PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.1, n.1, 2013
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2013/pmo11

Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no alunado do ensino médio e universitário inicial

Gilda Palis

Resumo

O conceito de função é certamente uma noção fundamental dentre as estudadas nos cursos de matemática no ensino médio e no início do ciclo universitário na área técnico-científica. Ao mesmo tempo, o ensino e a aprendizagem desse conceito têm sido considerados bastante problemáticos. Neste artigo, discutimos algumas das dificuldades dos alunos desses segmentos escolares com o conceito de função, dentre elas a extrema aderência à concepção de função como expressão algébrica e dificuldades encontradas na resolução de problemas de otimização de enunciado verbal. Sugerimos atividades que podem ser trabalhadas com esse alunado, abrangendo a identificação de funções subjacentes a gráficos estatísticos e problemas de otimização de enunciado verbal que propiciam oportunidades de interpretações qualitativas de aspectos covariacionais da situação funcional estudada e a utilização de diferentes representações de uma mesma função, inclusive de representações digitais.

Palavras-chave: conceito de função; transição ensino médio-superior; gráficos cartesianos e estatísticos; atividades de otimização; recursos digitais no ensino e aprendizagem de funções.

Abstract

he concept of function is certainly a fundamental notion among those studied in mathematics courses in high school and the beginning of the university cycle in the technical-scientific area. At the same time, the teaching and learning of this concept has been considered quite problematic. In this article, we discuss some of the difficulties of students in these school segments with the concept of function, among them extreme adherence to the conception of function as a algebraic expression and difficulties encountered in solving optimization problems of verbal enunciation. We suggest activities that can be worked out with these students, including the identification of functions underlying statistical graphs and problems of optimization of verbal enunciation that provide opportunities for qualitative interpretations of covariational aspects of the functional situation studied and the use of different representations of the same function, including digital representations.

Keywords: concept of function; transition from high school to undergraduation; Cartesian and statistical graphics; optimization activities; digital resources in teaching and learning functions.

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

1. Introdução

As dificuldades dos alunos com o conceito de função têm sido largamente mencionadas na literatura especializada. Diversos estudos vêm indicando que a aprendizagem desse conceito desenvolve-se ao longo de vários anos e é mais complexa do que se supõe implicitamente no ensino e na concepção de currículos, [1], [3]. Na transição do ensino médio para o superior, um número expressivo de alunos acredita que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica; uma função é somente pensada em termos de manipulação simbólica e numérica, de forma desconectada do seu aspecto conceitual. Essa concepção de função como fórmula é acompanhada da dificuldade em discernir variável de incógnita, função de equação, e da construção de domínio de uma função como sendo um tipo de exercício no qual se "resolvem" denominadores e argumentos de funções raiz quadrada ou logarítmica. Aspectos procedimentais predominam e o desenvolvimento de aspectos conceituais é bastante limitado, [2].

Diversos trabalhos que investigam o ensino e a aprendizagem de funções têm enfatizado também a necessidade de um desenvolvimento do conceito de função que inclua uma concepção de função como covariação de quantidades e não somente como correspondência. Nesse sentido, o que se propõe é que o aluno desenvolva o raciocínio covariacional, isto é, que lhe permita refletir sobre uma situação na qual há duas quantidades que variam, percebendo como uma delas varia em relação à outra. Para isso é importante que o aluno seja exposto a atividades envolvendo o conceito de função como covariação, [7], [15].

A literatura relacionada a problemas de enunciado verbal (*word problems*) aponta os diversos obstáculos encontrados pelos alunos nesse tipo de problema, dentre eles, a conversão entre diferentes linguagens, o que envolve designar variáveis e distingui-las de constantes, além de representar as correspondências entre as variáveis envolvidas. Temos observado também os problemas enfrentados por alunos recém-ingressos no ensino superior na área técnico-científica em suas buscas de compreensão de textos matemáticos nos quais se misturam língua materna, termos técnicos matemáticos e simbologia matemática, além das características próprias do discurso matemático. Tais fatores interferem no trabalho com problemas que requerem uma compreensão do conceito de função que inclua a habilidade de conceber, representar e interpretar situações funcionais, um aprendizado essencial para o aluno que finaliza o ensino médio e espera prosseguir em seus estudos nas diversas áreas com base matemática do ensino superior, [5].

No planejamento das atividades que procuramos desenvolver para lidar com essa problemática, levamos em conta também um dos objetivos mais citados nas reformas curriculares e instrucionais propostas nos últimos 20 anos: o desenvolvimento conceitual dos alunos pode ser caracterizado pela presença de uma riqueza de conexões. O desenvolvimento de habilidades de produção e coordenação de diferentes representações de um mesmo objeto ou procedimento matemático é visto como uma maneira de construir redes importantes de associações entre essas representações, favorecendo as construções cognitivas. Compartilhando as hipóteses cognitivas teóricas de diversos autores, consideramos que a apreensão conceitual de um objeto matemático é inseparável da apreensão e produção de suas diversas representações. Ser capaz de se mover por diferentes sistemas de representação é uma condição necessária para reconhecer o objeto matemático em cada uma das suas possíveis representações e também para não confundir o objeto conceitual com suas representações, [4].

Diferentes representações de uma mesma função podem permitir processamentos diversos visando a obtenção de informações sobre o seu comportamento. Assim, a utilização de representações múltiplas na resolução de problemas também pode colaborar para o desenvolvimento de processos metacognitivos de autoavaliação pelos alunos; além de usar as representações disponíveis na busca de significados, o aluno pode também comparar as respostas encontradas.

As atividades que serão sugeridas nesse artigo pressupõem alguns aspectos teóricos ligados à terminologia matemática que serão apresentados resumidamente a seguir.

2. Definição em matemática

Segundo [16], ao se compreender ou tentar compreender uma frase, as pessoas usualmente não consultam as definições das palavras que a constituem. Até porque muitas palavras do linguajar cotidiano não têm definição (apesar de serem "definidas" de alguma forma em dicionários). Já em contextos técnicos, a atribuição de significado a diversos termos dá-se por estipulação, como em matemática. Nesses ambientes, as definições têm um papel extremamente importante, tanto na construção da imagem mental de um conceito como na resolução de tarefas cognitivas, sendo preciso levá-las em consideração. Assim, contextos técnicos impõem hábitos de pensamento totalmente distintos daqueles típicos dos contextos do dia a dia. É possível antecipar que hábitos do cotidiano podem sobrepor-se a comportamentos necessários em contextos técnicos, [6].

A maior parte dos alunos de ensino médio e inicial universitário não consulta ou se apoia em definições quando trabalha com tarefas matemáticas que lhes são propostas. Hábitos de pensamento do cotidiano assumem o controle das ações empreendidas, e as definições podem ser ignoradas mesmo quando as questões que lhes são propostas requerem que sejam levadas em conta. Assim, esses alunos não desenvolvem hábitos de pensamento que são essenciais em contextos técnicos nos quais as consultas às definições são esperadas. Além disso, o desconhecimento da terminologia dificulta a comunicação entre alunos e professores em sala de aula.

O desenho das atividades que serão expostas nesse artigo pressupõe que os alunos já foram introduzidos às definições de função real de variável real, de gráfico de tal função em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais e de aproximação numérica. De fato, supomos que os alunos têm conhecimento de alguma variante das definições apresentadas abaixo. Consideramos que é importante trabalhar com o suporte dessas definições, reconhecendo as suas componentes, apesar de sabermos que a boa apreensão conceitual ultrapassa em muito esse conhecimento.

Uma função real f definida em um subconjunto D dos números reais, denotada por $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é uma correspondência que, a cada número x pertencente a D, associa um único número $f(x)$. O conjunto D é chamado domínio da função f.

O gráfico de $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x)), x \in D\}$. Fixado um sistema de coordenadas cartesianas, um esboço geométrico do gráfico de f é um desenho desse conjunto de pontos. Para não sobrecarregar o texto, a expressão "um gráfico de f" [1] será empregada com o significado de "um esboço geométrico do gráfico de f" e não de "o conjunto de pares $\{(x, f(x)), x \in D\}$. De fato, há uma infinidade de gráficos de uma mesma função, pois esses dependem de restrições em seus domínios, escolhas de escalas nos eixos coordenados, aproximações numéricas intrínsecas ao contexto gráfico etc., tanto com papel e lápis como usando tecnologia digital. Um desenvolvimento dessas ideias pode ser encontrado em [9] e [10].

Com relação ao conceito de aproximação numérica, podemos raciocinar com a definição abaixo. Maiores detalhes e exemplos podem ser encontrados em [8].

"Dizemos que um número real a é uma aproximação do número real b, com erro menor do que E, se $|a - b| < E$, ou seja, se, na reta numérica, a distância entre a e b for menor do que E."

É importante observar também que, se o domínio de uma função não é fornecido juntamente com a sua relação de correspondência (expressão algébrica ou verbal), adotamos a convenção usual. Assumimos que o seu domínio é o conjunto dos números reais para os quais a correspondência faz sentido.

A seguir, vamos exemplificar atividades instrucionais que podem ser propostas a alunos no segmento de ensino aqui considerado e que tem por objetivo lidar com alguns dos problemas mencionados. Na Seção *Gráficos Estatísticos e Funções*, as sugestões apresentadas têm por objetivo modificar a restrição conceitual "função é fórmula", chamando a atenção para a riqueza de exemplos de situações funcionais

[1] Estaremos nos referindo a esses gráficos pela expressão "gráficos cartesianos", para diferenciá-los de gráficos estatísticos.

subjacentes a gráficos estatísticos que não podem ser expressas por fórmulas algébricas. A Seção *Um Problema de Otimização* também trabalha inicialmente com uma situação funcional que não se apresenta expressa por uma fórmula. A atividade procura promover o desenvolvimento mais amplo da concepção de função, abrangendo interpretações qualitativas de aspectos covariacionais da situação funcional estudada, a utilização de diferentes representações de uma mesma função, inclusive de representações digitais. Para alguns aspectos teóricos que embasam esse desenvolvimento, ver [11] e [12].

3. Gráficos estatísticos e funções

Funções são criadas para estudar fenômenos variados, sejam eles matemáticos, do cotidiano, físicos, biológicos, econômicos etc. É importante lembrar que relações funcionais que ocorrem na realidade são raramente descritas com exatidão por fórmulas algébricas, gráficos ou tabelas. No entanto, essas relações são, frequentemente, modeladas por expressões algébricas, gráficos e tabelas. Esses, como modelos, são aproximações das situações em estudo. Tabelas numéricas que as aproximam em configuração finita são frequentemente modelos convenientes para estudá-las. Representações gráficas também são criadas para estudar diversas situações funcionais da realidade; dentre os exemplos mais conhecidos podemos citar os eletrocardiogramas, eletroencefalogramas e sismogramas.

Uma das concepções de função presentes entre alunos manifesta-se ao se referirem ou admitirem o uso da palavra função quase que somente quando esse objeto encontra-se representado por uma expressão algébrica. Vários exemplos de funções que não podem ser descritas por fórmulas estão implicitamente presentes nas discussões apoiadas em gráficos estatísticos oferecidas por diversos livros didáticos de ensino médio. Frequentemente, os textos didáticos não se referem explicitamente à função subjacente aos gráficos estatísticos, apesar de poderem estar a um passo da introdução do conceito de função ou mesmo no capítulo dedicado a funções. Além disso, o aluno precisa ser alertado para o fato de que um gráfico estatístico de uma função é diferente de um gráfico cartesiano da mesma função, até por causa das próprias regras de construção de cada tipo de gráfico.

O estudo de gráficos estatísticos (gráfico de linhas ou curvas, em barras, em setores, pictogramas...) é muito interessante pela importância do desenvolvimento da leitura e da interpretação desses recursos de representação de dados numéricos. A compreensão das informações assim codificadas nos meios de comunicação variados hoje em dia pode ser vista como uma questão de cidadania.

Consideramos que a Estatística é uma área de aplicação rica em exemplos interessantes de situações funcionais e que o estudo de dados da realidade pode motivar os alunos e ajudá-los no desenvolvimento da compreensão do que é uma função e como funções se comportam, no que concordamos com [14].

Pode ser muito proveitoso para o aluno identificar as funções subjacentes a esses gráficos de linha, barras etc., o domínio da variável independente e esboçar o gráfico cartesiano da mesma, quando possível. Além do aluno deparar-se com funções dadas por uma descrição verbal, sem expressão algébrica, seria alertado para as diferenças entre gráficos estatísticos e cartesianos. Uma característica dos gráficos estatísticos pode ser logo notada: as unidades de medida empregadas nos dois eixos podem ser bem diferentes, o que raramente acontece com gráficos cartesianos nos livros didáticos. Esta é uma característica interessante e que pode preparar o aluno para o estudo de gráficos de funções construídos com tecnologias digitais. Nesses ambientes a geração de gráficos com escalas diferentes nos dois eixos é frequente, e pode ser fundamental, pois a escolha das escalas adequadas à resolução de um problema depende do próprio, [10].

É importante observar que as regras de produção dos diferentes tipos de gráficos estatísticos são diferentes entre si e distintas das regras para construção de gráficos cartesianos ortogonais. Essas diferenças também precisam ser explicitadas, pois a utilização do termo "gráfico" pode ficar bastante vaga para o aluno, até mesmo pela rica polissemia dessa palavra. Esse termo pode ser usado com sentidos amplos e bem distintos, além do significado presente em representações gráficas de funções ou de dados estatísticos. "Gráfico" pode denotar um esquema, desenho, esboço ou croquis, referir-se a grafia, artes gráficas, equipamentos gráficos etc. A dificuldade dos alunos com a construção, interpretação e utilização de gráficos de funções é bastante mencionada na literatura. A polissemia do termo "gráfico" pode acrescentar um complicador a essa área.

A seguir, exemplificamos resumidamente o que sugerimos acima, considerando dois exemplos de gráficos estatísticos.

Exemplo 1. Vamos identificar as funções subjacentes ao gráfico estatístico na Figura 1. Há cinco funções subtendidas no gráfico estatístico (de linhas) apresentado na Figura 1. Todas elas estão definidas em um conjunto de valores temporais (trimestres de 2007.I a 2012.II), e associam a cada um dos números desse conjunto (que graduam o eixo horizontal – representativos de trimestres) a taxa de variação trimestral do PIB[2] de um dentre os cinco países listados na base do gráfico. O procedimento de ligar os pontos de um gráfico de pontos isolados por uma curva contínua é empregado muitas vezes como um recurso para auxiliar a visualização do comportamento da variável estatística.

Essas funções não têm representação algébrica e suas correspondentes representações em gráficos cartesianos são constituídas por pontos isolados. Esses gráficos estatísticos são construídos a partir de tabelas geradas por processos quantitativos variados, incluindo resultados de pesquisas realizadas junto às empresas e às famílias; essas tabelas não são obtidas calculando-se valores de funções expressas algebricamente. É importante observar que tais funções são de fato aproximações, restritas a certo intervalo temporal, da função que associa, a valores temporais específicos, determinadas informações numéricas sobre o PIB.

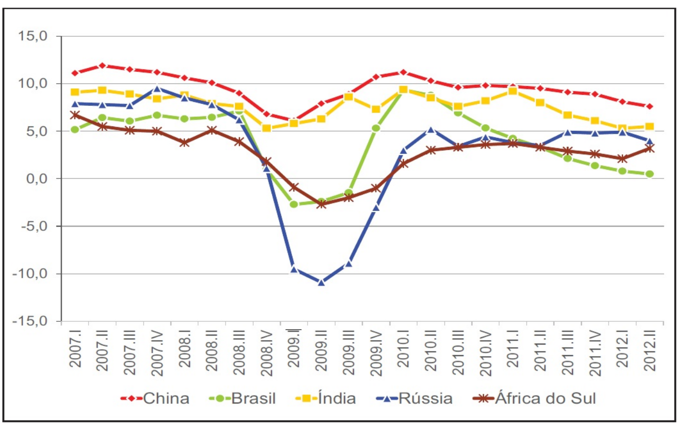


Figura 1: Série da taxa de crescimento trimestral[4] do PIB dos BRICS até o 2º trimestre de 2012 - Elaborado pela Coordenação de Contas Nacionais - IBGE.

Exemplo 2. Consideremos os dados apresentados na Figura 2 e o gráfico estatístico (de setores) da Figura 3, que foi construído a partir da tabela da Figura 2.

A tabela da Figura 2, construída com dados de pesquisa domiciliar, representa a função g que associa, a cada intervalo de valores de rendimento em salários mínimos, o percentual de pessoas com rendimento no intervalo[5]. Essa função pode ser vista como uma função g definida no conjunto de intervalos de $\mathbb{R}$ que

[2]Total de bens e serviços produzidos no país, descontadas as despesas com os insumos utilizados no processo de produção durante o período.

[4]Refere-se à taxa de variação do PIB no trimestre, em relação ao mesmo trimestre do ano anterior.

[5]Os dados da tabela apresentam alguma margem de erro, assim, de fato, g é uma aproximação da função que associa, a intervalos de valores de rendimento em salários mínimos, o percentual de pessoas com esses rendimentos dentre as entrevistadas.

Pessoas de 10 anos ou mais de idade, ocupadas na semana de referência por classes de rendimento nominal mensal de todos os trabalhos
Rio de Janeiro - 2000

Classes de Rendimento em SM [(1)]	Total de Pessoas	%
Até 1	807.292	14,6
Mais de 1 a 2	1.403.205	25,4
Mais de 2 a 3	786.826	14,2
Mais de 3 a 5	899.220	16,3
Mais de 5 a 10	847.932	15,3
Mais de 10 a 20	344.141	6,2
Mais de 20	206.519	3,7
Sem Rendimento	131.014	2,4
Total	5.527.270	100,0

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 2000. Tabulação Avançada.
[(1)] Salário mínimo utilizado pelo IBGE: R$ 151,00.

Figura 2: Tabela do Exemplo 2

definem as classes de rendimento consideradas. Tais intervalos e a expressão algébrica da função g estão descritos abaixo:

$$I_0 = \{0\}, I_1 = (0,1], I_2 = (1,2], I_3 = (2,3], I_4 = (3,5], I_5 = (5,10], I_6 = (10,20], I_7 = (20,\infty),$$
$$g(I_0) = 2,4; g(I_1) = 14,6; g(I_2) = 25,4; g(I_3) = 14,2; g(I_4) = 16,3; g(I_5) = 15,3; g(I_6) = 6,2; g(I_7) = 3,7.$$

Não faz sentido falar de gráfico cartesiano dessa função. Por outro lado, tanto a tabela da Figura 2 como o gráfico de setores da Figura 3 são muito mais informativos do que a “fórmula” a ela associada.

Os livros didáticos vêm apresentando vários gráficos estatísticos, muitos outros estão presentes em jornais e revistas; alguns podem ser criados com sugestões das atividades no site do IBGE Vamos Contar[6]. Não faltam oportunidades para os alunos defrontarem-se com funções que não podem ser expressas por fórmulas algébricas.

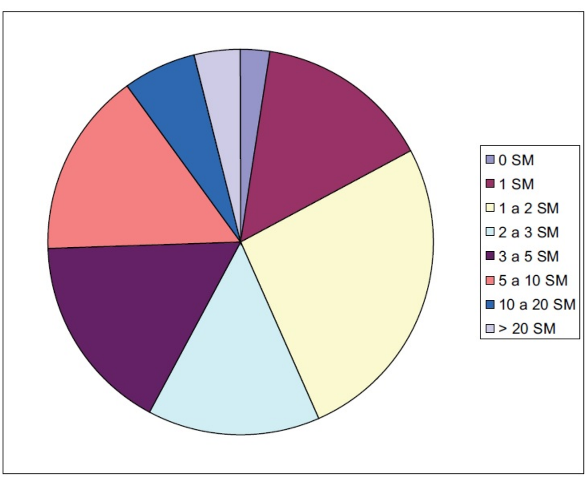


Figura 3: Gráfico de setores do Exemplo 2

[6] <http://vamoscontar.ibge.gov.br>.

4. Um problema de otimização

O problema aqui apresentado faz parte de uma série de atividades que desenhamos, todas elas estruturadas em torno da resolução de problemas de otimização dados por descrição verbal, visando propiciar um avanço na construção da concepção de função por parte dos alunos. Nosso objetivo é que o aluno, além de calcular valores específicos de uma função dada por uma fórmula, ou manipular sua expressão, possa evoluir para uma concepção segundo a qual ele perceba uma função como recebendo valores e retornando valores, um ato imaginado, sem necessidade de efetuar cálculos, raciocinando sem o apoio de uma fórmula. Além disso, as atividades têm por objetivo: avançar na problemática da leitura e interpretação de enunciados pelos alunos, na discriminação entre constantes e variáveis, no uso de representações múltiplas de funções (por esquemas gráficos, tabela, representação algébrica, representação gráfica), nos processos de justificativa de resolução de problema e no desenvolvimento do conceito de aproximação de um número real. Várias dessas atividades estão associadas a um programa de visualização digital[7] que permite examinar dinamicamente a relação entre a situação em estudo e um modelo matemático que a representa, além de permitir cálculos e verificação de algumas respostas às questões propostas ao longo das mesmas.

A seguir mostramos o enunciado e o encaminhamento de uma das atividades desse conjunto de tarefas, acompanhados de algumas observações sobre os objetivos das diferentes etapas segundo as quais o trabalho nelas apoiado pode ser implementado com alunos em sala de aula. É importante, em uma sala ou laboratório, que o professor estabeleça um diálogo constante com os alunos e que, literalmente "andando pela sala" comunique-se com os alunos, procurando reconhecer seus sucessos e dificuldades.

UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Considere um cilindro circular reto inscrito numa esfera cujo raio mede 3 metros. Seja r a medida, em metros, do raio da base do cilindro.

(a) Dê o domínio da função que fornece o volume V do cilindro, em termos de r.

(b) Determine uma aproximação do valor do raio do cilindro de volume máximo dentre os que podem ser inscritos na esfera de raio 3, com um erro menor do que $0,02$.

Implementação do Item (a)[8]

Etapa 1: Trabalho inicial orientado para a leitura do enunciado, objetivando algum nível de compreensão do problema. Esclarecimentos sobre o significado de termos técnicos. Alguns alunos podem não lembrar o significado de "um cilindro está inscrito numa esfera".

Etapa 2: Perguntas dirigidas aos alunos e discutidas em conjunto: O que varia e o que permanece constante no contexto do problema estudado? Quantos cilindros circulares retos com raio da base $r = 1$ existem? Quantos cilindros circulares retos com raio da base $r = 1$ podem ser inscritos numa esfera de raio 3? Quantos cilindros circulares retos com eixo de rotação na direção vertical podem ser inscritos numa esfera de raio 3?

Ao longo da discussão, é importante propor aos alunos que esbocem a lápis algumas figuras representativas das situações analisadas. Alguns alunos podem esboçar "figuras no ar" com as mãos, acompanhadas de explicações verbais.

Observação: Sem perda de generalidade, consideram-se, a partir daqui, os cilindros circulares retos com eixo de rotação na direção vertical.

[7] Ver em <http://www.uff.br/cdme/pot/> ou <http://www.cdme.im-uff.mat.br/pot/>. Programação: Humberto José Bortolossi. Idealização: Gilda de La Rocque Palis, Silvana Marini Rodrigues Lopes e Humberto José Bortolossi.

[8] 7Daqui em diante, todas as medidas de r estão expressas em metros.

Etapa 3: Solicitações dirigidas aos alunos e discutidas em conjunto: Faça um esboço, a lápis, de alguns cilindros inscritos em uma mesma esfera e procure visualizar qualitativamente a variação da altura dos cilindros inscritos na esfera de raio 3 à medida que o valor do raio cresce. Idem como o volume dos cilindros varia com r.

Nessa etapa é proposto aos alunos que verbalizem a percepção qualitativa das variações na altura e no volume do cilindro, enquanto consideram variações no raio do cilindro inscrito na esfera. Esperamos que os alunos venham a concluir que a altura decresce, à medida que r cresce, mas que tenham dificuldades para formular uma conjectura correta sobre o comportamento da função que, a cada valor de r, associa o volume do correspondente cilindro.

Etapa 4: Solicitação dirigida aos alunos e discutida em grupo: Considere o cilindro circular reto com raio da base $r = 1$ inscrito numa esfera de raio 3. Determine a altura desse cilindro. Determine o volume desse cilindro. Repita com $r = 2$, $r = 0$, $r = 20$, $r = 3$, $r = 0,1$, $r = 3,001$. Esperamos que muitos alunos venham a concluir que os números 0, 20, 3 e 3,001 não são admissíveis como valores para r, sem necessidade de "fazer as contas".

Etapa 5: Pergunta dirigida aos alunos e discutida em conjunto: Quais valores a variável r (medida do raio do cilindro inscrito na esfera de raio 3) pode assumir? Qual o domínio da função que relaciona o valor do volume V do cilindro inscrito na esfera de raio 3 com o valor do raio r da base?

Procuramos aqui verificar se o aluno aceita o domínio da função, no caso o intervalo $(0, 3)$, a partir de uma reflexão sobre os possíveis valores de r, sem considerar a expressão algébrica da função.

Implementação do Item (b) A partir daqui, a resolução do problema prossegue, agora usando recursos algébricos, gráficos ou de Cálculo Diferencial.

Etapa 6: Pergunta dirigida aos alunos e discutida em grupo: Qual a expressão algébrica da função h que, a cada valor de r, associa a altura $h(r)$ do cilindro circular reto de raio r inscrito na esfera de raio 3? Qual a expressão da função V que, a cada valor de r, associa o volume $V(r)$ do cilindro de raio r inscrito na esfera de raio 3?

A variação de h e de V com r são expressas agora quantitativamente por fórmulas. As respostas esperadas são $h(r) = \sqrt{36 - 4r^2}$ e $V(r) = \pi r^2 \sqrt{36 - 4r^2}$.

Etapa 7: Solicitação dirigida aos alunos: Organize uma resolução justificada para responder a questão, do Item (b).

Nessa etapa, a resolução esperada (cálculo gráfico ou diferencial, com papel e lápis e/ou alguma tecnologia digital) depende do nível de estudos dos alunos.

Um aluno que ainda não estudou Cálculo Diferencial pode fornecer uma resposta à questão utilizando uma representação gráfica da função V cuja representação algébrica ele já conhece (ver Etapa 6). Um gráfico da função V, gerado em computador[9] , pode ser visto na Figura 4; nele podemos visualizar um valor de r no qual a função V atinge um máximo absoluto. Designemos por α esse valor de r no qual a função V tem um máximo absoluto.

O que pretendemos é achar uma aproximação de α com um erro menor do que $0,02$. Para isso, podemos gerar um gráfico de V restrito a um intervalo de amplitude menor ou igual a $0,02$ e contendo α. O gráfico de V restrito ao intervalo $[2,44; 2,46]$ que se encontra apresentado na Figura 5[10] tem essas propriedades.

Esse gráfico permite responder a questão. Uma resposta para o problema é $2,45$, pois como α e $2,45$ pertencem ao intervalo $[2,44; 2,45]$ temos que $|\alpha - 2,45| < 0,02$. É importante observar que existe uma infinidade de respostas à questão do Item (b).

Caso o aluno já tenha cursado Cálculo Diferencial, o valor de r no qual a função V tem um máximo global pode ser obtido pela análise de cálculos algébricos envolvendo a função derivada de V. Nesse

[9] Diversos recursos digitais estão disponíveis para a geração de gráficos de funções.
[10] Existe uma infinidade de intervalos com as propriedades requeridas.

caso o aluno irá chegar a $\alpha = \sqrt{6}$ e essa é uma resposta à pergunta do enunciado, pois "$\sqrt{6}$ é uma aproximação de $\sqrt{6}$ "[11].

Se o aluno resolver a questão dessa forma e desejar verificar, graficamente, se a sua resposta é plausível, ele poderá fazê-lo num gráfico como o da Figura 5, lá visualizando um truncamento do desenvolvimento decimal de α; por exemplo, o truncamento de $\sqrt{6}$ na terceira casa decimal, que é $2,449$.

Caso o aluno que já cursou Cálculo Diferencial não consiga efetuar os cálculos algébricos necessários para a resolução anterior, uma resposta do problema também pode ser obtida graficamente utilizando um gráfico da derivada da função V.

A primeira tarefa desse tipo realizada em sala com um grupo de alunos que ainda não cursou Cálculo Diferencial tem sido trabalhada com as várias etapas descritas anteriormente. À medida que os alunos vão progredindo, o número de etapas vai sendo reduzido. Mas é importante observar que sempre procuramos que os alunos respondam à pergunta sobre o domínio da função em questão antes de empregar um método gráfico ou analítico para estudá-la.

Os cálculos solicitados na Etapa 4 (inclusive a não aceitação de números fora do domínio) e a visualização dos cilindros gerados para cada valor de r podem ser realizados com recursos do *software* do Problema do Cilindro Inscrito numa Esfera[12]. No mesmo software, o aluno pode visualizar qualitativamente a variação do volume dos cilindros circulares retos inscritos na esfera de raio 3 à medida que o valor do raio cresce, e além disso, verificar sua resposta às etapas 5 e 6 (determinação do domínio e da expressão da função a otimizar). A visualização da articulação entre o problema geométrico em estudo e o gráfico da função que modela o problema reforça a compreensão da relação funcional estudada. Uma variante dessa atividade consiste em determinar o valor da altura do cilindro de volume máximo dentre os que podem ser inscritos na esfera de raio 3.

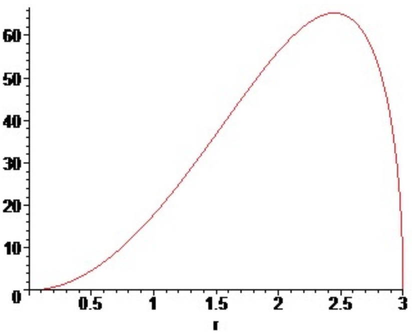


Figura 4: Gráfico de V em função de r no intervalo $(0, 3)$.

Os alunos que vêm realizando esse tipo de atividade têm mostrado progressos na compreensão do conceito de domínio de funções dadas por representações diversas. Também verificamos um aumento no percentual de alunos que são bem-sucedidos em problemas de otimização cujos enunciados não trazem a expressão algébrica da função a estudar. Esperamos que as ideias aqui discutidas contribuam para o desenvolvimento de atividades voltadas à melhoria do aprendizado de funções por nossos alunos.

[11] É importante salientar que, para muitos alunos, uma aproximação de um número é sempre um número decimal finito.

[12] Esse apoio computacional pode ser encontrado em <http://www.uff.br/cdme/eci/> ou <http://www.cdme.im-uff.mat.br/eci/>.

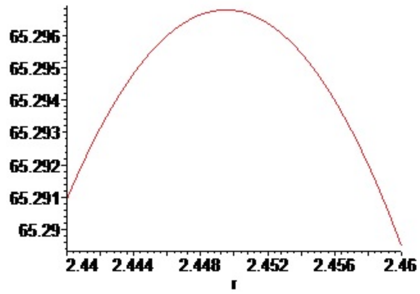


Figura 5: Gráfico de V em função de r no intervalo $[2,44; 2,46]$.

Concluindo, lembro que "organizar e dirigir situações de aprendizagem", incluindo "trabalhar a partir das representações dos alunos" e "administrar a progressão das aprendizagens", como planejado ao longo do problema aqui discutido, são algumas das novas competências pedagógicas profissionais para ensinar, segundo [13].

Referências

[1] Akkoç, H.; Tall, D. A *A Mismatch between Curriculum Design and Student Learning: The Case of The function Concept*. Hewitt, D.; Noyes, A. (Eds.), Proceedings of The Sixth British Congress of Mathematics Education, University of Warwick, p. 1-8, 2005.

[2] Carlson, M. P. A *Cross-Sectional Investigation of The Development of The Function Concept*. Schoenfeld, A. H.; J. Kaput, J.; Dubinsky, E. (Eds.), CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education, American Mathematical Society, n. 7, p. 114-162, 1998.

[3] Chorlay, R. *From Historical Analysis to Classroom Work: Function Variation and Long-term Development of Functional Thinking*. Proceedings of CERME 6, Lyon, France, 2009.

[4] Duval, R. *Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais*. Livraria da Física, São Paulo, 2009. (Obra original publicada em 1995.)

[5] Koedinger, K. R.; Tabachneck, H. J. M. *Two Strategies are Better than One: Multiple Strategy Use in Word Problem Solving*. Annual Meeting of rhe AERA, New Orleans, LA, 1994.

[6] Morgan, C. *What is A Definition for In School Mathematics?* European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Barcelona, p. 861-871, 2006.

[7] Oehrtman, M. C.; Carlson, M. P.; Thompson, P. W. *Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Students' Understandings of Function*. Carlson, M. P.; Rasmussen, C. (Eds.), Making The Connection: Research and Practice in Undergraduate Mathematics, Mathematical Association of America, p. 27-42, 2008.

[8] Palis, G. L. R. *Tecnologia, Gráficos e Equações*. Revista do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, n. 26, p.30-38, 1994.

[9] Palis, G. L. R. *Gráficos de Funções em Calculadoras e com Lápis e Papel*. Educação e Matemática, Associação de Professores de Matemática de Portugal, n. 45, p. 37-40, 1997.

[10] Palis, G. L. R.; Ipina, L. *Procurando Um Equilíbrio Entre O Que Se Pode "Ver" e O Que Se Pode "Imaginar"*. Revista Educação Matemática Pesquisa, Educ-SP, v. 1, n. 2, p. 31-46, 1999.

[11] Palis, G. L. R. *Uma Análise das Concepções Mentais Subjacentes à Produção e Interpretação de Gráficos de Funções*. I Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (I HTEM), v. 1, p. 251-260, 2002.

[12] Palis, G. L. R. *O Conceito de Função: da Concepção Ação à Concepção Processo. Desenvolvimento de tarefas instrucionais*. Boletim do LABEM (Laboratório de Educação Matemática) da Faculdade de Educação da UFF, ano 2, n. 2, 2011.

[13] Perrenoud, P. *Dez Novas Competências para Ensinar*. Artmed, 2000.

[14] Rossman, A. J. *Integrating Data Analysis into Precalculus Courses*. Hastings, N. B. (Ed.), A Fresh Start for Collegiate Mathematics. Rethinking The Courses below Calculus. MAA Notes, v. 69, p. 169-177, 2006.

[15] Thompson, P. W. *Students, Functions, and The Undergraduate Curriculum*. Dubinsky, E.; Schoenfeld, A. H.; Kaput, J. J. (Eds.), CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education, American Mathematical Society, n. 4, p. 21-44, 1994.

[16] Vinner, S. *The Role of Definitions in The Teaching and Learning of Mathematics*. Tall, D. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking. Kluwer, 1991.

Gilda Palis
PUC-Rio
<gildalrpuc@hotmail.com>

Recebido: 2013
Publicado: 2013

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.1, n.1, 2013
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2013/pmo12

Primos: da aleatoriedade ao padrão

Roberto Spenthof Josiney de Souza

Resumo

Na busca por disseminar o assunto entre estudantes de matemática, neste artigo, adaptado de uma dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, apresenta-se o histórico do estudo dos números primos. Demonstram-se os resultados fundamentais, como a infinitude e o Teorema Fundamental da Aritmética. Apresentam-se e comparam-se as estimativas de Gauss, Legendre e Riemann para a função $\pi(x)$ chamada de *função de contagem dos números primos*. Parte-se da aparente aleatoriedade e seguem-se os passos desses matemáticos até a obtenção do padrão que rege a sequência dos números primos. Conclui-se com uma exposição sucinta da Hipótese de Riemann, a contribuição de Euler, e discute-se sobre as consequências de uma possível demonstração para a matemática e para a segurança da *Internet*. Exemplos de atividades que podem ser aplicadas no ensino básico são apresentadas no Apêndice.

Palavras-chave: números primos; contagem; estimativa; conjetura.

Abstract

In the quest to disseminate the subject among students of mathematics, in this article adapted from a dissertation of Professional Masters in Mathematics, the history of the study of prime numbers is presented. Fundamental results such as infinity and the Fundamental Theorem of Arithmetic are shown. The Gauss, Legendre and Riemann estimates for the function $\pi(x)$ called the *prime number counting function* are presented and compared. It starts from the apparent randomness and follows the steps of these mathematicians until obtaining the pattern that governs the sequence of prime numbers. It concludes with a succinct exposition of the Riemann Hypothesis, Euler's contribution, and discusses the consequences of a possible demonstration for mathematics and *Internet* security. Examples of activities that can be applied in basic education are presented in the Appendix.

Keywords: prime numbers; counting; estimation; conjecture.

1. Introdução

– *Um conjunto de números com um nome diferente.* Essa é a noção de números primos com que muitos de nossos estudantes, egressos do ensino médio, ou, o que é pior, de cursos de graduação na área de Ciências Exatas, mantêm. Não se pode, contudo, culpá-los. Quantos de nós, estudantes de matemática, quando ainda na educação básica, podem afirmar que tiveram acesso menos superficial ao assunto do que simplesmente uma definição (quase sempre incompleta) e alguns algoritmos

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

(sem nenhuma fundamentação teórica)? Quantos pelo menos "ouviram falar" que os primos são a estrutura de um dos ramos mais férteis da matemática? Quantos sabiam da existência de alguma aplicação prática da teoria desenvolvida, como, por exemplo, na segurança do contemporâneo comércio eletrônico? O fato é que esse assunto não recebe a devida importância nos programas curriculares. Tentaremos, então, diminuir essas carências nas linhas a seguir, buscando sempre facilitar o entendimento do leitor, do qual se exige, no máximo, o conhecimento dos conceitos de integral e séries numéricas.

Definição 1. *Um número inteiro n ($n > 1$), possuindo somente dois divisores positivos, a saber, 1 e n, é chamado* primo. *Se $n > 1$ não é primo, dizemos que n é* composto.

À primeira vista, esta definição não parece indicar a grandiosidade das consequências, resultados e problemas, alguns ainda não resolvidos, que advêm do seu estudo mais aprofundado. O fato é que a Teoria dos Números, campo da matemática que abrange, entre outros, o estudo dos números primos, mantém-se sempre entre as mais fascinantes, durante toda a história. Grandes matemáticos como Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.), Pierre de Fermat (1601 - 1665), Leonhard Euler (1707 - 1783), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), entre outros, ocuparam-se com pesquisas envolvendo os números primos. Seus trabalhos acabaram por estruturar esse ramo da matemática e por influenciar várias outras áreas, sendo responsáveis pela ocupação de muitos pesquisadores desde então.

Os gregos foram os primeiros a perceber que os números primos eram os "átomos", os blocos básicos, com os quais poder-se-iam construir todos os números naturais, exceto o 1, pela multiplicação. Eram, assim, de certo modo, "indivisíveis". Os pitagóricos, em sua veneração pelos números, também já os conheciam.

Contudo, foi somente nos Livros VII, VIII e IX, da obra *Os Elementos*, de Euclides, dedicados à Teoria dos Números, que os primos revelaram-se formalmente. Conforme consta em [2, p79]: ,

> *"O Livro IX, o último dos três sobre Teoria dos Números, contém vários teoremas interessantes. Desses, o mais célebre é a Proposição 20: 'Núme-ros primos são mais do que qualquer quantidade fixada de números primos.' Isto é, Euclides dá aqui a prova elementar bem conhecida do fato de que há infinitos números primos. A prova é indireta, pois mostra-se que a hipótese de haver somente um número finito de primos leva a uma contradição."*

Tal demonstração está apresentada, em detalhes, na próxima seção.

Eratóstenes de Alexandria, no século III a.C., foi o primeiro a criar uma tabela de números primos. Seu método, conhecido como *crivo de Eratóstenes*, poderia encontrar todos os números primos até um certo número N estipulado. Após escrever todos os números de 2 até N, ele riscava todos os múltiplos de 2, exceto o próprio 2. O próximo número não riscado da sequência é 3, que é primo. Em seguida, riscava todos os múltiplos de 3, exceto o próprio 3. Assim, o próximo número não riscado da sequência é o 5, que é primo. Continuando assim, até o final da sua lista finita de números, somente os números primos não estariam riscados. De fato, os números não riscados só podem ser primos, pois, se não fossem, então seriam múltiplos de algum número menor, e portanto, teriam sido riscados.

Durante a Idade Média, o desenvolvimento da Teoria dos Números Primos ficou estagnado, assim como praticamente todas as outras áreas do conhecimento. Somente no século XVII, após estudar a *Arithmetica* de Diofanto (escrita provavelmente no século III), Pierre de Fermat ressuscitou a questão, e é considerado o fundador da moderna Teoria dos Números. Fermat não era matemático profissional. Mesmo assim, encontrava tempo para se dedicar à matemática. Algumas de suas conjeturas posteriormente provaram-se falsas, como a de que seria primo todo número da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, os quais ficaram conhecidos como *Números de Fermat*, que ele fez baseado na observação de que $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65.537$ são primos. Segundo [7, p98], "Em 1732, Leonhard Euler mostrou que $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$, portanto, composto, desmentindo assim a afirmação de Fermat". Outra conjetura, hoje conhecida como *Pequeno Teorema de Fermat*, revelou-se verdadeira e diz que se p é primo, e a e p são *primos entre si* (dizemos que dois números a e p são *primos entre si* quando seu único divisor comum é o 1), então $a^{p-1} - 1$ é divisível por p. Utilizando esse teorema, podemos concluir, por exemplo, que $2^{100} - 1$ é divisível por 101, sem termos que calcular o valor desse número astronomicamente grande.

Euler, desta vez, demonstrou sua veracidade, e percebeu, inclusive, que esse teorema na verdade é um corolário de um teorema mais geral, que diz que se a e m são números naturais maiores do que 1, primos entre si, então $a^{\varphi(m)} - 1$ é divisível por m (onde $\varphi(m)$ é a *Função Phi de Euler*, que corresponde à quantidade de números naturais entre 0 e $m-1$ que são primos com m). Uma prova detalhada de tal teorema pode ser encontrada em [7, p132].

Euler, como bem se sabe, foi extremamente ativo na sua produção científica. Durante sua vida publicou mais de 500 artigos em quase todas as áreas da matemática. Entre suas contribuições, que depois tiveram consequências na história dos números primos, está o estudo da função ζ, conhecida como *Função Zeta de Euler*.

Até então ninguém havia conseguido ver um padrão na distribuição dos números primos. Essa distribuição, aparentemente aleatória, ensejou a questão de saber se era possível prever a localização precisa do próximo número primo. Foi Gauss quem deu o primeiro e decisivo passo nesse sentido, aos 15 anos de idade. A tabela de números primos contida na contracapa de seu livro de logaritmos parece ter sido a responsável por esse passo. Conforme consta em [5, p56]: ,

> *"O grande avanço de Gauss foi fazer uma pergunta diferente. Em vez de tentar prever a localização precisa do próximo primo, ele buscou ao menos descobrir quantos primos haveria entre os primeiros 100 números, os primeiros 1.000 e assim por diante. Se tomássemos o número N, haveria alguma maneira de estimar quantos primos encontraríamos entre os números 1 e N?"*

Ao se perguntar quantos primos existiam entre 1 e N, isto é, qual é o valor da função $\pi(n)$ para $n = N$, Gauss percebeu que parecia existir uma relação entre esse valor e os logaritmos. Assim, parecia haver uma conexão entre a função logarítmica e a distribuição dos números primos, que o levou, por fim, até a descoberta da "integral logarítmica".

Gauss, de fato, foi um dos grandes propulsores da Teoria dos Números. Em 1798, aos 21 anos, produziu uma das obras-primas da matemática, o livro *Disquisitiones Arithmeticae*, publicado em 1801, onde, entre outras novidades, introduziu o conceito de congruência, que consiste em uma aritmética com os restos da divisão euclidiana por um número fixado, e que acabou por ter uma utilidade prática descoberta somente após cerca de 200 anos.

Analisando os estudos de Gauss, e estudando a Função Zeta de Euler, estendendo-a para números complexos, Riemann deparou-se com algo que parecia acabar com a impossibilidade de prever a localização exata dos números primos. Ele visualizou uma relação entre os zeros "não triviais" da função zeta e a localização dos números primos. Tal relação teve como consequência uma conjetura, até hoje não provada, conhecida como a *Hipótese de Riemann*. "Riemann havia finalmente descoberto o padrão misterioso que os matemáticos haviam almejado ao olharem para os primos ao longo dos séculos" ([5, p110]). Se sua conjetura estivesse correta, a estimativa de Gauss sobre a distribuição dos números primos seria cada vez mais precisa à medida que se avançasse na contagem.

2. Alguns resultados envolvendo números primos

Euclides foi o primeiro a demonstrar que os números primos são infinitos. Sua demonstração é considerada, por muitos, a mais elegante da matemática.

Teorema 1. (Infinitude dos números primos). *Existem infinitos números primos.*

Demonstração (Euclides). Suponhamos que exista somente um número finito r de números primos, a saber p_1, p_2, ..., p_r. Consideremos agora o número $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1$. Se N for primo, então temos uma contradição, já que supomos existir somente r números primos e N evidentemente não é um deles. Se N não for primo, então existe um número primo p que divide N. Mas esse número primo p não pode ser nenhum dos números p_i $(i = 1, \dots, r)$, pois, se fosse, dividiria o produto $p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$, e portanto dividiria o número 1, o que é um absurdo. Em ambos os casos, conclui-se a existência de mais números primos do que a quantidade suposta inicialmente. Logo, a suposição de que existe um número finito de números primos é falsa. $\square$

Uma outra demonstração bem conhecida desse teorema encontra-se numa carta de Christian Goldbach (1690 - 1764) a Euler. Ela se baseia na busca de uma sequência infinita $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ de números naturais, dois a dois, primos entre si. Assim, dois termos quaisquer dessa sequência não possuem fatores primos em comum. Se tal sequência pode ser construída, então existem infinitos números primos, já que cada elemento da sequência deve trazer pelo menos um fator primo diferente daqueles que compõem os números anteriores. Uma sequência assim poderia ser, por exemplo, 3, 7, 10, 11,...

Já era conhecido na época que, apesar de os *Números de Fermat* $F_n = 2^{2^n} + 1$ (para $n \geq 0$) não serem todos primos, como seu criador havia suposto, eles eram todos, dois a dois, primos entre si. Verifiquemos inicialmente dois lemas necessários à demonstração de Goldbach.

Lema 1. *Se F_m é o m-*ésimo *$(m \geq 1)$ número de Fermat, então $F_m - 2 = F_0 F_1 \dots F_{m-1}$.*

Demonstração. Vemos que:

$$F_m - 2 = F_0 F_1 \dots F_{m-1} \iff 2^{2^m} - 1 = (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^{m-1}} + 1).$$

Demonstremos, por indução sobre $m \in \mathbb{N}$, a validade da proposição:

$$P(m) : 2^{2^m} - 1 = (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^{m-1}} + 1).$$

i) Para $m = 1$, temos que $2^{2^1} - 1 = 2^{2^0} + 1$.

ii) Supondo $P(m)$ válida para algum $m > 1$, e multiplicando ambos os membros por $2^{2^m} + 1$, temos:

$$(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^{m-1}} + 1)(2^{2^m} + 1) = (2^{2^m} - 1)(2^{2^m} + 1) = 2^{2^{m+1}} - 1$$

e assim $P(m+1)$ é válida. Logo, $P(m)$ é válida para todo $m \in \mathbb{N}$. □

Lema 2. *Os Números de Fermat* $F_n = 2^{2^n} + 1$ *(para* $n \geq 0$*) são, dois a dois, primos entre si.*

Demonstração. Vimos pelo Lema 1 que $F_m - 2 = F_0 F_1 \dots F_{m-1}$. Assim, se $n < m$, F_n divide $F_m - 2$. Se existisse um número primo p que dividisse simultaneamente F_n e F_m, então p dividiria $F_m - 2$ e, portanto, dividiria 2, logo, $p = 2$, o que é impossível, já que todos os números de Fermat são ímpares. □

Agora já podemos apresentar a demonstração contida na carta de Goldbach:

Demonstração (Goldbach) do Teorema 1. É possível construir a seguinte sequência infinita: F_0, F_1, F_2, ..., onde todos os termos são, dois a dois, primos entre si. Então, os números primos são infinitos. □

Outro importante resultado envolvendo os primos, já conhecido desde o tempo de Euclides, apesar de não constar explicitamente em *Os Elementos*, é o de que os números primos são os blocos de construção dos números naturais, isto é, somente usando números primos como "tijolos" e a operação de multiplicação como a "massa" que os une, podemos construir todos os números naturais, exceto a unidade. De fato, esse resultado é tão importante, que recebeu o nome de *Teorema Fundamental da Aritmética.*

Teorema 2 (Fundamental da Aritmética). *Todo número natural maior do que* 1 *ou é primo ou se escreve de modo único (exceto pela ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Demonstração. Inicialmente, definamos que, dados dois números naturais a e b, com $a \neq 0$, diremos que a *divide* b, escrevendo $a \mid b$, quando existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot c$. Neste caso dizemos que a é um *divisor* ou um *fator* de b e que b é um *múltiplo* de a.

O teorema afirma que a decomposição de um número natural $n > 1$ em fatores primos existe, e é única (exceto pela ordem). Temos que provar, portanto, a existência e a unicidade desta decomposição.

Existência: se n for primo, ele é sua própria decomposição, a qual, portanto, existe. Suponhamos n composto. Tomemos $p_1 > 1$ o menor dos divisores naturais de n. Temos que p_1 é primo, pois, caso contrário, existiria p natural $(1 < p < p_1)$, com $p \mid p_1$ e portanto $p \mid n$, contradizendo a escolha de p_1. Assim, podemos escrever $n = p_1 n_1$.

Se n_1 for primo, novamente a prova está completa. Se n_1 é composto, tomemos p_2 como o menor fator de n_1. Pelo mesmo argumento, temos que p_2 é primo e portanto $n = p_1 p_2 n_2$.

Se repetirmos esse procedimento obteremos uma sequência decrescente $n_1, n_2, \dots, n_r$ de números naturais, todos maiores do que 1. Pelo *Princípio da Boa Ordem* (ver [7, p20]), esse processo não pode continuar indefinidamente. Nesse momento teremos uma sequência $p_1, p_2, \dots, p_k$ de números primos não necessariamente distintos. Logo, n terá a forma:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$$

que é a decomposição de n em fatores primos.

Unicidade: a unicidade é mostrada usando indução sobre n. Para $n = 2$, a afirmação é verdadeira trivialmente. Assumimos que ela se verifica para todos os naturais maiores do que 1 e menores do que n. Vamos provar que ela também é válida para n.

Se n é primo, não há nada a provar. Suponhamos n composto, e que n possua duas decomposições, ou seja,

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_r$$

onde os p_i $(i = 1, \dots, s)$ e os q_j $(j = 1, \dots, r)$ são números primos. Temos que provar que $s = r$ e que cada p_i é igual a algum q_j. Podemos escrever

$$p_2 \cdots p_s = \frac{q_1 q_2 \cdots q_r}{p_1}$$

e como o primeiro membro é um número natural, então $p_1 \mid q_1 q_2 \cdots q_r$, o que implica que p_1 divide algum dos fatores q_j (que são todos primos). Sem perda de generalidade, podemos supor que $p_1 \mid q_1$. Como ambos são primos, isto implica que $p_1 = q_1$. Logo:

$$1 < p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_r < n$$

e aqui a hipótese de indução nos diz que as duas decomposições são idênticas, isto é, $s = r$ e, exceto pela ordem, as decomposições $p_1 p_2 \cdots p_s$ e $q_1 q_2 \cdots q_r$ são iguais. □

Iremos discutir com mais profundidade a distribuição dos números primos na seção seguinte. Contudo, olhando para a lista dos primeiros números primos, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ... e em seguida para a sequência formada pelo comprimento da cadeia de números compostos contida entre dois números primos consecutivos, 0, 1, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 5, 5, 1, 5, 3, 1, 5, 3, 5, 7, ... percebemos que, em média, tais cadeias de números compostos vão ficando cada vez mais longas. Na verdade, essas cadeias de números compostos podem se tornar tão grandes quanto se queira. Em outras palavras, existem "saltos" arbitrariamente grandes na sequência de números primos. Podemos enunciar esse resultado como um teorema.

Teorema 3. *Para qualquer natural k existe uma cadeia de k números consecutivos todos compostos.*

Demonstração. Como $(k+1)!$ é divisível por todos os k números entre 2 e $k+1$, então a cadeia

$$(k+1)! + 2, (k+1)! + 3, \dots, (k+1)! + k, (k+1)! + (k+1)$$

é constituída por k números consecutivos, e nenhum deles é primo, já que admitem como fatores próprios 2, 3, 4, ..., $k+1$, respectivamente. □

Analisando ainda a sequência formada pelos comprimentos das cadeias de números compostos contidos entre dois primos consecutivos, vemos que o número 1 aparece diversas vezes. Ele identifica os pares de números chamados de *primos gêmeos*, que são primos separados por um único número natural. Assim, são exemplos de primos gêmeos os pares 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, e 71 e 73. Em [8, p280], consta que também são primos gêmeos os números $65516468355 \cdot 2^{333333} \pm 1$, que têm 100.355 dígitos cada. Conjetura-se que existam infinitos pares de primos gêmeos, e este ainda é um dos problemas em aberto na Teoria dos Números. O leitor interessado em se aprofundar no assunto pode consultar [8] e [11].

Apesar de existirem saltos arbitrariamente grandes na sequência de números primos, como mostramos, na verdade os números primos não estão tão "espalhados" assim. O *Postulado de Bertrand*, demonstrado pelo russo Pafnuti Tchebychev (1821-1894), afirma que, se n é um número inteiro positivo, então sempre existe um primo p tal que $n \leq p \leq 2n$. Isto quer dizer que, independentemente do ponto onde estejamos na sequência dos números naturais, nunca precisaremos andar mais do que já andamos para encontrar o próximo número primo. A demonstração do Postulado de Bertrand, além de longa, foge do escopo deste artigo, mas pode ser encontrada completa no apêndice C de [12].

Uma outra conjetura famosa, que também estava contida numa carta de 1742 de Goldbach a Euler, ficou conhecida como *Conjetura de Goldbach*. Ela afirma que todo inteiro par, exceto o 2, pode ser escrito como soma de dois primos. Por exemplo, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, ..., $20 = 17 + 3$, ..., $48 = 29 + 19$, ..., $60 = 53 + 7$, ..., $100 = 97 + 3$ e assim por diante. Segundo [6], a Conjetura de Goldbach já foi verificada para os números até 100 milhões, mas a mesma continua sem demonstração.

Existem vários outros problemas menos conhecidos, todos ainda não respondidos, como por exemplo: existem infinitos primos da forma n^2+1? Sempre existe um número primo entre n^2 e $(n+1)^2$? Existem infinitos primos de Fermat (da forma $2^{2^n}+1$)? Como se vê, a teoria em torno dos números primos oferece uma vasta gama de opções de pesquisa.

3. Sobre a distribuição dos números primos

Durante gerações muitos matemáticos estiveram obcecados por prever a localização exata do próximo primo, e, entre eles, Gauss. Mas ao invés de tentar descobrir números primos, Gauss se perguntou quantos primos existiriam entre 1 e um número N qualquer. Percebeu, então, que parecia haver uma forte regularidade. Afirma-se que tal percepção tenha sido motivada pela leitura, por ele, de um livro de logaritmos que continha na sua contracapa uma tábua de números primos.

O que Gauss fez foi estudar uma função, que posteriormente foi denotada por $\pi(x)$, definida como o número de primos p tais que $p \leq x$, chamada de *função de contagem dos números primos*. Assim temos, por exemplo, $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$, etc. Temos também $\pi(\sqrt{2}) = 0$, $\pi(e) = 1$, $\pi(\pi) = 2$, etc. Desse modo, a proporção de números primos entre 1 e x é dada por $\frac{\pi(x)}{x}$.

Seria muito útil se fosse possível analisar o comportamento deste quociente, mas, devido a sua complexidade, Gauss buscou encontrar uma função de comportamento bem conhecido que se aproximasse de $\frac{\pi(x)}{x}$ para x suficientemente grande. Utilizando cálculos mais modernos, podemos construir a Tabela 1.

Uma tabela semelhante, embora não tão longa, foi construída por Gauss. Ele observou que, sempre

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\pi(x)}$
10	4	2,5
100	25	4,0
1.000	168	6,0
10.000	1.229	8,1
100.000	9.592	10,4
1.000.000	78.498	12,7
10.000.000	664.579	15,0
100.000.000	5.761.455	17,4
1.000.000.000	50.847.534	19,7
10.000.000.000	455.052.511	22,0

Tabela 1: Alguns valores do quociente $\frac{x}{\pi(x)}$.

que multiplicava seu espaço amostral por 10, o valor do quociente $\frac{x}{\pi(x)}$ era acrescido em cerca de 2,3. Essa propriedade de transformar produtos em somas é a que caracteriza as funções logarítmicas. Pensou ele que deveria, então, haver uma base a de modo que:

$$\frac{x}{\pi(x)} = \log_a x \Longleftrightarrow \frac{\pi(x)}{x} = \frac{1}{\log_a x}.$$

Analisando tabelas, Gauss concluiu que essa base poderia ser o número e, e assim conjeturou:

$$\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln x} \Longleftrightarrow \pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}.$$

Na Figura 1, temos o gráfico das duas funções no intervalo $[1, 100]$.

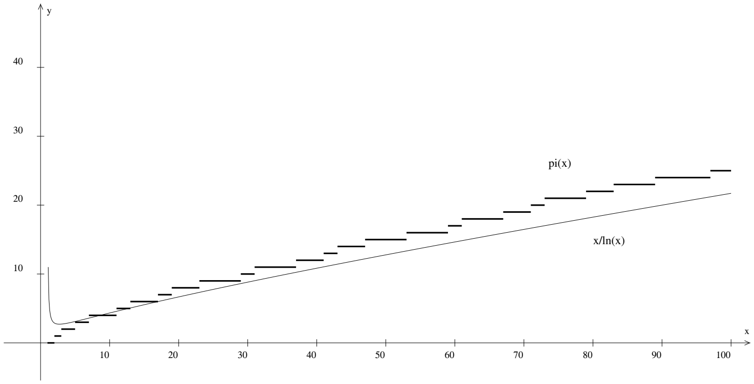


Figura 1: Gráfico conjunto de $\pi(x)$ e $\frac{x}{\ln x}$ no intervalo $[1, 100]$.

No gráfico vemos que há semelhança no comportamento das duas funções no intervalo dado, apesar da característica distinta quanto à continuidade em certos pontos isolados. Mas a estimativa $\frac{x}{\ln x}$

dada por Gauss parece subestimar o verdadeiro valor de $\pi(x)$, pois o gráfico de $\frac{x}{\ln x}$ parece ficar, a partir de um certo ponto, sempre abaixo do gráfico de $\pi(x)$.

Gostar-se-ia de poder provar que $\pi(x)$ e $\frac{x}{\ln x}$ eram *assintoticamente iguais*, isto é, que ambas se aproximassem, relativamente, tanto quanto desejado, bastando para isso tomar x suficientemente grande. Matematicamente, conforme [11, p150], dizemos que duas funções $f(x)$ e $g(x)$ positivas são assintoticamente iguais, e escrevemos $f(x) \sim g(x)$, se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Em 1896, de la Valleé Poussin e Hadamard, independentemente, demonstraram que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1,$$

resultado que ficou conhecido como *Teorema dos Números Primos*, provando a igualdade assintótica das duas funções. A demonstração desse teorema é bastante difícil e não será apresentada aqui, mas está no apêndice A de [8], e utiliza ferramentas de Análise Complexa, área que atualmente é muito importante no desenvolvimento da Teoria dos Números. Em 1949, Selberg recebeu a Medalha Fields, o maior reconhecimento que um matemático pode ter, por ter simplificado de forma substancial a demonstração original desse teorema. Por meio dele, podemos obter uma boa aproximação para o n-ésimo número primo p_n, vendo que $p_n \approx n \ln n$.

Inconformado com a aparente incorreção da estimativa de Gauss, e analisando as tabelas de primos existentes até então, Legendre apresentou o que seria uma melhoria na estimativa. Segundo [5, p63]: ,

> *"O aperfeiçoamento de Legendre consistiu em substituir a aproximação $N/\ln N$ por*
>
> $$\frac{N}{\ln N - 1,08366},$$
>
> *introduzindo assim uma pequena correção que tinha o efeito de desviar a curva de Gauss em direção ao número verdadeiro de primos. Considerando-se os valores dessas funções situados dentro do alcance computacional [da época], era impossível distinguir os gráficos de $\pi(N)$ da estimativa de Legendre."*

Além do mais, no século XIX havia uma grande preocupação com a aplicação prática da matemática, que deveria dar resultados mais precisos quanto possível, independentemente do método empregado, o que pesava a favor da estimativa de Legendre.

O termo 1,08366 introduzido na fórmula, porém, era um tanto "feio", totalmente artificial, o que fez com que alguns matemáticos acreditassem que deveria haver algo melhor e mais natural. Esse, na verdade, é um "exemplo de uma ideologia quase geral entre os matemáticos, segundo a qual, entre um mundo feio e outro estético, a natureza sempre escolhe o segundo" ([5, p64]).

Anos mais tarde, o próprio Gauss apresentou um refinamento na sua estimativa, que ficou conhecida como a *integral logarítmica*, denotada por $Li(x)$, onde (ver [11, p156]):

$$\pi(x) \approx Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Segundo [5, p64], a justificativa teórica da nova estimativa de Gauss baseava-se na ideia de probabilidade:

,

> *"Como a distribuição (dos primos) parecia tão aleatória, o lançamento de uma moeda talvez fosse um bom modelo para a escolha dos primos. [...] Porém, pensou Gauss, a moeda teria que ser viciada, de modo que não caísse em cara a metade das vezes, e sim com a probabilidade de* $1/\ln N$*."*

Assim como, em N lançamentos de uma moeda não viciada, espera-se que o número de caras seja

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{N\,termos}.$$

Gauss supôs que, para a moeda viciada dos primos, o número de caras, ou seja, o número de primos até N, seria algo como

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\cdots+\frac{1}{\ln N}.$$

Considerando cada um destes termos como a área de um retângulo com base igual a 1 e altura igual a $\frac{1}{\ln n}$, para $n = 2, \dots, N$, Gauss seguiu os passos naturais que o levaram até a integral logarítmica, que é a área exata sob a curva $\frac{1}{\ln x}$, limitada pelas retas $x = 2$, $x = N$ e o eixo-x, conforme a Figura 2.

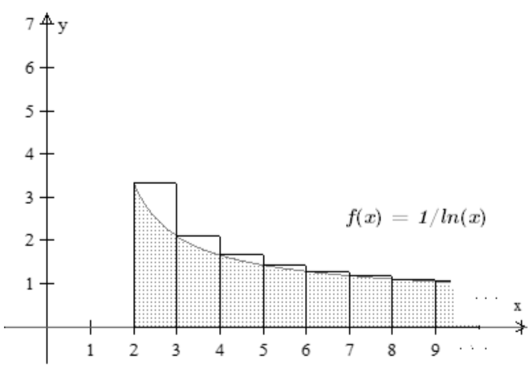


Figura 2: A integral logarítmica $\int_2^N \frac{1}{\ln(x)}\,dx$.

Na Tabela 2, podemos comparar as estimativas sobre o número de primos até x.

A nova estimativa de Gauss passou a ser mais precisa do que a de Legendre, à medida que as tabelas de números primos começaram a ficar mais extensas. Como consta em [5, p66]: "A análise teórica de Gauss havia triunfado sobre a tentativa de Legendre de manipular sua fórmula para se adequar aos dados disponíveis."

x	Erro (%) de $\frac{x}{\ln x}$	Erro (%) de $\frac{x}{\ln x - 1{,}08366}$	Erro (%) de $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$
10	8,57	105,10	28,00
10^2	-13,14	13,59	16,32
10^3	-13,83	2,20	5,10
10^4	-11,65	0,12	1,31
10^5	-9,44	-0,04	0,38
10^6	-7,79	0,06	0,16
10^7	-6,64	0,08	0,05
10^8	-5,77	0,11	0,01
10^9	-5,09	0,14	0,003
10^{10}	-4,56	0,15	0,0007

Tabela 2: Erro (%) cometido pelas estimativas de Gauss e Legendre.

Contudo, apesar de precisa, a estimativa $Li(x)$ é uma função cujo gráfico é contínuo, suave, enquanto $\pi(x)$ parece-se a uma escada. A pergunta natural que se seguiu foi: será que a porcentagem de erro entre a integral logarítmica de Gauss e o número real de primos torna-se cada vez menor quanto mais avançamos na contagem? Isto é, será que os primos continuam se comportando segundo esse padrão mesmo em lugares da sequência onde talvez nunca tenhamos alcance computacional suficiente para verificar?

4. A Hipótese de Riemann e a segurança da *internet*

Durante boa parte da sua vida, Euler dedicou-se ao estudo das séries infinitas. Uma das séries utilizadas para introduzir o assunto, nos cursos de Cálculo, é a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, que aprendemos ser convergente sempre que $s > 1$.

De fato, se $s > 1$, a função $f(x) = \frac{1}{x^s}$ é contínua, positiva e decrescente em $(1, \infty)$. Aplicando o teste da integral, temos:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^s}\, dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Bigg|_{x=1}^{x=t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{t^{s-1}} - 1\right). \end{aligned}$$

Como $s > 1$, temos que $s - 1 > 0$. Logo, quando $t \to \infty$, temos $t^{s-1} \to \infty$ e $\frac{1}{t^{s-1}} \to 0$. Portanto:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \frac{1}{s-1}, \quad (s > 1).$$

Dessa forma, a integral converge, e portanto, pelo teste, a série converge.

Assim, essa série define uma função $\zeta(s)$, quando $s > 1$, isto é:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

que posteriormente recebeu o nome de Função Zeta de Euler.

Entretanto, calcular os valores da função ζ para algum valor $s > 1$ é uma tarefa bastante complicada. Conforme consta em [6, p498], Euler utilizou, em 1735, o procedimento descrito a seguir para o cálculo de $\zeta(2)$.

Tomemos a série de Maclaurin:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Então:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = 0. \tag{1}$$

Fazendo a substituição $y = x^2$, temos:

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \cdots = 0. \tag{2}$$

Da teoria de polinômios, sabemos que a soma dos inversos das raízes da equação é igual ao oposto da razão entre o termo de primeiro grau e o termo independente, o que pode ser demonstrado utilizando as *Relações de Girard*, que são abordadas no ensino médio.

Como as raízes de (1) são π, 2π, 3π, ..., temos que as raízes de (2) são π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, ... Assim:

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots = \frac{1}{6}.$$

Ou seja:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2).$$

Euler também chegou a uma fórmula para calcular o valor de ζ em todos os naturais pares, de onde se mostra, por exemplo, que $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Contudo, para um argumento ímpar, a dificuldade é ainda maior. Sobre o valor de $\zeta(3)$ consta em [6, p499]: "[...] não se sabe nem mesmo se a soma dos inversos dos cubos dos inteiros positivos é um múltiplo racional de π^3".

Euler também descobriu uma relação fundamental para o tema entre a função ζ e os números primos, por meio do *Produto de Euler*, conforme segue:

Teorema 4. *Se $s > 1$, então*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,primo} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

onde a expressão à direita é o Produto de Euler.

Demonstração. Se $|x| < 1$, sabemos que (soma da progressão geométrica infinita):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...$$

Como $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$ para todo primo p, temos que:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + ...$$

Multiplicando tais séries para todos os primos p, e lembrando que, pelo Teorema 2, todo inteiro $n > 1$ é expresso de modo único como produto de potências de diferentes primos, então:

$$\begin{aligned}\prod_{p\,primo} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} &= \prod_{p\,primo}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + ...\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... + \frac{1}{n^s} + ...\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.\end{aligned}$$

□

Esse teorema mostra-nos que existe uma relação entre a função ζ e os números primos. Usando tal série, Euler construiu uma outra demonstração para a infinitude dos primos (Teorema 1).

Demonstração (De Euler para a infinitude dos números primos). Pelo Teorema 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,primo} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

Se houvesse um número finito de primos, então o produto no segundo membro da expressão seria finito para todo $s > 0$, em particular para $s = 1$. Entretanto, para $s = 1$, o valor da primeiro membro é a série harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$, que sabemos ser divergente, o que contradiz o fato de que o produto à direita é finito. Logo, existem infinitos números primos. □

Mas o papel da função ζ sobre a Teoria dos Números ainda estava apenas começando. Anos mais tarde, enquanto se dedicava a explorar o recém-definido plano complexo, Riemann teve a ideia de estender o domínio da função ζ para todos os números complexos cuja parte real fosse superior a 1. Assim, definiu uma nova função:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad para\ \Re(s) > 1$$

que ficou conhecida como *Função Zeta de Riemann.*

Mas o grande avanço obtido por Riemann foi conseguir prolongar analiticamente a função ζ para todo o plano complexo, particularmente para regiões à esquerda da reta $\Re(s) = 1$.

Em 1859, Riemann encontrou a equação funcional para a Função Zeta (ver [1, p40]):

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s)\Gamma(1-s)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \tag{3}$$

onde

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}\,du$$

é a *Função Gama de Euler*, que é uma extensão da função fatorial para números complexos (ver [10, p77-90]).

Em seguida, apresentou a hoje conhecida como *Função de Riemann* (ver [11, p160]):

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li(x^{\frac{1}{n}})$$

onde $\mu(n)$ é a *Função de Möbius* (ver [12, p75]), definida por:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & se \quad n = 1 \\ 0 & se \quad a^2|n \text{ para algum } a > 1 \\ (-1)^k & se \quad n \text{ é o produto de } k \text{ primos distintos.} \end{cases} \tag{4}$$

Riemann obteve, então, a seguinte fórmula (exata!) para $\pi(x)$ (ver [11, p160]):

$$\pi(x) = R(x) - \sum_{\rho} R(x^\rho)$$

onde o somatório é estendido a todos os zeros ρ *não triviais* de $\zeta(s)$, cada um contado com a sua multiplicidade. Nessa fórmula, $R(x)$ é uma excelente estimativa para $\pi(x)$, enquanto que o somatório representa o erro dessa estimativa, funcionando como uma parcela de correção, fazendo com que a expressão seja uma equação. A função de Riemann $R(x)$ é uma aproximação ainda melhor do que $Li(x)$ para $\pi(x)$.

Assim, percebeu-se que o caminho para melhorar a estimativa era estudar a localização dos zeros da função ζ. Estes são de dois tipos:

a) *zeros triviais*: -2, -4, -6, ..., $-2n$, ... ($n \in \mathbb{N}$).

De fato, se $\Re(s) > 1$, pelo Produto de Euler $\zeta(s) \neq 0$, isto é, não há raízes nessa porção do plano complexo. Se $\Re(s) < 0$, a própria equação (3) nos dá os zeros triviais.

b) *zeros não triviais*: zeros contidos no conjunto dos números complexos s tais que $0 \leq \Re(s) \leq 1$. A fórmula de $\pi(x)$ apresentada por Riemann requer o conhecimento da localização dos zeros nessa faixa do plano, que ficou conhecida como *domínio crítico* da função ζ. Um estudo aprofundado, em português, sobre a Função Zeta de Riemann, pode ser encontrado em [1].

Em 1859, Riemann fez uma afirmação que resiste à demonstração até hoje. Ele conjeturou que todos os zeros da função ζ, no domínio crítico, encontram-se sobre a reta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Isto é, ele afirmou que os zeros não triviais da função zeta são da forma $\frac{1}{2} + it$. Tal conjetura ficou universalmente conhecida como *Hipótese de Riemann*. A validade deste resultado implica que não há surpresas no comportamento da sequência dos números primos, ou seja, o padrão de regularidade que eles mantêm, e que pode ser expresso pela integral logarítmica de Gauss, não se altera jamais, por mais que avancemos na contagem até valores incomputáveis. A validade da Hipótese de Riemann significa, então, que os primos são "bem comportados", e não fazem nada "inesperado" em locais onde nossa vista não alcança.

Uma das mais importantes aplicações atuais das propriedades dos números primos é na segurança da informação que trafega pela *Internet*. Já vimos, pelo Teorema 2, que todo número natural pode ser decomposto de modo único como produto de primos. Contudo, encontrar essa decomposição costuma não ser uma tarefa fácil. Por exemplo, tente com o número composto 5.063, relativamente pequeno. Leva um bom tempo para decompor esse número sem ajuda de algum meio eletrônico. Esta característica é o segredo da chamada *criptografia RSA*.

Em 1978, os matemáticos Ron Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), criaram esse sistema de criptografia, que foi batizada com as iniciais dos seus sobrenomes, e que atualmente domina o campo da segurança na *Internet*.

Mas o que é criptografia? Segundo [3, p1]: ,

> *"Em grego,* cryptos *significa secreto, oculto. A criptografia estuda os métodos para codificar uma mensagem de modo que só seu destinatário legítimo consiga interpretá-la. É a arte dos códigos secretos [...]. Naturalmente, todo código vem acompanhado de duas receitas: uma para codificar uma mensagem; outra para decodificar uma mensagem codificada."*

Para interpretar uma mensagem codificada, temos duas formas: decodificá-la ou decifrá-la. Qual é a diferença? Decifrar significa interpretar uma mensagem codificada sem possuir a receita de decodificação. Obviamente, esta opção é utilizada por quem não é o destinatário legítimo da mensagem. Assim, o objetivo dos criadores de códigos criptográficos é dificultar ao máximo o trabalho dos decifradores.

O RSA funciona da seguinte forma (ver [3, p4]):

1. Escolhemos dois números primos p e q.

2. Para codificar uma mensagem, utilizamos o número $n = p \cdot q$.

3. Para decodificar uma mensagem, precisamos conhecer p e q.

Como já foi dito, a segurança do método reside na dificuldade de fatorar n, ou seja, na dificuldade de se obter p e q, mesmo possuindo n. Isto, é claro, quando se está falando de números grandes, com centenas de algarismos, como os que são usados atualmente para a segurança da *Internet* pela criptografia RSA. Números como $5.063 = 61 \cdot 83$, apesar de apresentarem algum trabalho para um ser humano, são decompostos instantaneamente por qualquer computador.

Outra pergunta que surge é: como obter primos grandes como p e q? Teríamos que escolher dois números grandes quaisquer e tentar fatorá-los, para, assim, descobrir se eles são primos? Se assim fosse, enfrentaríamos o mesmo tipo de dificuldade que atribui segurança ao método RSA, e este seria tão difícil de implementar quanto é de decifrar. Felizmente, para o sucesso do RSA, existem testes que permitem verificar se um número grande é primo ou composto, sem fatorá-lo. Para mais detalhes sobre esses métodos e também sobre Criptografia RSA, consultar [3].

Os matemáticos têm desenvolvido métodos poderosos de fatoração, e que continuamente são aprimorados. Segundo [4, p74]: ,

> *"Estes métodos fazem uso de muito do que se sabe sobre os números primos e cada vez que há um avanço em nosso conhecimento sobre estes números, existe uma possibilidade de que isto leve a um novo método de fatoração. Uma vez que a Hipótese de Riemann nos diz tanto a respeito dos primos, uma prova dessa conjetura poderia perfeitamente levar a um grande progresso nas técnicas de fatoração."*

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, David Hilbert (1862 - 1943) apresentou sua lista de 23 problemas a serem "atacados" pelos matemáticos no novo século que se iniciava, e a Hipótese de Riemann já constava entre eles. Cem anos após, em 2000, o Clay Mathematics Institute ofereceu um prêmio de 1 milhão de dólares a quem provasse um dos "Sete Problemas do Milênio", e entre eles novamente se encontrava a Hipótese de Riemann. Segundo [4, p74]: "com a segurança da *Internet* e grande parte da matemática contemporânea pesando na balança, tem muito mais em jogo no Problema de Riemann do que o Prêmio do Milênio de 1 milhão de dólares."

A respeito da denominação de *hipótese* para a conjetura, consta em [5, p19]: ,

> *"Os matemáticos se referem ao problema de Riemann como uma hipótese, e não como uma conjetura, pela existência de muitos resultados que dependem de sua solução. A palavra 'hipótese' tem uma conotação muito mais forte, pois representa uma premissa necessária que o matemático aceita para construir uma teoria. Uma 'conjetura', por outro lado, representa apenas uma previsão do matemático sobre o modo como o mundo se comporta. Muitas pessoas tiveram de assumir sua incapacidade de resolver o enigma de Riemann e decidiram adotar sua previsão como uma hipótese de trabalho. Se alguém conseguir transformar a hipótese em teorema, todos esses resultados pendentes serão validados."*

Na época de Riemann, os recursos computacionais praticamente inexistiam, e, assim, os indícios descobertos por ele não pareciam ser suficientes para uma generalização. Isso indica que a conjetura de Riemann foi baseada principalmente na sua própria intuição e na crença que ele, assim como a maioria dos matemáticos, possuía na estética da natureza.

Até 1920, haviam sido localizados apenas 138 zeros não triviais da função zeta, todos eles sobre a linha crítica. Apesar de G. H. Hardy (1877 - 1947) ter demonstrado que havia infinitos zeros sobre a linha crítica, isto não significava que não existisse algum zero fora dela. Com o desenvolvimento dos recursos computacionais, abriu-se uma nova perspectiva em relação à Hipótese de Riemann: a de refutá-la. Bastava para isso encontrar um único zero fora da linha crítica. Em 1956, as máquinas de Derrick Lehmer verificaram que os primeiros 25 mil zeros estavam sobre a linha. Em 1969, Rosser, Yohe e Schoenfeld determinaram que os primeiros 3.500.000 zeros estavam de acordo com a Conjetura de Riemann. Em 2004, Gourdon e Demichel determinaram que os 10^{13} primeiros zeros não triviais da função zeta estavam sobre a reta crítica.

Um exemplo de que tais resultados, em matemática, não significam nada, é o caso da *Conjetura de Mertens*, que recebeu este nome em homenagem ao matemático alemão Franz Mertens (1840 - 1927). A Função de Mertens, muito usada em Teoria dos Números, é definida como:

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)$$

onde $\mu(k)$ é a Função de Möbius definida na equação (4).

Como $\mu(k)$ só assume os valores -1, 0 e 1, temos obviamente que $M(n) \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mertens foi além, e conjeturou que $M(n) \leq \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Segundo [5, p239], "em 1917, Mertens produziu tabelas de cálculo até $n = 10.000$ para dar apoio a sua conjetura. Nos anos 1970, as observações experimentais já haviam chegado a um bilhão". Somente em 1985, Odlyzko e Te Riele refutaram a conjetura, por meio de um experimento computacional envolvendo o cálculo dos primeiros 2 mil zeros da função ζ, até cem casas decimais, o que era equivalente a verificar a conjetura para $n > 10^{30}$. Ou seja, somente para um número n absurdamente grande, encontramos um contraexemplo para a Conjetura de Mertens. Se tivéssemos nos deixado levar pelos dados obtidos incialmente, a teríamos erroneamente considerado como verdadeira.

5. Conclusão

A motivação inicial era abordar um assunto que, em nossa concepção, não recebe a devida importância nos programas curriculares, tanto no ensino básico, quanto nas licenciaturas, e, dessa forma, fomentar sua disseminação e aprendizado por alunos e professores de matemática.

Agora sabemos que os primos são infinitos, e que, junto com a operação de multiplicação, constroem todos os naturais, exceto a unidade. Sabemos também que, mesmo existindo saltos arbitrariamente grandes na sequência dos primos, sempre haverá um primo entre um natural qualquer e seu dobro.

Para chegar a tais conclusões, usamos logaritmos, probabilidades, calculamos séries infinitas, aplicamos várias funções especiais, observamos padrões e proferimos conjeturas. Fizemos demonstrações, diretas, indiretas, de existência e unicidade. Enfim, mantivemos contato com diversas áreas da matemática, somente para escrever sobre os números primos. Tudo isso acaba por reforçar nossa ideia de que tal assunto é pouco aproveitado pelos educadores, visto que possibilita enorme integração entre conceitos e áreas distintas da matemática.

Tivemos contato com a natureza estética da matemática, que preferiu a estimativa de Gauss à de Legendre. Sempre poderemos inserir termos de correção artificiais em nossos modelos, assim como fez Legendre, de modo que os mesmos convirjam perfeitamente para os dados existentes. Mas devemos, como Gauss, buscar entender profundamente a natureza do problema e da realidade, de modo que nossos modelos não precisem desses termos de correção, e continuem convergindo mesmo para os novos dados que surgirão no futuro.

A estética da matemática apresentou-se também a Riemann. Somente confiando nela, ele pôde, em uma época onde os recursos computacionais eram inexistentes, conjeturar que havia um padrão nos zeros da função ζ. Ele provavelmente tenha calculado somente alguns poucos destes infinitos zeros, e sua intuição contribuiu com o restante.

Com a ampliação dos recursos computacionais nos nossos dias, pôde-se calcular muitos mais destes zeros, e todos obedecem à Conjetura de Riemann. Isto seria mais do que suficiente em qualquer outra área do conhecimento, mas, na matemática, não significa quase nada. Mesmo havendo infinitos zeros sobre a linha crítica, não poderemos afirmar que todos estão, o que é o anseio dos matemáticos. No máximo, isso serve para manter as esperanças na veracidade da conjetura e na existência de uma demonstração para a mesma. Poderíamos nos perguntar: se a Conjetura de Riemann for verdadeira, então certamente há uma demonstração (que ainda não descobrimos)? Não necessariamente. O lógico-matemático austríaco Kurt Gödel (1906 - 1978) demonstrou, em seus conhecidos *Teoremas da Incompletude*, que qualquer sistema axiomático suficiente para incluir a aritmética dos números inteiros não pode ser simultaneamente completo e consistente. Isso significa que, admitindo a consistência de um sistema axiomático, ou seja, que não haja contradições entre os resultados deduzidos de seus axiomas, então sempre haverá proposições verdadeiras que não poderão ser provadas dentro do referido sistema. Dessa forma, é possível que a Hipótese de Riemann seja verdadeira sem que seja possível prová-la com os axiomas do sistema formal em que ela é enunciada: a matemática. Curiosamente, Gödel utilizou números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética na demonstração desses teoremas.

Essa demonstração, tão buscada, entretanto, não tem tanta importância em si mesma, uma vez que muitos trabalhos posteriores já utilizam a conjetura como hipótese. Na verdade, a grande maioria dos matemáticos acham que ela é verdadeira. A importância está na matemática nova que continuamente é criada na busca por tal demonstração.

Quase toda a Teoria dos Números foi desenvolvida sem um fim prático imediato. Mesmo assim, a criptografia RSA, por exemplo, está aí para mostrar mais uma vez que o trabalho dos matemáticos puros não é em vão. Uma pergunta muito comum após a exposição de um assunto novo, em uma típica aula de matemática, é: para que serve isto? Essa pergunta nem sempre é oportuna. De fato, o que teria sido da Teoria dos Números (e da nossa tão prezada *Internet*) se Gauss tivesse desistido de suas ideias pelo simples fato de não vislumbrar uma aplicação prática imediata?

Enfim, viajamos desde a aleatoriedade aparente dos números primos até o padrão descoberto por Gauss e ratificado por Riemann.

Esperamos ter, com este artigo, aprimorado a visão do assunto que o leitor previamente possuía, preenchendo algumas lacunas, mas, principalmente, criando novas, estimulando a curiosidade que deve acompanhar sempre todo estudante de matemática.

Este texto foi adaptado da dissertação (em [13]) apresentada pelo autor ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Maringá, organizado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

Referências

[1] Aguilera-Navarro, M. C. K. et al. *A Função Zeta de Riemann*, Revista Ciências Exatas e Naturais – UNICENTRO/PR – Guarapuava, v. 1, n. 1, p. 23-47, 1999.

[2] Boyer, C. B. *História da Matemática*. Segunda edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[3] Coutinho, S. C. *Números Inteiros e Criptografia RSA*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[4] Devlin, K. J. *Os Problemas do Milênio*. Segunda edição. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[5] Du Sautoy, M. *A Música dos Números Primos: A História de Um Problema Não Resolvido na Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

[6] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*. Quinta edição. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

[7] Hefez, A. *Elementos de Aritmética*. Segunda edição. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[8] Martinez, F. B. et al. *Teoria dos Números: Um Passeio com Primos e Outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro*. Segunda edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[9] Neri, C.; Possani, C. *Os Primos Esquecidos*. Revista do Professor de Matemática, SBM, n. 47, p. 16-20, 2001.

[10] Oliveira, E. C. *Funções Especiais com Aplicações*. Primeira edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.

[11] Ribenboim, P. *Números Primos. Velhos Mistérios e Novos Recordes*. Primeira edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[12] Santos, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números*. Terceira edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[13] Spenthof, R. L. *Primos: Da Aleatoriedade ao Padrão*. Maringá – PR: UEM, 2013.

A. Apêndice

De acordo com a conveniência (devido ao espaço limitado, omitimos informações mais detalhadas, contudo o professor poderá facilmente selecioná-las de acordo com a maturidade matemática de sua turma), as seguintes atividades podem ser utilizadas no ensino básico. Estes exercícios são apenas alguns exemplos, para ilustrar a possibilidade de aprofundamento no assunto, proposta neste artigo.

1) Utilizando o *Crivo de Eratóstenes*, encontre todos os números primos entre 2 e 200 (utilize a tabela abaixo).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176
177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200								

a) Você percebeu que a partir de um certo momento não foi mais preciso riscar nenhum número, porque todos os números a serem riscados já haviam sido riscados anteriormente? Qual foi o último número primo que teve algum múltiplo riscado? Por quê?

b) Para saber se um número n é primo, é necessário e suficiente verificar que n não é divísivel por todos os primos p tais que: ( ) $p \leq n-1$ ( ) $p \leq \sqrt{n}$ ( ) $p \leq \sqrt[3]{n}$ ( ) $p \leq \frac{n}{2}$ ( ) $p \leq \frac{n}{3}$

c) Discuta com seus colegas a conclusão acima.

2) Escreva a decomposição em fatores primos para os seguintes números: a) 73 b) 30 c) 40 d) 221 e) 323

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_n	2	3	5	7	11	13	17	19	23											
$n \ln n$	0	1,4	3,3	5,5	8,0															

3) Calcule os Números de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4. Verifique que estes números são primos (sugestão: utilize uma calculadora). Podemos afirmar que os Números de Fermat são primos para todo $n \in \mathbb{N}$?

4) Utilizando a tabela construída no exercício 1, encontre todos os pares de *primos gêmeos* (primos separados por um único número natural) menores que 200. Obs.: ainda não se sabe se os primos gêmeos são infinitos.

5) Escreva todos os números pares entre 4 e 50 como soma de dois primos. Obs.: ainda não se sabe se todos os números pares, exceto o 2, podem ser escritos como soma de dois primos (Conjetura de Goldbach). $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, ...

6) Construa uma sequência de 7 números consecutivos, todos compostos. Existe alguma outra sequência como esta formada por números menores?

7) Complete a seguinte tabela usando uma calculadora científica, e esboce o gráfico conjunto (gráfico de pontos) de p_n (n-ésimo primo) em azul e de $n \ln n$ em vermelho para n entre 1 e 20, em uma cartolina. O que podemos dizer a respeito desse gráfico?

Respostas: 1-a) 13, ver item b. 1-b) $p \leq \sqrt{n}$. 2-a) 73. 2-b) $2 \cdot 3 \cdot 5$. 2-c) $2^3 \cdot 5$. 2-d) 11^2. 2-e) $17 \cdot 19$. 3) $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65537$. 6) (7+1)!+2, (7+1)!+3, ..., (7+1)!+(7+1). Com os menores números possíveis temos 90, 91, ..., 96.

Para complementar: uma lista com 15 atividades relacionadas aos números primos pode ser encontrada em [9].

Roberto Spenthof
UEM – PR
<rlspenthof@gmail.com>

Josiney de Souza
UEM – PR
<jasouza3@uem.br>

Recebido: 2013
Publicado: 2013

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.1, n.1, 2013
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2013/pmo13

O uso de ambiente de geometria dinâmica como subsídio para a caracterização das funções quadráticas

Alan de Oliveira Fabio Dorini

Resumo

No processo de ensino e aprendizagem do conceito de função quadrática abordado no ensino médio, tem-se constatado que o tratamento apenas manipulativo da expressão algébrica associada à função pode limitar o desenvolvimento do raciocínio funcional no que diz respeito à sua concepção conceitual. Destarte, o uso de ambiente de geometria dinâmica para a construção desse conhecimento propicia aos alunos a possibilidade de superar essa limitação, permitindo-lhes refletir como a variação de uma grandeza depende da variação de outra. Este artigo, oriundo de parte de uma Dissertação de Mestrado [3] do PROFMAT[1], sugere atividades desenvolvidas em GeoGebra que, baseadas no teorema de caracterização das funções quadráticas, abrangem a identificação de funções quadráticas em situações que relacionam objetos geométricos sem o uso, *a priori*, das representações algébricas e/ou gráficas.

Palavras-chave: ensino de Matemática; função quadrática; GeoGebra.

Abstract

In the process of teaching and learning the concept of quadratic function addressed in high education, it has been found that the manipulative treatment of algebraic expression associated with function may limit the development of functional reasoning with respect to its conceptual conception. Thus, the use of a dynamic geometry environment for the construction of this knowledge allows students to overcome this limitation, allowing them to reflect how the variation of one quantity depends on the variation of another. This article, from a Master's Dissertation [3] of PROFMAT, suggests activities developed in GeoGebra that, based on the theorem of characterization of quadratic functions, cover the identification of quadratic functions in situations that relate geometric objects without the use, the priori, of algebraic and/or graphic representations.

Keywords: Mathematics teaching; quadratic function; GeoGebra.

1. Introdução

[1]Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – <http://www.profmat-sbm.org.br/>.

O ensino de funções no ensino médio, praticado sob a perspectiva apenas da formalização matemática, pode-se constituir em obstáculo de difícil transposição no que diz respeito à compreensão de seu conceito. A abordagem de forma mecanizada com pouca reflexão na qual se desenvolve o domínio de técnicas, fórmulas e procedimentos de manipulações simbólicas e numéricas pode levar os alunos a associarem ao conceito apenas a ideia de correspondência. Desta forma, inibe-se o desenvolvimento de uma disposição e forma de pensar em que possam, constantemente, buscar e examinar diferentes tipos de relações, conjecturar, utilizar diferentes sistemas de representação, estabelecer conexões e empregar vários argumentos.

Os ambientes de geometria dinâmica permitem a abordagem do conceito de função em situações nas quais os alunos desenvolvem a percepção intuitiva da ideia de variação. Nesses ambientes, pode-se explorar o conceito investigando-se a relação de dependência entre objetos geométricos (basicamente, comprimentos e áreas). Nessas relações a dependência entre objetos ocorre naturalmente. Por exemplo, se construirmos um retângulo cujo comprimento da altura é fixado, pode-se observar as variações da área em função do comprimento da base do retângulo [1]. Ou, se construirmos um quadrado inscrito em um círculo, o lado e a área do quadrado são funções do raio do círculo. Assim, através do estudo dessas variações, é possível tentar inferir o tipo de função que relaciona essas grandezas geométricas, sem deduzir a expressão algébrica ou construir o gráfico associados.

O GeoGebra[2] é um aplicativo livre de geometria dinâmica, criado em 2001 por Markus Hohenwarter, desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Matemática nos vários níveis escolares. Tal aplicativo associa ferramentas algébricas e geométricas possibilitando, em um mesmo ambiente, construir figuras em geometria dinâmica que representam, segundo [1], ,

> *"uma classe de objetos geométricos definida por propriedades e relações comuns que se preservam quando arrastados na tela, permitindo ao usuário investigar um grande número de exemplos e explorar conjecturas, constituindo uma preparação para o exercício de argumentação matemática".*

A principal característica do GeoGebra, segundo o seu idealizador, consiste na percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de álgebra corresponde a um objeto na janela de visualização gráfica e vice-versa. Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um aplicativo de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas, circunferências, etc. Por outro, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica, oferecendo, portanto, diversas possibilidades para a exploração pedagógica.

O uso do GeoGebra, cujos recursos disponibilizados facilitam a exploração algébrica, gráfica e a utilização de uma planilha de cálculos, de forma simultânea, permite estabelecer uma abordagem pouco, ou quase nada, explorada do conceito de função quadrática em situações nas quais se caracterizam uma relação de dependência funcional entre objetos geométricos.

Em vista disso, este artigo apresenta atividades desenvolvidas em GeoGebra cujo objetivo é auxiliar o professor de Matemática do ensino médio no tratamento do conceito de função quadrática. Baseado no teorema de caracterização das funções quadráticas, propõe a construção do conheci-

[2] <http://www.geogebra.org/>.

mento através de atividades que visam explorar ideias intuitivas de variação e dependência entre objetos geométricos sem a mediação, *a priori*, de representações algébricas e/ou gráficas.

O teorema a seguir apresenta condições para que um problema possa ser modelado por uma função quadrática. O enunciado foi estabelecido com base em [2]. As atividades que serão propostas suscitam conjecturas cuja validade, ou não, é fundamentada nas condições explicitadas no referido teorema.

2. Teorema de caracterização das funções quadráticas

Teorema 1. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, toda progressão aritmética não constante $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ é transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$, em que $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$.*

Para a compreensão desse teorema pressupõe-se desenvolvida a habilidade de conversão entre diferentes linguagens. Daí segue naturalmente o questinamento: como apresentá-lo ao aluno do ensino médio? Uma proposta seria, intuitivamente, apresentá-lo por meio de um exemplo particular mais simples. Considere a função quadrática $f(x) = x^2$ que tranforma a progressão aritmética

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots$$

na sequência

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ (n+1)^2,\ \ldots,$$

que não é uma progressão aritmética. Entretanto, examinando-se as diferenças entre os termos consecutivos desta última sequência, encontra-se

$$3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 2n+1,\ \ldots,$$

que é uma progressão aritmética.

De forma geral, é possível verificar sem maiores dificuldades que essa característica constitui uma propriedade exclusiva das funções quadráticas (ver [2], por exemplo, para mais detalhes).

3. Atividades

Nas atividades seguintes, propõe-se a exploração dinâmica das variações funcionais – expressas por grandezas geométricas – como subsídio para a caracterização das funções quadráticas, antes mesmo de traçar seus gráficos, sem a mediação das leis de formação ou tabelas. Além disso, admite-se conhecido que uma função quadrática é contínua em todo o seu domínio.

Importante ressaltar que não é objetivo deste trabalho o aprofundamento nas instruções para as construções geométricas no GeoGebra. Para os leitores interessados na reprodução das atividades propostas, seguem no ANEXO os endereços eletrônicos para acesso/*download* as/das mesmas. Além disso, convém destacar que as Atividades 1 e 2 foram adaptadas dos concursos de seleção para o ingresso ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática[3] da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Exames 2012 (questão 2) e 2010 (questão 2), respectivamente, com objetivos diversos dos deste trabalho.

[3] http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/

3.1. Atividade 1

Considere um círculo C_1 cujo raio mede 2 unidades de comprimento. Seja AP um diâmetro qualquer de C_1 (conforme Figura 1). Marque um ponto livre O no segmento AP tal que OP seja o raio de um círculo C_2, tangente internamente ao círculo C_1 no ponto P. *Como varia a área compreendida entre os dois círculos em função do raio OP?*

Para explorar as ideias intuitivas da relação de dependência da área A, compreendida entre os dois círculos, em função da medida do raio $r = |OP|$ do círculo C_2, pode-se usar os recursos disponíveis do GeoGebra para construir os dois círculos – considerando satifeitas as condições dadas – e, numa planilha de cálculo do próprio GeoGebra (que tem funcionamento similar ao das planilhas eletrônicas mais usuais), registrar essa variação tomando-se um Δr fixo (veja a Figura 1).

Buscando caracterizar uma função quadrática associada ao comportamento dessa variação, é importante observar que o valor de Δr representa a razão de uma progressão aritmética. Sendo assim, em virtude do Teorema 1, deve-se verificar se a sequência numérica cujos termos representam os valores relativos às áreas obtidas em função das medidas dos respectivos raios, r (coluna B da planilha), representa uma progressão aritmética de segunda ordem. Desta forma, aproveitando a mesma planilha de cálculos, registram-se, portanto, as diferenças $D[i]$s, $D[i] = C[i+1] - C[i]$, dos termos consecutivos da sequência numérica estabelecida na coluna C da planilha, conforme ilustrado na Figura 1.

Convém destacar que as limitações técnicas do computador, em especial no que tange ao cálculo aproximado do número π, podem produzir resultados inesperados. Eventualmente, os $D[i]$'s podem não ser exatamente iguais.

Note que para garantir que seja satisfeita a condição de tangência entre os círculos, a medida do raio r do círculo C_2 deve variar entre 0 e 2. Recorrendo aos recursos computacionais do GeoGebra, é possível proceder uma alteração no valor de Δr com o intuito de validar (ou não) a conjectura de que essa relação funcional caracteriza uma função quadrática. Para isso, clique em N (Figura 1) e movimente o cursor (direita ou esquerda) para, então, redefinir o valor de Δr.

Fixando-se um novo Δr, por exemplo 0.1, tem-se uma nova planilha na qual se pode observar que as diferenças $D[i]$s também são constantes, indicando, portanto, que a sequência dos valores associados às areas, nessa nova situação, também constituem termos de uma progressão aritmética de segunda ordem. Observa-se que nessa situação o número racional -0.06283 é a melhor aproximação para os $D[i]$s (Figura 2).

Agora, observando a variação dos valores que constituem a relação de dependência funcional, explicitada nas planilhas, é possível conjecturar que a função transforma uma progressão aritmética ordinária não constante (de razão Δr) em uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Isso significaria que, segundo o teorema da caracterização das funções quadráticas, a função que a cada raio r associa o valor da área A correspondente é quadrática.

Cabe ressaltar, também, que os resultados apresentados pelo computador não podem servir como critério de verdade matemática, mas, sim, como subsídio para se estabelecer conjecturas sobre o modelo que se está estudando. Portanto, há uma necessidade da comprovação dos resultados embasada em argumentação formal.

Para verificar a validade dessa conjectura pode-se recorrer, então, à expressão algébrica associada à função quadrática. Para isso, sejam r um raio qualquer escolhido no intervalo $[0, 2]$ e A a área

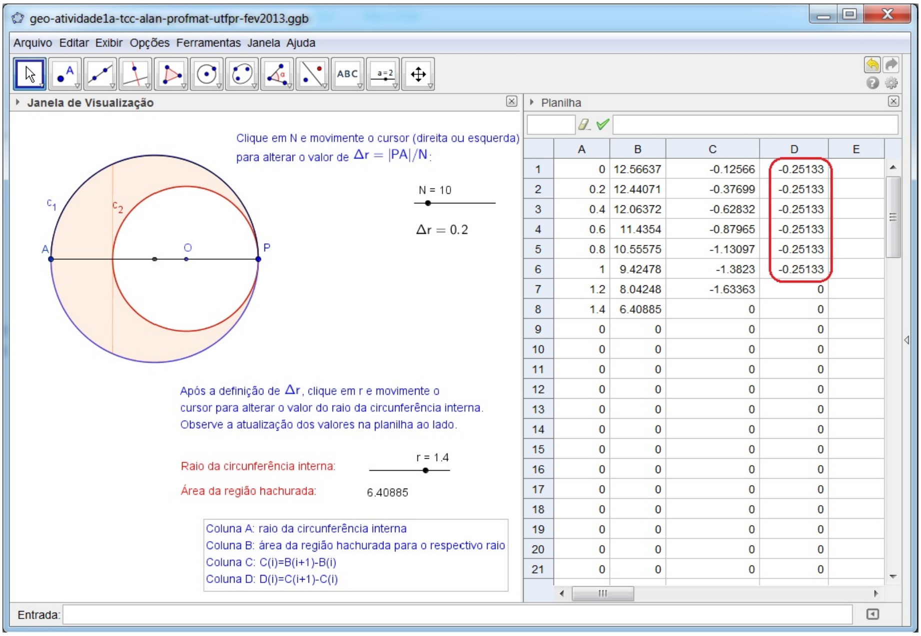


Figura 1: Ilustração da variação da área A em função do raio de C_2; $\Delta r = 0.2$.

correspondente. Sabendo que a fórmula πr^2 define a área de um círculo cujo raio mede r e que o círculo C_1 tem raio fixo medindo 2 unidades de comprimento, pode-se, sem dificuldade, deduzir a expressão da função área, A:

$$\begin{aligned} A : [0,2] &\to \mathbb{R} \\ r &\mapsto \pi(4 - r^2). \end{aligned}$$

Portanto, segue que a função área A é, realmente, quadrática.

As características intrínsecas do GeoGebra, no que diz respeito à sua condição de conector dinâmico de múltiplas representações, permitem observar a variação da função área graficamente, construindo-se o gráfico dessa função usando a opção *lugar geométrico*, possibilitando realizar um estudo mais geral dessa função (veja a Figura 3).

3.2. Atividade 2

Considere um quadrado $ABCD$ cuja diagonal mede 6 unidades de comprimento. Marque um ponto livre H no segmento AC e, em seguida, construa um segmento de reta paralelo à diagonal BD que contenha o ponto H e cujas extremidades estejam sobre os lados do quadrado. Seja P o polígono convexo, inscrito ao quadrado (conforme Figura 4), cujos vértices são as extremidades desse segmento de reta e o vértice A do quadrado. Considerando $h = |AH|$, *como varia a área do polígono P em função de h?*

Seja A a medida da área do polígono convexo P. Para explorar as ideias intuitivas da relação de

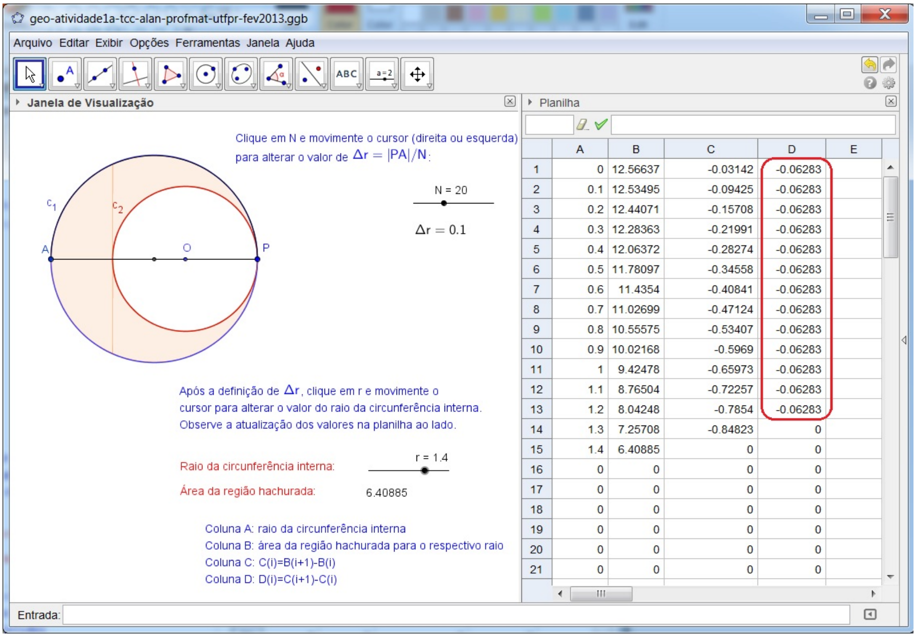


Figura 2: Ilustração da variação da área A em função do raio de C_2; $\Delta r = 0.1$.

dependência da área A em função da medida h, usando-se os recursos disponíveis do GeoGebra, deve-se, em primeiro lugar, construir o quadrado $ABCD$ e, em seguida, o polígono P – considerando satisfeitas as condições dadas – e, na planilha de cálculo, registrar essa variação tomando-se um Δh fixo qualquer (veja a Figura 4).

Da geometria do problema segue que para $h \leq 3$ o polígono P assume o formato de um triângulo retângulo. Por outro lado, para $h \in]3, 6[$ o polígono P assume o formato de um pentágono (Figura 5). É fato que se $h = 6$, então o polígono P coincide com o quadrado $ABCD$. Desta forma, é razoável afirmar que a função área, A, é definida por duas sentenças (funções de h). Deseja-se verificar se o estudo do comportamento da variação dessa relação funcional satisfaz as premissas do teorema de caracterização de funções quadráticas. Assim sendo, sejam A_1 a área do polígono P quando o mesmo assume o formato de triângulo retângulo, e A_2 a área do polígono quando este assume o formato de um pentágono. Analisando os valores das funções, observa-se que ambas são monótonas crescentes em todo o seu domínio, pois tanto os valores de A_1 quanto os de A_2 aumentam quando h aumenta. Também, admite-se intuitivamente a continuidade da função área. Além disso, analisando os valores das funções explicitados nas planilhas constantes nas Figuras 4–5, pode-se conjecturar que, para Δh fixo, as funções definidas nesses intervalos transformam uma progressão aritmética ordinária de razão Δh em uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Assim, é possível afirmar que a função área, $A(h)$, é definida por duas sentenças que são funções quadráticas.

Importante salientar que para cada Δh fixado, nota-se que com o aumento dos valores de h tem-se que ΔA_1 (variação de A_1) cresce e ΔA_2 decresce. Isso indica que a função A_1 cresce com concavidade para cima e a função A_2 cresce com concavidade para baixo. Pode-se verificar esse

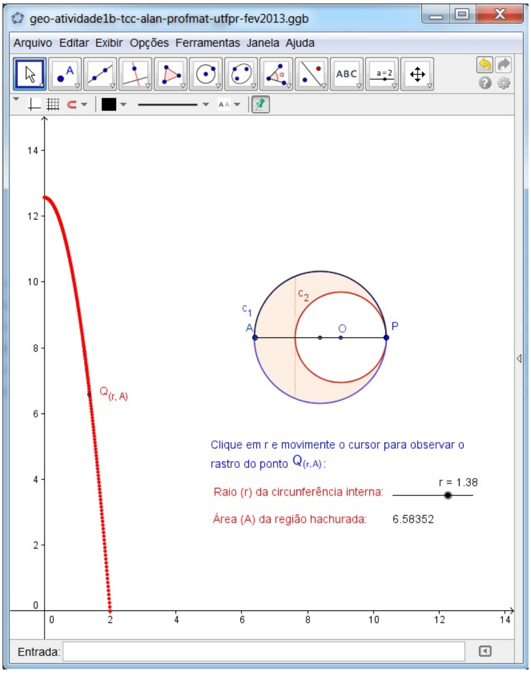


Figura 3: Ilustração do gráfico da área, A, em função do raio $r = |OP|$.

comportamento construindo-se o gráfico da função A com o uso dos recursos do GeoGebra (veja Figura 6). Note que para $h = 3$ tem-se um ponto de inflexão e, por conseguinte, há uma mudança na concavidade da função área A.

É fato que a representação algébrica também pode ser usada para estudar o comportamento da variação da área do polígono P em função do valor de h. Com efeito, como a função área A é definida por duas sentenças, pode-se proceder a análise em duas situações:

- Determinação da lei de formação da função A_1 – Observe que o triângulo retângulo em questão é isósceles, pois é semelhante ao triângulo ABD. Deste modo, considerando que $A_\triangle$ é a medida da área do triângulo de vértices ABD, segue, da semelhança, que:

$$\frac{A_1(h)}{A_\triangle} = \left(\frac{2h}{6}\right)^2, \quad \text{ou seja,} \quad A(h) = h^2.$$

- Determinação da lei de formação da função A_2 – Note que a área do pentágono A_2 é igual à área do quadrado, subtraindo-se $A_1(6-h)$. Deste modo, segue que:

$$\begin{aligned} A_2(h) &= 18 - (6-h)^2 = \\ &= (18 - (36 - 12h + h^2)) = -h^2 + 12h - 18. \end{aligned}$$

Pode-se, então, concluir que a função $A : [0,6] \to \mathbb{R}$, que representa a área do polígono P em

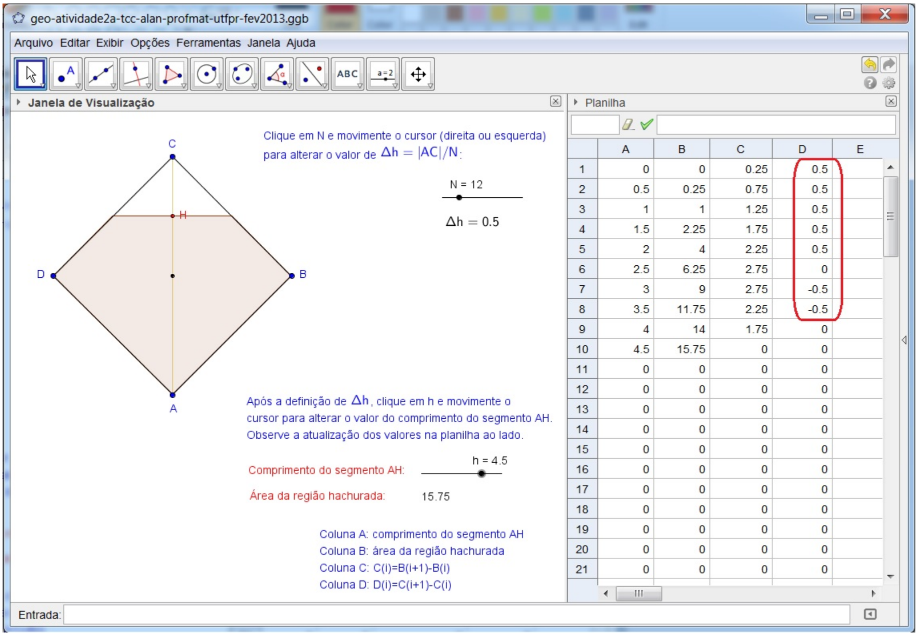


Figura 4: Ilustração da variação da área A em função de $h = |AH|$; $\Delta h = 0.5$.

função do valor da medida h, é definida por

$$A(h) = \begin{cases} h^2, & \text{se} \quad 0 \leq h \leq 3, \\ -h^2 + 12h - 18, & \text{se} \quad 3 < h \leq 6, \end{cases}$$

uma função quadrática (por partes).

3.3. Atividade 3

Considere um setor circular de ângulo central reto e cujo raio OA mede 5 unidades de comprimento. Marque um ponto livre H no segmento OA de modo que o segmento OH seja a base de um retângulo inscrito no setor (conforme Figura 7). *Como varia a área desse retângulo em função da medida da sua base?*

Seja A a medida da área do retângulo de base OH, inscrito no setor, e $h = |OH|$, a medida de sua base. De maneira análoga às Atividades 1 e 2, é possível explorar as ideias intuitivas da relação de dependência da área A, em função da medida h, usando-se os recursos disponíveis do GeoGebra. Para isso, deve-se, em primeiro lugar, construir o setor circular e, em seguida, o retângulo de base OH. Em seguida, na planilha de cálculo registram-se os valores relativos a essa variação considerando-se um Δh fixo qualquer (veja a Figura 7).

É interessante notar que os recursos computacionais podem, e devem, ser usados como subsídio para a argumentação matemática no sentido de constatar que a relação de dependência funcional tratada nesse modelo *não* caracteriza uma função quadrática. Sabe-se, pelo teorema de caracterização das

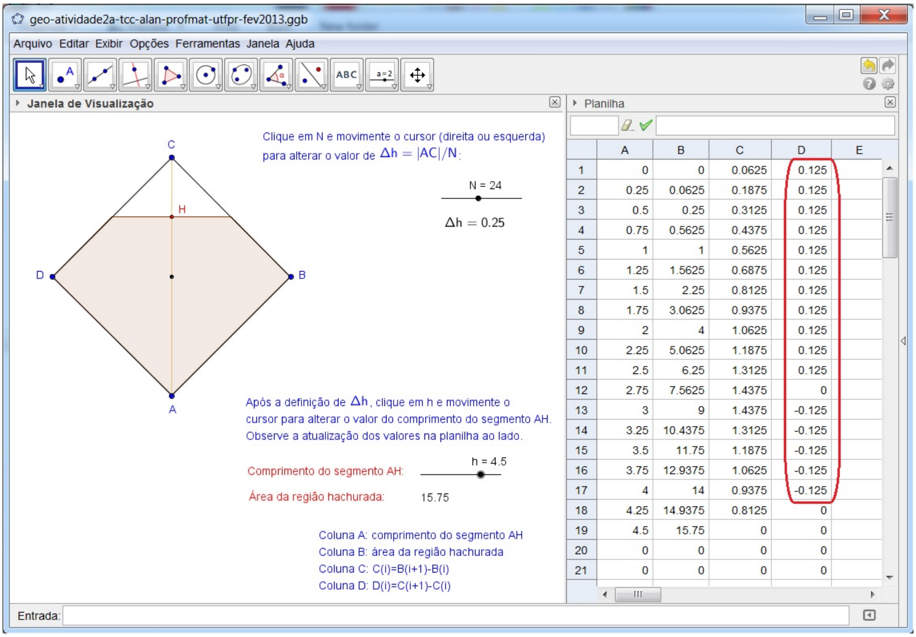


Figura 5: Ilustração da variação da área A em função de $h = |AH|$; $\Delta h = 0.25$.

funções quadráticas, que a condição necessária para que uma função contínua seja quadrática é que toda progressão aritmética ordinária seja transformada pela função em uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. De fato, analisando os valores da função explicitados na planilha, pode-se verificar que a função A não é quadrática, pois a progressão aritmética de razão $\Delta h = 0.25$ não foi transformada numa progressão aritmética de segunda ordem, uma vez que os $D[i]$'s não são constantes, conforme observado na coluna D da planilha na Figura 7.

Além disso, no sentido de se estabelecer uma argumentação matemática mais fundamentada, pode-se ratificar a conclusão anteriormente estabelecida fazendo-se uso dos recursos computacionais do GeoGebra que oportunizam integrar os diversos registros do conhecimento. Destarte, construindo o gráfico dessa função como lugar geométrico, percebe-se que a curva descrita (Figura 8) não é simétrica, indicando, portanto, que o gráfico não é uma parábola. Desta forma, pode-se afirmar que a área do retângulo em função da medida da sua base, como já constatado anteriormente, não caracteriza uma função quadrática.

Construindo-se esse modelo em um sistema de coordenadas cartesianas, pode-se representar algebricamente a relação entre a área do retângulo em função da medida da sua base. Tome o vértice do setor circular coincidindo com a origem do sistema de coordenadas de tal forma que a base do retângulo esteja sobre o eixo das abscissas. Desta forma, segue que a equação do arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ é dada por

$$(\lambda): \quad y^2 + x^2 = 25, \qquad 0 \leq x \leq 5.$$

Daí segue que para todo $P(x, y)$ em (λ), $y = \sqrt{25 - x^2}$, $\quad 0 \leq x \leq 5$.

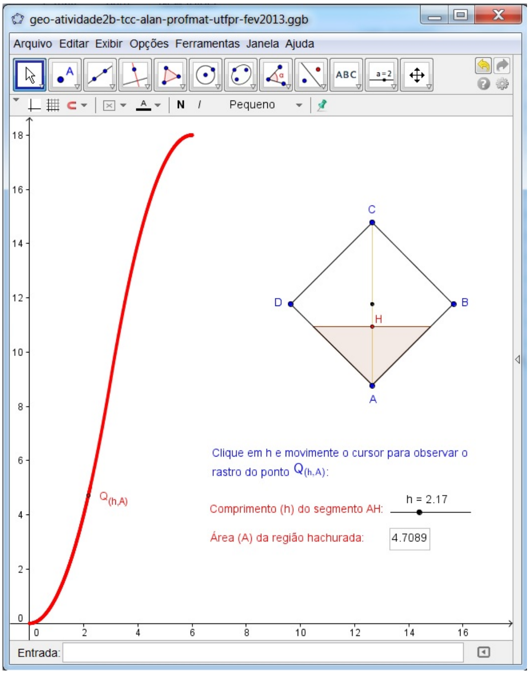


Figura 6: Ilustração do gráfico da área, A, em função de $h = |AH|$.

Assim sendo, pode-se observar que para cada valor h da base tem-se um retângulo de altura $\sqrt{25 - h^2}$ e, por conseguinte, a sua área é dada por:

$$A(h) = h\sqrt{25 - h^2}.$$

4. Considerações finais

Indubitavelmente, o conceito de função quadrática é por si só bastante complexo para o aluno do ensino médio, pois envolve outros conceitos igualmente abstratos como domínio, contradomínio e imagem. Ao final dessas atividades, pode-se constatar a importância do uso do GeoGebra como recurso didático de apoio para se trabalhar a percepção intuitiva das funções reais, como no caso a função quadrática, antes de analisá-las através das representações algébricas e gráficas. Além disso, reunindo recursos de geometria dinâmica, álgebra e cálculo num mesmo programa, e com o mesmo grau de importância, o GeoGebra promove a integração dos diversos registros que permitem ao estudante ratificar as suas conjecturas.

Convém ressaltar que o conceito de progressão aritmética é um pré-requisito ao teorema da caracterização das funções quadráticas e, caso o professor opte também por utilizar as atividades propostas com seus alunos, ele deve introduzir anteriormente o conceito, mesmo que ainda de forma superficial, uma vez que tal conceito é simples e não seria empecilho para a aplicação das atividades.

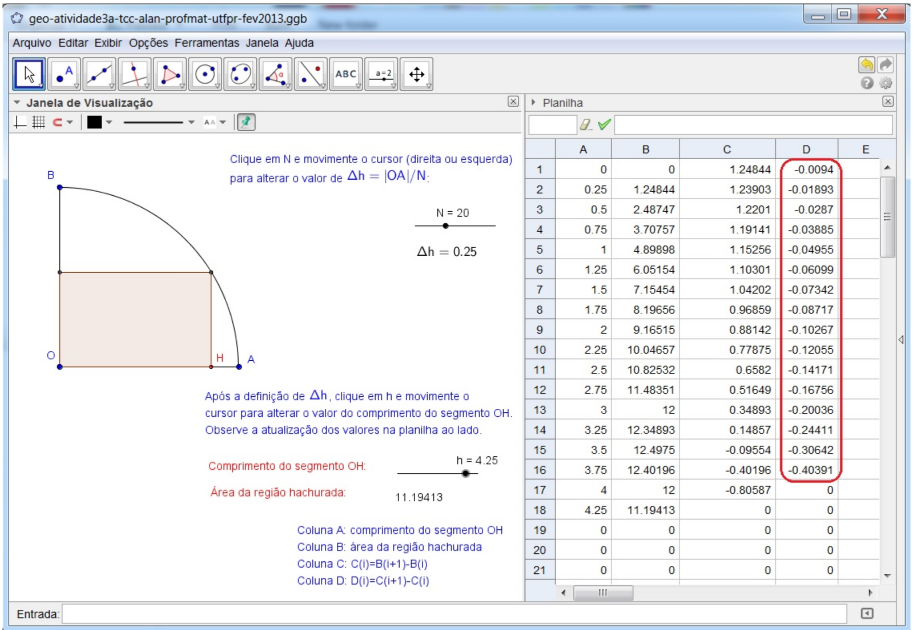


Figura 7: Ilustração da variação da área A em função de $h = |OH|$; $\Delta h = 0.25$.

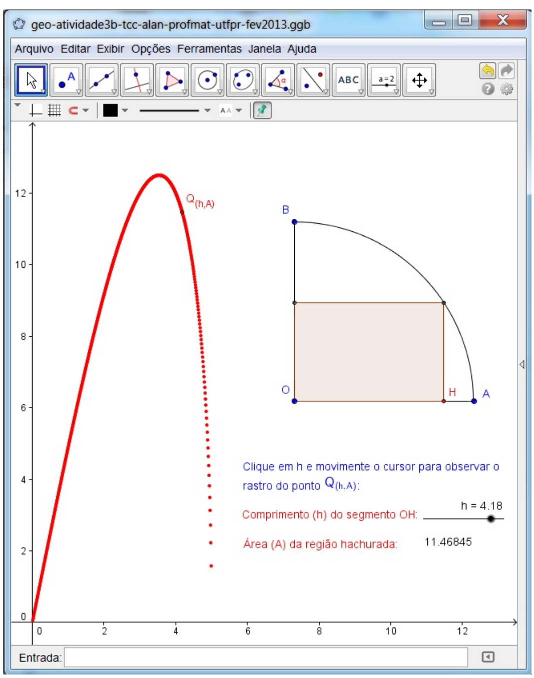


Figura 8: Ilustração do gráfico da área, A, em função de $h = |OH|$.

Referências

[1] Giraldo, V. *Integrando Geometria e Funções: Gráficos Dinâmicos*. Revista do Professor de Matemática, v. 79, n. 3, p. 39–46, 2012.

[2] Lima, E. L. *et al. A Matemática do Ensino Médio*. Nona edição. Coleção do Professor de Matemática, CPM13, v. 1, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[3] Oliveira, A. G.; Dorini, F. A. *Funções e Geometria: O Uso de Ambiente de Geometria Dinâmica como Subsídio para A Caracterização das Funções Quadráticas*. Dissertação, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

A. Anexo

Segue o link para acesso (*download*) à coleção das Atividades 1, 2 e 3, elaboradas em GeoGebra, apresentadas no desenvolvimento do trabalho.

http://www.geogebratube.org/collection/show/id/3056.

Individualmente, as atividades podem ser acessadas em:

Atividade 1(a): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31133;

Atividade 1(b): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31132;

Atividade 2(a): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31131;

Atividade 2(a): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31130;

Atividade 3(a): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31127;

Atividade 3(b): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31082.

Alan de Oliveira
Colégio Militar de Curitiba
<alannaval@yahoo.com.br>

Fabio Dorini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Curitiba
<fabio.dorini@gmail.com>

Recebido: 2013

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.1, n.1, 2013
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2013/pmo14

Frações, sua representação decimal e a calculadora [1]

Dora Kindel Erika Favoretto

Resumo

O uso de calculadoras nas aulas de matemática, principalmente no ensino fundamental, ainda tem sido pouco explorado. Neste artigo, pretende-se discutir uma atividade proposta em turmas do 8º ano de diferentes escolas do Rio de Janeiro. Objetiva-se refletir sobre as representações decimais das frações com denominadores 2, 4, 8 e 16 e desenvolver o cálculo mental por meio da observação de regularidades e da comparação da representação decimal com os denominadores ou com os numeradores das frações em questão. Os alunos utilizaram calculadoras, pelo menos uma por dupla, e trabalharam agrupados em trios ou quartetos. Os resultados registrados individualmente nos cadernos deveriam apresentar as justificativas discutidas no grupo. No final da aula, dois tempos de 50 minutos, as respostas dos alunos foram escritas no quadro-negro e, novamente, discutidas e sistematizadas. A análise das respostas revelou que os alunos apresentavam explicações detalhadas sobre os procedimentos, com justificativas às suas observações.

Palavras-chave: calculadora; números decimais; frações ordinárias, investigação em sala de aula.

Abstract

The use of calculators in mathematics classes, mainly in elementary school, has still been little explored. In this article, we intend to discuss an activity proposed in 8th grade classes from different schools in Rio de Janeiro. The objective of this paper is to reflect on the decimal representations of fractions with denominators 2, 4, 8 and 16 and to develop the mental calculation by observing regularities and comparing the decimal representation with the denominators or numerators of the fractions in question. Students used calculators, at least one per couple, and worked grouped by trios or quartets. The results recorded individually in the notebooks should present the justifications discussed in the group. At the end of the class, two 50-minute periods, the students' responses were written on the chalkboard and again discussed and systematized. The analysis of the answers revealed that the students presented detailed explanations about the procedures, with justifications for their observations.

Keywords: calculator; decimal numbers; ordinary fractions, classroom research.

1. Introdução

O desenvolvimento social do homem, através dos tempos e em diferentes contextos, faz evoluir tanto o conceito dos números quanto os cálculos necessários para com eles operar. Isso se justifica no que toca à necessidade da resolução dos problemas do cotidiano e no que se refere à evolução científica e tecnológica.

[1] Este artigo é fruto da análise de material coletado durante o período do mestrado realizado em 1998.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Para interpretar e atuar no mundo, desenvolvem-se cálculos extraordinariamente complexos, os quais nem sempre são memorizados por nós. Assim, a fim de facilitar tais cálculos morosos e complicados, o homem cria os mais variados instrumentos de cálculo, como é o caso das calculadoras. Apesar dos diferentes modelos de calculadoras existentes no mercado hoje, seu uso no ensino tem ficado restrito às disciplinas de natureza técnica ou aos cursos técnicos e científicos.

Nas aulas de matemática, sobretudo no ensino fundamental, com objetivo metodológico, a calculadora tem sido muito pouco usada, apesar de se tratar de um instrumento que proporciona a exploração de novas estratégias e novos métodos de trabalho. Um dos argumentos usados é o de que o uso da calculadora impede os alunos de saber a tabuada, o que não se confirmou: ,

> *(...) ao contrário do que se imagina, os alunos passaram a saber a tabuada de cor, mesmo não sendo este o objetivo da atividade, e aqueles que apresentavam dificuldade melhoraram seu desempenho.(...). Alunos que não sabiam a tabuada buscaram encontrar estratégias de cálculo mental que servisse como forma de agilizar o cálculo com a calculadora. [3, p60]*

Embora as pesquisas que envolvem as frações sejam assunto recorrente, existem poucos trabalhos usando a calculadora para esse fim. Assim, pretendem-se apresentar, neste artigo, os resultados obtidos a partir de uma experiência com o uso de calculadoras em turmas da antiga 7ª série, atual 8º ano, de uma escola da zona sul do Rio de Janeiro. No trabalho, foi proposta uma série de atividades para discutir os raci-onais visando: a) verificar de que maneira os alunos estabelecem comparações entre a representação ordinária de frações e suas correspondentes representações decimais; b) identificar de que forma os alunos identificam e agrupam as regularidades observadas; c) verificar que procedimentos e estratégias os alunos usam para generalizá-las. Para tanto, as atividades com questões de caráter aberto, isto é, questões do tipo "o que acontece se..." foram apresentadas. Esse tipo de trabalho sustenta-se na proposta da investigação em sala de aula apresentada por Ponte (2003). [6]

O trabalho foi desenvolvido em dois tempos de 50 minutos cada. Para o desenvolvimento da proposta, os alunos foram organizados em grupos de três ou quatro e foi entregue pelo menos uma calculadora para cada dupla. Todos os alunos deveriam anotar as frações e suas representações decimais no caderno e discutir as justificativas até um consenso entre os integrantes do grupo, para, ao final, um relator apresentar as conclusões oralmente para a turma. Vale ressaltar, ainda, que os estudantes estavam acostumados a desenvolver trabalhos em grupos e realizar pesquisas para observar regularidades numéricas.

A vivência dos alunos, em diferentes momentos de aprendizagem_ a pesquisa individual, a discussão sobre os pontos de vista, a troca de informações, a apresentação e a defesa das descobertas feitas pelos grupos durante a apresentação oral_ favoreceu o diálogo e a busca de um consenso no interior dos grupos para as respostas.

A análise dos relatórios individuais entregues à professora revelou detalhes interessantes sobre a forma como cada aluno busca sintetizar, explicar e detalhar as descobertas e o procedimento seguido durante o trabalho investigativo. Neste trabalho, pôde-se evidenciar ainda a riqueza de detalhes possíveis a ser descoberta pelos alunos quando inseridos em um ambiente de estudo em que se promove o diálogo, a discussão e a reflexão sobre os diferentes pontos de vista em busca de um consenso para resolver uma situação problema, o que, no nosso caso, é um contexto de matemática pura.

2. As frações e os números decimais

Segundo Breke, [1], os alunos, quando em processo de aprendizagem, entendem os números decimais como um par de números inteiros: um que vem antes da vírgula e o outro escrito após a vírgula.

Nos livros didáticos, a fração é, usualmente, definida como parte do todo. No caso, o numerador representa as partes que foram tomadas do inteiro, e o denominador representa em quantas partes o inteiro foi dividido.

Para encontrar a representação decimal de uma fração, dividem-se suas partes componentes – numerador e denominador –, ou seja, a fração é vista como divisão entre dois números inteiros.

Desse modo e em síntese, como hipótese de trabalho, parte-se da ideia de fração como divisão entre dois números inteiros, para propor uma intervenção em uma sala de aula do oitavo ano, já que, nas calculadoras que usamos, não é possível representar uma fração em sua forma ordinária: a/b com $b \neq 0$. Com a atividade proposta, visa-se refletir sobre a conexão entre a representação de um número racional na sua forma ordinária e a sua representação decimal.

Neste trabalho, será apresentada a análise de um recorte das atividades de frações com denominado-res pertencentes às sequências $\{2, 4, 8 \ldots\}$ e $\{5, 25, 125 \ldots\}$ e as relações entre elas. O objetivo da atividade era apresentar situações problemas de tal forma que os estudantes obtivessem uma gama razoável de elementos para análise, comparando os resultados, e que, os mesmos, desenvolvessem estratégias de generalizações. Para desenvolver o trabalho, os alunos, em pequenos grupos (no máximo quatro componentes), usavam pelo menos uma calculadora por dupla. Foram propostas atividades investigativas, entendidas aqui como aquelas que apresentam questões abertas do tipo "O que acontece se...?". No caso, apresentaram-se as seguintes questões:

a) O que acontece se transformarmos as frações com denominador dois em números decimais?
b) E nas frações com denominador quatro?
c) Verifique também o que acontece com as frações cujos denominadores são iguais à 8, 16 e assim por diante.

Quadro 1: Atividade apresentada aos alunos

As respostas e os procedimentos foram analisados conforme descrição apresentada a seguir.

3. Procedimentos e análise

3.1. As metades

A primeira atividade foi a de identificar o que acontece quando transformamos as frações $\{1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2 \ldots\}$ em números decimais. Em nosso caso, tratou-se de dividir qualquer número natural por dois. A dificuldade inicial discutida pelos alunos dizia respeito ao procedimento que deveria ser usado com a calculadora. Vale ressaltar que muitos alunos tinham conhecimento de que $1/2$ poderia ser operado pelo algoritmo da divisão e, mesmo assim, eles não estabeleceram conexão entre essa ideia e o fato de que agora bastava apertar as teclas:

$$\boxed{\blacksquare} \quad \boxed{\div} \quad \boxed{2} \quad \boxed{=}$$

Diante dessa dificuldade e do fato de que a atividade assim apresentada não foi autoexplicativa — foi necessária a intervenção da professora em todos os grupos —, a questão foi modificada para:

a) O que acontece se dividirmos qualquer número natural n por dois?

Quadro 2: continuação da atividade

Depois que os alunos compreenderam a atividade e identificaram o procedimento necessário para en-contrar a representação decimal de uma fração ordinária, com ou sem uso da calculadora, foram listadas várias frações com denominador dois. Logo, a partir da leitura dos resultados no visor da calculadora, os alunos identificaram as regularidades abaixo elencadas e assim justificadas por eles[2]:

A - Se o numerador for um número par, então, o resultado será um número inteiro;

B - Se o numerador for ímpar, logo, o resultado não será um número inteiro;

C - Se o numerador for ímpar, logo, o resultado será um número quebrado;

D - Se o numerador for ímpar, logo, o resultado será ”um ponto cinco”.

Nessa investigação, alguns alunos também compreenderam o número decimal como um par de números (Resposta D). Esse tipo de resposta foi muito mais recorrente do que aquilo que esperávamos de uma turma de 8º ano, pois pelo menos um dos integrantes de cada grupo a evidenciou e, de um modo geral, foi aceita pelos demais.

Essas respostas podem ser sistematizadas em duas categorias: uma que considera o número inteiro (em nosso caso, natural) como referência; e outra que considera o resultado como um número não inteiro, número decimal, e que foi entendido como “número quebrado”.

Para dar continuidade à investigação, propôs-se que os alunos continuassem a efetuar as divisões usando como denominadores os números da sequência $\{4, 8, 16 \ldots\}$ e verificassem o que estava acontecendo com os ”números quebrados”, números decimais. Apresentam-se a seguir os resultados obtidos para a pes-quisa feita com os quartos, com os oitavos e com uma tentativa de generalização das regularidades observadas.

3.2. Os quartos

Para as frações com denominadores iguais a quatro, os alunos disseram que existiam muitas e verifi-caram que havia semelhanças entre a parte decimal de algumas frações, conforme podemos ver a seguir:

A- “Nos quartos?! Aí dá um monte! Assim: ‘ponto vinte e cinco, ponto cinco, ponto setenta e cinco e inteiro.’ ”

B- “Quando o numerador é múltiplo de quatro, então dá inteiro; se não é múltiplo de quatro, então dá quebrado.”

C- “Se o numerador for menor do que quatro dá zero vírgula um número.”

D- “Ih, é! E se o numerador for maior do que quatro dá todos os números antes da vírgula e depois dá tudo igual.”

E- “Nem sempre. Oh, dá um monte com ponto cinco, um monte com ponto vinte e cinco. Hummmm.”

Os alunos D e E trocam pontos de vista distintos e se veem em um impasse para relatar a descoberta.

[2] Para preservarmos a identidade dos alunos optamos por elencar as respostas por letras do alfabeto.

Nas respostas dadas pelos alunos sobre os oitavos e sobre os demais denominadores, foi recorrente o tipo de resposta dada anteriormente. Ou seja, agrupavam em respostas pela representação decimal. Para o caso em que o denominador era 16, observamos que os alunos não fizeram muitas operações associando a fração ordinária com o número decimal correspondente. Para esse caso, os alunos afirmaram que só precisam fazer do um ao quinze no numerador, pois os demais terão os mesmos algarismos na parte decimal.

No caso desse trabalho, ser múltiplo do denominador foi a referência usada. Assim, o conjunto das frações $n/2^b$ foram divididos em dois grupos:

Numerador múltiplo do denominador	Numerador não múltiplo do denominador

Quadro 3: Classificação das frações

$$U = \text{conjunto das frações } \frac{n}{2^b}$$

$$n \text{ - n° natural}$$

$$b \in \{1, 2, 3, 4...\} \text{ também um número natural.}$$

$$U = \{x \in \mathbb{Q}^+ | x = \frac{n}{2^b}\}$$

Como transcender a visão que define o conjunto de objetos dessa forma e que, para os alunos, é sufi-ciente? Eles partem do que é real para si, daquilo que é objeto de seu conhecimento, como no caso "é ser múltiplo de", e aplicam esse conhecimento em um novo contexto. Nesse caso, aplicam o conceito de múltiplo ao universo das frações. Diante disso, como fazê-los analisar o conjunto de frações cujo resultado não é inteiro?

Ora, se o conjunto está dividido em duas partes complementares de tal forma que é possível denominá-las tendo como referência a propriedade comum a seus elementos, podemos, então, ter os seguintes subconjuntos: o conjunto formado pelos elementos cujo resultado é um número inteiro e o conjunto formado pelos elementos formados por "números quebrados" (definição dada pelos alunos) ou por um decimal exato (definição dada pelo professor) e trabalhar agora numa tentativa de elaborar novas classificações no conjunto das frações que apresentam como resultado números decimais.

Do ponto de vista da aprendizagem, saímos de um lócus e passamos para outro. Com isso, agora temos dois universos para transitar e para estabelecer comparações e conexões: um deles define partição no conjunto do universo U, e o outro aponta que é possível definir novas partições a partir da observação dos resultados em um dos subconjuntos definidos pelos alunos.

Matematicamente, essas visões estão relacionadas. Mas, para os alunos, na fase de aprendizagem em que se encontram, tais abordagens são distintas e precisam ser elaboradas e reelaboradas internamente para que possam fazer parte de seu conhecimento. Além disso, somente quando os alunos percebem que essas representações estão relacionadas entre si, de tal forma que tanto o número decimal, com suas características próprias, quanto as frações ordinárias revelam o mesmo conceito, é que conseguem elaborar uma categorização mais ampla. Um exemplo é a categorização feita pelos estudantes e reproduzida a seguir, que classifica os elementos do conjunto formado pelos decimais exatos obtidos a partir da divisão de $n/2^b$ definidos a partir do conceito de múltiplo. Ou seja, classificar as frações considerando[3] $n \div d$ sendo d um elemento do conjunto $B = \{d \in \mathbb{N}/d = 2^b\}$.

[3]Inicialmente n significava um número natural (fala e registro da professora). Ao longo da atividade os alunos reinterpretaram seu significando modificando-o para representar a inicial da palavra numerador e d, à inicial do denominador.

Para o caso em que o numerador é múltiplo do denominador, [4]$n = M(d)$, o resultado é sempre um número inteiro. Por outro lado, se o numerador não for múltiplo do denominador, temos muitas possibilidades.

O esquema abaixo sintetiza a visão dos alunos sobre o conjunto dos números decimais obtidos a partir da análise das frações cujo denominador não é múltiplo do denominador. Esse esquema só foi possível de ser organizado dessa forma a partir da discussão com a turma toda.

$$\frac{n}{2^b}\begin{cases} \dfrac{n}{2} & \{0,5;1,5;2,5;3,5;...;\boldsymbol{a{,}5}\} \\[2ex] \dfrac{n}{4} & \begin{cases} \{0,25;1,25;2,25;...;\boldsymbol{a{,}25}\} \\ \{0,5;1,5;2,5;3,5;...;\boldsymbol{a{,}5}\} \\ \{0,75;1,75;2,75;3,75;...;\boldsymbol{a{,}75}\} \end{cases} \\[2ex] \dfrac{n}{8} & \begin{cases} \{0,125;1,125;1,125;2,125;...;\boldsymbol{a{,}125}\} \\ \{0,25;1,25;2,25;3,25;4,25;...;\boldsymbol{a{,}25}\} \\ \{0,375;1,75;2,75;3,75;...;\boldsymbol{a{,}75}\} \\ \{0,5;1,5;2,5;3,5;4,5;5,5;...;\boldsymbol{a{,}5}\} \\ \{0,625;1,625;2,625;3,625;...;\boldsymbol{a{,}625}\} \\ \{0,75;1,75;2,75;3,75;...;\boldsymbol{a{,}75}\} \\ \{0,875;1,875;2,875;...;\boldsymbol{a{,}875}\} \end{cases} \end{cases}$$

Esquema 1: Síntese dos números decimais com $n \neq M(d)$

O mesmo esquema-resumo foi elaborado para as frações com denominadores cinco, vinte e cinco etc. As observações sobre essas frações e suas representações decimais não diferiram muito daquela elaborada para os denominadores 2^b. Em outras palavras, a representação genérica considerou dois subconjuntos disjuntos partição do conjunto universo entre seus elementos, de forma que: um subconjunto fosse formado pelo resultado inteiro associado ao numerador múltiplo do denominador; e o outro considerasse o número decimal como aquele obtido para o caso em que o numerador não é múltiplo do denominador da fração.

Na comparação das frações de $n/2^b$ com as frações de $n/5^b$, os alunos identificaram que a representação decimal da fração n/c^b com o m.d.c. $(n,c) = 1$ e $c \in \{2,5\}$, possui b casas decimais. Por que isso acontece todo o tempo? É possível sempre se verificar esse fato? A demonstração nos mostra que sim, como veremos a seguir:

Teorema 1. *Sejam n, b, números naturais, e $c \in \{2,5\}$, o m.d.c.$(n,c) = 1$. Então, a representação decimal da fração n/c^b tem b algarismos decimais (significativos).*

Demonstração. Suponhamos que os denominadores sejam potências de cinco. Logo, para $c = 5$, temos:

$$n/5^b = n.2^b/5^b2^b = n.2^b/10^b.$$

Como n e 5 são primos entre si, 10 não é divisor de $n.2^b$.

Portanto, $n.2^b/10^b$ tem exatamente b casas decimais. Estamos considerando no resultado os b algarismos significativos. □

Observação 1. Para o caso em que $c = 2$, o resultado é obtido de forma análoga.

[4] $M(d)$ está sendo entendido como múltiplo de um número natural "d" qualquer. Em particular, $d \in B$.

Os alunos também observaram outra regularidade sobre as frações e a sua representação decimal. Ao compararem frações com o numerador igual a um e os denominadores iguais a potências de base 2 ou 5 com expoentes iguais, a parte decimal de uma das frações é igual ao denominador da outra fração. Por exemplo, $1/2$ é igual a $0,5$ e $1/5$ é igual a $0,2$. Ou seja, a parte decimal de $1/2$ é igual ao denominador da fração $1/5$, e a parte decimal de $1/5$ é igual ao denominador da fração $1/2$.

Isto se verifica pelo seguinte fato:

$$1 = 10^b/2^b.5^b \to 1/2^b = 5^b/10^b = 0,0\ldots05^b.$$

O número de zeros da representação decimal é igual ao expoente b (b é um número natural) menos a quantidade de algarismos significativos de 5^b, já que $5^b/10^b$ tem b casas decimais na sua representação decimal.

O relato dos estudantes foi sistematizado, no quadro negro, numa tabela com as contribuições de todos os alunos da turma da seguinte forma:

Denominadores (d)	**d=2**	**d=4**	**d=8**	**d=16**
Frações	$n/2$	$n/4$	$n/8$	$n/16$
n=M(d)	I	I	I	I
$n \neq$ M(d)	a,5	a,25 a,5 a,75	a,125 a,25 a,375 a,5 a,625 a,75 a,875	a,0625 a,125 a,1875 a,25 a,3125 a,375 a,4375 e assim por diante.

Tabela 1: Regularidades dos decimais com denominadores potência de dois

Na tabela, a letra ***a*** antes da vírgula representa, aqui, um número natural qualquer. A letra ***n*** significa um número inteiro qualquer colocado no numerador da fração, ***i*** representa o resultado inteiro obtido na divisão e M(d), múltiplo do denominador.

Completadas as três primeiras colunas com os resultados obtidos anteriormente, os alunos começaram a fazer a última coluna calculando apenas as frações com numeradores menores do que o denominador. A justificativa foi:

D:*"Ué, a gente já não viu que vai dar sempre alguma coisa ponto outra coisa?"*(resposta de um aluno).

Vale a pena reparar que essa frase denota a percepção global do conjunto das frações $n/16$ e que sua representação decimal terá como parte decimal alguns daqueles números encontrados a partir das frações $n/16$, $n \geq 17$. Outra justificativa é a de que "o denominador me dá o n° de respostas diferentes", por exemplo: "quando o denominador é dois, tem duas respostas; quando é quatro, tem quatro; quando é oito, tem oito; e assim vai."

B: "No caso do 16 ..." (interrompido)

A: "Terá 16 respostas diferentes".

A_2: "Um inteiro e 15 <u>decimais exatos</u>" (grifo meu para mostrar a alegria do aluno em expressar algo novo e que agora poderá ser usado como objeto da fala e, portanto, de seu conhecimento).

Uma justificativa formal para este fato será feita a seguir:

Teorema 2. *Seja n um número natural, então existem inteiros não negativos q e r tais que $n/16$ tem representação decimal igual à representação decimal de $q + r/16$, onde $16 > r \geq 0$. E, portanto, o resultado ou é um número inteiro ou é um número decimal em que sua parte decimal é igual a um dos elementos do conjunto $\{1/16, \dots, 15/16\}$.*

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão existem e são únicos q e r tais que:

$$n = 16.q + r, \text{ onde } 16 > r \geq 0.$$

Assim, $n/16 = q + r/16$, onde $16 > r \geq 0$. □

Com este teorema fica claro que toda fração da forma $n/16$ pode ser representada como a soma de um natural com a fração $r/16$ onde $16 > r \geq 0$. Portanto, para obter sua representação decimal basta calcular as representações decimais das frações $1/16, \dots, 15/16$.

Observação 2. A demonstração é feita de forma análoga para outros denominadores. Consideramos o denominador 16 a título de ilustração e para evidenciar a descoberta dos estudantes.

4. Considerações Finais

Seria compensador apresentar um mesmo conteúdo usando diferentes formas. No nosso caso, relacionar a representação decimal com a fração através do algoritmo da divisão e usando a calculadora. No primeiro caso, é possível identificar que a operação termina quando o resto é zero e que não é visível no segundo caso. Assim, o uso da calculadora evidenciou alguns aspectos dos racionais que, do outro modo, não ocorreriam.

Neste trabalho, a passagem da representação de fração ordinária para a decimal mostrou algumas propriedades bem particulares, cuja análise só foi possível devido ao grande número de frações representadas em um curto tempo. Por exemplo, os alunos perceberam que o número de casas decimais dependia do valor do expoente do denominador, mas não perceberam que a parte decimal terminava porque o resto da divisão era zero. Fato esse, somente observável quando efetuamos a conta manualmente.

Também observaram questões estudadas anteriormente. Ou seja, identificaram que quanto maior o numerador, menor o resultado obtido; se o numerador for menor do que o denominador, temos um decimal cuja parte inteira é zero; e, nos demais casos, a parte inteira é um número natural diferente de zero.

Os diferentes momentos, trabalho em pequenos grupos, sistematização dos resultados, apresentação para a turma toda e reflexão sobre a produção de todos os grupos, propiciaram aos alunos a oportunidade de esclarecer e aprofundar problemas por eles levantados. Além disso, tanto a participação em pequenos grupos quanto a capacidade individual em cada momento foram outro fator que contribuiu para que os alunos chegassem a determinadas conclusões.

Embora a atividade tenha sido apresentada no contexto da matemática pura, a estratégia usada – investigação em grupo usando calculadora – permitiu desenvolver uma nova dinâmica de trabalho, pois os alunos passaram por vários momentos durante sua execução:

a) a leitura da tarefa e seu reconhecimento como forma de tomar para si a questão colocada pelo professor;
b) o reconhecimento dos procedimentos necessários para a realização da tarefa, relacionando-a com o algoritmo da divisão;
c) o registro de muitas frações e de sua representação decimal, o que favoreceu a análise para a descoberta de regularidades e propriedades bem como a transferência de conceitos (múltiplo de um número) para um novo contexto (o denominador das frações);
d) a justificativa dada para as respostas com a participação dos demais integrantes do grupo de trabalho, os quais contribuíam com seus pontos de vista;

e) a apresentação e a defesa do ponto de vista de cada aluno no grande grupo;

f) a redação de um relatório que listava as etapas de procedimento do processo investigativo.

A descrição linear das etapas, como feita acima, não ocorre dessa forma em sala de aula, tampouco de forma homogênea em todos os grupos. Esse tipo de atividade exige do professor: disponibilidade para ouvir as diferentes observações feitas por parte dos alunos; atenção para não atropelar as descobertas; adaptação pedagógica; e imposição de novas exigências a seus conhecimentos matemáticos. Com relação ao uso da calculadora, ,

> *(...) a utilização da calculadora de forma reflexiva e bem planejada pode contribuir para o aprendizado de diversos conteúdos matemáticos, de-senvolvendo a capacidade de investigar ideias matemáticas, resolver problemas, formular e testar hipóteses, induzir, deduzir e generalizar, de modo que os alunos busquem coerência em seus cálculos, comuniquem e argumentem suas ideias com clareza. [2]*

Como vimos na análise do trabalho desenvolvido em sala de aula, o uso da calculadora serviu para agilizar os cálculos, apresentar grande variedade de elementos a serem pesquisados, confrontar respostas e confirmar ou refutar conjecturas com maior rapidez.

Referências

[1] Brekke, G. *A decimal number is a pour of whole numbers. In* Gutierres, L.P.A. (Ed.). PME 20, Valencia (Espanha),v.2, p.137-144, 1996.

[2] Guinter, A. *O uso das Calculadoras nas Aulas de Matemática: concepções de professores, alunos e mães de alunos.* 2008. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/23-1-A-gt6_ariovaldo_ta.pdf Acesso em: 10 de maio de 2011.

[3] Kindel, D. S. *A multiplicação: uma reflexão sobre o uso de calculadoras na quinta série.* Boletim Gepem, n. 45, p. 54-62, 2004.

[4] Kindel, D. S. *Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade.* 196fls. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1998.

[5] Mason, J. *O quê, o porquê e o como em matemática. In:* Abrantes, I. N. P.; Leal, I. C.; Ponte, J. P. (eds.). Investigar para aprender matemática.APM (Lisboa), p. 15-24, 1996.

[6] Ponte, J. P.; Brocardo, J.; Oliveira, H.. *Investigações Matemáticas em sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

Dora Kindel
UFRRJ
<soraiakindel@yahoo.com.br>

Erika Favoretto
Faculdade Alvorada de Educação Física e Desporto
<erikafavoretto@hotmail.com>

Recebido: 2013
Publicado: 2013

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.1, n.1, 2013
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2013/pmo15

Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no GeoGebra

Ricardo Ribeiro   Maria Gravina

Resumo

Este artigo traz uma proposta de inserção de novo conteúdo na matemática escolar. Trata-se da exploração da geometria hiperbólica em ambiente de geometria dinâmica. Para isto foi feita a construção do micro-mundo Disco de Poincaré, usando-se o software GeoGebra. O menu construído permite a realização de atividades que tratam as ideias da geometria hiperbólica através de comparações com aquelas que são conhecidas e naturais na geometria euclidiana. O artigo apresenta o processo de construção do micro-mundo e também algumas atividades que foram concebidas para serem trabalhadas na escola; nele também são feitas considerações sobre a natureza da geometria e a sua evolução ao longo da história, de forma a contextualizar a proposta.

Palavras-chave: Geometria hiperbólica; geometria dinâmica; Disco de Poincaré.

Abstract This article deals with a didactic experience focusing on geometric transformations in the plane and use of the GeoGebra dynamic geometry environment. The experience, in the form of a workshop, was performed with elementary school teachers. Having as mathematical content the geometric transformations, the proposal integrated geometry and art through the construction of tessellation and Escher mosaics. The work was developed within the principles of Didactic Engineering and, for the accomplishment of the analyzes, we use the social-historical theory, whose main reference is the work of Vygotsky and also the theory of the records of representation by Duval, that deals with the process of learning of Mathematics from the point of view of semiotics. From the analysis, it was possible to verify that the participating teachers appropriated the resources and the system of representation that one has in GeoGebra, as well as the concepts of the geometry of the transformations.

Keywords: GeoGebra, Geometric transformations; Art; Dynamic geometry.

1. Introdução

Contemplar, no ensino escolar, o entendimento da geometria como um modelo teórico que pode estar além daquele estabelecido na geometria euclidiana, esse dependente de nossas experiências sobre o mundo sensível, pode propiciar, aos alunos, um olhar mais aguçado sobre a natureza da matemática.

Os conceitos geométricos deveriam ser parte importante do currículo de Matemática no Ensino Básico. Por meio deles o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento - o pensamento geométrico - que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Algumas pesquisas ([2], [8], [10], [11]) que tratam do ensino de geometrias não-euclidianas na escola e na formação de professores, apontam para a importância de incorporar as geometrias não Euclidianas no currículo da Matemática escolar, salientando que os futuros professores devam ser preparados para seu ensino na escola. Alertam para a relevância da formação inicial do professor de Matemática como o ponto de partida para a efetivação de propostas que visam incluir as Geometrias não Euclidianas na Educação Básica. Enfatizam, também, a importância da utilização dos ambientes de geometria dinâmica e as interfaces de trabalho por eles disponibilizados, pois, os mesmos, propiciam a manipulação de objetos concretos-abstratos na tela do computador. Essa manipulação pode preparar o aluno na sua ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para aquele inserido no modelo teórico que caracteriza uma geometria.

Neste artigo vamos apresentar uma proposta de ensino que tem como objetivo o entendimento das primeiras ideias de um modelo teórico que não se comporta como o modelo euclidiano. Nele não é mais válido o axioma das paralelas - aquele que garante que por um ponto exterior a uma reta passa uma e somente uma reta paralela. Agora, por um ponto exterior a uma reta têm-se infinitas retas paralelas e este é o axioma que caracteriza a geometria hiperbólica. A realização de atividades, no contexto desta geometria, pode ser uma fonte de enriquecimento cognitivo de nossos alunos - raciocinar com retas que não correspondem mais aquela ideia intuitiva usada na geometria euclidiana exige um novo patamar de abstração e de controle lógico de argumentos.

As atividades que projetamos para o estudo da geometria hiperbólica pressupõe um certo domínio da geometria euclidiana, entendendo-se aqui que são conteúdos que normalmente são trabalhados nos anos finais do ensino fundamental. Assim, consideramos que é uma proposta de ensino para alunos que estão cursando o ensino médio.

O assunto "geometria hiperbólica" é ausente nos livros didáticos. Isso faz sentido, se considerarmos que em apresentação no tradicional formato de texto escrito e figuras estáticas é um conteúdo que pode ser de difícil compreensão para alunos da escola básica. Nossa proposta se apoia, fortemente, no uso da geometria dinâmica, porque em um tal ambiente os alunos podem manipular, de forma concreta, os diferentes objetos do modelo hiperbólico - segmentos, retas, círculos, triângulos. Estamos admitindo que é através desta manipulação que, gradativamente, vão se constituindo as imagens mentais que concretizam uma nova possibilidade para a ideia de reta - um entendimento que é crucial na exploração desse novo espaço. Foi com esse princípio que construímos o micro-mundo Disco de Poincaré, com o software livre GeoGebra (<www.geogebra.org>). E, fazendo uso deste micro-mundo, planejamos uma sequência de atividades de forma a provocar, nos alunos, a descoberta de semelhanças e diferenças entre a geometria euclidiana e a geometria hiperbólica.

No que segue, para contextualizar a proposta, iniciamos com uma breve retrospectiva sobre a natureza da geometria e a história da sua evolução. Depois apresentamos o micro-mundo Disco de Poincaré; e na última parte detalhamos algumas das atividades que foram projetadas para serem trabalhadas com alunos da escola básica. A proposta, na íntegra, está na dissertação de mestrado intitulada "*Geometria Não-Euclidianas na Escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica*", apresentada pelo primeiro autor do artigo no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS.

2. Sobre a natureza da geometria e a história da sua evolução

Alguns historiadores ([1],[4]) nos falam que a Geometria começou a se desenvolver através de necessidades relacionadas ao plantio, construções e movimento dos astros. Euclides foi o primeiro a apresentar a geometria organizada num encadeamento lógico-dedutivo, no qual cada proposição deveria ser deduzida de outra mais simples de maneira lógica e dedutiva. Em sua obra intitulada Elementos, ele reuniu praticamente todo o conhecimento de Matemática básica da sua época. Os Elementos, escrito por volta de 300 a.C, são compostos por 13 livros contendo 465 proposições. As dez afirmações inicias apresentadas por Euclides, na sua obra, se organizam em dois grupos: os axiomas e os postulados. Os antigos matemáticos faziam distinção entre axioma e postulado: axioma é uma noção comum aceitável como hipótese em qualquer ciência; postulado é hipótese própria da Geometria.

Durante quase dois mil anos, a geometria de Euclides foi considerada como a única geometria possível. No entanto, o quinto postulado - "*se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos*"- pelo fato de possuir uma redação mais complexa, extensa e menos intuitiva que os postulados anteriores se tornou motivo de forte questionamento nos séculos XVII e XVIII. Diferentes matemáticos, dentre eles John Wallis (1616 - 1703), Saccheri (1667 - 1733), Lambert (1728 - 1777), Legendre (1752 - 1833), fizeram suas tentativas de demonstração do quinto postulado. Para estes matemáticos o quinto postulado, conforme enunciado acima, era questionável por não ser intuitivamente óbvio que as duas retas em questão deveriam, de fato, se encontrar no infinito. E assim, o postulado começa a ser pensado como uma afirmação a ser demonstrada. Inúmeras foram as tentativas de demonstração sendo que muitas delas admitiam, nos argumentos, fatos equivalentes ao próprio postulado. Uma das consequências, que veio dessas tentativas de demonstração, foi a produção de vários postulados equivalentes ao quinto postulado, denominados de postulados *substitutos*.

O postulado *substituto* mais conhecido é o que foi apresentado pelo matemático escocês John Playfair (1748-1819) no seu trabalho *Elementos de Geometria*, publicado em 1795. Em linguagem moderna, o axioma de Playfair é apresentado na seguinte formulação: *por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.* Esse enunciado acabou batizando o quinto postulado com o nome de Postulado das Paralelas.

Uma das tentativas de demonstrar o quinto postulado foi feita por Girolamo Saccheri (1667 - 1733), em um livro chamado "*Euclides ab omni naevo vindicatus*" (Euclides, sem qualquer falha) publicado em 1733. Saccheri foi o primeiro matemático a considerar uma hipótese contraditória ao quinto postulado. Sendo ele detentor de um grande conhecimento de lógica, criou um quadrilátero, conhecido como "quadrilátero de Saccheri", o qual possuía dois ângulos retos e dois lados opostos de mesmo comprimento. Sua ideia era provar, a partir dos quatro primeiros axiomas, que os outros dois ângulos do quadrilátero também eram retos. Isso era equivalente a provar o quinto postulado. Todavia, Saccheri só conseguiu mostrar que os outros dois ângulos eram congruentes. Em sua busca ele obteve alguns resultados que depois vieram a fazer parte do corpo de propriedades da geometria não-euclidiana; mas no momento da descoberta, Saccheri os considerou tais resultados abomináveis por ferirem a intuição.

A história nos mostra que foram as tentativas de transformar o quinto postulado do sistema axiomático euclidiano em um teorema que desencadearam o desenvolvimento da geometria hiperbólica.

2.1. A Geometria Hiperbólica

Foi apenas na primeira metade do século XIX que se começou a suspeitar que o Postulado das Paralelas fosse realmente independente dos demais postulados. Matemáticos como Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Johann Bolyai (1802-1860) e Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856) trataram da questão ao considerar três situações distintas: por um ponto não contido em uma reta dada, passa mais de uma, apenas uma ou nenhuma reta paralela a reta dada. Por suspeitarem da independência do Postulado das Paralelas, ou seja, de que sua negação poderia gerar uma geometria consistente, sem contradições, desenvolveram, de forma axiomática, um estudo amplo e detalhado de uma geometria que assumia a existência de mais de uma reta paralela a uma dada reta, sendo assim lançada a semente do que viria a ser a Geometria de Lobatchevsky ou Geometria Hiperbólica.

A história nos diz que Gauss, Bolyai e Lobachewsky desenvolveram a Geometria Hiperbólica ao mesmo tempo ([3]). No entanto, Lobachewsky foi o primeiro a publicar seus trabalhos, cabendo a ele a honra da descoberta desta geometria que ele também chamou de Imaginária.

De acordo com [1], o primeiro trabalho de Lobachewsky sobre Geometria não Euclidiana foi publicado, em 1829, no Kasan Bulletin. Nas palavras do historiador: ,

> *Este artigo marca oficialmente o nascimento da Geometria Não-Euclidiana, pois foi Lobachewsky o primeiro matemático a dar o passo revolucionário de publicar uma Geometria especificamente construída sobre uma hipótese em conflito direto com o Postulado das Paralelas: Por um ponto C fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta do plano que não encontra AB.* [1, p397]

No entanto, as dúvidas referentes à consistência da geometria hiperbólica, só foram dirimidas no final do século XIX, quando matemáticos como Eugenio Beltrami (1835-1900), Henri Poincaré (1854-1912) e Felix Klein (1849-1925) criaram no universo euclidiano modelos para essa nova geometria. Um modelo para um determinado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todos propriedades verdadeiras. Vamos aqui falar do modelo do disco de Poincaré, pois é nele que se apoia a nossa proposta de ensino.

No modelo do Disco de Poincaré, o plano hiperbólico é definido a partir da região limitada por uma circunferência. Denominamos essa região de *Disco*. Os pontos internos a esta circunferência são denominados pontos do plano hiperbólico; os pontos que pertencem à circunferência são denominados pontos ideais e a circunferência é dita horizonte hiperbólico. Os arcos de circunferência contidos no *Disco* e ortogonais ao horizonte hiperbólico são as retas hiperbólicas (Figura 1). Neste modelo, por um ponto P exterior a uma reta r passam infinitas retas paralela à r (Figura 2). E também temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos; quando o triângulo é pequeno, seus ângulos somam aproximadamente 180°.

As figuras abaixo ilustram estes primeiros conceitos e propriedades da geometria hiperbólica.

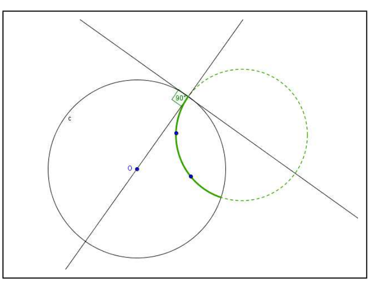


Figura 1: Reta hiperbólica como arco de circunferência ortogonal ao horizonte.

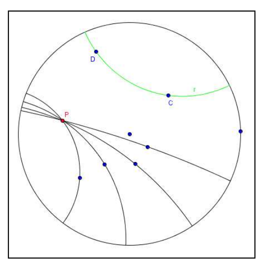


Figura 2: Infinitas retas hiperbólicas paralelas a r passando por P.

Para calcular a distância hiperbólica entre os pontos A e B, traçamos a reta hiperbólica que passa por esses pontos e consideramos os pontos C e D que estão na circunferência euclidiana que define o Disco de Poincaré (Figura 3). A partir da Figura 3 pode-se estabelecer a seguinte relação: $d(A,B) = \left| ln\left(\frac{AC/AD}{BC/BD}\right)\right|$.

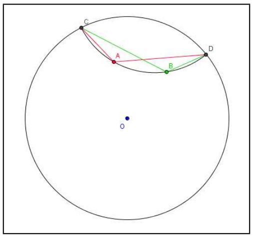


Figura 3: Razão cruzada.

As medidas AC, BC, AD e BD correspondem às medidas de segmentos euclidianos e a partir dessa definição, podemos fazer as seguintes observações:

- quando o ponto A tende ao ponto C (se aproxima do horizonte), temos que a distância euclidiana AC tende a zero. Com isso a razão tende a zero e o logaritmo da razão tende ao infinito negativo. Como a expressão está em módulo, à distância hiperbólica entre os pontos A e B tende ao infinito.
- quando o ponto B tende ao ponto D (se aproxima do horizonte), temos que a distância euclidiana BD tende a zero. Com isso a razão tende ao infinito e o logaritmo da razão também tende ao infinito, Ou seja, a distância hiperbólica entre os pontos A e B tende ao infinito.
- quando o ponto B tende ao ponto A, temos que BD tende a AD. Com isso a razão tende a 1 e o logaritmo da razão tende a zero. Ou seja, a distância hiperbólica entre os pontos A e B tende a zero.

É importante entender, de forma intuitiva, esta noção de distância no *Disco*. O *Disco* é um espaço infinito, no seguinte sentido: um ser habitando este mundo bidimensional pode caminhar na direção do horizonte, com passos de mesmo tamanho, sem nunca chegar ao fim de sua caminhada. Um observador externo vê os seus passos irem se tornando cada vez menores, mas isto é uma distorção para quem está olhando o caminho hiperbólico com "olhos euclidianos". Na Figura 4 temos os primeiros passos do tal ser, depois um zoom para ver que a partir do ponto que ele está outros tantos passo iguais podem ser dados. Poderíamos repetir o procedimento de zoom indefinidamente e sempre vamos ver que outros tantos passos iguais podem ser dados, sem que haja uma aproximação do horizonte. Vale ainda observar que os segmentos que compõem o caminho ilustrado na Figura 4 possuem o mesmo comprimento hiperbólico, embora aos "olhos euclidianos"pareçam ter comprimentos diferentes.

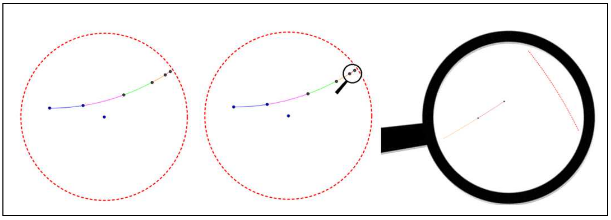


Figura 4: Razão cruzada.

Pensar em um mundo diferente do euclidiano exige um desprendimento da experiência sensível imediata e, consequentemente, também exige controle racional das propriedades geométricas que valem nesse novo mundo. Pode-se dizer que é nas experiências no mundo sensível imediato que se constroem as ideias intuitivas que dão suporte ao entendimento de propriedades geométricas euclidianas. No caso da geometria hiperbólica é através de um micro-mundo dinâmico que vamos propor a realização de experiências que vão tornar familiar as ideias que constituem esta outra geometria.

3. A construção do micro-mundo “Disco de Poincaré”

Nos softwares de geometria dinâmica, o processo de construção das figuras é feito mediante o uso de menus em linguagem natural da geometria, como por exemplo, ponto, reta passando por dois pontos, retas paralelas, retas perpendiculares, círculos. Mas, tais softwares oferecem muito mais do que a possibilidade de efetuar construções geométricas de modo rápido e preciso. Eles oferecem a possibilidade de movimentar as figuras geométricas, mudando tamanho e posição, mas guardando as propriedades geométricas que as caracterizam. Este recurso, que é referido como “estabilidade sob ação do movimento”, *propicia explorações que provocam a concretização de ideias matemáticas* ([5], [6]). É apostando nesta característica do GeoGebra que construímos o micro-mundo *Disco de Poincaré*.

Para construir este micro-mundo utilizamos, de forma intensa, o recurso *Criar uma Nova Ferramenta* do GeoGebra. As diferentes ferramentas do menu hiperbólico são resultantes de construções feitas na geometria euclidiana e que foram automatizadas através deste recurso. A Figura 5 mostra a interface do micro-mundo. Os ícones correspondentes as ferramentas são imagens em formato jpg, que é suportado pelo GeoGebra.

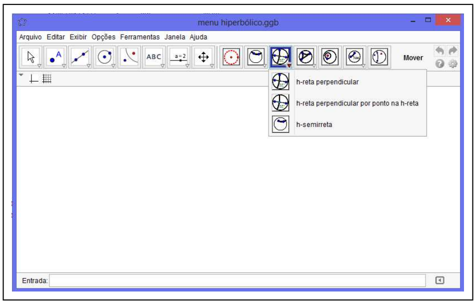


Figura 5: Interface GeoGebra com menu hiperbólico.

Na Tabela 1 apresentamos as principais ferramentas disponibilizadas no micro-mundo.

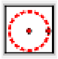
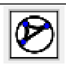
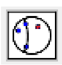
Ícone	**Recurso**	**Função**
	Disco	Constrói o Disco com borda pontilhada indicando-se o centro e um dos pontos da borda.
	h-reta	Constrói a reta hiperbólica indicando-se o Disco e dois pontos.
	h-reta (pontos da borda)	Constrói a reta hiperbólica com os pontos ideias (intersecção da reta com o Disco) indicando-se o Disco e dois pontos.
	h-segmento	Constrói o segmento hiperbólico indicando-se o Disco e dois pontos.
	h-círculo	Constrói o círculo hiperbólico indicando-se o Disco e dois pontos.
	h-triângulo	Constrói o triângulo hiperbólico indicando-se o Disco e três pontos.
	h-ângulo	Determina a medida do ângulo hiperbólico indicando-se o Disco e três pontos.
	h-reflexão ponto	Constrói a reflexão de um ponto hiperbólico em relação a uma reta hiperbólica indicando-se Disco, reta hiperbólica e ponto.

Tabela 1: Ferramentas hiperbólicas.

No que segue, para ilustrar o uso do recurso *Criar uma Nova Ferramenta* do GeoGebra, vamos apresentar o procedimento de construção de uma das ferramentas do menu hiperbólico. Escolhemos fazer a construção da *h-reta* hiperbólica, pois no procedimento tem-se também interessante propriedade da geometria euclidiana.

De início construímos o *Disco* de centro A passando por B, usando *Círculo dado centro e um de seus pontos*, e dando-lhe o destaque de borda pontilhada em vermelho para indicar o horizonte hiperbólico. O *Disco* é o conjunto de pontos que estão no interior do círculo pontilhado.

Tendo-se o *Disco* e dois de seus pontos C e D, o problema que se apresenta é como construir uma circunferência ortogonal ao horizonte do *Disco*, passando por C e D. Relembramos aqui que uma reta hiperbólica, que vamos referir como *h-reta*, é um arco de tal círculo ortogonal ao horizonte do *Disco*.

Adiantamos que é no menu das transformações geométricas, disponível no GeoGebra, que vamos encontrar a solução do problema - trata-se da transformação *Reflexão em Relação a um Círculo (Inversão)*. Sobre esta transformação: dado um círculo de centro em O e raio r, dizemos que o inverso do ponto P em relação ao círculo é o ponto P' sobre a semirreta OP que satisfaz a relação OP'.OP = r.r.

No GeoGebra tem-se, no menu das transformações, essa transformação de Inversão. A Figura 6 apresenta a construção geométrica que produz a Inversão. Apartir da semelhança dos triângulos retângulos OPD e ODP' é fácil obter a igualdade de razões que implica que OP'.OP = r.r .

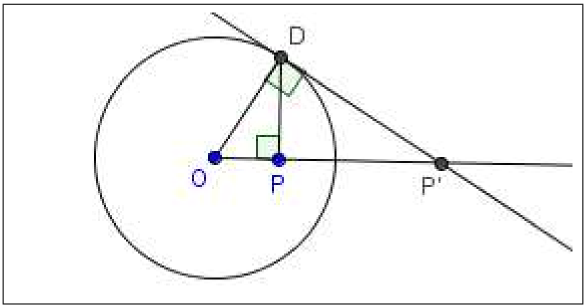


Figura 6: Ponto P´ inverso do ponto P.

É o teorema que diz: "*Se P e P' são pontos inversos um do outro em relação ao horizonte hiperbólico, então qualquer círculo passando por P e P' é ortogonal ao horizonte hiperbólico*" que resolve o problema de construção da h-reta. A demonstração deste teorema pode ser vista em [9].

Assim, tendo-se o *Disco* e seus dois pontos C e D, o procedimento de construção da *h-reta* é:

- aplicamos a *Reflexão em Relação a um Círculo (Inversão)* no ponto C, aqui tomando o círculo pontilhado que é o horizonte hiperbólico, e obtemos o ponto refletido C'.
- aplicamos o menu *Círculo definido por Três Pontos* nos pontos C, C' e D.
- para a construção do arco que corresponde a *h-reta*, marcamos os pontos E e F de intersecção dos dois círculos.
- aplicamos *Mediatriz* nos pontos E e F. Após marcamos o ponto G de intersecção da reta mediatriz com o círculo ortogonal já construído. É importante a construção desta mediatriz para garantir que o arco que definirá a h-reta fique no interior do círculo pontilhado.
- aplicamos *Arco Circular definido por Três Pontos* nos pontos E, G e F.
- aplicamos *Exibir/Esconder Objeto* nos pontos C', E, F e G, na reta mediatriz e no círculo ortogonal.

Os passos de construção apresentados acima estão ilustrados na Figura 7

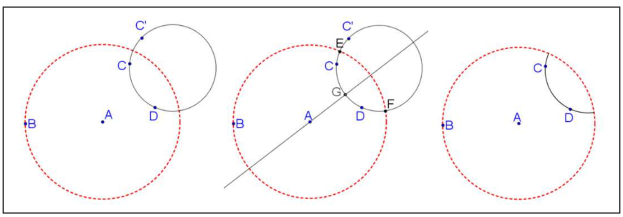


Figura 7: Construção da h-reta.

Feita a construção da *h-reta*, iniciamos o processo de *Criar uma Nova Ferramenta* e assim automatizamos o procedimento de construção apresentado acima. Conforme ilustra a Figura 8: a) escolhemos como objeto final o arco de círculo perpendicular ao horizonte hiperbólico; b) como objetos iniciais escolhemos o *Disco* e os pontos C e D.

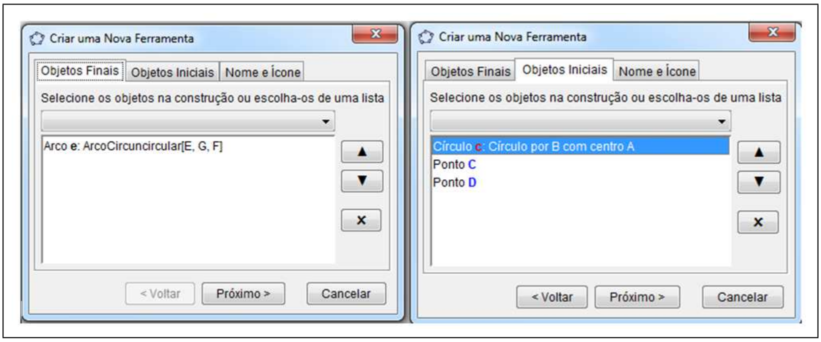


Figura 8: Janela Objetos Finais e Objetos Iniciais da ferramenta h-reta.

Todos as ferramentas disponíveis no micro-mundo *Disco de Poincaré* foram construídas desta mesma forma. Segundo [6] tem-se "*na tecnologia digital a ampliação das possibilidades para experimentos de pensamentos... Essa tecnologia disponibiliza, cada vez mais, ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação de pensamentos*". Na construção do micro-mundo levamos em consideração tal potencial. Na próxima seção vamos apresentar as possibilidades que este menu oferece para a exploração de ideias no mundo hiperbólico.

4. O Disco de Poincaré e possibilidades para o ensino

Já no momento de construção do micro-mundo *Disco de Poincaré* estávamos pensando em atividades que poderiam ser desenvolvidas na escola. A escolha das atividades teve como referência as noções básicas e bem conhecidas da geometria euclidiana e tomou como pressuposto que os ambientes de geometria dinâmica favorecem os experimentos, de forma tal que as figuras na tela do computador tornam-se objetos concreto-abstratos: concretos porque podem ser manipulados diretamente, e abstratos porque tratam de veicular ideias tais como reta hiperbólica, triângulo hiperbólico, paralelismo e perpendicularidade no mundo hiperbólico.

No processo de aprendizagem da geometria um dos aspectos centrais é a passagem do empírico para o dedutivo. De acordo com a teoria de Van Hielle (1950), podemos dizer que são os níveis elementares da visualização e da análise que preparam para os níveis mais avançados da dedução informal e dedução formal. Na proposta de ensino que vamos apresentar, em se tratando de geometria não-euclidiana na escola, nosso objetivo é o desenvolvimento de habilidades que estão nos dois primeiros níveis propostos por Van Hielle: a visualização e a análise.

É com as explorações empíricas no *Disco de Poincaré* que se pretende o entendimento de que a ideia de reta não precisa estar associada com aquela construída na experiência no mundo físico imediato - aqui estamos nos referindo a ideia com que trabalhamos na geometria euclidiana. E também se pretende o entendimento de que a soma dos ângulos de um triângulo depende do "mundo" em que este triângulo se encontra, ou seja, depende da geometria. No caso da geometria hiperbólica, as explorações vão mostrar que a soma dos ângulos pode variar entre 0º e 180º.

Abaixo discutimos quatro das atividades que estão na proposta de ensino, na sua íntegra detalhada em [9]; as três primeiras tratam de conceitos fundamentais e a última, com enfoque artístico, trata de pavimentação hiperbólica. Na íntegra da proposta, têm-se atividades que, gradativamente, vão introduzindo as ideias da geometria hiperbólica e para cada uma delas tem-se comentário que destaca o objetivo quanto à aprendizagem dos alunos, acompanhado de figuras ilustrativas.

Aprimeira atividade tem o seguinte enunciado:

- *Quantas h- retas passam por dois pontos A e B do Disco? Movimente o ponto A e observe o comportamento da h-reta.*
- *Dado uma h-reta e um ponto P que não pertence a ela, quantas h-retas passam por P e não interceptam a h-reta dada?*
- *Como podem ser as h-retas paralelas?*

O objetivo da atividade é que os alunos comecem a se habituar com uma nova ideia de reta. Eles podem observar que, assim como na geometria euclidiana, na geometria hiperbólica por um ponto passam infinitas h-retas e por dois pontos passa somente uma h-reta (Figuras 9 e 10). Movimentando pontos que estão na h-reta, eles podem observar variações na sua forma, sendo uma situação extrema o caso em que a h-reta é um diâmetro do Disco (Figura 11).

No terceiro item, tem-se a situação em que por um ponto exterior a uma h-reta passam infinitas h-retas paralelas (Figura 10). Ou seja, o quinto postulado da geometria euclidiana - o axioma das paralelas - não é válido na geometria hiperbólica.

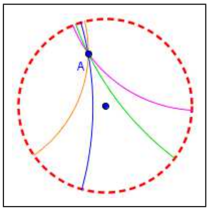


Figura 9: Retas hiperbólicas passando pelo ponto A.

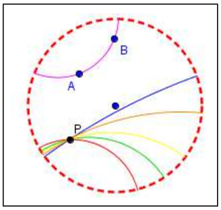


Figura 10: Retas hiperbólicas passando por P.

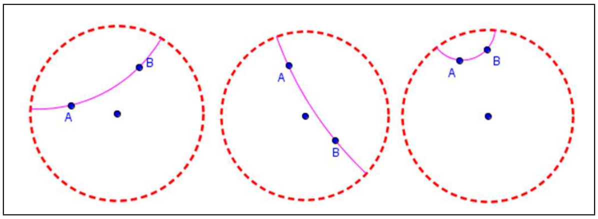


Figura 11: Reta hiperbólica passando por A e por B.

A segunda atividade propõe a exploração do conceito de distância entre pontos e tem o seguinte enunciado: *Usando o menu h-circulo (círculo hiperbólico), construa o caminho de uma criatura, que se move no Disco com passos de mesmo tamanho. Quando, ao nosso olhar, o caminho se parece com um caminho euclidiano?*.

Nas Figuras 12 e 13 temos dois destes caminhos, ambos como mesmo número de passos. Aos nossos olhos euclidianos, o primeiro caminho surpreende, pois sendo feito com passos de mesmo tamanho, não é isto que vemos na figura. Já o segundo caminho registra os passos de mesmo tamanho, pois é um caminho que está próximo do centro do *Disco*, e nesta região a geometria hiperbólica se aproxima da geometria euclidiana.

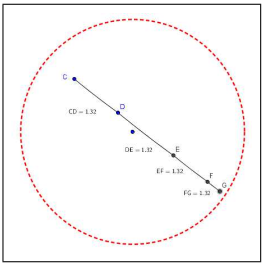


Figura 12: Segmentos hiperbólicos em sequência com os pontos distantes.

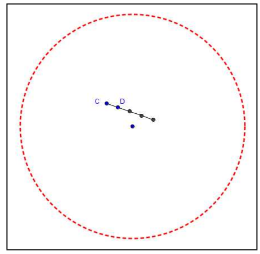


Figura 13: Segmentos hiperbólicos em sequência com os pontos próximos.

A terceira atividade propõe a exploração da medida de *h-ângulo* e da soma dos *h-ângulos* de um *h- triângulo*, e tem o seguinte enunciado:

- *O conhecido procedimento de construção do triângulo equilátero funciona no Disco? Quando o h-triângulo equilátero se parece com um triângulo euclidiano?*
- *Como se comporta a medida dos h-ângulos de um h-triângulo equilátero?*
- *Como construir um h-triângulo isósceles? Os h-ângulos da base do h-triângulo são congruentes entre si? Movimente os h-vértices e observe as formas possíveis para um h- triângulo isósceles.*

Na primeira atividade é retomado o procedimento usual de construção de um triângulo equilátero da geometria euclidiana. Conforme ilustra a Figura 14, na geometria hiperbólica, a aparência do *h-triângulo* surpreende. Ao movimentar os seus vértices, o aluno pode observar que ele se parece com o triângulo equilátero euclidiano quando os vértices estiverem próximos do centro do *Disco*. Na segunda atividade, é possível obter um *h-triângulo equilátero* com soma das medidas dos *h-ângulos* muito próximo de zero, um outro fato surpreendente. O procedimento de construção do *h-triângulo isósceles*, também mostra que a aparência do *h- triângulo* pode ser estranha. Essa construção pode ser feita a partir do *h-círculo* ou a partir da *h-mediatriz*.

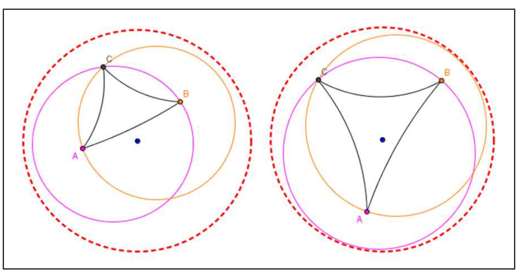


Figura 14: Construção de h-triângulo equilátero a partir da intersecção dos h-círculos.

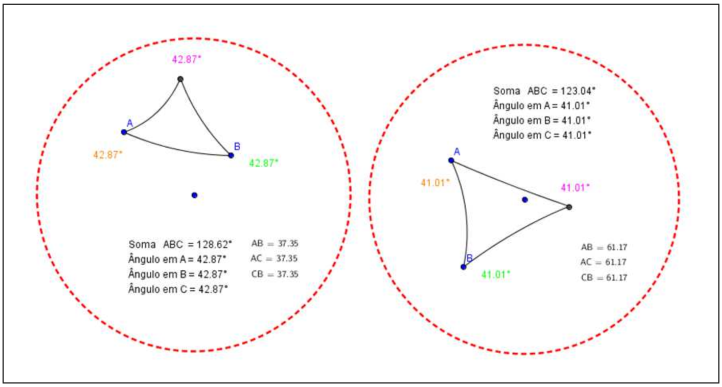


Figura 15: Medida da soma dos ângulos de h-triângulo equilátero.

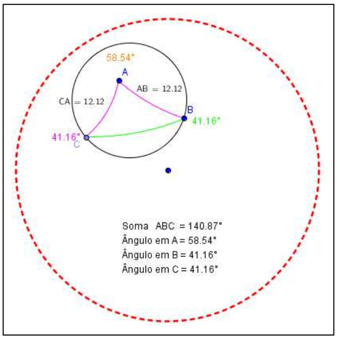


Figura 16: Construção de h-triângulo isósceles e soma dos seus h-ângulos.

A última atividade que vamos apresentar tem um caráter artístico. Usando a transformação de *h-reflexão* segundo uma *h-reta* se pode produzir pavimentações no *Disco*.

A transformação de *h-reflexão* funciona da mesma forma que a transformação de reflexão segundo uma reta na geometria euclidiana. A Figura 17 ilustra o procedimento de construção que resulta na h-reflexão de um ponto.

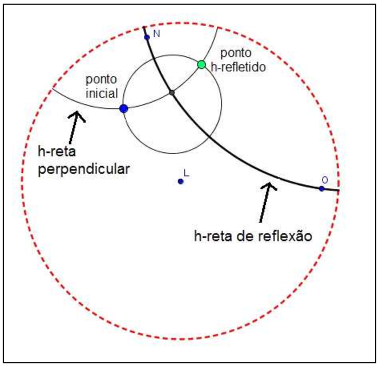


Figura 17: Reflexão de um ponto por uma h-reta.

As obras de Escher podem se tornar fonte de inspiração para a construção de pavimentações. São as propriedades do mundo da geometria hiperbólica que explicam os efeitos que podemos ver em duas de suas obras - Círculo Limite I e Círculo Limite III - ilustradas nas Figuras 18 e 19. Na segunda obra vê-se claramente, centralizada no *Disco*, uma composição feita com um *h-quadrilátero regular* e quatro *h-triângulos equiláteros*. Observe que esta mesma composição está sempre se repetindo e conforme a composição vai se aproximando do horizonte ela vai parecendo cada vez menor, ao nosso olhar euclidiano. No entanto, os *h-quadriláteros* são todos congruentes entre si, bem como os *h-triângulos equiláteros*, pois a composição é obtida através da transformação de *h-reflexão*. Este é o mundo da geometria hiperbólica.

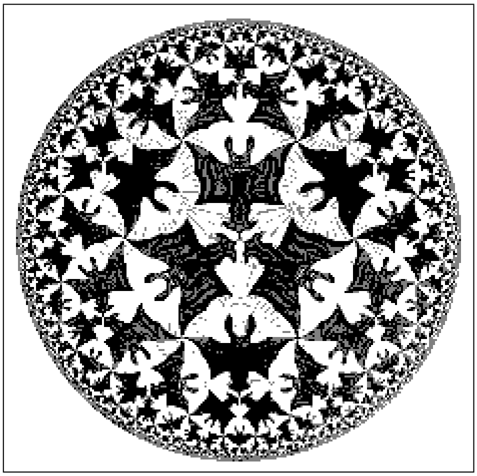


Figura 18: Círculo Limite I.

Figura 19: Círculo Limite III.

Abaixo temos uma figura produzida, no micro-mundo *Disco de Poincaré*, a partir de um *h-triângulo equilátero*. Ela inicia com o *h-triângulo* centralizado e segue com a sua *h-reflexão* segundo as três *h-retas* suportes dos seus lados. Estas reflexões geram novos *h-triângulos equiláteros* aos quais se aplicam novos procedimentos de *h-reflexão*, e assim sucessivamente, de modo a obter a Figura 20. Os efeitos de cores, obtidos na Figura 21, foram trabalhados em um editor de imagem.

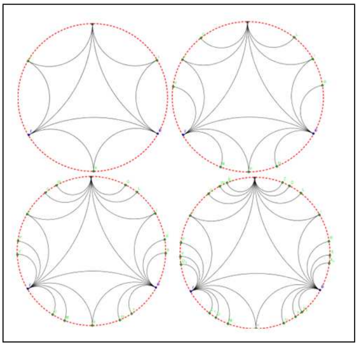


Figura 20: Passos de construção da pavimentação.

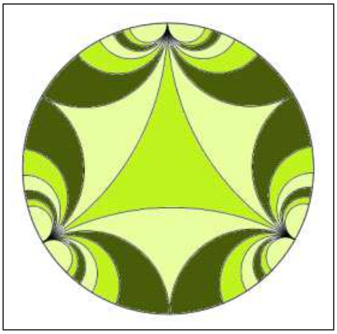


Figura 21: Pavimentação colorida.

5. Considerações finais

Este artigo é um recorte do trabalho de [9]. Nele, um pressuposto fundamental é quanto ao uso da geometria dinâmica na aprendizagem da geometria hiperbólica: a manipulação das figuras dinâmicas, na tela do computador, é de fundamental importância no processo de aprendizagem de ideias que se confrontam com aquelas já construídas na geometria euclidiana.

O trabalho foi realizado no âmbito do programa de mestrado profissionalizante, e assim estamos disponibilizando um produto didático que pode ser utilizado por outros professores de matemática. Este produto é o micro-mundo *Disco de Poincaré*, disponível para download em <www.mat.ufrgs.br/~ppgem/produto_didatico/rribeiro>. Além da construção do micro-mundo também elaboramos uma sequência de atividades, com o objetivo de provocar nos alunos muitos experimentos de pensamento, via manipulação direta na tela do computador, e sempre em paralelo com conceitos e ideias já conhecidos da geometria euclidiana. O conhecimento e a compreensão da geometria hiperbólica pode ajudar os alunos na construção do pensamento geométrico, e de uma forma desafiadora, pois as impressões visuais precisam ser colocadas sob controle racional.

Finalizando, diríamos que nossa proposta de introdução à geometria hiperbólica através da geometria dinâmica pode ser uma contribuição na direção de um ensino diferenciado da geometria escolar. Fica aqui o convite ao professor-leitor para que teste e aprimore o material didático que estamos colocando a disposição.

Referências

[1] Boyer, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

[2] Cabariti, E. *Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004.

[3] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora Unicamp, p. 844, 2002

[4] Eves, H. *Tópicos de História da Geometria*. São Paulo: Atual, 1992.

[5] Gravina, M. A. *Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-Dedutivo*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

[6] Gravina, M.A. et al. *Matemática, mídias digitais e didática : tripé para formação de professores de matemática*. Porto Alegre: Evangraf, 2012. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica_midiasdigitais_didatica.pdf>. Acesso em: 19 de julho de 2013.

[7] Pataki, I. *Geometria Esférica para a Formação de Professores: Uma proposta interdisciplinar*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

[8] Ribeiro, R. D. G. *O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sob a perpectiva da divulgação cientifica*. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2012.

[9] Ribeiro, R. S. *Geometrias Não-Euclidianas na Escola: Uma proposta de Ensino Através da Geometria Dinâmica*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/>.

[10] Reis, J. D. S. *Geometria Esférica por meio de Materiais Manipuláveis*. Dissertação de Mestrado em Educação, UNESP, Rio Claro, SP, 2006.

[11] Zulatto, R. B. A. *Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas*. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, SP, 2006.

Ricardo Ribeiro
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do RGS
<ricardo.ribeiro@canoas.ifrs.edu.br>

Maria Gravina
Instituto de Matemática da UFRGS
<gravina@mat.ufrgs.br>

Recebido: 2013
Publicado: 2013