PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.2, n.1, 2014
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2014/pmo21

Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo – estabelecendo relações

Leticia Rangel Victor Giraldo Nelson Maculan

Resumo

Este trabalho tem como objetivo investigar a identificação de partes elementares da Matemática (no sentido de Klein, [9], [10], [11]) por professores da escola básica, e as possíveis implicações dessa identificação para a construção do saber pedagógico de conteúdo (no sentido de Shulman, [14]). A pesquisa foi desenvolvida a partir de um estudo coletivo com um grupo de professores, em torno do tema números racionais.

Palavras-chave: saber pedagógico de conteúdo, elementarização; números racionais.

Abstract

This work aims to investigate the identification of elementary parts of Mathematics (in Klein's sense, [9], [10], [11]) by elementary school teachers, and the possible implications of this identification for the construction of content pedagogical knowledge (in Shulman's sense, [14]). The research was developed from a collective study with a group of teachers, around the theme of rational numbers.

Keywords: pedagogical content knowledge, elementarization; rational numbers.

1. Introdução

É inequívoco que a atividade de ensino de Matemática na escola básica exige do professor conhecimentos sobre o conteúdo a ser ensinado e sobre pedagogia. As formas como esses conhecimentos se articulam, são construídos e são acionados ao longo da formação e da prática do professor têm despertado intensa discussão na literatura de pesquisa na área nas últimas décadas. Essas questões têm implicações importantes nos modelos de formação de professores de Matemática ([1], [4]) ,

> *Temos mais a compreender sobre como a formação do professor pode ter uma intervenção efetiva no complexo processo de aprender a ensinar matemática, que, muito frequentemente, é mais influenciado pelas experiências anteriores dos professores como aprendizes ou por contextos de seu trabalho profissional*[1] ([4, p3], tradução nossa).

[1] "We have more to understand about how teacher education can be an effective intervention in the complex process of learning to teach mathematics, which is all too often most influenced by teachers' prior experiences as learners or by the contexts of their professional work." [4, p3]

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Entretanto, as preocupações quanto ao saber e aos modelos de formação do professor de Matemática não são recentes. Em sua obra, hoje clássica, *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*, publicada pela primeira vez há mais de um século, o matemático alemão Felix Klein constata **uma ruptura entre a matemática escolar, aquela ensinada na escola básica, e a matemática acadêmica universitária**. Klein identifica essa ruptura como uma *dupla descontinuidade* na formação inicial do professor de Matemática: por um lado, entre a matemática estudada no curso universitário e aquela anteriormente aprendida como aluno no ensino básico; e, por outro, entre a matemática do curso universitário e aquela a ser posteriormente ensinada na escola básica. Sobre o saber de conteúdo necessário para o ensino, Klein entende que o professor deve não somente ter conhecimento específico sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacioná-los e articulá-los, compreender sua natureza científica e sua evolução histórica, de forma a desenvolver uma visão ampla o suficiente para situá-los no panorama da Matemática como ciência. As ideias pioneiras Klein inspiraram a ICMI (*International Comission on Mathematical Instruction*) e a IMU (*International Mathematical Union*) a lançar em 2008 – ano em que se celebrou o centenário da primeira edição da obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior* – o *Klein Project For the 21st Century*, com o objetivo de produzir recursos didáticos para a formação de professores no espírito de Felix Klein, tendo como princípio norteador estabelecer conexões entre uma visão ampla da matemática e os conteúdos e suas abordagens na escola básica.

Dentre os autores que têm discutido os conhecimentos necessários para o ensino, destaca-se o trabalho de Shulman ([14], [15]), que propõe a noção de ***saber pedagógico de conteúdo***, **caraterizado essencialmente como o conhecimento dos aspectos do conteúdo que o fazem ensinável a outros, isto é, o saber *sobre* o conteúdo *para* o ensino**. Por sua própria natureza, esta modalidade de saber, ainda que não prescinda de conhecimentos importantes adquiridos na formação inicial do professor, desenvolve-se contínua e permanente ao longo da prática profissional.

Neste trabalho, visamos contribuir para a reflexão acerca da formação do professor de Matemática do ensino básico, apresentando uma investigação com foco no desenvolvimento dos saberes necessários para o ensino. Mais especificamente, investigamos em que medida o reconhecimento de aspectos elementares pode ter implicações na construção do saber pedagógico de conteúdo. O estudo é desenvolvido a partir de uma série de sessões coletivas com um grupo de professores, centradas no tema *números racionais*. Nas seções a seguir, fazemos uma breve revisão da literatura com especial atenção às ideias de Shulman e de Klein. Em seguida, apresentamos os principais resultados do estudo desenvolvido. A investigação aqui relatada é parte da pesquisa em desenvolvimento para a tese de doutorado da primeira autora, sob a orientação do segundo e do terceiro autores.

2. O saber matemático para o ensino

Ainda que o trabalho de Shulman ([14], [15]) não trate especificamente do conhecimento do professor de Matemática, ele tem sido uma referência central para a pesquisa em Educação Matemática (e.g. [3], [8], [13], [17]). Em 1896, no artigo – hoje clássico – *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*, o autor introduz a noção de ***saber pedagógico de conteúdo***, como um domínio especial do conhecimento do professor, que articula pedagogia e conteúdo com vistas ao ensino. Para o autor, este saber: ,

> *[...] identifica diferentes corpos do conhecimento necessário à docência. Ele representa a combinação de conteúdo e pedagogia em um entendimento de como tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos alunos e apresentados no processo de ensino.*[2] ([15, p8], tradução nossa)

[2] "...identifies the distinctive bodies of knowledge for teaching. It represents the blending of content and pedagogy

Para Shulman, o *saber pedagógico de conteúdo* não pode ser identificado ao saber de pedagogia nem ao saber de conteúdo, ainda que se articule com essas dimensões do conhecimento. O *saber de conteúdo* diz respeito exclusivamente à matéria, sem compromissos com o ensino, enquanto o *saber pedagógico de conteúdo* extrapola o conhecimento do conteúdo disciplinar *per se*, contemplando a dimensão do **saber *sobre* o conteúdo *para* o ensino**: ,

> *Em relação ao saber pedagógico de conteúdo, eu incluo, para os tópicos mais regularmente ensinados em uma disciplina, as formas mais eficientes de representação das ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações – em resumo, as maneiras de representar e formular a matéria que a tornam compreensível a outros.*[3]
> ([14, p9], tradução nossa)

Embora o saber de conteúdo seja certamente indispensável à formação do professor, a atividade de ensinar Matemática exige um olhar especial para aspectos particulares do conteúdo, que podem ter pouca relevância para o conhecimento da Matemática *per se*. Esses aspectos são contemplados pelo saber pedagógico de conteúdo.

Consideremos, por exemplo, o caso da operação de divisão com números naturais. Para o professor, não basta conhecer a definição formal da operação, saber que seu algoritmo usual se baseia na estrutura posicional do sistema de numeração decimal e ser capaz de efetuar esse algoritmo, descrevendo detalhadamente e justificando formalmente cada etapa que o compõe. É necessário, além disso, identificar situações resolvidas por meio da operação de divisão a partir de ideias de repartição e de comparação ou medida; reconhecer a relação intrínseca desta com as demais operações básicas; identificar diferentes processos de decomposições e de reagrupamento da representação decimal dos números que possam ser usados para organizar o algoritmo usual de diferentes maneiras e para compor e justificar outras formas de algoritmos e, sobretudo, *reconhecer a relevância de cada um desses aspectos para a aprendizagem e ser capaz de articulá-los para estabelecer estratégias de ensino, levando em conta as especificidades de cada contexto de aprendizagem*. Por exemplo, a operação $583 \div 7$ pode ser resolvida de diversas formas, dentre as quais aquelas indicadas na Figura 1.

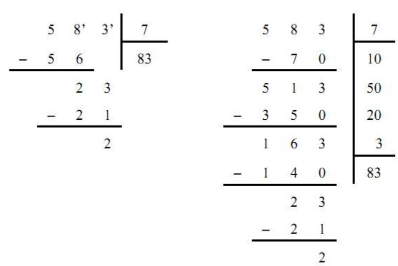


Figura 1: Exemplos de divisões – *por ordem* e *por estimativa*.

O algoritmo usual, à esquerda, é frequentemente chamado de *algoritmo por ordens*, enquanto que o da direita é conhecido como *algoritmo por estimativas*. Do ponto de vista do conhecimento matemático *per se*, talvez a única informação relevante seja a de que o algoritmo por ordens otimiza os passos para

into an understanding of how particular topics, problems, or issues are organized, represented, and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for instruction." [15, p8]

[3] "I include, for the most regularly taught topics in one's subject area, the most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations – in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensive to others." [14, p9]

obter o resultado de uma divisão. No entanto, do ponto do vista do conhecimento matemático para o ensino, é fundamental o reconhecimento de que o uso do algoritmo por estimativas pode contribuir para a compreensão dos alunos sobre a operação de divisão e sobre a natureza do próprio algoritmo e, em alguns casos, pode até ser o mais "econômico" em relação à quantidade de etapas (Por exemplo, no caso de $5050 \div 50$). Somente um conhecimento profundo desses aspectos conceituais particulares da operação de divisão e da estrutura de seu algoritmo pode munir o professor com a habilidade de reconhecer a relevância para o ensino do uso de diferentes algoritmos (que podem ser matematicamente equivalentes) e de identificar em que situações pedagógicas o uso de determinado algoritmo é vantajoso.

Nesse sentido, o *saber pedagógico de conteúdo* é fundamental para a autonomia do professor com respeito a como ensinar e a quando ensinar cada tópico; a avaliar a aprendizagem e a compreensão dos alunos; e a sustentar a tomada de decisões, antes e durante situações reais de sala de aula, quanto e que caminhos e estratégias pedagógicas adotar.

As concepções sobre os saberes necessários para o ensino têm implicações efetivas nos modelos de cursos de formação inicial de professores (Licenciaturas) e, consequentemente, em que professor é formado por esses cursos. Em uma investigação com foco no conhecimento de estudantes de cursos universitários para formação de professores de matemática (equivalentes à nossa licenciatura), [1], propõe uma investigação sobre a operação de divisão. Em relação à divisão envolvendo frações, a pesquisadora propõe aos futuros professores a seguinte questão: ,

> *Desenvolva uma representação – uma estória, um modelo, uma figura, uma situação do mundo real – para a divisão* $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$. [1, p10]

Dos 18 estudantes participantes, apenas 5 foram capazes de sugerir representações apropriadas; enquanto outros 5 apresentaram representações impróprias, e os 8 restantes declararam-se incapazes de sugerir qualquer forma de representação. Ball destaca que mesmo as 5 respostas consideradas satisfatórias não eram isentas de problemas. De acordo com a pesquisadora, os resultados observados sugerem que o conhecimento desses estudantes sobre a divisão era insuficiente para capacitá-los ao ensino. Em particular, eles associavam a operação de divisão apenas à interpretação como repartição, não considerando a interpretação como comparação ou medida, mais adequada à situação proposta.

Com base nesses resultados, a autora identifica e questiona três suposições que permeiam tacitamente os modelos dos cursos de formação inicial de professores de Matemática nos Estados Unidos: (1) *os conteúdos da matemática escolar são simples e comumente entendidos;* (2) *portanto, não precisam ser reaprendidos no curso universitário*; e (3) *as disciplinas de matemática universitária são suficientes para equipar os futuros professores com um saber amplo e profundo da matemática escolar*. Uma implicação dessas suposições é revelar o caráter inócuo dos cursos de formação inicial de professores de Matemática – é como se esses cursos tivessem pouca relação efetiva com a capacitação dos professores para o ensino, levando-os a buscar outras referências (por exemplo, sua própria experiência como alunos da educação básica) para construir sua prática docente. Para [7], a maioria dos estudos com foco no conhecimento do conteúdo disciplinar do professor de matemática com vistas ao ensino se baliza por descrições de características e/ou demonstrações de sua relação com a aprendizagem dos estudantes. Davis entende que, além de alcançar essas questões, é necessário que a investigação sobre o tema contemple a habilidade dos professores para o ensino e em como ela se estabelece e se desenvolve. Já [7] acredita que "para transformar as salas de aula, é necessário estabelecer concepções de transformação para a matemática dos professores"[4] ([7, pI-64], tradução nossa).

3. As ideias de Felix Klein

[4] "...in order to transform classroom settings, there is a need to design transformative settings for teachers' mathematics." [7, pI-64]

Além do destacado papel de Felix Klein[5] na pesquisa em Matemática, sua influência e sua contribuição para o ensino da disciplina são inquestionáveis. Em especial, destaca-se em seu legado a obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. A obra originou-se de notas de aulas dadas por Klein para cursos de formação de professores da Universidade de Göttingen. Defensor da percepção da Matemática como um todo orgânico ([9], [16]), Klein preocupou-se com o ensino da disciplina, reconhecendo a importância e a especificidade da formação do professor para o desenvolvimento da Matemática como ciência. O autor identifica um problema que afligia a formação dos professores em sua época – uma ruptura entre a *matemática escolar*, aquela ensinada nos sistemas de ensino básico e a *matemática superior*[6], com referência à produção científica de Matemática. ,

> *Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores confrontados com a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma relação entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar.* Klein, [9, p1].

Com a identificação dessa ruptura, Klein aponta uma ***dupla descontinuidade*** – por um lado, durante a formação acadêmica do professor, há pouca relação entre a matemática estudada na universidade e aquela anteriormente aprendida no ensino básico e, por outro lado, entre a matemática ensinada pelo professor em sua prática profissional e aquela estudada em sua formação acadêmica. Com sua obra, Klein pretende intervir neste cenário, proporcionando aos futuros professores uma **visão ao mesmo tempo profunda e panorâmica da disciplina**, que os permita identificar relações e conexões entre os tópicos e entre esses e a matemática que se deve ensinar no ensino básico. ,

> *O meu objetivo consiste em mostrar-vos sempre* ***as conexões entre problemas de diferentes áreas****, o que não acontece de forma suficiente na generalidade dos manuais, e, mais especificamente, sublinhar a relação com os da matemática escolar. Espero que desta forma se torne mais fácil para o leitor adquirir a capacidade que considero o verdadeiro objetivo dos estudos acadêmicos: a de retirar das grandes questões científicas que nos são oferecidas abundantes estímulos e orientações para o exercício da própria atividade docente.* Klein, [9, p2], grifo como no original.

Klein qualifica a percepção hierárquica e estanque entre matemática escolar e matemática universitária como um obstáculo a ser vencido ([16]). Seu entendimento fica claro quando se dirige ao leitor que acompanha as lições que compõem a sua obra, ,

> *Se não forem suficientemente orientados, se não estiverem bem informados acerca dos elementos intuitivos da matemática bem como das relações vitais entre áreas próximas entre seus ramos e as outras ciências. Se, acima de tudo, não conhecerem o desenvolvimento histórico, seus passos serão muito inseguros. Retirar-se-ão, então, para o campo da matemática pura mais moderna e não serão mais compreendidos na escola secundária ou sucumbirão ao assalto, desistirão do que aprenderam na universidade e, mesmo na vossa maneira de ensinar, deixar-se-ão enterrar na rotina tradicional.* Klein, [11, p127].

[5] Felix Christian Klein – 25/04/1849 (ou $5^2/2^2/43^2$, como o próprio Klein gostava de ressaltar), Düsseldorf, Alemanha – 22/06/1992, Göttingen, Alemanha.

[6] Neste trabalho, atribui-se o mesmo entendimento às expressões matemática científica, matemática acadêmica, matemática universitária e matemática superior, como referência à produção científica de Matemática, incluindo desde conteúdos ensinados nas disciplinas de conteúdo específico dos cursos de graduação até resultados produzidos em pesquisas de fronteira.

Klein identifica como ***matemática elementar*** aquela que congrega as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática. Assim, *não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior* – são partes que se fundem e se articulam compondo, com a mesma importância, a Matemática como ciência ([16]). A noção de *matemática elementar* também é fundamental para a percepção, nos termos de Klein, da relação entre a matemática escolar e a matemática universitária. Klein não se alinha com o entendimento de uma transposição vertical do conhecimento matemático produzido na academia para a escola, à qual caberia apenas o papel passivo de receber e difundir um conhecimento pronto, sem qualquer interferência em sua produção. Segundo Schubring [16], Klein lida com a relação entre esses domínios do conhecimento admitindo a *elementarização* como um processo de *translação histórica*, por meio do qual, à medida que a matemática superior é mais bem compreendida, suas partes elementares vão se identificando e se organizando, permitindo o aprofundamento da compreensão e a difusão mais ampla de conceitos e criando assim condições para a produção de novos conhecimentos.Assim, cabe à escola não só difundir o conhecimento elementar, como também contribuir com o próprio processo de *elementarização*, por meio da criação de categorias próprias para a seleção e adaptação de conteúdos e da avaliação das necessidades do ensino e da formação. Nessa perspectiva, a escola assume um papel de autoria e independência no próprio processo de produção do conhecimento.

4. A investigação

Este trabalho pretende contribuir para a reflexão sobre a formação do professor de Matemática e sobre o desenvolvimento do saber pedagógico de conteúdo. Mais especificamente, visamos investigar:

i) como um processo de discussão coletiva centrado no conteúdo do ensino básico pode contribuir para o reconhecimento, por parte do professor, de aspectos elementares desses conteúdos (no sentido de Klein);
ii) em que medida o reconhecimento desses aspectos elementares pode ter implicações para a construção do *saber pedagógico de conteúdo* (no sentido de Shulman).

A perspectiva de Klein para o ensino de Matemática sugere que o exercício de refletir sobre o próprio saber de conteúdo matemático, reconhecendo partes elementares, a partir dessas partes, sustentar e estruturar a matemática a ser ensinada, pode contribuir para o desenvolvimento de um *saber sobre o conteúdo para o ensino* – identificado como saber pedagógico de conteúdo por Shulman. Esse é o foco desta investigação.

O tópico escolhido para o estudo foi números racionais, por permear o ensino básico como algo fundamental, sustentar questões relevantes em relação ao seu ensino, além de não intimidar os professores participantes (o que poderia comprometer seu envolvimento na discussão coletiva).

5. Metodologia

5.1. Desenho e desenvolvimento do estudo empírico

O estudo se deu com o grupo de professores que cursavam a disciplina Tópicos em Ensino de Matemática do curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, lecionada pela primeira autora no segundo semestre de 2011. Trata-se de uma disciplina eletiva, de ementa variável, o que permitia o desenvolvimento do estudo pretendido. A disciplina ocorreu em sessões semanais com 4 horas de duração, ao longo de 19 semanas.

A turma participantes do estudo era composta por 15 professores com experiência profissional que variava de 1 (um) a 20 (vinte) anos de atuação em sala de aula. Esses professores também apresentavam diversidade em relação à formação inicial, 9 cursaram a licenciatura em um instituição pública, enquanto 6 obtiveram seu diploma em instituições particulares. Na ocasião do desenvolvimento do estudo, todos atuavam em escolas públicas da rede estadual do Rio de Janeiro e/ou da rede municipal da cidade do Rio de Janeiro e, dentre estes, 6 atuavam também em escolas particulares.

Os dados do estudo foram coletados por meio de gravações em áudio das sessões, anotações sobre o desenvolvimento das sessões por parte da pesquisadora e registros documentais de atividades diversas estabelecidas a partir da discussão, pelo grupo ou pela pesquisadora. A investigação teve como referencial metodológico a noção de *Concept Study*, proposta por Davis e seus colaboradores (para maiores detalhes, ver, por exemplo, [5], [6], [7]).

5.2. Análise de dados

A partir da complexidade das articulações estabelecidas entre o tema central que amparou a discussão (números racionais) e outros tópicos e campos da Matemática, foram identificados três estágios na discussão: *Percepções*, *Estruturas* e *Panoramas*. Esses estágios foram distinguidos, como órbitas estabelecidas a partir do tema central. Assim, o menor nível de articulação foi associado ao primeiro estágio de análise, *percepções*. Já a órbita mais distante identificada à maior abrangência do tema central, a partir de articulações ampliadas em profundidade, diversidade e alcance. Embora os estágios relativos às órbitas mais interiores tenham de fato se iniciado mais cedo, não pode ser identificada uma ordenação temporal clara, em que cada estágio se sucederia ao término do anterior. Ao contrário, verificam-se interseções entre eles ao longo de todo o estudo. Assim, *a variação de um estágio a outro foi mais caracterizada pela qualidade da discussão do que por uma sucessão temporal linear.*

Na seção a seguir, relataremos o desenvolvimento do estudo, com destaque aos estágios identificados. Para cada um desses estágios, relataremos um episódio, escolhido por ser representativo da forma como a discussão foi conduzida, ressaltando o reconhecimento, por parte dos professores, de aspectos elementares dos conteúdos.

6. Desenvolvimento do estudo

Inicialmente, os professores foram convidados, por cerca de 3 encontros, a refletir a partir de questões e atividades que tinham como propósito preparar o grupo para uma discussão coletiva, e disparar a reflexão sobre os saberes necessários ao ensino. Essa etapa inicial foi significativamente importante para que a proposta de um estudo coletivo fosse assimilada pelo grupo. Algumas das questões propostas para a discussão foram extraídas de pesquisas que com foco no *saber pedagógico de conteúdo*. Em destaque no quadro a seguir (Figura 2) a questão que disparou um episódio, escolhido como representativo desta etapa inicial do trabalho. A escolha se justifica pelo impacto que a discussão gerada estabeleceu no desdobramento do estudo.

Suponha que você queira observar se seus alunos são capazes de ordenar números racionais. Qual das seguintes listas de números lhe daria melhores evidencias sobre a compreensão dos seus alunos?

(a) 0,5 7 0,01 11,4

(b) 0,60 2,53 3,14 0,45

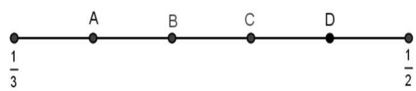
(c) 0,6 4,25 0,565 2,5

(d) Essas listas são igualmente boas para avaliar a compreensão dos estudantes sobre a ordenação de números racionais.

Figura 2: Exemplo das questões que orientaram a discussão inicial do estudo.

Esta questão foi extraída de [2]. Ainda que de fato as três listas apresentadas na atividade sejam compostas por números racionais representados na forma decimal, é possível ordenar os números apresentados nos itens (a) e (b) sem que se leve em conta que se tratam de números não inteiros, ou seja, desprezando-se as vírgulas. Assim, essas listas não são adequadas ao objetivo atribuído à questão. Do ponto de vista do saber de conteúdo *per se*, é irrelevante o fato de a ordem entre os números ser ou não preservada quando a vírgula é apagada, porém esta questão é crucial para a abordagem pedagógica do conteúdo. Portanto, consideramos que *a discussão sobre os objetivos e a adequação dessa questão envolve aspectos do saber pedagógico de conteúdo*. Em um primeiro contato com a questão, a maioria dos professores participantes do estudo fez a opção pelo item (d). No entanto, a discussão mais aprofundada sobre a questão, tendo como foco seu objetivo pedagógico, foi fundamental para uma mudança na percepção dos professores. A partir dessa discussão, um dos professores participantes trouxe para a pauta de discussão a questão apresentada na Figura 3, por ter identificado uma "falha" análoga àquela observada na atividade da Figura 2. Essa questão compunha a Prova de Matemática do Exame de Seleção para o Ensino Médio do Centro Federal de Educação Celso Suckow da Fonseca – CEFET/RJ, no ano de 2010.

Manuela dividiu um segmento de reta em cinco partes iguais e depois marcou as frações 1/3 e 1/2 nas extremidades, conforme a figura abaixo.



Em qual dos pontos Manuela deverá assinalar a fração 2/5?

Figura 3: Questão motivadora da reflexão.

Na discussão que se seguiu, o grupo observou que a solução da questão certamente poderia ser estabelecida de diversas formas. Por exemplo, o aluno poderia identificar a distância entre os pontos correspondentes a 1/3 e 1/2, dividir esse valor por cinco, determinando que cada uma das 5 subdivisões do segmento em destaque tem comprimento 1/30, e finalmente identificar que pontos A, B, C e D, correspondem respectivamente aos números 11/30, 2/5, 13/30 e 14/30. Outra solução possível usa resultados próprios de progressões aritméticas, opção em que o problema poderia ser resolvido a partir das fórmulas particulares, portanto, fortemente amparado em procedimentos algébricos. No entanto, os professores observaram que a resposta correta dessa questão poderia ser alcançada por *meio de uma resolução errada*, que acreditavam ser bastante provável de ser feita pelos estudantes. A partir da sua prática, o grupo avaliou que era bem possível que um estudante identificasse o ponto B como a solução da questão porque o segmento em destaque está dividido em 5 partes e B corresponde, sob a orientação crescente, à extremidade final do segundo segmento.

Além de discutir a questão em si a partir de seus objetivos, abrangência e adequação, foi proposto como exercício que cada um dos integrantes interviesse na questão resolvendo a "falha" detectada. Essa intervenção deveria ter como critério a menor alteração possível no enunciado. A visão crítica sobre a questão e a proposta de intervenção de modo a *melhorar a questão* revelam aspectos importantes que caracterizam o saber pedagógico de conteúdo: *a capacidade de análise e a capacidade criativa e autoral sobre a atividade docente*. De forma geral, consideramos que a reflexão a partir das questões disparadoras permitiu a identificação explícita pelos participantes de aspectos que caracterizam um saber sobre o conteúdo que é próprio do professor.

6.1. Estágio 1 – Percepções

Para compor este estágio, que é inicial em um *Concept Study*, os professores foram convidados a refletir a partir da seguinte questão "**O que é fundamental no que ensinamos sobre números racionais no ensino básico?**". A composição da lista de *percepções* foi estabelecida a partir de uma intensa discussão do grupo, por dois encontros consecutivos, que teve como referência a experiência da sala de aula. É importante destacar que a observação do estudo revelou que, para compor esse quadro (Figura 4), os professores se pautaram mais no contexto da sala de aula, em sua prática, do que na identificação da relevância do tema para a Matemática. Por exemplo, a discussão que determinou a inclusão do item

Percepções

- Relacionar parte e todo em situações diversas.
- Compreender a ideia de unidade
- Operações com frações
- Igualdade x equivalência
- Representação da reta numerada
- Diversos *significados* de frações – fração como número, como relação parte/todo, como razão e como divisão.
- Mostrar ao aluno que um mesmo número racional tem diversas representações – *representação*
- *Comparação* de números racionais na forma decimal
- *Comparação* de números racionais na forma fracionária
- Dar significado aos números racionais
- Reconhecer os números racionais na forma percentual
- Reconhecer os números inteiros como racionais
- Aproximações
- Dízimas – Em particular o caso do "0,999..."
- "Saber que dados dois números racionais sempre é possível determinar outro entre eles." – Densidade dos racionais.

Figura 4: Quadro *percepções* do estudo coletivo.

"compreender a ideia de unidade" foi pautada no reconhecimento pelo grupo da dificuldade dos estudantes em resolver problemas em que a unidade não corresponde a um único elemento. Esses problemas são encontrados com alguma frequência nos livros didáticos do ensino básico. O único item cujo reconhecimento do valor para a Matemática ficou explícito e foi preponderante para a inclusão na lista foi o que diz respeito à densidade do conjunto dos racionais. Ainda que alguns professores não associassem a propriedade à definição de conjunto denso, todos concordavam que observar que "dados dois números racionais sempre é possível determinar outro entre eles" era essencial para aprendizagem sobre esses números. A inclusão desse ponto foi pautada mais pelo reconhecimento da relevância do resultado para a Matemática do que pela observação de questões relativas ao ensino desse tópico em sala de aula.

Já no estágio *percepções*, foram evidenciados e abordados temas que determinariam os demais estágios do estudo, por exemplo, a noção de infinito, a incomensurabilidade, o zero como ente matemático e a exponenciação.

6.2. Estágio 2 – Estruturas

O estágio *estruturas* ficou caracterizado pela **articulação de aspectos matemáticos do conceito de número racional que têm característica estruturante na compreensão do assunto**. Em um episódio, escolhido como representativo deste estágio, destacamos a discussão que envolveu a operação de divisão no contexto dos números racionais. Essa discussão foi motivada por um problema trazido por uma das professoras do grupo:

> *Uma biblioteca tinha todos os seus livros acomodados em 6 estantes completamente cheias. Essas estantes foram substituídas por novas. A capacidade de cada estante nova era igual a ¾ da capacidade de uma das estantes antigas. Quantas estantes novas serão necessárias para acomodar todos os livros da biblioteca?*

A proposta inicial foi estabelecer estratégias diversas de solução para o problema proposto, com atenção à compreensão da operação de divisão, que no contexto dos números racionais, e particularmente no problema em questão, enseja a associação à interpretação como *medida*. As diversas soluções propostas pelos participantes foram discutidas pelo o grupo, observando a potencialidade para o ensino e para a aprendizagem. É importante observar que, no problema, a unidade corresponde à capacidade de uma estante original. Não é raro que a solução seja apresentada, pelos professores, a partir de uma estratégia correta, mas que evita o cálculo com frações: supõe-se que a capacidade de uma das estantes originais seja, por exemplo, 100 livros. Assim em uma estante nova caberiam 75 livros e a solução seria alcançada pelo resultado de $600 \div 75$. É claro que é essa solução é matematicamente correta e emprega a divisão. No entanto, evita que seja experimentada a divisão envolvendo frações, pois o único cálculo com frações é para determinar ¾ de 100. Em destaque (Figura 5), a abordagem da solução desse problema a partir de uma representação gráfica, proposta por um dos professores. Foi consenso que esta representação explicita a identificação da interpretação da divisão como medida e a compreensão da operação de divisão no contexto dos números racionais. A discussão sobre esse problema articulou tópicos elementares sobre o ensino do tema: o papel da unidade, a interpretação da divisão como medida e a possibilidade de representação gráfica da divisão – o que para muitos dos participantes se apresentou como uma novidade.

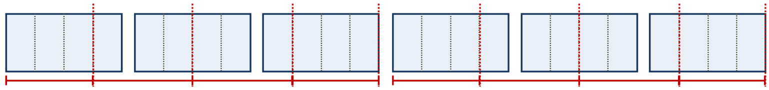


Figura 5: Representação gráfica para a divisão de 6 por 3/4.

Outras discussões que marcaram esse estágio envolveram, por exemplo, a atenção aos conceitos de razão e de fração, a definição de relação de equivalência e a definição formal de número racional.

6.3. Estágio 3 – Panoramas

O terceiro estágio identificado neste estudo, *panoramas*, se caracteriza especialmente por dois aspectos relativos a: (i) **a forma** como as questões passaram a ser investigadas, **revelando explicitamente o reconhecimento dos próprios saberes por parte dos professores**; e (ii) **as conexões matemáticas** estabelecidas, que foram **ampliadas em alcance e complexidade**, não se limitando apenas ao contexto de números racionais sob a perspectiva do ensino básico. Para representar o desenvolvimento da discussão que caracterizou este estágio, destacamos um episódio que conduziu a discussão durante dois encontros consecutivos. Um dos professores, ao final de um dos encontros, apresentou ao grupo o seguinte questionamento: *Para fazer cálculos com dízimas*[7]*, é sempre preciso passar para a forma de fração?*

Discutiu-se então que esse questionamento revelava uma *dúvida*, mas também duas *certezas.* A dúvida, que estava explícita, era relativa à possibilidade de se *efetuar cálculos com números racionais representados como dízimas,* isto é, de generalizar de alguma forma os algoritmos usuais das operações para números representados dessa forma. As certezas, implícitas, eram, (i) *que todo número racional admitia duas representações, na forma de fração e na forma de expansão decimal* e (ii) *que na forma de fração os cálculos estavam bem estabelecidos.*

Em relação à dúvida, não havia novidade, ela estava sendo exposta e encarada a partir de pesquisa, reflexão e discussão. A novidade emergiu dos questionamentos que se seguiram e que foram bastante ilustrativos para o estudo: "*De onde vêm essas certezas? Ou seja, elas foram construídas em que etapa da formação de cada um dos professores?".* Essas indagações despertaram uma novidade na abordagem da discussão – *questionar uma certeza.* Ficava assim evidenciada uma nova forma de percepção do conteúdo: não basta *saber*, é necessário *compreender como esse saber se constitui, qual sua natureza e origem,* bem como compreender em que sentido e em que medida esse saber é relevante para a sala de aula.

A resposta ao questionamento também foi reveladora, levando os participantes a reconhecerem que se tratava de uma certeza constituída durante seus próprios estudos *no ensino básico e não na formação universitária.* Associamos essa constatação à indicação da *dupla descontinuidade* identificada por [10] e às suposições destacadas por [1], que identificam um afastamento entre o conteúdo de matemática ensinado na graduação e aquele necessário à prática docente na escola básica.

A forma como a questão foi explorada alterou completamente o cenário da discussão. As articulações exigidas foram ampliadas em alcance e complexidade em relação às realizadas até então. Para investigar as questões propostas (estabelecendo matematicamente a equivalência entre representações fracionárias e decimais para números racionais, bem como as limitações dos algoritmos usuais das operações para números com representação decimal infinita) foi necessário mobilizar conhecimentos de álgebra e de análise, bem como observar e recorrer ao rigor e à consistência formal da Matemática. Em particular, a partir desse momento, os professores participantes passaram a buscar espontaneamente, como referência para a discussão, textos acadêmicos. Dessa forma, evidenciaram o reconhecimento de que esses resultados, ainda que admitissem uma abordagem própria para o ensino básico, exigiam e se estabeleciam sob o rigor da formalização Matemática. Assim se destacam, no contexto da álgebra, a construção dos números racionais por classes de equivalência; e no contexto da análise, os resultados que garantem que um número é racional se e somente se sua representação nos sistema de numeração posicional decimal é finita ou periódica. A discussão alcançou ainda a reflexão sobre grandezas incomensuráveis e sobre a construção dos números reais.

A nova perspectiva adquirida pela discussão entre os professores participantes foi identificada às ideias de Klein sobre o reconhecimento de partes elementares da matemática e sobre a percepção dessas partes de um ponto de vista superior, como aspectos formadores de uma *visão da matemática ampliada e panorâmica*, constituinte do saber pedagógico de conteúdo.

7. Resultados

O estudo confirmou a evidência de aspectos implícitos e explícitos do saber pedagógico de conteúdo e do saber de conteúdo dos professores e ficou clara a mudança de atitude dos participantes, que assumiram, ao longo do estudo, uma postura mais investigativa, manifestando, inclusive, a intenção de estender a vivência de uma prática investigativa para suas salas de aula.

[7] Por dízimas o professor se referia a "dizimas periódicas".

Observamos também que o estudo ofereceu a possibilidade de investigar e explorar, em um processo coletivo, o conhecimento de matemática dos participantes de forma articulada com a sua prática, promovendo uma reconstrução conceitual a partir de um conhecimento anterior.

Com respeito à forma como os questionamentos foram disparados, observou-se que a maior parte das questões emergiu a partir da observação de problemas que os professores resolviam com seus alunos em sala de aula, ou seja, problemas típicos da escola básica. Por um lado, a orientação a partir de problemas próprios do ensino básico revelou que os professores tinham insegurança latente em relação à abordagem formal dos conteúdos matemáticos e que o hábito de refletir sistematicamente a partir de um ponto de vista conceitual era pouco consolidado. Entretanto, por outro lado, essa orientação *estabeleceu para o estudo forte vínculo com a prática*, o que entendemos que foi fundamental para andamento do estudo.

Com atenção às questões de pesquisa, a investigação se estabeleceu a partir de uma análise das impressões reveladas sobre o saber pedagógico de conteúdo dos professores participantes e nas relações e articulações reveladas na discussão sobre o conteúdo. Mais especificamente, em relação ao saber pedagógico de conteúdo, a análise se pautou na identificação: de dúvidas e de certezas; do nível da escolaridade (ensino básico ou formação superior) a que foi atribuída, pelos participantes, a origem do seu saber sobre o conteúdo; e do grau de complexidade das relações, articulações e conexões estabelecidas.

O processo de investigação com base em dúvidas, e também no questionamento de certezas, revelou-se como uma estratégia positiva para o desenvolvimento do saber do professor. Nesse sentido, o estudo apontou que muitas vezes os professores se surpreendiam com a "descoberta" de resultados matemáticos com os quais vinham lidando por anos sem se dar conta explicitamente, como por exemplo: a associação da operação de divisão a situações de medida ou a relação entre equivalência entre frações e a formalização do conceito de número racional por meio de classes de equivalência. Acreditamos que essa seja uma contribuição importante do estudo, tendo forte implicação para a construção do saber pedagógico de conteúdo dos professores e conferindo-lhes autoridade e protagonismo na construção do próprio saber. Acreditamos que essa atitude consciente dos professores pode contribuir para disparar mudanças em suas práticas de ensino e, consequentemente, para enriquecer a aprendizagem de seus alunos – embora o presente estudo não forneça acesso à verificação de tais aspectos. Este pode ser, portanto, um tema para pesquisas futuras.

Cabe destacar também que a investigação revelou aspectos importantes da formação universitária dos professores participantes (embora este não tenha sido um objetivo inicial da pesquisa). Os questionamentos trazidos para a discussão coletiva emergiam, na maior parte dos casos, de problemas da prática de sala de aula (dificuldades de aprendizagem dos alunos, ou dificuldades dos próprios professores em ensinar os conteúdos). A reflexão conceitual sobre esses questionamentos tinha referência em aspectos da própria pratica (experiências anteriores, livros didáticos) ou na experiência dos professores participantes quando alunos do ensino básico. A ligação dessas questões com resultados matemáticos estudados no curso universitário não apenas não era acionada espontaneamente, como frequentemente causava surpresa aos professores participantes. Este resultado indica pouca influência do curso de Licenciatura na prática de sala de aula dos professores – confirmando resultados observados pela pesquisa internacional em Educação Matemática (por exemplo, [1]) e a atualidade da dupla descontinuidade denunciada por Klein há mais de um século – e aponta para a urgência de uma revisão dos modelos adotados para esses cursos no Brasil.

A discussão com o objetivo de reconhecer o que é elementar, não no sentido tradicionalmente estabelecido, como simples ou fácil, mas no sentido de Klein, como partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar o conhecimento matemático, revelou para os participantes uma nova perspectiva para a observação do conhecimento pedagógico do conteúdo. Assim, por exemplo, ensinar a equivalência entre frações e associar a operação de divisão à interpretação como medida assumem novas perspectivas. A investigação sugere que, de fato, a busca por aspectos *elementares* (no sentido de Klein) no conteúdo de matemática do ensino básico determinou um processo de *reconstrução* do *saber pedagógico de conteúdo* dos participantes.

,

> *"Realmente, professora, gosto muito dos nossos encontros! O tempo passa tão depressa!* ***Acrescento vários conhecimentos aos meus e refaço outros!*** *Saio pensando em tantos assuntos, que demoro um tempão para querer ligar o rádio do carro, prefiro ficar refletindo sobre tudo que foi conversado em sala de aula! Abraços, Bianca[8]."* (grifo nosso)

Referências

[1] Ball, D. L. *The Subject Matter Preparation of Prospective Mathematics Teachers: Challenging The Myths.* National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University, 1988. Disponível em: <http://ncrtl.msu.edu/research.htm>. Acessado em: 12 de março de 2014.

[2] Ball, D. L.; Bass, H. *Toward A Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching.* In Davis, B.; Simmt, E. (Eds.), Proceedings of The 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, Edmonton, AB: CMESG/GCEDM, p. 3-14, 2003.

[3] Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. *Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?.* Journal of Teacher Education, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

[4] Even, R.; Ball, D. L. (Eds.) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics – The 15th ICMI Study.* New York, NY: Springer, 2009.

[5] Davis, B. *Is 1 A Prime Number? Developing Teacher Knowledge through Concept Study.* Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM), v. 14, n. 2, p. 86-91, 2008.

[6] Davis, B.; Renert, M. *Mathematics for Teaching as Shared, Dynamic Participation.* For the Learning of Mathematics, v. 29, n. 3, p. 37-43 (Special Issue, guest edited by J. Adler & D. Ball), 2009.

[7] Davis, B. *Concept Studies: Designing settings for Teacher's Disciplinary Knowledge.* Proceedings of the 34^{th} Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Minas Gerais, Brasil, v. 1, p. 63-78, 2010.

[8] Doerr, H.; Lesh, R. (2003). *Designing Research On Teachers' Knowledge Development.* In: Bragg, L.; Campbell, C.; Herbert, G.; Mousley, J. (Eds.), Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity (Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia, Geelong Sydney, MERGA), p. 262-269, 2003.

[9] Klein, F. *Matemática de um Ponto de Vista Superior. Volume I. Parte I Aritmética.* SPM, Lisboa, 2009.

[10] Klein, F. *Matemática de um Ponto de Vista Superior. Volume I. Parte II Álgebra.* SPM, Lisboa, 2010.

[11] Klein, F. *Matemática de um Ponto de Vista Superior. Volume I. Parte III Análise.* SPM, Lisboa, 2011.

[12] International Mathematical Union. *Klein Project.* Disponível em: <http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/projekt/klein/life.html>. Consultado em: 20 de outubro de 2011.

[13] Krauss, S. et al. *Pedagogical Content Knowledge and Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers.* Journal of Educational Psychology, v. 100, n. 3, p. 716-725, 2008.

[8] A professora identificada aqui como Bianca era uma das participantes com maior tempo de experiência profissional. Essa mensagem foi enviada por ela à pesquisadora ao final de um dos encontros. O nome Bianca é fictício.

[14] Shulman, L. *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*. Educational Researcher, v. 15, p. 4-14, 1986.

[15] Shulman, L.*Knowledge and Teaching: Foundations of The New Feform*. Havard Educational Review, 1997, v. 57, p. 1-22, 1987.

[16] Schubring, G. *A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade*. Em: Roque, T.; Giraldo, V. (Eds.), O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014 (a aparecer).

[17] Sztajn, P. *O Que Precisa Saber Um Professor de Matemática? Uma Revisão da Literatura Americana dos Anos 90*. Em: Educação Matemática em Revista, ano 9, n. 11A, Edição Especial, p. 17-28, 2002.

Leticia Rangel
UFRJ
<leticiarangel@ufrj.br>

Victor Giraldo
UFRJ
<victor.giraldo@ufrj.br>

Nelson Maculan
UFRJ
<maculan@cos.ufrj.br>

Recebido: 2014
Publicado: 2014

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.2, n.1, 2014
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2014/pmo22

Relato de uma experiência com o software KTurtle na simulação de problemas envolvendo probabilidade

Leonardo Barichello

Resumo

Este texto relata uma experiência de criação de simulações para problemas envolvendo probabilidades com a ajuda do software KTurtle em uma turma reduzida de alunos de Ensino Médio. O objetivo deste relato é salientar as potencialidades deste software neste contexto específico e para introduzir estudantes ao mundo da programação de computadores e ao pensamento computacional.

Palavras-chave: probabilidade; programação; simulação; KTurtle; Matemática.

Abstract

This paper reports on a simulation experience for problems involving probabilities with the help of KTurtle software in a reduced class of high school students. The purpose of this report is to highlight the potential of this software in this specific context and to introduce students to the world of computer programming and computational thinking.

Keywords: probability; programming; simulation; KTurtle; Mathematics.

1. Introdução

Em 2011, eu era responsável por uma série de aulas opcionais direcionadas a estudantes com interesse em Matemática em uma escola particular no interior do Estado de São Paulo. O número de alunos que frequentava essas aulas oscilava entre 5 e 10 e todos cursavam o primeiro ou segundo anos do Ensino Médio. Em uma dessas aulas, me deparei com uma situação inusitada ao discutir com os alunos o problema de Monty Hall (vide [4]).

Problema de Monty Hall: Em um programa de televisão, o candidato é solicitado a escolher uma entre três portas fechadas. Atrás de uma delas há um prêmio, mais precisamente um carro, e atrás de cada uma das outras duas há um bode. Depois de o candidato escolher a porta que deseja, mas ainda antes de abri-la, o apresentador do programa, que sabe onde estão os bodes, abre uma das portas que não foram escolhidas e mostra que há um bode atrás dela. Então, o apresentador pergunta ao candidato se ele deseja trocar a porta que ele havia escolhido pela outra porta que

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

permanece fechada. Qual deve ser a decisão do candidato visando maximizar sua chance de ganhar o prêmio?

A situação inusitada começou a se configurar quando os alunos, mesmo depois de acompanharem a demonstração formal de que a troca de porta é a melhor decisão, continuaram descrentes da "veracidade prática" da conclusão. No intuito de resolver o impasse, acessei rapidamente a Internet, encontrei um site e simulei algumas jogadas, mostrando que a proporção observada se aproximava daquela indicada pelos cálculos teóricos. Mas nesse ponto eu fui novamente surpreendido: os alunos começaram a questionar a confiabilidade do simulador.

Esse questionamento, que até poderia ser fundamentado em dúvidas quanto a real aleatoriedade do simulador ou a maneira como este conduzia o experimento "por trás" da interface, parecia se basear apenas na impressão pessoal de que a resposta correta deveria ser de que a probabilidade de ganhar não muda ao trocar de porta.

Felizmente, a aula terminou e eu ganhei alguns dias para pensar em como resolver o impasse antes da próxima aula. A solução que encontrei foi desenvolver com eles um simulador para o problema.

2. KTurtle

O software escolhido para isso foi o KTurtle[1] que, segundo os próprios criadores: ,

> tem o objetivo de tornar a programação de computadores o mais fácil e acessível quanto for possível, e portanto pode ser utilizada para ensinar crianças o básico de matemática, geometria e... programação. A linguagem de programação utilizada no KTurtle é vagamente baseada no Logo. (http://edu.kde.org/kturtle, tradução própria)

Como a descrição acima sugere, o software KTurtle é um dos tantos descendentes do software Logo, desenvolvido no final da década de 1960 no MIT com o intuito de apresentar o universo da programação de computadores para estudantes ainda em fase de alfabetização[2].

Além disso, o KTurtle é um software livre e gratuito que já vem instalado por padrão na distribuição oficial Linux do MEC (o Linux Educacional), pode ser instalado em qualquer distribuição Linux a partir de repositórios básicos e pode ser instalado no Windows através do KDE Windows Initiative (http://windows.kde.org/).

Apesar de não tratar diretamente de conteúdos matemáticos, como softwares de Geometria Dinâmica ou de Álgebra Simbólica, tanto o Logo quanto os seus descendentes estão diretamente conectados com essa área do conhecimento por alguns motivos: 1) os comandos mais básicos se referem à movimentação de um objeto na tela (especificamente, uma tartaruga virtual) e essa movimentação depende de parâmetros como distância e direção, 2) as linguagens por trás desses softwares, assim como toda linguagem de programação, suportam o tratamento aritmético de variáveis numéricas e 3) o processo de entendimento dos problemas e programação e elaboração de uma solução se assemelham, em diversos aspectos, com o processo de resolução em problemas de Matemática.

[1] Versão 0.8.1 no sistema operacional Kubuntu11.04. Essa mesma versão roda em Windows com apenas pequenas diferenças no visual da interface.

[2] Ainda hoje o MIT desenvolve iniciativas dessa natureza, sendo que a mais recente é o software Scratch (www.scratch.mit.edu).

Isto posto, coloca-se como objetivo deste texto apresentar e discutir as simulações que podem ser desenvolvidas nesse tipo de software, especificamente no KTurtle, para problemas envolvendo probabilidades. Porém, para atingir esse objetivo, será necessário apresentar o funcionamento geral do software.

Certamente, leitores familiarizados com programação de computadores enxergarão ao final deste texto muito além do que foi escrito, mas esperamos que aqueles que ainda não possuem experiências dessa natureza compreendam as ideias principais e sejam capazes de ir além, se houver interesse.

3. A interface do software

Na figura 1, temos a interface principal do KTurtle. A região central, chamada de Tela, é onde a tartaruga se move e executa as ações programadas pelo usuário. Essas ações são descritas através de comandos que devem ser digitados no Editor (lado esquerdo da tela) e, para executá-las basta clicar no botão Executar mais à esquerda da barra de ferramentas[3]. Na parte direita da tela temos o Inspetor, que traz algumas informações adicionais sobre o código enquanto ele é executado. Na parte superior, na barra de menus há opções básicas como Salvar e Abrir documentos. Duas opções que valem a pena mencionar são: a) “Obter mais exemplos...” (no menu Arquivo), que dá acesso a um banco on-line de códigos que podem ser baixados diretamente no software e b) “Linguagem dos scripts” (no menu Configurações), que permite mudar o idioma dos comandos do software (neste texto usaremos os comandos em Português do Brasil).

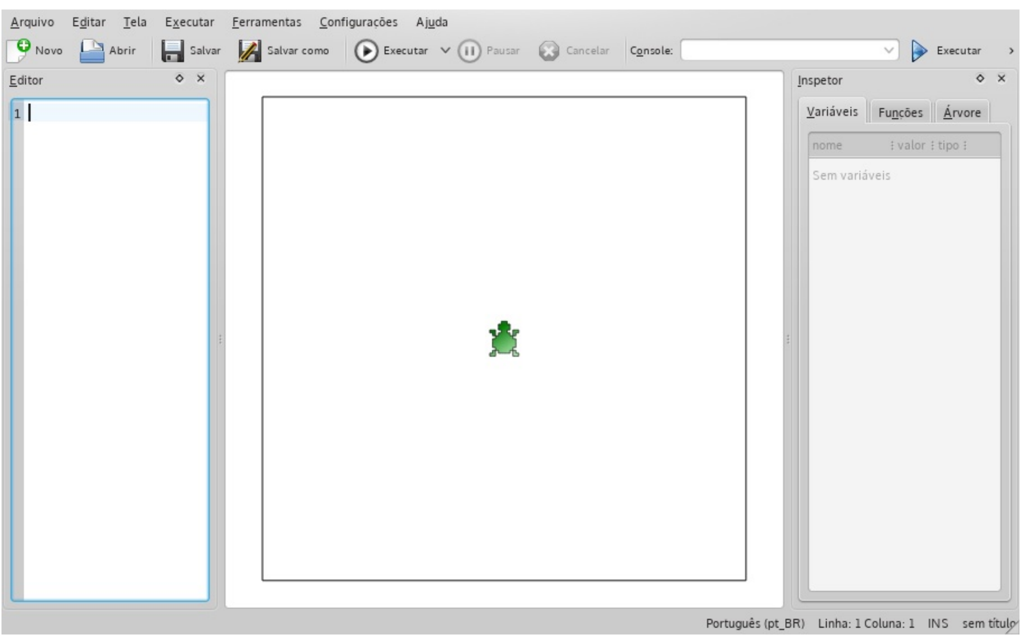


Figura 1: Interface do software KTurtle.

4. Funcionamento geral: comandos e rotinas de programação

[3] O botão Executar à direita da tela executa comandos isolados digitados no Console logo a sua esquerda.

Nessa seção, veremos alguns comandos com o intuito de apresentar o funcionamento geral do KTurtle e as estruturas que serão utilizadas nas simulações.

Os primeiros comandos que se aprende ao utilizar um software como o KTurtle são os de movimentação: `parafrente`, `paratrás`, `paradireita` e `paraesquerda`. Esses comandos exigem um parâmetro numérico ao serem acionados: no caso dos dois primeiros, o parâmetro se refere à distância virtual que a tartaruga deve percorrer e, no caso dos dois últimos, ao ângulo que ela deve girar. Por exemplo, a sequência de comandos a seguir gera o resultado mostrado logo ao lado.

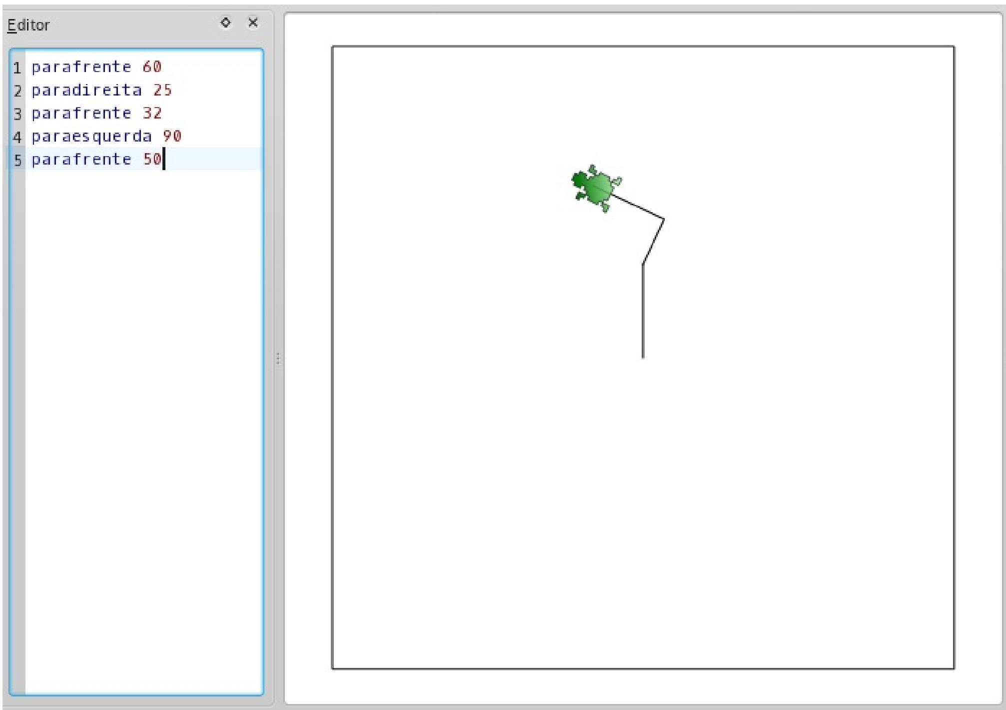


Figura 2: Exemplo de código e o resultado desenhado pela tartaruga.

Ao clicar no botão Executar, a tartaruga realiza toda a sequência de ações determinada pelos comandos digitados no Editor partindo do ponto da Tela em que está no momento. A cada movimento, ela deixa um rastro atrás de si.

Se o usuário clicar novamente no botão Executar, a tartaruga repetirá o mesmo traçado, mas a partir da posição atual. Para "reiniciar" a Tela, você pode usar o comando `apague`.

Com os comandos anteriores já podemos desenhar um quadrado, basta girar a tartaruga 90 graus e deslocá-la a mesma distância quatro vezes. Esse mesmo desenho pode ser feito com um conjunto mais enxuto de comandos, como mostrado abaixo:

```
repita 4 {
parafrente 100
paradireita 90
}
```

Figura 3: Código que também resulta em um quadrado de lado 100 unidades.

Nesse código, utilizamos o comando `repita` que, como o próprio nome sugere, faz com que a tartaruga repita um determinado número de vezes um conjunto de comandos (delimitado por chaves). Trata-se de um comando de repetição, que é uma das estruturas básicas de qualquer linguagem de programação.

Mas podemos ir ainda mais além utilizando uma variável que nos permitirá usar a mesma rotina de comandos para desenhar qualquer polígono regular. Para tanto, cria-se uma variável chamada `$nlados` (toda variável deve ter seu nome iniciado por `$`) e usaremos essa variável para determinar o número de repetições e o ângulo de giro da tartaruga.

```
$nlados = 6
repita $nlados {
parafrente 100
paradireita 360/$nlados
}
```

Figura 4: Código que resulta em um hexágono regular de lado 100 unidades.

Além das adaptações mencionadas anteriormente, foi acrescentada uma linha antes do comando `repita`. Nessa linha, atribuímos um valor à variável `$nlados`. Com isso, quando o comando `repita` for executado, a variável `$nlados` terá valor igual a 6 e a tartaruga desenhará um hexágono.

Como a rotina anterior é bastante versátil, podemos querer aproveitá-la em várias partes de uma mesma sequência de comandos. Para isso, podemos fazer a tartaruga memorizar esse conjunto de comandos, atribuindo um nome a ele para que possamos pedir a ela que os execute sempre que quisermos. Isso pode ser feito graças ao comando `aprenda`, da seguinte maneira:

```
aprenda poligonoregular {
repita $nlados {
parafrente 100
paradireita 360/$nlados
}
}
```

Figura 5: Um exemplo com o comando `aprenda`.

Na primeira linha do código anterior, estamos dizendo para a tartaruga "aprender" os comandos que aparecem logo em seguida (entre chaves) e executá-los sempre que digitarmos o comando `poligonoregular`. O que foi feito é equivalente à criação de uma função em linguagens de programação convencionais. O polígono resultante dependerá do valor da variável `$nlados`.

Se executarmos apenas os comandos anteriores, a tartaruga não realizará ação alguma na tela, apenas aprenderá o que foi descrito. Para que ela execute-os é necessário primeiramente definir o valor da variável e depois chamar a função criada.

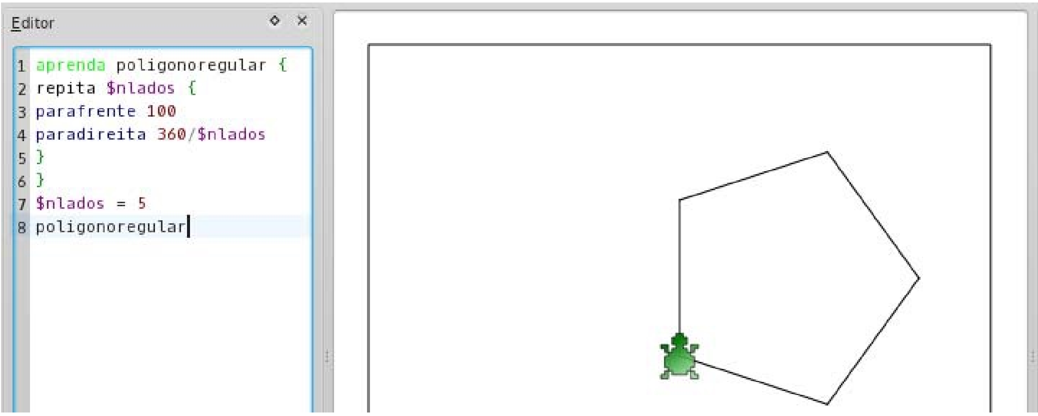


Figura 6: Resultado da função poligonoregular ao ser acionada com a variável `$nlados` igual a 5.

5. KTurtle e a probabilidade

A chave para criar simulações envolvendo probabilidade no KTurtle é o comando `aleatório` que gera um número aleatório[4] com 5 ordens decimais seguindo uma distribuição de probabilidades homogênea no intervalo dado (maior do que 1 e menor do 10, no exemplo abaixo).

Esse número pode ser armazenado em uma variável (`$numerosorteado`, no exemplo anterior) e depois mostrado na tela com o comando `mostre`.

```
$numerosorteado = aleatório 1, 10
mostre $numerosorteado
```

Figura 7: Rotina simples com o comando `aleatório`.

A partir desse comando, é possível criar códigos que simulem o lançamento de uma moeda ou de um dado de 6 faces e então usar esses elementos para construir simulações de situações mais complexas, como as que discutiremos adiante.

6. Lançamentos de moeda e de dado

Comecemos com um código que simula o lançamento de uma moeda 10.000 vezes[5] e depois mostre na tela a quantidade de caras e de coroas obtidas.

[4] Na verdade, o número gerado por esse comando é pseudo-aleatório, mas foge ao escopo deste artigo discutir essa diferença.

[5] Conta-se que um matemático feito prisioneiro de guerra na II Guerra Mundial realizou esse experimento enquanto estava preso obtendo como resultado 5067 ocorrências de uma face e 4933 da outra.

```
1 $ncaras = 0
2 $ncoroas = 0
3 repita 10000 {
4 $n = arredonda (aleatório 0, 1)
5 se $n==1 {
6     $ncaras = $ncaras+1
7     }
8 senão {
9     $ncoroas = $ncoroas+1
10    }
11 }
12 mostre "Sairam " + $ncaras + " caras e " + $ncoroas + " coroas"
```

Figura 8: Lançamento de uma moeda 10000 vezes.

Vamos analisar linha a linha deste código, pois sua estrutura irá se repetir nas simulações seguintes.

Nas duas primeiras linhas foram criadas variáveis que servirão para contar o número de ocorrências de cada face da moeda. Por isso ambas começam com valor igual a 0.

A terceira linha não traz novidade, mas a quarta usa simultaneamente o comando `aleatório` e o comando `arredonda`. O uso de parênteses não é necessário, mas evidencia a interpretação dessa linha: primeiro será gerado um número aleatório entre 0 e 1 e depois esse valor será arredondado (resultando em 0 ou 1) e armazenado na variável `$n`.

Da linha 5 até a 10 foi utilizado o comando `se` (e seu o complemento `senão`). Esse comando avalia se uma condição (`$n==1`) é verdadeira e, caso seja, executa o comando seguinte (linha 6).

Sobre a condição, note que foi utilizado um "duplo igual". Isso é necessário porque o "igual simples" significa atribuição de valor a uma variável. Também é permitido utilizar os símbolos $>, <, >=, <=$ e $!=$ que significam, respectivamente, maior, menor, maior ou igual que, menor ou igual que e diferente.

O efeito do comando da linha 6 é armazenar na variável `$ncaras` o seu próprio conteúdo acrescido de uma unidade, ou seja, estamos usando esse comando para contar quantas vezes a condição do comando se foi satisfeita, o que pode ser interpretado como "saiu cara no lançamento da moeda".

A linha 8 traz o comando `senão`, que complementa o comando `se`, ou seja, o KTurtle executará o comando da linha 10 apenas se a condição da linha 5 não foi satisfeita, que pode ser interpretado como "saiu coroa no lançamento da moeda".

A chave da linha 11 encerra o conjunto de comandos que serão repetidos 10.000 vezes e o comando da linha 12 apenas escreve uma mensagem na tela com as informações coletadas ao final das repetições.

Antes que você execute esse código, uma recomendação: devido ao grande número de repetições, sugerimos que você execute-os na maior velocidade possível. Para isso, clique na setinha para baixo logo ao lado do botão Executar e selecione a opção "Velocidade máxima (sem realce e inspetor)". Caso você já tenha iniciado a execução do código, o botão Cancelar interrompe a execução do código.

7. O problema do controle de natalidade

Esse problema foi extraído da apostila utilizada no Programa de Iniciação Científica Júnior da OBMEP [3] e foi escolhido para compor este texto pela simplicidade na montagem da simulação e pelo desafio da questão proposta. ,

> A China tem um sério problema de controle de população. Várias políticas foram propostas (e algumas colocadas em efeito) visando proibir as famílias de terem mais de um filho. Algumas dessas políticas, no entanto, tiveram consequências trágicas. Por exemplo, muitas famílias de camponeses abandonaram suas filhas recém-nascidas, para terem uma outra chance de ter um filho do sexo masculino. Por essa razão, leis menos restritivas foram consideradas. Uma das leis propostas foi a de que as famílias teriam o direito a um segundo (e último) filho, caso o primeiro fosse do sexo feminino. Deseja-se saber que consequências isso traria para a composição da população, a longo prazo. Haveria uma maior proporção de mulheres? De homens?
>
> **(a)** Com auxílio de uma moeda, simule a prole de um conjunto de 10 famílias (jogue a moeda; se obtiver cara, é um menino, e a família para por aí; se der coroa, é uma menina; jogue a moeda mais uma vez e veja se o segundo filho é menino ou menina).
>
> **(b)** Reúna os resultados obtidos pelos integrantes do grupo e produza estatísticas mostrando o número médio de crianças por família, a proporção de meninos e meninas na população e a proporção de famílias que têm um filho homem. O que esses resultados sugerem?
>
> **(c)** Qual é a probabilidade de que uma família tenha um filho do sexo masculino? Qual o número médio de filhos por família? Dentre todas as crianças nascidas, qual é a proporção de meninos e meninas?

O próprio enunciado sugere que os estudantes façam algumas simulações e depois reúnam seus resultados, com o intuito de aumentar a quantidade de casos analisados, para fazer uma análise inicial do problema e só depois calculem as probabilidades teóricas envolvidas.

Uma análise inicial pode nos levar à conclusão de que o número de meninas será maior, pois uma família que tenha uma filha do sexo feminino pode querer ter um segundo filho que, por sua vez, pode também ser do sexo feminino. Por outro lado, essa política é adotada há certo tempo na China e não se fala em problemas na proporção de homens e mulheres no país. Então, qual será a conclusão correta?

Os cálculos teóricos das probabilidades envolvidas podem ser encontrados nas páginas finais de [4]. Vamos discutir aqui como fazer a simulação deste problema no KTurtle.

Antes de escrever a rotina de comandos, vamos tentar descrever a sua estrutura:

1. Cada repetição deverá simular uma família. Digamos que 1.000 no total;

2. Para cada família será necessário fazer uma jogada de moeda para definir o sexo do primeiro filho, se for masculino a família terminou, senão, é necessário um segundo lançamento para definir o sexo do segundo filho. Como os casos masculino e feminino devem ser tratados de maneira diferente, usaremos o comando `se…senão`;

3. Como o nosso interesse é na proporção de homens e mulheres no país, utilizaremos duas variáveis para contar o número de bebês de cada sexo.

Com isso, um possível código para realizar a simulação é o que segue.

```
1 vápara 0, 0
2 $nHomens = 0
3 $nMulheres = 0
4 repita 1000 {
5 $lancamento = arredonda (aleatório 0,1)
6 se ($lancamento==1) {
7   mostre "H"
8   $nHomens = $nHomens+1
9 }
10 senão {
11   mostre "M"
12   $nMulheres = $nMulheres+1
13   $lancamento = arredonda (aleatório 0,1)
14   se ($lancamento==1) { #sim
15     mostre "   H"
16    $nHomens = $nHomens+1
17   }
18   senão { #mulher
19     mostre "    M"
20     $nMulheres = $nMulheres+1
21   }
22 }
23 paratrás 10
24 }
25 centralize
26 mostre $nHomens+  " homens e " + $nMulheres + " mulheres"
```

Figura 9: Código para simular o problema do controle de natalidade.

A estrutura geral do código é muito próxima da estrutura utilizada no lançamento da moeda, mas com alterações adequando-o ao problema proposto.

O primeiro comando posiciona a tartaruga no canto superior esquerdo da tela. O comando `se` da linha 6 (juntamente com o `senão` da linha 10) é o que analisa o sexo do primeiro filho, enquanto que o da linha 14 (juntamente com o `senão` da linha 18) analisa o do segundo filho, quando ele ocorrer.

As linhas 7, 11, 15 e 19 escrevem na tela o sexo de cada filho. Nas duas últimas foram incluídos alguns espaços em branco antes da letra H ou M para que o texto não ficasse sobreposto ao do primeiro filho. Na linha 23, o comando `paratrás` serve apenas para deslocar a tartaruga para trás ao final de cada família, também para que não haja sobreposição de texto.

Por fim, os comandos das duas últimas linhas servem para centralizar a tartaruga na tela (devido ao número de famílias simuladas ela deve ficar fora da tela) e mostrar os resultados obtidos.

Com o código pronto, é possível fazer diversas simulações que permitam uma análise baseada em um volume considerável de dados. No meu caso, já na primeira simulação, os números sugerem que a proporção entre o número de homens e de mulheres deve ficar próxima de 1 (750 homens e 753 mulheres), ou seja, o equilíbrio entre os sexos não deve ser afetado pela política proposta pelo governo.

O que se espera, e que foi observado com os meus alunos, é que essa análise sirva como abordagem inicial ao problema proposto e reforce a credibilidade do resultado que o professor pode obter depois usando o conceito de probabilidade.

8. O desenvolvimento das atividades em sala de aula

Como mencionado na Introdução deste texto, as aulas em que utilizei o KTurtle eram opcionais e destinadas a alunos do Ensino Médio que se interessavam por Matemática. Essas aulas eram oferecidas semanalmente em contraturno e tinham duração de 1h30min.

Na aula seguinte ao acontecimento relatado na Introdução, comecei o trabalho com os alunos tendo o objetivo de fazer com que eles desenvolvessem um simulador para a discussão do problema de Monty Hall. Como a escola não dispunha de laboratório de informática, alguns alunos traziam seus notebooks, de modo que era possível trabalharem, no máximo, em duplas.

Bastou uma única aula para que os comandos básicos de movimentação, repetição, condicional e de criação de funções e variáveis fossem assimilados. Nessa aula, propus problemas simples como o desenho de polígonos regulares e a criação de ladrilhos com estes.

Na aula seguinte, propus algumas atividades ainda explorando essas estruturas básicas de programação, mas fazendo com os alunos utilizassem mais alguns comandos diretamente relacionados com a Matemática, como as funções trigonométricas e as suas inversas, com o intuito de calcular distâncias e posições para o bom encaixe de polígonos, por exemplo.

Na terceira aula, discutimos e implementamos algoritmos numéricos, como a conversão de um número na base decimal para a base 2 e o cálculo do MDC entre dois números dados, ainda com o objetivo de fixar as estruturas básicas de programação.

Na aula seguinte, retomamos o problema de Monty Hall e começamos a montar o simulador. Essa parte da atividade ocupou duas aulas duplas, porém, o código resultante não realizava apenas as simulações, mas também exibia desenhos ilustrando os resultados (portas, bodes e prêmio) e registrava os resultados obtidos.

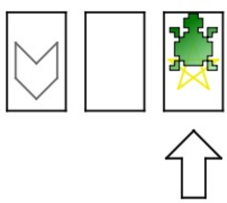


Figura 10: Resultado de uma simulação do problema de Monty Hall com as 3 portas, o prêmio (a estrela) e o bode (à esquerda).

Por causa da extensão da rotina, decidiu-se não inseri-la no artigo, mas ela pode ser acessada em http://bit.ly/1ASV2ZH e executada no software KTurtle para que se visualize os resultados. Por se tratar de um experimento aleatório, os resultados obtidos pelos alunos variaram, mas à medida que aumentávamos o número de repetições, a razão entre o número de vitórias dado que o participante trocou de porta e o número de vitórias dado que não houve troca tendeu a 2:1 como era esperado (a solução matemática do problema pode ser lida em [4]).

9. Conclusão

Após essas aulas, os alunos pediram explicitamente mais atividades envolvendo o KTurtle. Então, além do problema apresentado neste texto, ainda desenvolvemos simulações para o problema do jogo interrompido (http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1062) e para o jogo das amebas (http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1017), evidenciando o interesse despertado nos estudantes mesmo com as dificuldades iniciais referentes à aprendizagem da linguagem de programação.

Apesar de se tratar de um grupo de alunos com interesse declarado por Matemática, o envolvimento destes nas atividades propostas sugere que essa abordagem pode ser bastante motivadora para os estudantes e frutífera do ponto de vista educacional.

Acredito que a abordagem utilizada traz benefícios em duas frentes distintas: por um lado, motiva o estudo de probabilidade com simulações concretas para problemas compatíveis com o currículo regular, por outro lado, introduz um novo conjunto de habilidades relacionadas a programação de computadores a partir de tópicos presentes no currículo regular de Matemática.

O objetivo deste texto era justamente oferecer um possível caminho para essa abordagem sem exigir um grande domínio dos aspectos computacionais por parte do professor. Por isso demos tanta ênfase aos comandos e rotinas ao longo do texto, deixando os aspectos matemáticos mais formais nas referências para os leitores interessados.

Tanto do ponto de vista de incorporação de novas tecnologias na sala de aula quanto como da introdução dos estudantes ao universo da programação de computadores, que se configura hoje como uma habilidade onipresente no universo acadêmico e no mercado de trabalho ([2], [5]), acredito que as ideias apresentadas neste relato possam ser úteis pelo menos como um ponto de partida.

Referências

[1] Breijs, C. KTurtle. <http://edu.kde.org/kturtle>. Acessado em: 25 de julho de 2013.

[2] Brennan, K.; Resnick, M. *Using Artifact Based Interviews To Study The Development of Computational Thinking in Interactive Media Design*. Paper presented at annual American Educational Research Association meeting, Vancouver, BC, Canada, 2012.

[3] Carvalho, P. C. P. *Métodos de Contagem e Probabilidade*. OBMEP, IMPA, 2009.

[4] Morgado, A. C. *Os Dois Bodes*. Revista do Professor de Matemática, v. 33, 1997.

[5] Wing, J. M. *Computational Thinking*. Communications of the ACM, v. 49, n. 3, 2006.

Leonardo Barichello
Colégio Villa Lobos de Amparo e Colégio Anglo de Bragança Paulista
<barichello@gmail.com>

Recebido: 2014
Publicado: 2014

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.2, n.1, 2014
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2014/pmo23

Geometria fractal no ensino médio: teoria e prática

Ivana Côrtes Gladson Antunes

Resumo

Neste artigo apresenta-se uma proposta de atividade tendo como objetivo utilizar a Geometria Fractal no Ensino Médio regular, onde se pode trabalhar alguns conceitos matemáticos em suas diversas áreas, tais como álgebra, cálculo, geometria plana e espacial, progressões e logaritmo de maneira diferente da convencional. Dessa forma, pretende-se reforçar a ideia atual da necessidade de experimentar a Matemática por caminhos diferentes para além da resolução de exercícios repetitivos e sem nenhum sentido lógico para o aluno. Neste sentido, a Geometria Fractal permite explorar diversos conceitos matemáticos de uma maneira mais dinâmica e criativa, por meio da construção de modelos e tabelas com os resultados das iterações, chegando a uma dedução geral do que está ocorrendo. Essa proposta é derivada de um Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT, polo UNIRIO.

Palavras-chave: Geometria Fractal; fractal; inovação.

Abstract

In this article we present a proposal for an activity with the objective of using Fractal Geometry in regular secondary education, where we can work some mathematical concepts in its various areas, such as algebra, calculus, flat and spatial geometry, progressions and logarithm in a different way of the conventional. In this way, we intend to reinforce the current idea of the need to experiment with mathematics in different ways beyond the resolution of repetitive exercises and without any logical sense for the student. In this sense, Fractal Geometry allows us to explore several mathematical concepts in a more dynamic and creative way, through the construction of models and tables with the results of the iterations, arriving at a general deduction of what is taking place. This proposal is derived from a dissertation of the PROFMAT Mathematics Graduate Program, UNIRIO.

Keywords: Fractal Geometry; fractal; innovation.

1. Introdução

No início de dezembro de 2013, foi divulgado[1] mais um *ranking* da avaliação internacional do PISA (Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes) e ficamos na 58ª posição, em Matemática,

[1]Fonte: <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2013/12> em 23 de dezembro de 2013.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

entre as 65 nações que participam da avaliação, obtendo um total de 391 pontos. Apresentamos uma "tímida" evolução, pois em 2009 conseguimos 386 pontos. Esta prova é realizada por estudantes de 15 anos de idade matriculados na rede pública ou privada de ensino a partir do 7º ano do Ensino Fundamental.

Este resultado vem ao encontro com a nossa opinião de que no Brasil, principalmente na educação básica, boa parte dos alunos apresentam grandes dificuldades em Matemática, muito em consequência do desinteresse pelo ensino da disciplina e a não associação do que aprende em sala de aula com a aplicação no cotidiano. Sabemos que, hoje, a grande maioria dos livros didáticos e dos professores tentam trabalhar com alguma contextualização, mas ainda não é suficiente para gerar um grande interesse nos alunos, não somente pelo estudo da Matemática, mas pelo conhecimento de forma geral.

Este trabalho surgiu a partir da intenção de propor aulas onde o aluno possa descobrir e fazer relações entre o que visualiza e o que estuda, tentando tornar o conteúdo trabalhado em sala de aula favorável a aprendizagem significativa do aluno. Segundo [5]: ,

> *A exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume; promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos. Propor uma aula com situações novas, onde o educando possa descobrir e fazer relações entre o que visualiza e o que estuda, torna o acontecimento em sala de aula favorável a aprendizagem. Esta abordagem possibilitará ao educando a visualização do conteúdo trabalhado, não ficando apenas na formalidade que é própria da disciplina de matemática. Além do campo extenso de aplicações dos fractais é necessário que o professor perceba a potencialidade que existe nesta área da geometria, podendo assim trabalhar conceitos de simetria, relacionando arte com matemática.* [5]

Será apresentado um breve resumo sobre o surgimento e as aplicações nas ciências e tecnologias da Geometria Fractal, mostrando que existem diversas áreas que utilizam esta geometria para a solução de seus problemas, tentando dessa forma despertar não só no aluno, mas também no nosso colega professor, o interesse em aplicar esses conhecimentos na sua sala de aula, tornando as mesmas mais dinâmicas e atraentes.

As atividades que serão apresentadas foram aplicadas para alunos da Escola SESC de Ensino Médio[2] durante a realização do Projeto de Iniciação Científica da instituição, que tem por objetivo discutir e produzir saberes a partir de um trabalho de pesquisa no qual orientadores de todas as áreas conduzem grupos de alunos no processo de investigação.

Serão analisados o comportamento de dois fractais clássicos: a **ilha de Von Koch** que tem

[2]Localizada no Rio de Janeiro, é uma escola-residência, inteiramente gratuita, que atende a alunos de todo o país, com idades entre 13 e 18 anos. Inaugurada em 2008, hoje possui aproximadamente 500 estudantes nas três séries do Ensino Médio, que moram nas vilas residenciais, junto com professores e gestores. Mais informações, <http://escolasesc.edt.com.br>.

perímetro infinito e área finita e o **triângulo de Sierpinski** que possui perímetro infinito e área zero. Ao final do artigo é apresentado um breve tutorial do software gratuito "Xaos" versão 3.5, esse programa pode ser utilizado para realizar com os alunos algumas atividades animadas e interativas com fractais.

2. Fractais: origem e aplicações

A Geometria Euclidiana é a geometria que normalmente aprendemos nas escolas. Seus polígonos e poliedros regulares fazem parte da história da Matemática, pois serviram de base para a compreensão da Natureza através da ciência. As criações humanas servem-se majoritariamente das formas geométricas euclidianas para as suas construções, como por exemplo, edifícios, objetos industriais e do cotidiano. Em Batanete encontramos: ,

> *Por tradição conta-se que há mais de dois mil anos, Euclides enquanto caminhava pela praia, notou que a areia, vista como um todo, se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, embora fosse composta por pequenas partes visíveis. Desde então Euclides tentou provar, matematicamente, que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas as formas geométricas simples. Em alguns casos, continua a fazer sentido sua utilização, como por exemplo, o uso da esfera como aproximação do modelo da forma da Terra, da elipse como modelo das órbitas celestes e da parábola como trajetória dos projéteis.* [2]

Euclides concentrou-se sobretudo nas formas, deixando de lado, um elemento importantíssimo neste tipo de análise, a dimensão. Existe uma infinidade de fenômenos na natureza que não podem ser descritos por essa geometria. A maior parte das formas apresentadas pela Natureza, não são regulares e nem suaves, pelo contrário, são extremamente complexas, recortadas e irregulares. É o caso de grande parte das árvores e plantas, das rochas e das nuvens.

Como disse Mandelbrot: ,

> *Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, tronco de árvores não são suaves e nem o relâmpago viaja em linha reta.* [4]

Na segunda metade do século XIX e na primeira metade do século XX, alguns matemáticos descreveram objetos que ficaram conhecidos como "monstros matemáticos", como por exemplo: a curva de Peano,   triângulo de Sierpinski, a curva de Von Koch, o conjunto de Julia, o conjunto de Cantor, entre outros.

Benoit Mandelbrot, um matemático que possuia uma visão geométrica aguçada, não via com bons olhos a crescente algebrização da Matemática praticada por Bourbaki, na primeira metade do século XX, na França. Esse foi um dos motivos que levou Mandelbrot a se mudar para o Estados Unidos, em 1948, para trabalhar no Instituto de Pesquisa James Watson da IBM.

Mandelbrot trabalhou em várias pesquisas e uma delas começou pela indagação: "Quanto mede o litoral da Grã-Bretanha?" A resposta encontrada por Mandelbrot, segundo Barbosa, foi: ,

> *A resposta possível variará conforme a escala de medição. Baías e penínsulas aparecerão ou não, dependendo da escala adotada. Sabe-se, por exemplo, que em um*

> *documento dos dois países vizinhos, a fronteira de Espanha e Portugal difere em cerca de 20%, o mesmo acontecendo por exemplo com a fronteira da Holanda e da Bélgica. Claro que ao efetuar as medidas cada país empregou instrumentos com unidade de escalas diferentes.* [1]

Com isso, ele quis dizer que para medir o tamanho de um litoral ou limite territorial, é preciso, antes de tudo, definir a escala. Matematicamente falando a escala para medir com exatidão uma extensão territorial deveria tender a zero, o que seria inviável, pois faria a extensão tender para infinito.

Embora os "monstros matemáticos" existissem há muito tempo, ainda ninguém lhes tinha atribuído um nome. Foi então que em 1978, Benoit Mandelbrot, ao preparar a sua primeira obra sobre os ditos "monstros", sentiu necessidade de lhes atribuir um nome, ficando então conhecido como "o pai dos fractais". Buscando uma definição para esta nova geometria podemos citar Oliveira: ,

> *A geometria fractal permite a representação de certos elementos naturais que possuem características irregulares. Com a geometria fractal torna-se possível a criação de modelos mais próximos da realidade. A geometria fractal fornece algoritmos para construção de formas idênticas às naturais e também ferramentas para o estudo das mesmas. Essa geometria vem se consolidando nos últimos anos com o desenvolvimento da tecnologia computacional e com auxílio de novas teorias nas áreas da física, biologia, astronomia e matemática.* [6]


(a) Costa da Noruega


(b) Carvalho da África


(c) Relâmpago

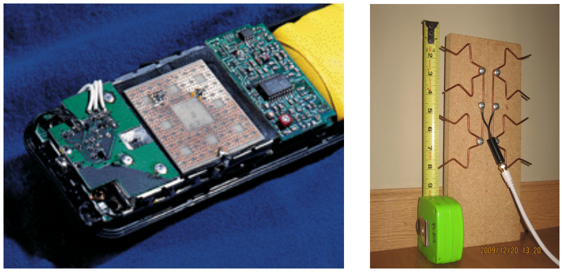
Figura 1: Fractais na natureza.

(Fonte: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>.)

A definição mais simples é que fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo (iteração/recursão), apresentando **autossimilaridade, dimensão fractal e complexidade infinita**.

Os fractais vêm sendo aplicados nas mais diversas áreas das ciências e tecnologias. No desenvolvimento de tecnologias podemos citar a utilização de antenas fractais empregadas na telefonia celular, na transmissão *wireless*, na TV digital (HDTV), entre outras, conforme Figuras (2) (a) e (2) (b). Na agricultura, a análise de solos, nebulosidade da área, movimentos dos rios e estrutura de vários cristais podem ser modelados por fractais.

Na computação gráfica, a geometria fractal auxilia na criação de cenários naturais, como rios, conjuntos montanhosos e plantas, conforme Figuras (3) (a) e (3) (b). Tal teoria é útil também na

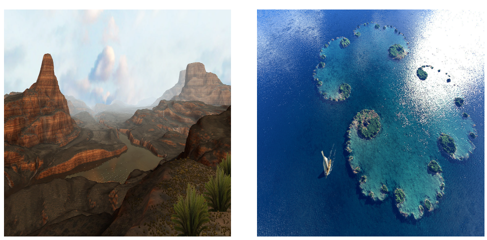


(a) Telefone celular (b) Antena caseira

Figura 2: Telefone celular e antena caseira.

(Fontes:<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico9.php> e <https://www.pinterest.com/charley0810/diy-tv-antenna/)>.)

geração de efeitos especiais, como explosões e lavas de vulcões. Podemos dizer que a geometria fractal revolucionou a computação gráfica e, por outro lado, o advento do recurso computacional possibilitou o aprofundamento nos estudos dos fractais. Há aplicações também na economia, no



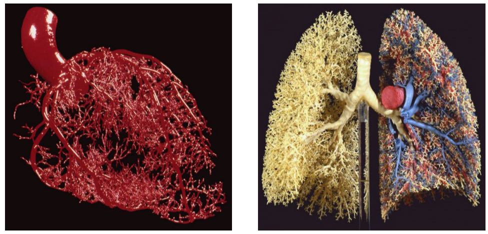
(a) *Grand Canyon* (b) *Julia Island*

Figura 3: Imagens geradas por Computação Gráfica.

(Fontes: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Julia_island2.jpg> e <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Julia_island2.jpg)>.)

estudo da variação de preços das ações nas bolsas de valores. Na Astronomia, para a previsão de trajetórias futuras dos planetas. Em Mineralogia, para a medição da densidade dos minerais, evolução dos terrenos, descontinuidade das rochas. Na Geografia, a geometria fractal pode ser usada para a medição do comprimento da costa continental e na indústria, para a detecção automática de falhas têxteis.

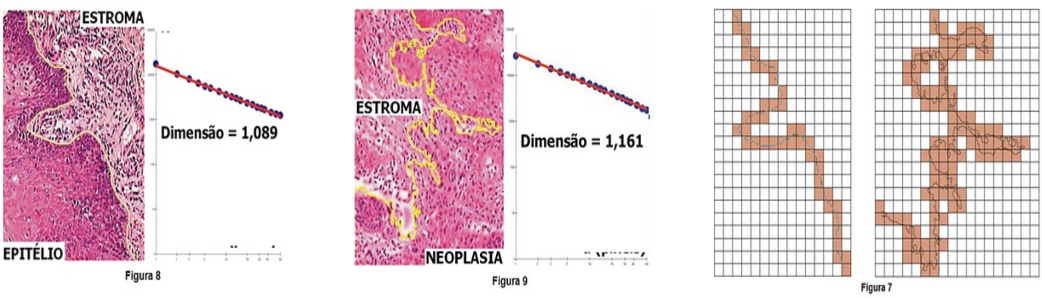
Nas ciências médicas e biológicas, encontramos diversas estruturas que podem ser modeladas através da geometria fractal. Como exemplo, podemos citar as ramificações pulmonares, veias e artérias, cujos padrões podem ser bem representados por fractais, conforme as Figuras (4) (a) e (4) (b). Um ritmo cardíaco, apesar de aparentemente constante, tem variações aleatórias, porém, identificam-se padrões fractais nessas variações em diferentes escalas. Na Biologia, algumas plantas e micro-organismos apresentam estrutura fractal. É o caso, por exemplo da samambaia.



(a) Sistema arterial do coração (b) Pulmão

Figura 4: Fractais no corpo humano.
(Fonte: <parquedaciencia.blogspot.com.br/2011_09_01_archive.html>.)

A análise de imagens no diagnóstico precoce de câncer pode ser feita através de modelagem utilizando-se os fractais, conforme Figuras (5) (a), (5) (b) e (5) (c).



(a) Boca saudável (b) Boca com neoplasia (c) Dimensão das caixas

Figura 5: Diagnóstico de câncer bucal usando dimensão fractal.
(Fonte: <parquedaciencia.blogspot.com.br/2011_09_01_archive.html>.)

3. Atividades didáticas propostas

A geometria fractal possui um vasto campo de aplicação dos conceitos matemáticos em suas diversas áreas, tais como álgebra, cálculo, geometria plana e espacial, progressões e logaritmo. Conforme será visto a seguir, é possível adequarmos alguns dos conceitos presentes na geometria fractal aos conteúdos curriculares.

As atividades descritas abaixo foram realizadas durante o Programa de Iniciação Científica da Escola SESC de Ensino Médio. No ano de 2013, o projeto foi desenvolvido com um grupo de três alunos, sendo dois do segundo e um do primeiro ano do ensino médio no período de Maio a Outubro, com culminância na semana de 28 de outubro a 1 de novembro de 2013, período em que ocorre a semana da Escola aberta, onde a instituição apresenta os trabalhos realizados pelos seus alunos no decorrer do ano para toda a comunidade escolar e instituições convidadas.

3.1. Construção do triângulo de Sierpinski

A atividade apresentada a seguir foi adaptada a partir do material disponível no endereço <http://fractalfoundation.org/resources/fractivities/sierpinski-triangle> e acessado em 10 de abril de 2013. O objetivo desta atividade é ilustrar um dos princípios fundamentais dos fractais, a repetição de um mesmo padrão em diferentes escalas, e como essa forma complexa pode ser gerada por simples repetições.

- Material necessário: Papel A4, lápis, lápis de cor, régua, compasso e tesoura.
- As competências trabalhadas nesta atividade foram:

  Semelhança de figuras;

  Progressão Geométrica (PG);

  Comprimento, Perímetro e Área do Triângulo de Sierpinski;

  Conceito de Limite;

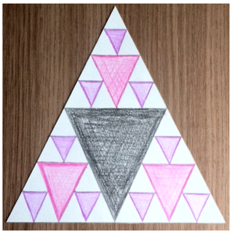
  Limite de uma PG.
- Tempo Estimado - 6 aulas de 50 minutos

  2 aulas de 50 minutos para a teoria de Progressão Geométrica e Soma da PG (finita e infinita);

  2 aulas de 50 minutos para construção de cada triângulo e montagem do tapete;

  2 aulas de 50 minutos para análise e conclusões à respeito do comportamento do perímetro e da área do triângulo de Sierpinski.
- Construção

  A atividade consiste em desenhar usando régua e compasso um triângulo equilátero e marcar em cada lado seu ponto médio, ligando-os, com isso formando quatro novos triângulos. Nos 3 triângulos virados para cima, repetir o procedimento do ponto médio e assim sucessivamente, colorindo todos os triângulos invertidos. Após terem realizado a tarefa, monta-se um triângulo maior, usando-se os desenhos feitos por eles.



(a) Triângulo individual

(b) Tapete de Sierpinski

Figura 6: Construção do Triângulo de Sierpinski até a $3^{\underline{a}}$ iteração pelos alunos da ESEM.

- ANÁLISE Observando a Figura (6) (a), começamos a analisar o comportamento da área e do perímetro do triângulo de Sierpinski. Partimos de um triângulo equilátero (figura inicial), depois removemos o triângulo equilátero definido pelos pontos médios dos lados e assim sucessivamente. O triângulo de Sierpinski é obtido como limite desse processo recursivo que está descrito, geometricamente, na Figura (7). Na $1^{\underline{a}}$ iteração da construção, determinamos os pontos médios de

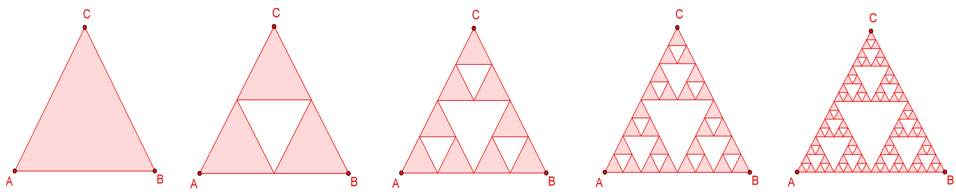


Figura 7: Iterações no triângulo de Sierpinski até a $4^{\underline{a}}$ iteração.

cada um dos lados do triângulo, unimos esses pontos médios (2 a 2) por segmentos e consideramos os 3 segmentos resultantes, retirando o triângulo central. Obtemos, portanto, a segunda figura do processo de construção. Repetindo indefinidamente o processo, obtemos o triângulo de Sierpinski no limite deste processo recursivo.

Observando a Figura (7), podemos verificar, que a cada iteração, a área do triângulo de Sierpinski, é igual à área do triângulo anterior multiplicada pelo fator $\frac{3}{4}$ e que o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo anterior multiplicado pelo fator $\frac{3}{2} = \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right)$. Analisemos este fato através da tabela (8):

Figura	Área	Perímetro	Área Esburacada
Fig. Inicial	A	P	0
1ª iteração	$A_1 = \frac{3}{4} \cdot A$	$P_1 = \frac{3}{2} \cdot P$	$B_1 = \frac{1}{4} \cdot A$
2ª iteração	$A_2 = \frac{3}{4} \cdot A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A$	$P_2 = \frac{3}{2} \cdot P_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot P$	$B_2 = \frac{1}{4} \cdot \left[A + \frac{3}{4} \cdot A\right]$
3ª interação	$A_3 = \frac{3}{4} \cdot A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot A$	$P_3 = \frac{3}{2} \cdot P_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot P$	$B_3 = \frac{1}{4} \cdot A \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16}\right]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
nª iteração	$A_n = \frac{3}{4} \cdot A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$	$P_n = \frac{3}{2} \cdot P_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot P$	$B_n = \frac{1}{4} \cdot A \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]$

Figura 8: Área, Perímetro e Área Esburacada do triângulo de Sierpinski.

Analisando, a área do triângulo, temos uma PG de razão $\frac{3}{4}$ ($|q| < 1$) e $1^{\underline{o}}$ termo positivo (pois A é a área da figura inicial). É evidente que esta sucessão é monótona decrescente e a medida que o número de iterações se aproxima do infinito, ou seja, quando n tende para infinito, A_n tende a zero, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} A_n = 0.$$

Isto significa que a área do triângulo de Sierpinski é igual a zero. Outra maneira de verificarmos este fato é analisarmos a área "esburacada", dada por:

$$B_n = \frac{1}{4} \cdot A \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{4} \cdot A \cdot S_n,$$

em que S_n é a soma dos n primeiros termos de uma PG, cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e a razão é $q = \frac{3}{4}$. Sabemos que para uma PG de razão $|q| < 1$, a sequencia de números reais é convergente e seu limite é:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

Portanto, a área dos buracos do triângulo, que denotaremos por $B_{Sierpinski}$, é tal que:

$$B_{Sierpinski} = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\cdot A \cdot S_n\right) = \frac{1}{4}\cdot A\cdot 4 = A.$$

Assim, quando $n \to +\infty$, $B_{Sierpinski} \to A$. Sabemos que $A = B_n + A_n$, ou seja, $B_n = A - A_n$. Como $B_n \to A$ então $A_n \to 0$. Logo, a área do triângulo de Sierpinski é igual a zero.

Analisando o perímetro do triângulo de Sierpinski temos uma PG de razão $q = \frac{3}{2}$ (maior que 1) e 1º termo exatamente o perímetro da figura inicial (positivo). Assim, quando $n \to +\infty$, $P_n \to +\infty$. Isto significa, que o perímetro do triângulo é infinito.

3.2. Construção da curva de Koch e da Ilha de Koch

A atividade apresentada a seguir foi adaptada a partir do material disponível no seguinte endereço <http://fractalfoundation.org/resources/fractivities/koch-curve> e acessado em 10 de abril de 2013. Aqui destaca-se a importância de chamar atenção para o aluno do processo de repetição presente na construção. É possível associar esse fractal a linhas costeiras dos continentes, vendo aplicação direta da geometria fractal com a natureza.

- Material necessário: lápis, régua, tesoura e canetinha ou lápis de cor para colorir (opcional) e papel isométrico A3 que pode ser obtido no sítio <http://www.worksheetworks.com/miscellanea/graph-paper/isometric-dots.html>.

- As competências trabalhadas nesta atividade foram:

  Semelhança de figuras;

  Progressão Geométrica;

  Comprimento, Perímetro e Área da Ilha de Von Koch;

  Conceito de Limite;

  Limite de uma PG.

- Tempo Estimado - 4 aulas de 50 minutos

  2 aulas de 50 minutos para construção de cada curva e montagem da ilha;

  2 aulas de 50 minutos para análise e conclusões à respeito do comportamento dos lados, do perímetro e da área da ilha de Von Koch.

- Construção

  A atividade consiste em desenhar no papel isométrico usando régua, um segmento de reta de medida múltipla de 3 para facilitar o desenvolvimento da atividade, usamos 27 cm, dividimos esse segmento em 3 partes iguais, apagamos o segmento médio e fizemos um triângulo equilátero (sem a base), usando como medida um desses segmentos, com isso formamos quatro novos segmentos. Nos 4 novos segmentos, repetimos o procedimento descrito acima e assim sucessivamente. Feito isso, temos a curva de Von Koch. Unindo três desses desenhos, temos a Ilha de Von Koch. Os alunos optaram por colorir o desenho, para termos também um objeto de arte. Cortamos a ilha em formato hexagonal, pois a usaremos para auxiliar nos cálculos da área.

(a) Ilha de Koch individual

(b) Pintura da Ilha

Figura 9: Construção do Ilha de Von Koch até a $5^{\underline{a}}$ iteração.

- Análise

Observando a Figura (8) (a), começamos a analisar o comportamento da área e do perímetro da ilha de Koch. Iniciamos o processo com um triângulo equilátero, na primeira iteração da construção dividimos cada lado do triângulo em três partes iguais e construímos sobre cada um dos segmentos do meio um novo triângulo equilátero, sem a base, tal como podemos observar na Figura (10). Obtivemos, portanto, a segunda figura do processo de construção (conhecida como "Estrela de Davi") com 12 lados. Repetimos o mesmo processo para cada um dos 12 segmentos obtidos na figura anterior. Repetindo indefinidamente o processo, obtemos, no limite deste processo recursivo, a curva de Koch.

Ao vermos a representação geométrica deste fractal, conforme Figura (10), podemos observar facilmente que possui uma forma regular fechada cuja fronteira é composta por infinitos lados cada vez menores. Supondo que cada lado do triângulo inicial mede uma unidade, observemos que para cada nova transformação que se faz, a quantidade de lados anterior é multiplicada por 4 e o comprimento dos lados de cada nova figura são 3 vezes menores que os da figura anterior. Analisemos este fato através da tabela 1, considerando o comprimento do lado do triângulo

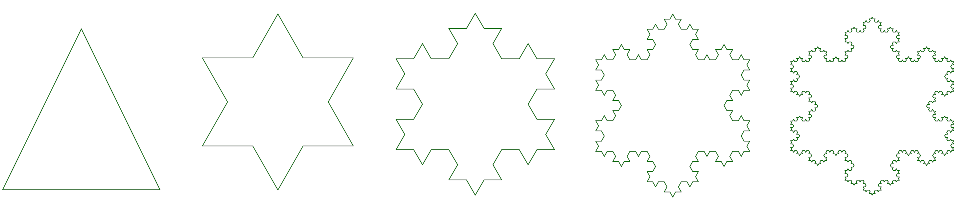


Figura 10: Iterações na ilha de Von Koch até a $4^{\underline{a}}$ iteração.

inicial igual a 1 unidade.

O número de lados de cada figura em função do número de iterações é dado por uma PG

Figura	Número de lados (L)	Comprimento dos lados (M)
Fig. Inicial	$3 \cdot 1 = 3 = 3 \cdot 4^0$	$M_0 = 1 = 3^0$
$1^{\underline{a}}$ iteração	$3 \cdot 4 = 12 = 3 \cdot 4^1$	$M_1 = \frac{1}{3} \cdot M_0 = 3^{-1}$
$2^{\underline{a}}$ iteração	$12 \cdot 4 = 48 = 3 \cdot 4^2$	$M_2 = \frac{1}{3} \cdot M_1 = 3^{-2}$
$3^{\underline{a}}$ iteração	$48 \cdot 4 = 192 = 3 \cdot 4^3$	$M_3 = \frac{1}{3} \cdot M_2 = 3^{-3}$
$4^{\underline{a}}$ iteração	$192 \cdot 4 = 768 = 3 \cdot 4^4$	$M_4 = \frac{1}{3} \cdot M_3 = 3^{-4}$
$n^{\underline{a}}$ iteração	$3 \cdot 4^n$	3^{-n}

Tabela 1: Quantidade e Comprimento dos lados da Ilha de Von Koch.

em que o primeiro termo é $L_0 = 3$ e a razão é $q = 4$. Tal progressão pode ser definida por recorrência ou através de um termo geral, conforme dado abaixo.

$$L_n = \begin{cases} L_n = 3 \text{ se } n = 0 \\ L_n = 4 \cdot L_{n-1} \text{ se } n > 1 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad L_n = 3 \cdot 4^n.$$

É evidente que esta sucessão é monótona crescente e que, a medida que o número de iterações aproxima-se do infinito, ou seja, quando $n \to +\infty$, a sucessão $L_n \to \infty$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = +\infty.$$

Isto significa que a curva vai ter um número infinito de lados. O comprimento dos lados de cada figura em função do número de iterações, é dado também por uma PG, onde $M_0 = 1$ e razão $q = \frac{1}{3} \quad (|q| < 1)$, que pode ser definida por recorrência ou através de um termo geral

$$M_n = \begin{cases} M_n = 1 \text{ se } n = 0 \\ M_n = \frac{1}{3} \cdot M_{n-1} \text{ se } n > 1 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad M_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}.$$

É evidente que esta sucessão é monótona decrescente e limitada por zero e, à medida que o número de iterações se aproxima do infinito, ou seja, quando $n \to \infty$, a sucessão $M_n \to 0$. Isto é, $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$. Mostrando que o comprimento de cada lado da curva tende para zero. Seja

$$P_n = M_n \cdot L_n = (3 \cdot 4^n) \cdot 3^{-n} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

o perímetro obtido na n-ésima iteração. Observa-se que P_n é uma PG de razão $\frac{4}{3}$ (maior que 1) e $P_0 = 3$ ($1^{\underline{o}}$ termo, exatamente, o perímetro do triângulo inicial) e $P_1 = 4$ (P_0 e P_1 ambos positivos). Assim, $P_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Isto significa que o perímetro da ilha de Von Koch é infinito.

Consideremos, para facilitar os cálculos, que A é a área do triângulo equilátero obtido na primeira iteração, então $A_0 = A$. Comecemos por estimar a área da curva de Koch traçando um hexágono envolvendo a "Estrela de Davi" (iteração 1), ao continuarmos a construção, constatamos que a figura da $2^{\underline{a}}$ iteração ainda está contida no hexágono, conforme Figura (11). Note que é fácil perceber que isso vai acontecer em todas as iterações. Podemos então concluir que a área da ilha de Von Koch é inferior à área do hexágono, que é igual ao dobro da área do triângulo

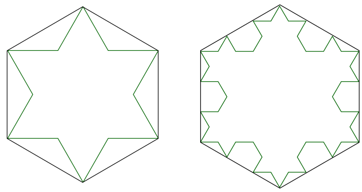


Figura 11: Ilha envolvida por um hexágono nas 1ª e 2ª iterações.

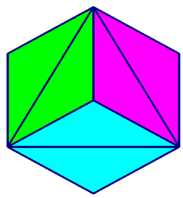


Figura 12: Área do hexágono em função de um triângulo equilátero.

inicial, conforme a Figura (12), portanto, $2A$. Com isso, podemos perceber que a área da região delimitada pela ilha de Koch estará compreendida entre A e $2A$.

Sabemos que a área do polígono, em cada iteração, obtém-se adicionando a área do polígono da iteração anterior a área de um triângulo equilátero, cujo lado é $\frac{1}{3}$ do anterior, multiplicada tantas vezes quantas forem o número de lados do polígono anterior.

Nota-se que ao compararmos a construção iniciada com um triângulo equilátero de lado l e área A com a construção na qual iniciamos com um triângulo equilátero de lado $l' = \frac{l}{3}$, obtemos a seguinte relação entre as áreas A e A':

$$A' = \frac{l'^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\frac{l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{9}A.$$

Fazendo um estudo sistemático:

Na figura inicial, temos o número de lados igual a $L_0 = 3 \cdot 4^0$ e área igual a $A_0 = A$.

Na 1ª iteração,

$$L_1 = 3 \cdot 4^1, \quad A_1 = A_0 + L_0 \cdot \frac{1}{9} \cdot A = A + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 \cdot A$$

Na 2ª iteração,

$$L_2 = 3 \cdot 4^2, \quad A_2 = A_1 + L_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot A\right) = A_1 + L_1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A$$

$$A_2 = A + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot A + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A = A + \frac{1}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot A$$

Na $3^{\underline{a}}$ iteração, temos:

$$L_3 = 3 \cdot 4^3, \quad A_3 = A_2 + L_2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot A = A + \frac{1}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot A + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot A$$
$$A_3 = A + \frac{1}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot A = A + \frac{A}{3} \cdot \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right]$$

Portanto, na n-ésima iteração, a área da ilha de Von Koch tem a seguinte expressão:

$$A_n = A + \frac{A}{3}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] = A + \frac{A}{3}S_n,$$

onde S_n é a soma dos n primeiros termos de uma PG, cujo $a_1 = 1$ e $q = \frac{4}{9}$.

Sabemos que para uma PG de razão $|q| < 1$, a sequência de números reais é convergente e seu limite é:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Portanto, a área da ilha de Von Koch, denotada por A_{Koch}, será dada por:

$$A_{Koch} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(A + \frac{A}{3} \cdot S_n\right) = A + \frac{A}{3} \cdot \frac{9}{5} = A + \frac{3A}{5} = \frac{8}{5} \cdot A = 1,6 \cdot A,$$

donde concluímos que, quando $n \to \infty$, $A_{Koch} \to 1,6 \cdot A$

Nota-se que, embora o perímetro seja infinito (ilimitado superiormente), a área tem um limite finito e bem definido igual a $1,6$ vezes a área inicial.

3.3. Fractais no Xaos

Hoje em dia alguns programas para gerar fractais são tão eficientes que nos permitem "navegar" pelas imagens em movimento enquanto elas são produzidas. É como um mergulho pelos detalhes infinitos onde o usuário escolhe com o mouse o caminho que quer fazer enquanto a imagem é constantemente ampliada e os novos detalhes aparecem e se transformam continuamente. São descritas abaixo algumas atividades que foram desenvolvidas com os alunos da Escola SESC de Ensino Médio utilizando o *software* Xaos em sua versão 3.5.

Inicialmente apresenta-se algumas observações sobre o *software*. Ele pode ser obtido gratuitamente em Português no seguinte endereço: <http://sourceforge.net/projects/xaossomething>.

1. Recentemente foi disponibilizada uma versão gratuita do Xaos para *Iphone* e *Ipad*;
2. A interface é simples e eficiente, conforme Figura (13);
3. Oferece movimento de navegação, você pode aumentar (*zoom in*) ou diminuir (*zoom out*) um fractal;
4. Inclui 24 fórmulas de fractais conhecidos, além de diversas variações possíveis em efeitos e aparência, mas você também pode usá-lo para gerar seus próprios fractais, conforme Figura (14);
5. Oferece efeitos como um gerador de *Starfield*, pode gravar, tem trilha de movimento, modo de pseudo 3D, e até mesmo um *display* de texto;

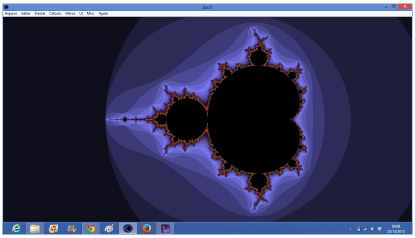


Figura 13: Tela inicial do Xaos 3.5.

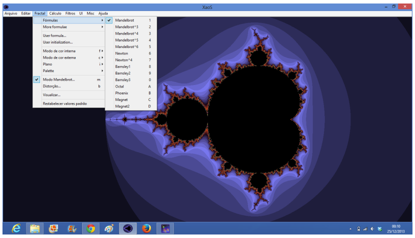


Figura 14: Tela com alguns exemplos de fractais do Xaos 3.5.

6. Pode controlar o *zoom* com o mouse, tanto para ampliar como para diminuir, conforme Figura (15);

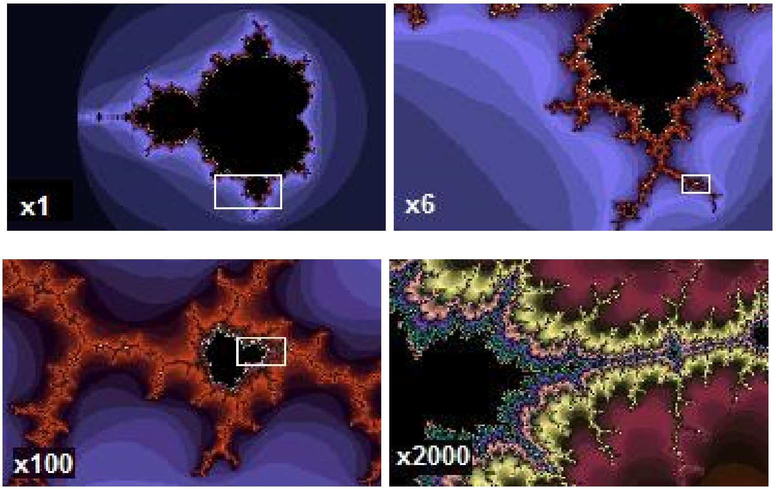


Figura 15: *Zoom* do Conjunto de Mandelbrot no Xaos.
(Fonte: <http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>)

7. Há um arquivo de ajuda que oferece tutoriais animados explicando o que são fractais, como o~programa funciona, e suas muitas opções de configuração. Estes incluem menus para a escolha de fractais, definindo seus cálculos matemáticos, aplicação de filtros e controlar o movimento do programa;
8. A maneira mais simples para se familiarizar com Xaos, é clicar em uma parte do fractal e começar a dar

zoom.

Os alunos puderam interagir no Xaos, criando os mesmos fractais que já haviam criado em sala de forma manual. O que os deixou encantados foi a beleza, o colorido, o movimento e a possível manipulação com um número elevado de iterações. Conforme as Figuras (15), (16) e (17).

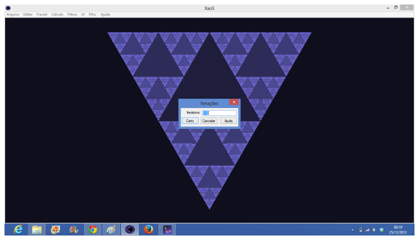


Figura 16: Tela com o triângulo de Sierpinski com 170 iterações do Xaos 3.5.

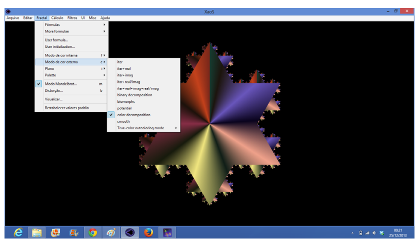


Figura 17: Tela com a Ilha de Koch colorida do Xaos 3.5.

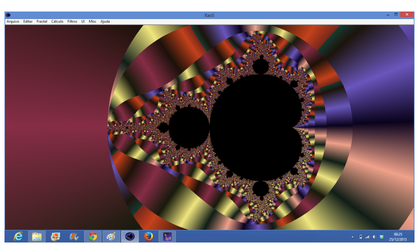


Figura 18: Tela com o conjunto de Mandelbrot do Xaos 3.5.

4. Considerações finais

As atividades foram aplicadas a um grupo de três alunos da Escola SESC de Ensino Médio, como Projeto de Iniciação Científica, que ao início do ano letivo optaram por fazer parte desta pesquisa, tendo como característica comum o interesse por temas ligados à Matemática. Isto, de certa forma, facilitou as aplicações propostas. O grupo já possuía um conceito prévio da Geometria Euclidiana e introduzimos aulas teóricas com conceitos intuitivos de limites, progressões e leis de formação, então durante a realização das atividades propostas, o grupo foi conduzido a chegar ao conceito mais simples de fractal e as suas características básicas.

Com o estudo sistemático, por exemplo, da "Ilha de Koch" que apresenta perímetro infinito e área finita, a curiosidade dos alunos foi surgindo naturalmente. Com isso percebemos que, a construção e estudo do comportamento deste fractal, pode ser uma boa forma de consolidar conhecimentos já adquiridos envolvendo fórmulas algébricas, áreas e perímetros, assim como o cálculo do número de segmentos. Além disso, através das atividades realizadas, os alunos não só conheceram imagens fractais como também puderam reforçar os conceitos apresentados: de iterações e de autossemelhança. Além, é claro, de como já citado acima, os conceitos de progressão geométrica e de limite.

A cada semana, o grupo estava mais entrosado e coeso com a aplicação e realização das atividades, sempre demonstrando interesse de aprender o que estava sendo mostrado pelo professor e ir além em suas pesquisas e indagações, tornando o trabalho gratificante. Conseguimos, através da construção dos fractais (manual ou eletronicamente), cativar o interesse dos alunos para a aplicação também dos conceitos teóricos e não apenas da prática. Com a finalização do prazo das pesquisas e desenvolvimento, os alunos prepararam a apresentação do trabalho para ser divulgado na semana da Escola Aberta, onde realizaram a apresentação do que haviam aprendido durante as semanas de realização do projeto. O grupo foi elogiado tanto pelos colegas quanto pela coordenação da escola pelo desenvolvimento do projeto.

Ressaltamos, que o grupo de alunos, apesar de pequeno, produziu resultados bastante proveitosos. Esperamos que este fato sirva de estímulo aos professores para que repitam a gratificante experiência.

Referências

[1] Barbosa, R. M. *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Terceira edição. Autêntica, Belo Horizonte, 2002.

[2] Batanete, A. et al. *Natureza: Caos ou Ordem?*. Universidade de Coimbra, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Departamento de Matemática, Coimbra, 2004-2005.

[3] Bemfica, A.; Alves, C. *Fractais: Progressão e série geométrica? Uma Metodologia de Ensino*. Faculdade Cenecista de Osório (FACOS), Rio Grande do Sul, 2010.2.

[4] Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, San Francisco, 1982.

[5] Nunes, R. S. R. *Geometria Fractal e Aplicações*. Departamento de Matemática Pura.Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.

[6] Oliveira, D. *A Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio*. Faculdade de Filosofia, Ciências e letras de Presidente Venceslau (FAFIPREVE). São Paulo, 2008.

Ivana Côrtes
Escola SESC de Ensino Médio
<ivana.rccortes@gmail.com>

Gladson Antunes
UNIRIO
<gladson.antunes@uniriotec.br>

Recebido: 2014
Publicado: 2014