PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.2, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1013

# Alguns Números 2-Quasemonodígitos Primos

Fernando Soares de Carvalho   Eudes Antonio Costa

**Resumo**

Neste trabalho são apresentadas propriedades de uma classe de números inteiros denominados 2-Quasemonodígitos, representados por $2-\mathrm{QM}(\mathrm{k}, \mathrm{a}, \mathrm{b})$. Os resultados exibidos estão relacionados a critérios de divisibilidade, primalidade e quadrados perfeitos. Destaca-se que nesta classe de números, nenhum quadrado perfeito com mais de três algarismos foi encontrado (com k par) e que foram determinados todos os números 2-Quasemonodígitos primos com até 13 algarismos.

**Palavras-chave:** Quasemonodígito; Divisibilidade; Números Primos; Quadrados Perfeitos.

**Abstract**

In this work, properties of a class of integers called 2-Quasimonodigits, represented by $2-\mathrm{QM}(\mathrm{k}, \mathrm{a}, \mathrm{b})$ are presented. The results displayed are related to divisibility, primality and perfect squares criteria. It is noteworthy that in this number class no perfect square with more than three digits was found (with even k) and that all 2-Quasimonodigits prime with up to 13 digits were determined.

**Keywords:** Quasimonodigits; Divisibility; Prime numbers; Perfect squares.

## 1. Introdução

O interesse pelos números primos é recorrente na História da Matemática, seja pelas diversas aplicabilidades (em criptografia, por exemplo) ou apenas por deleite de entusiastas. Técnicas para a busca de números primos, ou, ainda, o estudo da primalidade de certas classes de números inteiros avançam cada vez mais com a atual evolução computacional. Várias propriedades relacionadas a números primos podem ser vistas em [7]. Na literatura encontram-se propriedades relacionadas a critérios de divisibilidade, primalidade e também quadrados perfeitos que envolvem algumas classes de números [4, 5, 6, 10].

Um número *monodígito* (um dígito) ou *repdígito* (repetição de um dígito) é um número natural não nulo formado pela repetição do mesmo dígito (algarismo) num sistema numérico posicional, isto é, em uma base $\mathrm{b} > 1$ fixada. Aqui utilizaremos a base decimal, ou seja $\mathrm{b} = 10$. São exemplos de números *monodígitos*: 2, 33, 111, 4444, 55555555 e 999999. O conceito de números *monodígitos* foi usado pela primeira vez por Beiler [2], que também apresentou o termo *repunidades* (repetição da unidade) no caso em que o dígito repetido for 1, ou seja, a unidade. Um número natural não nulo formado por $\mathrm{n} \geq 2$ dígitos em que um dígito $a$ apareça $\mathrm{n}-1$ vezes e o dígito $b$ apareça apenas 1 vez é um *quasemonodígito*, sendo $a$ e $b$ distintos com $a$, $b \in \{1, 2 \ldots, 8, 9\}$. No caso em que o algarismo $a$ for 1 (unidade) diremos que o número é uma *quaserepunidade*. As *repunidades* e alguns *quasemonodígitos*, são números da forma:

- *repunidades*

$$\mathrm{R_k} = \underbrace{11...11}_{\mathrm{k}} = 10^{\mathrm{k}-1} + 10^{\mathrm{k}-2} + \cdots + 10 + 1 = \frac{10^{\mathrm{k}} - 1}{9}, \tag{1}$$

- *quasemonodígitos*

$$\text{a) } \mathrm{QM_1} = \underbrace{\mathrm{aa...a}}_{\mathrm{k}}\mathrm{b}, \quad \text{b) } \mathrm{QM_2} = \mathrm{b}\underbrace{\mathrm{aa...a}}_{\mathrm{k}}, \quad \mathrm{QM_3} = \underbrace{\mathrm{a...a}}_{\mathrm{k}}\ \mathrm{b}\ \underbrace{\mathrm{a...a}}_{\mathrm{k}}, \quad \text{com} \quad \mathrm{a, b} \in \mathrm{S}, \tag{2}$$

em que $\mathrm{k} \geq 1$ é um número inteiro e $\mathrm{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Em [10, 1978] são apresentadas algumas propriedades de números quase repunidades e uma lista de primos dessa classe.

Nosso interesse no decorrer destas notas estará concentrado em números que denominamos de *2-Quasemonodígitos*, que são definidos a seguir.

**Definição 1.** No sistema decimal, um número natural não nulo formado por $\mathrm{n} \geq 3$ dígitos (algarismo), no qual o dígito b apareça exatamente duas vezes e o dígito a apareça exatamente $\mathrm{n} - 2$ vezes é um *2-Quasemonodígito*, com $\mathrm{a, b} \in \mathrm{S}$ e $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$.

Por exemplo, 121, 2332, 44777, 51551555, 888822, 99955999 e 161111116 são exemplos de *2-Quasemonodígito*. Em particular, vamos considerar um subconjunto de números *2-Quasemonodígitos*, denotados por:

$$2 - \mathbf{QM}(\mathrm{k, a, b}) = \mathrm{b}\underbrace{\mathrm{aa...aa}}_{\mathrm{k}}\mathrm{b} \quad \mathrm{a, b} \in \mathrm{S} \quad \text{e} \quad \mathrm{a} \neq \mathrm{b}. \tag{3}$$

Inspirados em estudos e tópicos já apresentados na literatura relacionados aos números primos, monodígitos, *repunidades* e *quaserepunidades* [8, 10, 11, 12], apresentamos nosso estudo acerca dos $2 - \mathbf{QM}(\mathrm{k, a, b})$, explorando primalidade e quadrados perfeitos. Além disso, serão apresentados alguns critérios de divisibilidade e uma lista de $2 - \mathbf{QM}(\mathrm{k, a, b})$ primos (Tabela 1). Os principais resultados são:

**Teorema 1.** *Nenhum* $2 - \mathit{QM}(\mathrm{k, a, b})$ *é primo, para* k *par.*

**Teorema 2.** *Nenhum* $2 - \mathit{QM}(\mathrm{k, a, b})$ *é um quadrado perfeito, para* k *par.*

## 2. Critérios de Divisibilidade

Primeiro observamos que os números $2 - \mathbf{QM}(\mathrm{k, a, b})$ podem ser escritos de acordo com o resultado a seguir:

**Proposição 1.** *Para* $\mathrm{a, b} \in \mathrm{S}$ *e* $\mathrm{k} \geq 1$ *inteiro, temos*

$$2 - \mathit{QM}(\mathrm{k, a, b}) \;=\; \mathrm{b}\underbrace{\mathrm{aa...aa}}_{\mathrm{k}}\mathrm{b} \;=\; \mathrm{b}(10^{\mathrm{k}+1} + 1) + 10\mathrm{aR_k}\ ,$$

*sendo* $\mathrm{R_k}$ *uma repunidade.*

*Demonstração.* Basta notar que,

$$\begin{aligned}
2-\mathbf{QM}(k,a,b) &= b\underbrace{aa\ldots aa}_{k}b \\
&= b10^{k+1}+a10^{k}+\ldots+a10^{1}+b \\
&= b(10^{k+1}+1)+10a(10^{k-1}+\ldots+10+1) \\
&= b(10^{k+1}+1)+10aR_k\ .
\end{aligned}$$

□

E mais,

**Proposição 2.** *Se* $a=2,\ b=1$ *e* $k\geq 2$, *então* $2-QM(k-1,2,1)=R_k\times R_2$.

*Demonstração.* Note que,

$$\begin{aligned}
2-\mathbf{QM}(k-1,2,1) &= (10^{k}+1)+20R_{k-1} \\
&= (10^{k}+1)+(2\cdot 10^{k}+\ldots+2\cdot 10^{1}) \\
&= 10^{k}+2\cdot 10^{k-1}+\ldots+2\cdot 10^{1}+1 \\
&= (10^{k-1}+\ldots+10+1)(10+1) \\
&= R_k\times R_2\ .
\end{aligned}$$

□

Em particular, segue diretamente da Proposição 2 que:

*Corolário* 1.(a) Nenhum $2-\mathbf{QM}(k,2,1)$ é primo;

(b) O número $2-\mathbf{QM}(1,2,1)$ é um quadrado perfeito.

**Lema 1.** *[7, 9] (Pequeno Teorema de Fermat) Sejam* $a,p$ *números naturais e* $p$ *primo. Se* $(a,\ p)=1$, *então* $a^{p-1}\equiv 1 \mod p$, *sendo* $(a,b)$ *o maior divisor comum entre os números* $a$ *e* $b$.

Uma consequência do Lema 1 (o pequeno Teorema de Fermat) e da Proposição 2 é dada pelo

*Corolário* 2. Se $p>5$ é um número primo então $p$ divide $2-\mathbf{QM}(p-2,2,1)$ .

*Demonstração.* Observe que $9\cdot R_{p-1}=10^{p-1}-1$, como $(10,p)=1$ segue do Lema 1 que $10^{p-1}-1\equiv 0 \mod p$, ou seja, $p$ divide $R_{p-1}$. Portanto, $p$ divide o produto $R_{p-1}\times R_2=2-\mathbf{QM}(p-2,2,1)$. □

Ademais, é fácil observar que

**Proposição 3.** *Nenhum* $2-QM(k,a,b)$ *é primo, para* $b$ *par ou* $b=5$.

*Demonstração.* Note que se $b$ é par ou $b=5$, o número $2-\mathbf{QM}(k,a,b)$ é par ou múltiplo de 5, respectivamente. Portanto, em ambos os casos, tem-se um número composto. □

E ainda,

**Proposição 4.** *Se* $\mathrm{ka} \equiv 0 \mod 3$ *e* $\mathrm{b} \equiv 0 \mod 3$*, então* $2-QM(\mathrm{k},\mathrm{a},\mathrm{b})$ *é múltiplo de 3.*

*Demonstração.* Seja x um número do tipo $2-\mathrm{QM}(\mathrm{k},\mathrm{a},\mathrm{b})$, isto é, $\mathrm{x} = \mathrm{b}\underbrace{\mathrm{aa...aa}}_{\mathrm{k}}\mathrm{b}$. Agora, seja $\mathrm{S(x)}$ a soma dos algarismos de x, ou seja, $\mathrm{S(x)} = 2\mathrm{b}+\mathrm{ka}$. Se ka e b são múltiplos de 3, então a soma $\mathrm{S(x)}$ é múltiplo de 3. Portanto o número $\mathrm{x} \in 2-\mathrm{QM(k,a,b)}$ também é múltiplo de 3. □

## 3. Prova do Teorema 1

O Teorema 1 é uma consequência direta do critério de divisibilidade por 11 (Lema 2), enunciado a seguir

**Lema 2.** *[7, 9] Um número é divisível por 11 se a soma alternada de seus algarismos for igual a zero ou divisível por 11.*

**Exemplo 1.** Veja que 11 divide $2-\mathrm{QM}(2,\mathrm{a},\mathrm{b})$. De fato, basta observar que a soma alternada dos algarismos é $\mathrm{b}-\mathrm{a}+\mathrm{a}-\mathrm{b}=0$. E mais, é de fácil fatoração, pois

$$\begin{aligned} 2-\mathrm{QM}(2,\mathrm{a},\mathrm{b}) &= \mathrm{b}\cdot 10^3+\mathrm{a}\cdot 10^2+\mathrm{a}\cdot 10+\mathrm{b} \;=\; \mathrm{b}(10^3+1)+10\mathrm{a}(10+1) \\ &= 11\cdot 91\mathrm{b}+11\cdot 10\mathrm{a} \;=\; 11(91\mathrm{b}+10\mathrm{a})\ . \end{aligned}$$

*Demonstração do Teorema 1:* Para qualquer k par, considere $\mathrm{x} \in 2-\mathrm{QM}(\mathrm{k},\mathrm{a},\mathrm{b})$, isto é, $\mathrm{x} = \mathrm{b}\underbrace{\mathrm{aa...aa}}_{\mathrm{k}}\mathrm{b}$ e seja $\mathrm{S}^*(\mathrm{x})$ a soma alternada dos algarismos de x, ou seja,

$$\mathrm{S}^*(\mathrm{x}) = \mathrm{b}+\underbrace{(-\mathrm{a}+\mathrm{a})+\cdots+(-\mathrm{a}+\mathrm{a})}_{(\mathrm{k}/2)\ \text{vezes}}-\mathrm{b}=0\ .$$

Logo, segue do Lema 2 que x é divisível por 11. Portanto, x não é um número primo.

Utilizando o *software Octave* foi escrito um código para determinar os números $2-\mathrm{QM}(\mathrm{k},\mathrm{a},\mathrm{b})$ primos com $\mathrm{k} \le 11$. Os números encontrados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Números primos da forma $2-\mathrm{QM}(\mathrm{k},\mathrm{a},\mathrm{b})$, $\mathrm{k} \le 11$.

| b | (k, a) |
|---|---|
| 1 | (1,3), (1,5), (1,8), (1,9), (3,3), (3,5), (3,6), (3,9), (5,3), (5,4), (5,7) (7,8), (7,9), (11,6) |
| 3 | (1,1), (1,5), (1,7), (1,8), (5,2), (5,4), (7,2), (7,5), (11,1),(11,4), (11,8) |
| 7 | (1,2), (1,5), (1,8), (1,9), (3,2), (3,5), (3,6), (3,8), (3,9) (5,6), (7,2), (9,4), (9,5) |
| 9 | (1,1), (1,2), (5,2), (5,8), (11,2) |


SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

## 4. Quadrados Perfeitos

Existem propriedades relacionadas a números quadrados perfeitos bem conhecidas, bem como propriedade de divisibilidade por 4. A seguir são apresentadas algumas dessas propriedades.

**Lema 3.** *[7, 9] Um quadrado perfeito não pode ser da forma* $4q + 3$*,* $q$ *um número inteiro.*

**Lema 4.** *[7, 9] Um quadrado perfeito não termina em 2, 3, 7 e 8.*

**Lema 5.** *[7, 9] Um quadrado perfeito par é sempre divisível por 4.*

**Lema 6.** *[7, 9] Um número é divisível por 4 quando o último algarismo somado com o dobro do penúltimo resultar em 0 ou um número divisível por 4.*

Uma consequência imediata do Lema 4 é que se, $b = 2, 3, 7$ ou 8, o número $2 - QM(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito. Os dois próximos resultados seguem dos Lemas 3, 4, 5, 6 . Vejamos,

**Proposição 5.** *Seja* $a$ *um múnero ímpar, então o número* $2-QM(k, a, b)$ *não é um quadrado perfeito para* $b \in C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

*Demonstração.* Nos casos em que $b = 2, 3, 7$ ou 8, segue do Lema 4 que o número $2 - QM(k, a, b)$, não é um quadrado perfeito. Já nos casos em que $b = 1, 5$ ou 9, de acordo com o Lema 6, deve-se analisar a soma $2a + b$. Observe que, se $a$ é ímpar, $2a$ e $b$ deixam restos 2 e 1 na divisão por 4, respectivamente. Dessa forma, a soma $2a+b$ terá resto três na divisão por 4, ou seja, $2-QM(k, a, b)$ deixará resto 3 na divisão por 4. Logo pelo Lema 3, o número $2 - QM(k, a, b)$ não pode ser um quadrado perfeito. Finalmente, se $b = 4$ o número $2a + b$ deixa resto 2 na divisão por 4, isto é, temos um número par que não é divisível por 4. Pelo Lema 5, o número $2 - QM(k, a, b)$ também não é um quadrado perfeito. □

**Proposição 6.** *Se* $a$ *é um número par, então o número* $2 - QM(k, a, b)$ *não é um quadrado perfeito para* $b \in C_2 = \{2, 3, 6, 7, 8\}$.

*Demonstração.* Nos casos em que $b = 2, 3, 7$ ou 8, recorremos novamente ao Lema 4 para concluir que $2 - QM(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito. Como por hipótese $a$ será par, o produto $2a$ é divisível por 4. Para $b = 6$, a soma $2a+b$ deixa resto 2 na divisão por 4, ou seja, tem-se um número par que não é divisível por 4. Portanto, pelo Lema 5, o número $2-QM(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito. □

Por fim, um resultado mais restritivo

**Proposição 7.** *Para todo* $k \geq 2$*, se* $2 - QM(k, a, b)$ *é um número da forma* $4q + r$*, com* $q, r$ *inteiros e* $r \in \{2, 3\}$*, então* $2 - QM(k + 1, a, b)$ *também é um número da forma* $4q_1 + r$*, com* $q_1$ *inteiro.*

*Demonstração.* Temos que,

$$2 - QM(k, a, b) = 4q + r \; . \tag{4}$$

Veja que

$$\begin{aligned} 2 - QM(k + 1, a, b) &= b(10^{k+2} + 1) + aR_{k+1} \cdot 10 \\ &= b \cdot 10 \cdot 10^{k+1} + aR_k \cdot 10 + a10^{k+1} + b \\ &= (b \cdot 10^{k+1} + aR_k \cdot 10 + b) + 9b \cdot 10^{k+1} + a10^{k+1} \\ &= 2 - QM(k, a, b) + (9b + a) \cdot 10^{k+1} \; . \end{aligned} \tag{5}$$

Sendo $k \geq 2$ tem-se, $10^{k+1} = 4t_1$ para algum $t_1$ inteiro. Assim $(9b+a)10^{k+1} = 4t$, com $t = (9b+a)t_1$, e juntamente com a Equação (4) (substituindo na Equação (5)), obtém-se

$$2-\text{QM}(k+1, a, b) = 4\underbrace{(q+t)}_{q_1} + r \; .$$

Portanto, o número $2-\text{QM}(k+1, a, b)$ é um número da forma $4q_1 + r$, com $r \in \{2, 3\}$. ◻

*Nota* 1. Segue da Proposição 7 que, se o número $2-\text{QM}(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito e é da forma $4q+r$, com $q$ e $r$ inteiros, $r \in \{2, 3\}$, então $2-\text{QM}(k+1, a, b)$ não é um quadrado perfeito, pois também é um número da forma $4q + r$.

## 5. Prova do Teorema 2

Observe que os números $2-\text{QM}(1, 2, 1) = 11^2 = 121$, $2-\text{QM}(1, 8, 4) = 22^2 = 484$ e $2-\text{QM}(1, 7, 6) = 26^2 = 676$, são quadrados perfeitos, ou seja, existem quadrados perfeitos do tipo $2-\text{QM}(1, a, b)$. No entanto,

**Exemplo 2.** Nenhum número $2-\text{QM}(2, a, b)$ é um quadrado perfeito . De fato, de acordo com o Lema 4, se $b = 2, 3, 7$ ou $8$, o número $2-\text{QM}(2, a, b)$ não pode ser um quadrado perfeito. Considerando $k = 2$ nas Proposições 5 e 6, restam dois casos a serem verificados, a saber: 1) $a$ é ímpar e $b = 6$; nesse caso, as fatorações de todos os possíveis números, 6116, 6336, 6556, 6776 e 6996, são listadas na Tabela 2, observando que nenhum desses números é um quadrado perfeito. 2) $a$ é par e $b = 1, 4, 5$ ou $9$, para esses números (veja Tabela 2) verifica-se também que nenhum deles é um quadrado perfeito. Portanto, é possível concluir que os números da forma $2-\text{QM}(2, a, b)$, não são quadrados perfeitos.

Veremos que o Teorema 2 é uma consequência direta dos próximos resultados.

**Lema 7.** *[3] Para todo número* $n$ *natural, temos que* $R_2$ *divide* $R_{2n}$.

**Lema 8.** *Para todo número* $n$ *natural, temos*

$$10^{2n+1} + 1 = 11 \cdot (10^{2n} - 10^{2n-1} + \cdots + 10^2 - 10^1 + 1) \; .$$

*Demonstração.* Sejam $a, b$ naturais, com $a + b \neq 0$, veja que

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots - a^1 b^{2n-1} + b^{2n}) \; .$$

Agora faça $a = 10$ e $b = 1$. ◻

**Lema 9.** *Para todo número* $n$ *natural, 11 não divide* $10^{2n} - 10^{2n-1} + \cdots + 10^2 - 10^1 + 1$ .

*Demonstração.* Primeiro façamos $y = 10^{2n} - 10^{2n-1} + \cdots + 10^2 - 10^1 + 1$. Veja que

$$y = (10^{2n} + 10^{2n-1} + \cdots + 10^2 + 1) - (10^{2n-1} + 10^{2n-3} + \cdots + 10^3 + 10^1) \; .$$

Na primeira parcela da direita temos $n$ algarismos 1 e na segunda temos $n-1$; assim a soma do algarismos das parcelas (ou a soma alternado dos algarismos) do número $y$ é diferente de 0, logo segue do Lema 2 que $y$ não é múltiplo de 11. ◻

Tabela 2: Não Quadrados Perfeitos

| baab | Fatoração |
|---|---|
| 6116 | $2^2 \times 11 \times 139$ |
| 6336 | $2^6 \times 3^2 \times 11$ |
| 6556 | $2^2 \times 11 \times 149$ |
| 6776 | $2^3 \times 7 \times 11^2$ |
| 6996 | $2^2 \times 11 \times 53$ |
| 1221 | $3 \times 11 \times 37$ |
| 1441 | $11 \times 31$ |
| 1661 | $11 \times 51$ |
| 1881 | $3^2 \times 11 \times 19$ |
| 4224 | $2^7 \times 3 \times 11$ |
| 4664 | $2^3 \times 11 \times 53$ |
| 4884 | $2^2 \times 3 \times 11 \times 37$ |
| 5225 | $5^2 \times 11 \times 19$ |
| 5445 | $3^2 \times 5 \times 11^2$ |
| 5665 | $5 \times 11 \times 103$ |
| 5885 | $5 \times 11 \times 107$ |
| 9229 | $11 \times 839$ |
| 9449 | $11 \times 859$ |
| 9669 | $3 \times 11 \times 293$ |
| 9889 | $11 \times 29 \times 31$ |

Agora, vamos a

*Demonstração do Teorema 2 :* Considere x um número da forma $x \in 2-\mathbf{QM}(k,a,b)$, temos que k é par, ou seja, $k = 2n$ para algum n natural. Pela Proposição 1, tem-se

$$x = b(10^{k+1}+1) + 10aR_k = b(10^{2n+1}+1) + 10aR_{2n} ,$$

sendo $R_k$ uma *repunidade*. Pelo Teorema 1, sabe-se que 11 divide qualquer número $x \in 2-\mathbf{QM}(2n,a,b)$. Vamos mostrar que $11^2$ não divide x. Pelo Lema 8, temos que 11 divide $b(10^{k+1}+1)$ e pelo Lema 7, 11 divide $10 \cdot aR_{2n}$. Se n também for par, teríamos que $11^2$ divide $10 \cdot aR_{2n}$. No entanto, $11^2$ nunca divide $b(10^{k+1}+1)$, pois 11 não divide $y = 10^{2n} - 10^{2n-1} + \cdots + 10^2 - 10^1 + 1$, conforme Lema 9. Logo, se k é par, x é divisível por 11, mas não é divisível por $11^2$. Portanto, x não pode ser um quadrado perfeito.

## 6. Considerações Finais

Os resultados apresentados neste trabalho tratam de números da forma $2-\mathbf{QM}(k,a,b)$. Inicialmente, utilizando critérios de divisibilidade foi possível identificar condições sobre os valores de k, *a* e *b*, que garantem a não primalidade do número. Foram determinados todos os números primos da forma 2-Quasemonodígitos com até treze algarismos ($k \le 11$). Observa-se que apenas 43 números primos foram encontrados. No caso em que k é ímpar, uma pergunta que ainda nos intriga é a quantidade de números primos nesse subconjunto. É finita ou não? Finalmente, fizemos uma breve análise de números 2-Quasemonodígitos quadrados perfeitos, e nesse caso, apenas três desses números foram encontrados e são números de três algarismos. E mostramos que não existe nenhum outro quadrado perfeito quando k é par.

## Referências

[1] ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. *Mathematical olympiad challenges*. Springer Science & Business Media, 2008.

[2] BEILER, A. H. *Recreations in the theory of numbers*: The queen of mathematics entertains, Chapter 11: $111\ldots111$ . Courier Corporation, 1964.

[3] CARVALHO, F. S.; COSTA, E. A. Escrever o números $111\ldots111$ como produto de dois números, **Revista do Professor de Matemática**, SBM, 87, (15–19), 2015.

[4] COSTA, E. C ; SANTOS, D. C. Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas, *Revista do Professor de Matemática online*, SBM, 8(4), (495–503), 2020.

[5] DUBNER, H. "Repunit $R_{49081}$ is a probable prime." *Mathematics of computation*. 71, (833-835), 2002.

[6] DUBNER, H.; WILLIAMS, H. C. "A Primality de $R_{1031}$." *Mathematics of Computation*, 47, 703-711, 1986.

[7] MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. *Teoria dos Números*: Um Passeio com Primos e Outros Números Familiares Pelo Mundo Inteiro. Projeto Euclides. Sociedade Brasileira de Matemática, 2018.

[8] TRIGG, C. W. "Infinite sequences of palindromic triangular numbers." **The Fibonacci Quarterly**, 12, (209—212), 1974.

[9] NIVEN, I.; ZUCKERMAN, H. S.; MONTEGOMERY, H. L. *An introduction to the theory of numbers* . John Wiley and Sons. 1991.

[10] WILLIAMS, H. C. "Some Primes with Interesting Digit Patterns." *Mathematics of Computation*, 32(144), 1306-1310, 1978.

[11] RIBENBOIM, P. Números primos: velhos mistérios e novos recordes. IMPA, 2012.

[12] SNYDER, W. M. "Factoring repunits". The American Mathematical Monthly. n. 89.7, p. 462-466 . 1982.

Fernando Soares de Carvalho
Universidade Federal do Tocantins
<fscarvalho@uft.edu.br>

Eudes Antonio Costa
Universidade Federal do Tocantins
<eudes@uft.edu.br>

Recebido: 09/06/2021
Publicado: 16/05/2022