *A probabilistic proof of a lemma that is not Burnside's*, Amer. Math. Monthly **127** (2020), no. 1, 63.
- [4] D. S. Marques, *Teorema de Burnside e Algumas Aplicações à Contagem*, Dissertação de Mestrado (Profmat), Florestal, MG, 2019.

Diogo Diniz  
Universidade Federal de Campina Grande  
<[diogo@mat.ufcg.edu.br](mailto:diogo@mat.ufcg.edu.br)>

Caio Antony Gomes  
Universidade Federal de Campina Grande  
<[caioagma@gmail.com](mailto:caioagma@gmail.com)>

Recebido: 09/09/2020  
Publicado: 13/05/2022