PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.3, n.1, 2015
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2015/pmo31

Uma proposta de modelagem matemática no ensino-aprendizagem de matrizes

Ademir Costa Thiago Lopes

Resumo

No presente trabalho de relato de experiência foram desenvolvidas situações-problemas reais envolvendo o estudo e aplicação de matrizes, utilizando-os desde a economia doméstica até a mais simples organização de dados em tabelas. Propõe-se, baseada em recomendações do professor, que os alunos façam uma pesquisa exploratória no comércio local, como postos de combustíveis, farmácias, açougues, nos comércios e mercados em geral, para investigarem os preços de custo e preços de venda de alguns produtos. Desse modo os alunos se confrontam com a questão de pesquisar e tendo assim que sair de dentro da sala de aula para fazer a coleta de dados. Participaram deste trabalho 34 alunos do 2º ano do ensino médio, turma "A", da Escola Estadual de Ensino Médio José Luiz Martins, no município de Água Azul do Norte no estado do Pará. Através da metodologia da modelagem Matemática, descreveremos aqui, uma experiência de sala e extra sala de aula.

Palavras-chave: Educação; Modelagem; Matrizes; Ensino; Aprendizagem.

Abstract

In the present work of experience reporting, real problem situations were developed involving the study and applications of matrices, from the domestic economy to the simplest organization of data in tables. It is proposed, based on recommendations of the teacher, that students conduct an exploratory research in local commerce, such as gas stations, pharmacies, butchers, in the trade and markets in general, to investigate the cost and sales prices of some products. In this way the students are confronted with the question of researching and having thus to leave the classroom to make the data collection. Participated in this study 34 students from the 2nd year of high school, group "A", from the State School of Higher Education José Luiz Martins, in the city of Água Azul do Norte in the state of Pará. Through the mathematical modeling methodology, we describe here an experience of room and extra-classroom.

Keywords: Education; Modeling; Matrices; Teaching; Learning.

1. Introdução

Se fizéssemos uma viagem no tempo, observaríamos que as transformações e mudanças sociais dependem única e exclusivamente das necessidades do meio ao qual elas estão inseridas. O desenvolvimento das ciências, e mais especificamente da Matemática, no decorrer de todo esse tempo, não foi diferente. As sociedades cresciam e com esse crescimento nascia o desejo de desenvolver-se cultural, econômica e tecnologicamente.

O ensino é o meio fundamental para tais transformações ocorrerem. E é papel da escola, compartilhar os conhecimentos desenvolvidos no meio científico. Ferreira e Wodewotzki ([10]) afirmam que "tais transformações aprofundam uma exclusão social, desafiando assim o ambiente de ensino. A escola deve considerar e buscar atender tais desafios.". Porém, esse compartilhar de informações deve ser significativo, para que essa exclusão social seja cada vez mais amenizada.

Nos dias atuais, o ensino de Matemática persiste sendo vilão no aprendizado dos estudantes, pois depende muito da atuação dos dois principais atores da real eficácia do ensino-aprendizagem, o professor e o aluno. No contexto do desinteresse em relação à aula de Matemática e a exclusão que a própria disciplina acaba perpetrando, constatamos em [8], [12] e [15] que tais rejeições ao estudo da Matemática decorre muitas vezes da padronização das aulas, sempre constante, falta de inovação e atrativos e a não significância do conteúdo aplicado para com a realidade dos alunos. Assim, podemos perceber que para haver aprendizagem significativa...,

> *...são necessárias duas condições. Em primeiro lugar, o aluno precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrária e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. Em segundo, o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, ou seja, ele tem que ser lógico e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz faz uma filtragem dos conteúdos que têm significado ou não para si próprio.* [13, p38]

Assim, como citado acima, o interesse do aluno é primordial para o bom desenvolvimento do trabalho, Pelizzari et al. ([13]) e Burak ([7]) fundamentam essas ideias, reforçando que o aluno deve estar motivado para receber a gama de informações que a escola formal lhe oferecerá. Contudo, o professor deve mostrar-lhe que todo aquele conteúdo desenvolvido nas aulas, isto é, aquilo que pretendemos que ele aprenda, será de suma importância para o seu desenvolvimento de modo geral. Sendo assim, o professor deverá identificar o conhecimento prévio do aluno para formar um plano de aula significativo e apto a intervenções e mudanças durante o processo de ensino-aprendizagem.

Aquilo que o educando já sabe, o conhecimento prévio (conceitos, proposições, teoremas, axiomas, princípios, imagens, símbolos, enfim, tudo o que ele já conhece), é essencial para a teoria da aprendizagem significativa, pois constitui-se como a essência do processo de aprendizagem, uma vez que é significativo por definição, basilar na transformação dos significados lógicos dos materiais de aprendizagem, potencialmente significativos, em significados psicológicos ([2], [3]).

Entretanto, acreditamos que a proposta apresentada neste artigo, traz em seu bojo, um modelo significativo no ensino-aprendizagem de matrizes, pois se apoia na metodologia denominada Modelagem Matemática, que vem crescendo e se desenvolvendo com uma nova visão de Educação Matemática, que valoriza não somente a aquisição de conhecimentos, mas o desenvolvimento de competências, caráteres e valores, relacionando a Matemática com o mundo real.

Atualmente, nós professores, temos o grande desafio de atrair o aluno para o universo onde a Matemática é o instrumento fundamental para resolução dos problemas cotidianos, problemas que transcendem qualquer ramo do conhecimento humano. Devemos atraí-los, para uma Matemática dinâmica, reflexiva e crítica, que ele próprio, "através da investigação, da descoberta e da validação dos resultados, aponte caminhos para compreensão da realidade social, e com possibilidades de atuar sobre ela e que atenda também às gerações futuras." [10, p126]. Assim, contribuiríamos com um ensino significativo e também garantiríamos uma aprendizagem de qualidade. Faríamos com que os alunos adquirissem interesse pelo estudo da Matemática, pois o grande desafio de qualquer professor é levar a Matemática para o contexto de vivência do estudante. Essa barreira que separa ensino significativo de aprendizado de qualidade pode ser rompida com o apoio da modelagem. De tal modo, apresentamos aqui uma experiência vivida com alunos do 2º ano do ensino médio, apoiados na metodologia de modelagem matemática para o ensino de matrizes.

Os estudos de matrizes se justificam por contribuir com os avanços científicos e tecnológicos, destacando-se nos campos mais variados como: na engenharia, na informática, na administração, na economia, dentre outros segmentos que possam envolver organização de dados em tabelas. O ensino de matrizes traz consigo as ideias de estrutura, além de constituir uma ferramenta que auxilia na resolução dos sistemas lineares. Sendo muito útil no ensino de Matemática de nível básico como um importante instrumento, tanto no uso em seu cotidiano quanto na Álgebra Linear estudada na Matemática do ensino superior.

Pensando em todo esse contexto, nossa preocupação em apresentar essa proposta de ensino, é relacionar esse conteúdo matemático com o meio social dos alunos. Para tanto, os alunos devem tornar-se pesquisadores, para que os mesmos sintam-se inseridos nesse processo de ensino-aprendizagem. Mostrando a eles, que além de fazerem parte, são o próprio processo, pois são eles que identificam, pesquisam e materializam o problema gerindo modelos matemáticos esquematizados e estruturados.

2. O problema e a proposta de modelagem

A Modelagem Matemática é uma metodologia diferenciada que direciona o estudante ao campo da pesquisa, instigando o mesmo a ir em busca do conhecimento, tornando as aulas mais interessantes e atraentes, relacionando o conhecimento escolar com o contexto do aluno, motivando e preparando-os para utilizarem a Matemática em distintas circunstâncias.

D'ambrosio (1998), Bassanezi ([6]) e Barbosa ([5]) sinalizam, além das características mencionadas acima, a Modelagem Matemática como fio condutor que liga e conecta o ensino de conteúdos de Matemática com outras formas de conhecimento. Essas ideias confirmam que devemos sair da rotina de sala de aula e contemplar os estudantes com problemas desafiadores e significativos ao invés de situações padronizadas e reproduzidas.

A proposta se baseia na recomendação do professor aos alunos que façam uma pesquisa exploratória no comércio local, como postos de combustíveis, mercados, farmácias, açougues, frutarias, entre outros, para averiguar o preço de custo e preço de venda de alguns produtos. Desse modo os alunos se confrontam com a questão de pesquisar e tendo assim que sair de dentro da sala de aula para fazer a coleta de dados. Nessa perspectiva, os alunos teriam grande responsabilidade na execução da atividade desenvolvendo-a do início ao fim com maior contato sobre todas as etapas do processo de modelagem, diminuindo assim a atuação do professor que ficará incumbido de conduzir o trabalho e a relação entre os discentes, conforme mencionado em [4], [5] e [7]. Nesse caso o professor pode recomendar quantidade de comércio e de produtos a serem pesquisados para facilitar o resultado final das pesquisas de preço realizada pelos alunos. Por exemplo, o professor poderia sugerir que se pesquisasse o preço de custo e preço de venda de três produtos $(Pc_1, Pc_2, Pc_3, Pv_1, Pv_2, Pv_3)$ em dois comércios (C_1, C_2) da cidade. Tendo assim a organização dos dados tabulados em uma matriz de mesma ordem para todos os alunos.

Com os alunos de posse desses dados, o professor poderá colocar situações-problema que vão envolver as operações básicas de matrizes(soma, subtração, produto por número real e produto entre matrizes). Questões que tem por objetivo levantar uma discussão em que os alunos identifiquem as variáveis que sejam importantes ao processo e tracem estratégias de resolução. Para uma abordagem mais simples para a primeira questão, indicamos algo que referencie a montagem de uma matriz, como uma questão do tipo "Como podemos organizar os dados coletados para uma melhor leitura dos mesmos?". Dessa maneira o aluno irá experimentar a necessidade de uma ordem nos elementos dessa matriz. Em uma discussão em sala, o aluno perceberá que não haverá somente um único modo de se organizar os dados coletados, mas terá de analisar qual o melhor modo que atenderá a sua necessidade. Tomemos como exemplo, para um melhor entendimento, um possível modelo de organização em tabela:

	Preço de Custo 1 (Pc_1)	Preço de Custo 2 (Pc_2)	Preço de Custo 3 (Pc_3)	Preço de Venda 1 (Pv_1)	Preço de Venda 2 (Pv_2)	Preço de Venda 3 (Pv_3)
Comércio 1 (C_1)	C_1Pc_1	C_1Pc_2	C_1Pc_3	C_1Pv_1	C_1Pv_2	C_1Pv_3
Comércio 2 (C_2)	C_2Pc_1	C_2Pc_2	C_2Pc_3	C_2Pv_1	C_2Pv_2	C_2Pv_3

Tabela 1: Distribuição dos valores em relação ao comércio.

que poderá ser compreendida como a uma matriz do tipo $M = (a_{ij})_{2\times 6}$, onde cada coluna indicará o preço do produto e cada linha indicará o comércio onde foi realizada a tomada de preço, conforme a seguir em 1:

$$M = \begin{bmatrix} C_1Pc_1 & C_1Pc_2 & C_1Pc_3 & C_1Pv_1 & C_1Pv_2 & C_1Pv_3 \\ C_2Pc_1 & C_2Pc_2 & C_2Pc_3 & C_2Pv_1 & C_2Pv_2 & C_2Pv_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

O momento da montagem da matriz de distribuição dos dados é importante, pois o aluno poderá ter um momento de experimentação sobre a localização do "endereço" de cada termo em uma matriz. Compreendendo assim a importância da definição de linhas e colunas de uma matriz e sua organização.

Para uma segunda questão, indicamos algo que sugira soma e subtração de matrizes, que são as operações que oferecem uma facilidade maior para aprendizado por ser necessário uma menor abstração em sua aplicação. O professor poderá usar questões onde sugira soma das matrizes como, por exemplo, "Se uma pessoa comprar uma unidade do produto em cada comércio, quanto gastará?" ou que sugira subtração "Qual o lucro de cada comércio?". Nessa segunda atividade, o aluno perceberá como deve ser o processo de soma e subtração de matrizes, como cada elemento da matriz deve ser somado ou subtraído pelo seu elemento correspondente, desse modo ele mesmo encontrará a resposta à sagaz pergunta "Porque eu não posso somar (ou subtrair) esse primeiro elemento por aquele (ou daquele) último?" que quase sempre surge na classe durante a explicação feita inicialmente pelo professor. Podendo o aluno organizar uma matriz com o valor de venda de cada produto no comércio 1 (C_1) e outra matriz do comércio 2 (C_2) e então resolver na forma de soma de matrizes como segue conforme exemplo anterior

$$\begin{bmatrix} C_1Pv_1 \\ C_1Pv_2 \\ C_1Pv_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2Pv_1 \\ C_2Pv_2 \\ C_2Pv_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1Pv_1 + C_2Pv_1 \\ C_1Pv_2 + C_2Pv_2 \\ C_1Pv_3 + C_2Pv_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Temos ainda um modelo para subtração de matrizes, o lucro que cada comércio obterá com a venda de cada produto, visto que foram coletados preço de custo e preço de venda. Sendo cabível a indagação "Qual o comércio que terá a o maior lucro com a venda de cada produto?", se fazendo necessária uma subtração entre o valor de venda e o valor de custo para que se determine a matriz de lucro. Que seguindo o modelo anterior, ficará como resultado nos comércios C_1 e C_2, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} C_1Pv_1 \\ C_1Pv_2 \\ C_1Pv_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1Pc_1 \\ C_1Pc_2 \\ C_1Pc_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1Pv_1 - C_1Pc_1 \\ C_1Pv_2 - C_1Pc_2 \\ C_1Pv_3 - C_1Pc_3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} C_2Pv_1 \\ C_2Pv_2 \\ C_2Pv_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_2Pc_1 \\ C_2Pc_2 \\ C_2Pc_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2Pv_1 - C_2Pc_1 \\ C_2Pv_2 - C_2Pc_2 \\ C_2Pv_3 - C_2Pc_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

A terceira atividade que pode ser trabalhada é a multiplicação de uma matriz por um número real, onde o número real é multiplicado por cada elemento da matriz. Podendo ser simulada uma situação onde se quer comprar a mesma quantidade de produtos e se deseja verificar em qual comércio a compra sairá mais em conta, cabendo uma indagação como "Se comprarmos uma quantidade de n unidades de cada produto, em qual comércio o valor a ser pago será menor?". O aluno irá se deparar com uma situação onde terá que multiplicar a matriz por um escalar e ainda fazer uma comparação para verificar se compensa comprar todos os produtos no mesmo comércio ou comprar de modo que, para um menor valor a ser pago, compre produtos nos dois mercados. Modelando essa situação, o aluno chegará ao cálculo matricial

$$n \cdot \begin{bmatrix} C_1Pv_1 & C_2Pv_1 \\ C_1Pv_2 & C_2Pv_2 \\ C_1Pv_3 & C_2Pv_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \cdot C_1Pv_1 & n \cdot C_2Pv_1 \\ n \cdot C_1Pv_2 & n \cdot C_2Pv_2 \\ n \cdot C_1Pv_3 & n \cdot C_2Pv_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Na quarta atividade podemos trabalhar algo mais complicado que requeira uma familiaridade maior com a soma e produto de números reais. Se colocarmos uma situação que necessite comprar quantidades diferentes de produtos, o aluno teria de traçar uma estratégia mais elaborada para resolver o problema. Nesse caso utilizaria a multiplicação de matrizes percebendo, por si mesmo, as condições necessárias para que possa haver multiplicação entre duas matrizes e o processo prático para efetuá-la. Supondo que seja requerido uma quantidade "a" do produto 1, uma quantidade "b" do produto 2 e uma quantidade "c" do produto 3, teremos o seguinte modelo para resolução do problema

$$\begin{bmatrix} C_1Pv_1 & C_1Pv_2 & C_1Pv_3 \\ C_2Pv_1 & C_2Pv_2 & C_2Pv_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot C_1Pv_1 + b \cdot C_1Pv_2 + c \cdot C_1Pv_3 \\ a \cdot C_2Pv_1 + b \cdot C_2Pv_2 + c \cdot C_2Pv_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Que irá mostrar a solução do total a pagar pelos produtos em cada comércio. Um evento interessante da modelagem nessa situação, é a oportunidade do aluno poder se deparar com o erro, onde a escolha da ordem da matriz e a disposição de seus elementos, podendo dispor as matrizes conforme alguns exemplos abaixo

$$\begin{bmatrix} C_1Pv_1 & C_2Pv_1 \\ C_1Pv_2 & C_2Pv_2 \\ C_1Pv_3 & C_2Pv_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1Pv_1 & C_1Pv_2 & C_1Pv_3 \\ C_2Pv_1 & C_2Pv_2 & C_2Pv_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1Pv_1 & C_2Pv_1 \\ C_1Pv_2 & C_2Pv_2 \\ C_1Pv_3 & C_2Pv_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

onde poderá constatar que, para essas matrizes, não existem soluções ou a solução não é interessante para a situação proposta. Chegando por modo empírico á condição necessária e suficiente $n = p$ para que seja possível efetuar a multiplicação entre as matrizes $(a_{ij})_{m\times n} \times (b_{ij})_{p\times q}$.

Na quinta proposta de atividade, consideramos uma abordagem onde se necessite de soma de matrizes e multiplicação por um número natural. Podemos tomar como exemplo uma questão do modelo “Se no comércio onde os produtos são mais baratos não tiver quantidade suficiente, quanto custará se comprarmos o restante dos produtos necessários no outro comércio?”. Supondo que necessitamos de uma quantidade y de cada produto e no comércio onde os produtos têm o menor preço tenha somente uma quantidade z de cada produto e seja necessário comprar também uma quantidade t de produtos no outro comércio, onde $y = z + t$. Teremos um modelo matemático no molde

$$\cdot \begin{bmatrix} C_1Pv_1 \\ C_1Pv_2 \\ C_1Pv_3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} C_2Pv_1 \\ C_2Pv_2 \\ C_2Pv_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \cdot C_1Pv_1 \\ z \cdot C_1Pv_2 \\ z \cdot C_1Pv_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \cdot C_2Pv_1 \\ t \cdot C_2Pv_2 \\ t \cdot C_2Pv_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \cdot C_1Pv_1 + t \cdot C_2Pv_1 \\ z \cdot C_1Pv_2 + t \cdot C_2Pv_2 \\ z \cdot C_1Pv_3 + t \cdot C_2Pv_3 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

onde o aluno perceberá que operações com matrizes mantêm as regras de operação da aritmética usual (com exceção da comutatividade multiplicativa!) Nesse caso opera-se inicialmente com a multiplicação e posteriormente a adição (ou subtração) entre as matrizes. Pode-se ainda obter um último modelo de situação-problema que é ter quantidades distintas de cada produto sob a indagação “Se no comércio onde os produtos são mais baratos não tiver quantidades suficientes, quanto custaria se comprarmos o restante dos produtos necessários em outro comércio?” que recorreremos à multiplicação e soma de matrizes. Para tanto definiremos a cargo de exemplo as quantidades dos produtos 1, 2 e 3 no comércio 1 C_1 como, respectivamente, a, b e c e as quantidades dos produtos 1, 2 e 3 no comércio 2 C_2 como, respectivamente, d, e e f cujo modelo matemático se dará no modo seguinte da equação matricial 7

$$\begin{bmatrix} C_1Pv_1 & C_1Pv_2 & C_1Pv_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2Pv_1 & C_2Pv_2 & C_2Pv_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}, \tag{7}$$

que resolvendo as multiplicações através do algoritmo da multiplicação visto anteriormente, teremos a equação matricial 8, onde a primeira parcela é o valor pago no comércio 1 (C_1) e a segunda parcela é o valor pago ao comércio 2 (C_2)

$$\begin{bmatrix} a \cdot C_1Pv_1 + b \cdot C_1Pv_2 + c \cdot C_1Pv_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \cdot C_2Pv_1 + e \cdot C_2Pv_2 + f \cdot C_2Pv_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

que finalmente resultará no valor total pago nos comércios 1 e 2 como na matriz 9

$$[a \cdot C_1Pv_1 + b \cdot C_1Pv_2 + c \cdot C_1Pv_3 + d \cdot C_2Pv_1 + e \cdot C_2Pv_2 + f \cdot C_2Pv_3]\,. \tag{9}$$

Chegando assim ao final do caminho a ser percorrido pelos alunos à descoberta do conhecimento de matrizes. Perpassando essas questões, o aluno terá adquirido conhecimento para perceber a utilização das operações básicas usuais nos livros didáticos utilizados na escola.

3. Metodologia

Ao lançarmos mão do trabalho de investigação e pesquisa in loco, junto ao grupo composto por 34 (trinta e quatro) alunos do 2º ano turma "A" do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Médio José Luiz Martins, no município de Água Azul do Norte no estado do Pará. Essa turma foi escolhida por ser formada por um alunado bastante diversificado, nessa turma estudam alunos tanto da zona rural quanto da zona urbana, alunos do sexo feminino e masculino e de famílias de diversos ramos de atividades, de pequenos lavradores à empresários dessa pequena cidade. Essas várias situações se culminam nessa turma devido essa ser a única escola de ensino médio da cidade.

Abrimos os caminhos rumo à pesquisa para o bem estar dos participantes, caracterizando e estruturando uma investigação junto ao comércio local, cujo os segmentos de atuação são diferenciados, sendo sua realização delimitada em no mínimo 2 (dois) e no máximo 3 (três) estabelecimentos comerciais. A proposta foi orientada para 16 horas aulas referente ao estudo de matrizes, conteúdo que integra a grade curricular da classe de alunos em destaque. Na perspectiva de averiguarem e estruturarem em formas de tabelas, os valores de venda e compra, por parte do comerciante e dos consumidores, um mínimo de 2 (dois) e um máximo de 3 (três) produtos. A vertente deste trabalho circula em torno de 6 (seis) questões que são os problemas da pesquisa a ser desenvolvida pelos estudantes.

São elas:

1) Como podemos organizar os dados coletados para uma melhor leitura dos mesmos?
2) Se uma pessoa comprar uma unidade do produto em cada comércio, quanto gastaria?
3) Qual o comércio que teria a o maior lucro com a venda de cada produto?
4) Se comprarmos uma quantidade de n unidades de cada produto, em qual comércio o valor a ser pago seria menor?
5) Supondo que seja requerido uma quantidade "a" do produto 1, uma quantidade "b" do produto 2 e uma quantidade "c" do produto 3, em qual comércio o preço seria menor?
6) Se no comércio onde os produtos são mais baratos não tiver quantidades suficientes, quanto custaria se comprarmos o restante dos produtos necessários em outro comércio?

No decorrer das aulas, os professores autores, desenvolveram de forma tradicional os conceitos de matrizes, com aulas expositivas e resolução de exercícios para melhor relacionar e fixar o conteúdo ensinado. Porém, cada dupla de alunos já havia coletado suas informações junto ao comercio local, esse modelo de aula inquietou os alunos, pois, os mesmos ainda não conseguiam relacionar a pesquisa feita com o conteúdo estudado. Dessa forma, ao apresentar as 6 (seis) questões acima citadas, tornou-se mais visível a relação entre a modelagem e o conteúdo abordado.

Ao ser pedido para organizarem os dados adquiridos em tabelas estruturadas, dados esses que estavam soltos e sem nenhuma forma, tornaram-se objetos plausíveis para resolução dos problemas propostos. Facilitando o trabalho dos estudantes-pesquisadores que já relacionavam a Matemática ali empregada com o trabalho de "pechincha", palavra comum na linguagem regional que significa tomada de preços, que suas mães faziam ao escolherem os melhores comércios para fazerem suas compras e os produtos mais em conta.

A metodologia aqui empregada é a pesquisa exploratória que de acordo com as ideias de [1], [14] e [11], corrobora na investigação a respeito do tema abordado, pois normalmente o tema é pouco conhecido, ajudando o pesquisador a obter uma melhor visão e um maior aprofundamento do assunto pesquisado, possibilitando a formulação de hipóteses para melhor exploração do objeto investigado.

Segundo [7] essa é a metodologia usual da tendência em educação Matemática denominada Modelagem Matemática ou simplesmente Modelagem, pois a(s) problemática(s) abordada(s) pela Modelagem, sempre apresenta(m) características diferenciadas das problemáticas convencionais, normalmente encontrada nos livros didáticos, pois os problemas que a Modelagem aborda, nascem da pesquisa e coleta de dados, tanto qualitativa quanto quantitativa, que é decorrente da pesquisa exploratória.

As explicações em torno dos conceitos de matrizes, em nossa percepção, em relação aos alunos, tornaram-se mais consistentes, pois os mesmos não assimilavam tais conceitos teóricos com sua aplicabilidade em diversos ramos das ciências, e a pesquisa exploratória tornou visível esse intercambio entre a matemática e as demais ciências, com o seu cotidiano, desde o mais simples ao mais complexo.

Notamos que a proposta apresentada segue certo padrão, porém, nada impede que o professor incremente suas aulas com novas hipóteses ou até mesmo, surjam novos e importantes questionamentos entre os estudantes.

4. Considerações Finais

Dar enfoque a situações-problemas reais nas aulas de Matemática permite-nos uma maior aproximação de um saber Matemático com absoluta significância para os estudantes, pois o aluno torna-se investigador, pesquisador, fazendo parte do desenvolvimento e da aplicação dos dados, gerando maior interesse, entusiasmo e motivação pelas aulas, notando que a Matemática se faz presente no nosso dia-a-dia.

Os conteúdos têm distintas aplicabilidades e é necessário revelar-lhes aos alunos, como forma de cooperação para a seu desenvolvimento integral para a vida e para o mercado de trabalho. Assim, observamos inicialmente a insatisfação dos alunos com as aulas e ao adquirem esse novo olhar, novos ânimos estimularam os estudantes e um clima agradável tomou conta do ambiente educacional ao desenvolvermos as atividades através da Modelagem.

O bom emprego de situações reais com o desenvolvimento do conteúdo de matrizes para a interpretação e a criticidade, matematicamente falando, em aulas bem elaboradas, aguça a visão dos alunos ao quanto a Matemática é fundamental e se faz presente no nosso cotidiano. Através da Modelagem, os mesmos assumem o papel de gestão do problema dado, tomando decisões importantes à resolução do problema. Revelando-os que tais decisões respeitam certos critérios e seguem certo rigor, destacando a Matemática como ferramenta fundamental para a resolução de tal problema.

Portanto, esperamos que a prática desta metodologia junto às aulas de Matemática possa além de servir como ferramenta motivadora, também contribuir introduzindo novos enfoques, propiciando a compreensão e interpretação dos problemas reais vividos pelos estudantes no meio ao qual o mesmo encontra-se inserido e faça também com que ele perceba o quanto ele está inserido e que tudo faz parte do processo de cidadania.

Deste modo, o ensino da Matemática exerce seu papel de colaborar na constituição do indivíduo, abordando assuntos e questões do cotidiano, sendo instrumento de investigação e compreensão com o intuito de revelar, avaliar e deliberar o mais exato possível.

Referências

[1] Andrade, M. M. de. *Como Preparar Trabalhos para Cursos de Pós-Graduação: Noções Práticas.* 2002.

[2] Ausubel, D. P.; Novak, J. D.; Hanesian, H. *Psicologia Educacional.* Segunda edição. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

[3] Ausubel, D. P. *Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva*. Editora Plátano, 2003.

[4] Barbosa, J. C. *Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para O Debate Teórico*. Reunião anual da ANPED, v. 24, p. 1-15, 2001.

[5] Barbosa, J. C. *Modelagem Matemática em Sala de Aula*. Perspectiva, v. 27, n. 98, 2003.

[6] Bassanezi, C. B. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia*. Contexto, 2002.

[7] Burak, D. *Modelagem Matemática e a Sala de Aula*. In: I EPMEM - Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática. Londrina. Anais do I EPMEM, 2004.

[8] Correa, J.; McLean, M. *Era Uma Vez... Um Vilão Chamado Matemática: Um Estudo Intercultural da Dificuldade Atribuída À Matemática*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1999.

[9] D'ambrosio, U. *Etnomatemática*. São Paulo: Àtica, 1998.

[10] Ferreira, D. H. L.; Wodewotzki, M. L. L. *Modelagem Matemática e Educação Ambiental: Uma Experiência com Alunos do Ensino Médio: Artigo Científico*. PUC-Campinas, 2005.

[11] Gil, A. C. *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. In: Métodos e técnicas de pesquisa social. Atlas, 2010.

[12] Messias, M. A. de V. F.; de Sá, P. F.; Fonseca, R. V. *Um Estudo Diagnóstico sobre as Dificuldades em Matrizes*. IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, MG, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO83969659272T.doc>. Acesso em: 20 de agosto de 2014.

[13] Pelizzari, A.; Kriegl M. de L.; Baron, M. P.; Fink, N. T. L.; Dorocinski, S. I. *Teoria da Aprendizagem Significativa Segundo Ausubel*. Revista PEC, v. 2, n. 1, p. 37-42, 2002.

[14] Raupp, F. M.; Beuren, I. M. *Metodologia da Pesquisa Aplicável Às Ciências Sociais. Como Elaborar Trabalhos Monográficos em Contabilidade: Teoria e Prática*, v. 3, p. 76-97, 2003.

[15] Silva, L. M. da. *A Ficção e o Ensino da Matemática: Análise do Interesse de Estudantes em Resolver Problemas*. 2014. Disponível em: <http://meriva.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/6686/1/000459164-Texto%2BCompleto-0.pdf>. Acesso em: 20 de agosto de 2014.

Ademir Costa
Secretaria de Educação do Estado do Pará (SEDUC/PA)
<ademirbrandao@gmail.com>

Thiago Lopes
Instituto Federal do Mato Grosso (IFMT)
<thiagobeirigolopes@yahoo.com.br>

Recebido: 2015
Publicado: 2015

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.3, n.1, 2015
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2015/pmo32

Investigação matemática com o GeoGebra em uma propriedade dos polígonos

Duelci Vaz   José Eder de Vasconcelos   Osni Filho

Resumo

Neste artigo utilizamos a Investigação Matemática com o GeoGebra fundamentada em quatro etapas, a saber: experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar para estudar uma propriedade dos polígonos. Identificamos, na condução da atividade, o potencial da proposta, uma vez que nos auxiliou na generalização do resultado a partir de uma álgebra vetorial elementar sobre casos particulares. A utilização do *software* GeoGebra foi importante na percepção da propriedade, pelas demonstrações visuais que realizamos em diversas situações e conjecturas suscitadas a partir das experimentações.

Palavras-chave: GeoGebra; Investigação Matemática; Propriedade Poligonal.

Abstract

In this article we perform mathematical research with GeoGebra based on four stages: experiment, conjecture, formalization and generalization to study a property of the polygons. We identify in the conduction of the activity the potential of the proposal, since it helped us in the generalization of a result from an elementary vector algebra on particular cases. The use of the GeoGebra *software* was important in the perception of the property, by the visual demonstrations that we carried out in diverse situations and conjectures raised from the experiments.

Keywords: GeoGebra; Mathematical research; Polygonal property.

1. Introdução

Este trabalho resulta de uma aplicação de uma proposta metodológica para o ensino da Matemática que chamamos de Investigação Matemática com o GeoGebra. Em [4] ilustramos e relatamos uma experiência sobre essa metodologia na exploração de uma propriedade dos determinantes das matrizes quadradas do tipo:

$$A = (a_{ij})_{n\times m} = \begin{cases} a_{i(j+1)} = a_{ij} + 1, \quad para \quad i = 1 \quad e \quad j = 1, 2, \dots n-1. \\ a_{ij} = a_{i-1}j + n, i = 2, 3, \dots n-1, j = 1, 2, \dots n-1. \end{cases}$$

Concluímos que toda matriz quadrada desta natureza de ordem maior ou igual a 3 possui determinante nulo e no caso especial em que a matriz tem ordem 2, o determinante é sempre -2. Essa proposta, que tem uma estreita relação com a Investigação Matemática na Sala de Aula de [1], é novamente utilizada na investigação de uma propriedade dos polígonos, mostrando suas etapas na tentativa de generalizar uma propriedade poligonal. Relatamos nossa experiência na esperança de que esse método possa ser utilizado também por professores de todos os níveis de ensino.

2. Investigação matemática com o GeoGebra

Vaz ([4]) estabelece as bases da Investigação Matemática com o GeoGebra que são enunciadas, resumidamente, em quatro etapas: experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar o pensamento matemático. Esclarecemos um pouco mais essas etapas aqui, pois elas serão utilizadas no desenrolar desse artigo.

A primeira etapa consiste em explorarmos a capacidade de experimentar que o GeoGebra permite, graças a possibilidade de movimentarmos os entes matemáticos poderemos comparar as representações algébricas e geométricas, percebermos propriedades, compreendermos definições e construirmos conceitos através das percepções obtidas.

A segunda etapa do processo seria levantarmos conjecturas relacionadas à primeira etapa. Conjecturar significa percebermos relações oriundas da experimentação, vislumbrarmos propriedades, relações, resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento matemático. Uma vez percebida a conjectura podemos enunciá-la como um resultado a ser investigado, em forma de pergunta ou em forma de problema.

A terceira etapa é a formalização, isto é, a demonstração matemática da conjectura propriamente dita ou a apresentação de uma contra proposição da conjectura levantada, com um argumento pedagógico compatível. Tal atitude é importante, pois não podemos, através da experimentação, aceitar o resultado sob o risco de não estarmos praticando os ideais da Matemática.

A quarta etapa é a generalização. Depois de experimentarmos, conjecturarmos e formalizarmos o saber matemático é importante fazermos a generalização do resultado, quando possível, isto é, investigarmos outras situações pertinentes, situações particulares, enfim, explorarmos o alcance do resultado obtido.

3. Investigando uma propriedade do triângulo

Este trabalho começou com um convite para participarmos de um *workshop* que tinha como tema o uso das tecnologias na Educação Matemática. A ideia era apresentarmos atividades de matemática para um público diversificado usando algum tipo de tecnologia. Utilizar o GeoGebra seria algo interessante para chamarmos a atenção das pessoas que por ali passassem. Assim, procuramos problemas que se encaixassem na proposta da Investigação Matemática com o GeoGebra. Em [2], na seção destinada à soma de vetores, encontramos um problema que despertou nossa atenção: dado um triângulo qualquer, trace os pontos médios de todos os lados e em seguida determine os três vetores com extremidade inicial nos vértices do triângulo e final no ponto médio do lado oposto de cada vértice e demonstre que a soma desses vetores é nula.

O problema mostrou-se apropriado para fazermos uma demonstração visual, ideal para chamar a atenção dos transeuntes no evento. No GeoGebra podemos fazer isso com facilidade, pois o *software* permite experimentações diversas e com isso fortalecer a ideia de que a proposição é de fato válida ou não. Na tentativa de generalizar a propriedade a utilização da Investigação Matemática com o GeoGebra foi ideal para concluirmos o estudo iniciado com o triângulo.

4. A resolução do problema e as quatro etapas

Fase 1: experimentação. Primeiro desenhamos um triângulo qualquer, determinando, em seguida, os pontos médios de cada um de seus lados. Em seguida, traçamos os vetores com extremidade inicial no

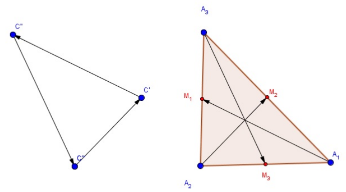

Figura 1: Visualização da construção para triângulos.

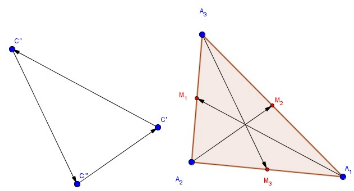

Figura 2: Uma das possibilidades na demonstração visual para o caso do triângulo.

vértice e final no ponto médio do lado oposto, determinando três vetores. Escolhemos um ponto qualquer do plano e transferimos os três vetores, mantendo todas suas características, do seguinte modo: o primeiro vetor, determinado aleatoriamente, deve ser transferido para este ponto; o segundo, também escolhido aleatoriamente, a partir da extremidade do primeiro e o terceiro a partir da extremidade desse último, conforme Figura 1.

Assim, obtemos soma nula, pois os vetores formaram um ciclo fechado. Movimentando qualquer vértice do triângulo verificamos que a configuração geométrica dos vetores se altera, mas a soma continua nula, isto é, o ciclo continua fechado.

Na Figura 2 abaixo, apresentamos outra possibilidade de configuração. No GeoGebra, a experimentação pode ser realizada movimentando os vértices do triângulo e, simultaneamente, a soma dos vetores continua formando ciclo fechado para cada um dos triângulos obtidos. Podemos também habilitar o rastro para vermos o que acontece, o que amplia consideravelmente nossa visão sobre o problema.

Segunda etapa: conjecturar. A partir das experimentações percebemos evidências de que esse é um caso a ser investigado, pois essas demonstrações visuais realizadas sobre vários casos nos permitem pensar que de fato a propriedade é válida para todos os triângulos. Seria interessante fazermos a conjectura em forma de pergunta: será que a soma de todos os vetores com extremidade inicial nos vértices de um triângulo e final no ponto médio do lado oposto é nula? Essa pergunta será respondida de forma investigativa, na etapa seguinte. Terceira etapa: formalização. Agora é necessário fazermos a formalização ou prova analítica do fato. A seguir apresentamos uma possibilidade. Percebemos que a nomeação dos vértices do triângulo da Figura 2, por A_1,A_2 e A_3 e os pontos médios por M_1, M_2 e M_3 nos mesmo ajudaria a elaborar um caminho para outros casos, como ficará mais claro posteriormente. Partimos da percepção das seguintes igualdades:

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{A_2A_3}, \quad \overrightarrow{A_2M_2} = \overrightarrow{A_2A_3} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{A_3A_1}, \quad \overrightarrow{A_3M_3} = \overrightarrow{A_3A_1} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{A_1A_2}.$$

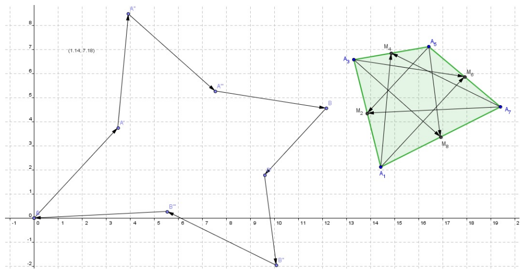

Figura 3: Demonstração visual para o caso de um quadrilátero.

Combinamos membro a membro e obtemos:

$$\overrightarrow{A_1M_1} + \overrightarrow{A_2M_2} + \overrightarrow{A_3M_3} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_1} + \left(\frac{1}{2}\right)(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1A_2}) = \vec{0}.$$

A soma das parcelas entre parênteses é nula, pois representa um ciclo fechado de vetores, os lados do triângulo.

Quarta etapa: generalização. Daqui para frente desenvolveremos a generalização e para tanto, investigaremos a validade da propriedade para outros polígonos, começaremos pelo quadrilátero convexo e demonstraremos visualmente que a propriedade é válida também para esse caso, como ilustra a Figura 3. Nesta fase, repetimos algumas etapas já mencionadas, como será fácil perceber. Para um quadrilátero não convexo também constatamos visualmente a validade da propriedade, como ilustra a Figura 4.

Diante dessas experiências ficou mais forte a impressão de que a propriedade é válida para todos os quadriláteros. A conjectura para esse caso seria enunciada como segue. Seja $A_1A_2A_3A_4$ um quadrilátero qualquer. Tomando-se todos os pontos médios de seus lados e determinando todos os vetores traçados dos vértices aos pontos médios dos lados não adjacentes, a soma desses vetores é nula?

Para demonstrarmos isso, indicaremos por A_1, A_2, A_3 e A_4 os vértices do quadrilátero e por M_1, M_2, M_3 e M_4 os pontos médios dos lados A_1A_3, A_3A_4, A_4A_1 e A_1A_2, respectivamente, conforme Figura 5.

A demonstração visual com o GeoGebra revelou que podemos separar os vetores em dois grupos, ambos com soma nula, no caso de um quadrilátero, como mostra a Figura 5. Esse fato foi obtido por experimentação e se constitui fundamental na elaboração de um raciocínio definitivo.

O primeiro grupo é obtido utilizando todos os vetores que têm origem nos vértices do quadrilátero e extremidade final o primeiro ponto médio, não adjacente ao vértice considerado, no sentido horário. Assim:

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_3}, \quad \overrightarrow{A_2M_2} = \overrightarrow{A_2A_3} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_3A_4},$$
$$\overrightarrow{A_3M_3} = \overrightarrow{A_3A_4} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_4A_1}, \quad \overrightarrow{A_4M_4} = \overrightarrow{A_4A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Logo: $\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{A_iM_i} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \vec{0}$, onde $A_{i+1} = A_1$, para $i = 4$. O segundo grupo obtido tomando todos os vetores determinados pelos vértices do quadrilátero e o segundo ponto médio

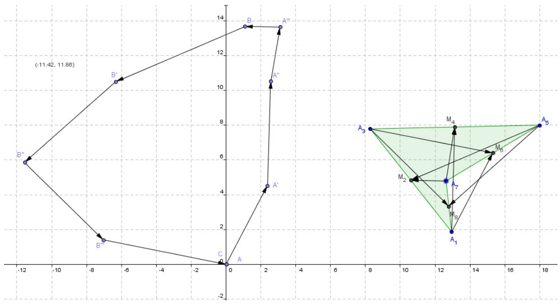

Figura 4: Demonstração visual para o caso de um quadrilátero não convexo.

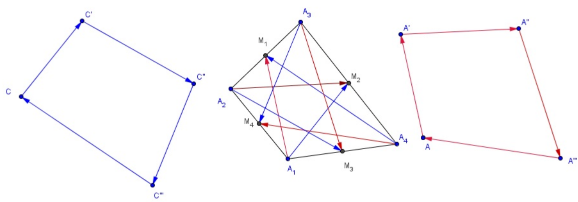

Figura 5: Demonstração visual: vetores separados em dois grupos.

não adjacente, no sentido horário, nos dá:

$$\overrightarrow{A_1M_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_3A_4}, \quad \overrightarrow{A_2M_3} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_4A_1},$$
$$\overrightarrow{A_3M_4} = \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}, \quad \overrightarrow{A_4M_1} = \overrightarrow{A_4A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_3}.$$

Somando os membros das igualdades obtemos para este grupo:

$$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{A_iM_{i+1}} = \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \vec{0},$$

em que: $A_{i+1} = A_1$ e $M_{i+1} = M_1$, para $i = 4$. Assim, obtemos finalmente:

$$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{A_iM_i} + \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{A_iM_{i+1}} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \vec{0}.$$

A experimentação nos mostrou que enumerar os vértices e os pontos médios, como ilustrado anteriormente, seria um caminho viável, pois facilitaria a representação simbólica para um polígono com um número arbitrário de vetores. A enumeração também se mostrou eficiente na percepção da composição dos diversos somatórios que iriam aparecer no processo e no encaminhamento de um raciocínio definitivo.

O exemplo a seguir, ilustrado na Figura 6, para um polígono de cinco lados, finaliza a etapa de percepção de propriedades e a partir daí foi possível darmos uma explicação geral para o caso de um polígono de n lados.

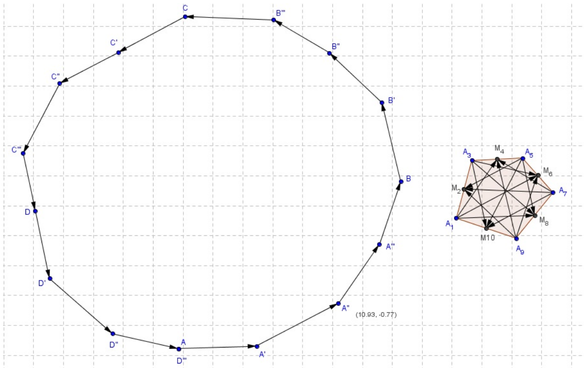

Figura 6: Demonstração visual para o caso de um pentágono.

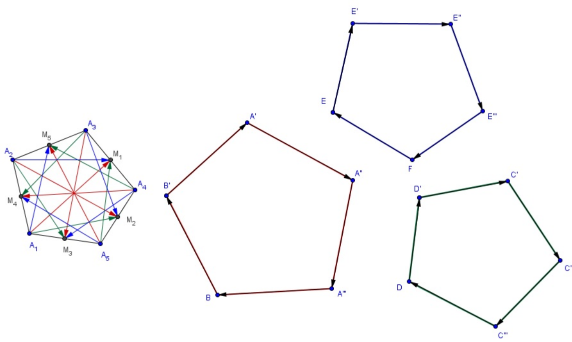

Figura 7: Demonstração visual em três casos para o caso do pentágono.

A estratégia básica mais uma vez foi a de separarmos, neste caso, em três grupos de vetores como ilustrado pela Figura 7, obtida da experimentação com o GeoGebra. Adotamos a estratégia anterior, dividimos este exemplo em três casos. No primeiro grupo, apresentado na Figura 7, obtivemos a seguinte conclusão:

$$\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iM_i} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \quad em \quad que \quad A_{i+1} = A_1 \quad para \quad i = 5.$$

Do segundo grupo ilustrado na Figura 7 obtemos:

$$\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iM_{i+1}} = \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \quad em \quad que \quad A_{i+1} = A_1 \quad e \quad M_{i+1} = M_1 \quad para \quad i = 5.$$

E, por fim, o terceiro grupo, também apresentado na Figura 7, nos dá:

$$\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iM_{i+4}} = \frac{7}{2}\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iA_{i+1}},$$

com $M_{i+4} = M_1$, para $i = 2$; $M_{i+4} = M_2$, para $i = 3$; $M_{i+4} = M_3$, para $i = 4$; $M_{i+4} = M_4$ e

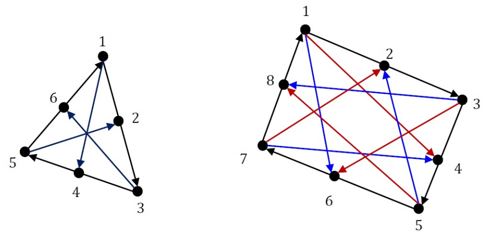

Figura 8: Representação do triângulo e do quadrilátero com a nova notação.

$A_{i+1} = A_1$, para $i = 5$. Combinando esses resultados obtemos a finalização do argumento, isto é,

$$\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iM_i} + \sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iM_{i+1}} + \sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iM_{i+2}} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \frac{7}{2}\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \vec{0}.$$

Agora podemos enunciar o fato geral para um polígono de n lados. Considerando os $n-2$ grupos em que os vetores do k-ésimo grupo são do tipo: $\overrightarrow{A_iM_{i+k}}$, onde $1 \leq k \leq n-2$.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iM_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iM_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iM_{i+2}} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iM_{i+n-2}} \\ &= \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \cdots + \frac{2n-3}{2}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iA_{i+n-3}} = \vec{0},\end{aligned}$$

em que $M_{i+1} = M_1$, $M_{i+2} = M_2$, ..., $M_{i+n-2} = M_{n-2}$, para $i = n$ e $A_{i+1} = A_1$, $A_{i+2} = A_2$, ..., $A_{i+n-2} = A_{n-2}$, para $i = n$. Mais geralmente, quando $i+k > n$, $A_{i+k} = A_{i+k-n}$ e $M_{i+k} = M_{i+k-n}$.

Observamos que para os quadriláteros teríamos oito vetores internos (aqueles que não são lados), para o pentágono teríamos quinze, para um hexágono teríamos vinte e quatro vetores. É fácil deduzir que a fórmula para contagem do número de vetores internos é dada por $f(n) = n^2 - 2n$, pois de cada vértice saem $n-2$ vetores, num total de n vértices. Assim, o número é dado pela função $f(n) = (n-2)n = n^2 - 2n$. Também percebemos que para o triângulo existe apenas um grupo de vetores internos com soma nula. Para o quadrilátero existem dois grupos de vetores internos com soma nula. Para um pentágono conseguimos três grupos de vetores. Assim, para um grupo com n vetores teremos $n-2$ grupos de vetores.

5. Aprimorando a notação

Para melhor generalizarmos a propriedade dos polígonos utilizaremos as idéias apresentadas em [3]. Vamos renumerar os pontos necessários conforme Figura 8. Os vértices do quadrilátero com os impares: 1, 3, 5 e 7 e os pontos médios com os pares: 2, 4, 6 e 8, no sentido horário. Os vetores seguirão o seguinte critério: se um vetor conecta i a j será nomeado de $v_{i,j}$. Por exemplo, existe um vetor entre 1 e 3, então, esse vetor será nomeado $v_{1,3}$. Assim teremos, $v_{1,3}$, $v_{3,5}$, $v_{5,7}$ e $v_{7,1}$ representando os lados do quadrilátero. Além disso, $v_{1,4}$ e $v_{1,6}$, $v_{3,6}$ e $v_{3,8}$, $v_{5,2}$ e $v_{5,8}$ e, finalmente $v_{7,4}$ e $v_{7,2}$ representando os vetores saindo do vértice e chegando ao ponto médio do lado não adjacente a esse vértice.

Ainda levamos em consideração a Figura 8, reescrevemos as fórmulas estabelecidas anteriormente com essa nova notação. Para o triângulo, teremos:

$$v_{5,2} = v_{5,3} + \frac{1}{2}v_{3,1}, \quad v_{3,6} = v_{3,1} + \frac{1}{2}v_{1,5}, \quad v_{1,4} = v_{1,5} + \frac{1}{2}v_{5,3}.$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$v_{5,2} + v_{3,6} + v_{1,4} = v_{5,3} + v_{3,1} + v_{1,5} + \frac{1}{2}(v_{3,1} + v_{1,5} + v_{5,3}) = \frac{3}{2}(v_{5,3} + v_{3,1} + v_{1,5}) = \vec{0}.$$

Ou de forma mais compacta:

$$\sum_{i=1}^{3} v_{2i-1,2i+2} = \sum_{i=1}^{3} v_{2i-1,2i+3} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} v_{2i+3,2i+1} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{3} v_{2i-1,2i+3} = \vec{0},$$

os índices pertencem ao conjunto dos inteiros módulo 6.

Para os quadriláteros, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{4} v_{2i-1,2i+2} = \sum_{i=1}^{4} v_{2i-1,2i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} v_{2i+1,2i+3} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{4} v_{2i-1,2i+1} = \vec{0}$$

e

$$\sum_{i=1}^{4} v_{2i-1,2i+4} = \sum_{i=1}^{4} v_{2i-1,2i+1} + \sum_{i=1}^{4} v_{2i+1,2i+3} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} v_{2i+3,2i+5} = \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{4} v_{2i-1,2i+1} = \vec{0},$$

onde os índices pertencem ao conjunto dos inteiros módulo 8.

Finalmente para um polígono qualquer de n lados, lembramos que teremos n–2 grupos de vetores, que são os seguintes:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} v_{2i-1,2i+2} &= \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} v_{2i-1,2i+1} = \vec{0},\\
\sum_{i=1}^{n} v_{2i-1,2i+4} &= \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n} v_{2i-1,2i+1} = \vec{0},\\
\sum_{i=1}^{n} v_{2i-1,2i+6} &= \frac{7}{2}\sum_{i=1}^{n} v_{2i-1,2i+1} = \vec{0},\\
&\ldots\\
\sum_{i=1}^{n} v_{2i-1,2i+2n-2} &= \frac{2n-3}{2}\sum_{i=1}^{n} v_{2i-1,2i+1} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Em que os índices são tomados no conjunto dos inteiros módulo $2n$.

Evidentemente que a determinação de uma simbologia apropriada facilita as representações e a história da matemática nos mostra o quanto isso é importante para o desenvolvimento das ideias matemáticas.

6. Conclusão

Concluímos nosso artigo enunciando a validade da propriedade. *Dado um polígono qualquer, traçando todos os vetores dos vértices até os pontos médios dos lados não adjacentes e calculando a soma de todos eles, obtemos resultante nula.* No desenvolvimento do trabalho, percebemos a importância da utilização das novas tecnologias na Educação Matemática. Em diversas oportunidades foram evidenciadas as potencialidades pedagógicas da Investigação Matemática com o GeoGebra e sua importância na construção do conhecimento matemático: na experimentação, permitindo a visualização dos objetos matemáticos em movimento, na elaboração de conjecturas, na releitura de conteúdos, na formalização e generalização dessas conjecturas. Sobretudo, fica evidenciado, o quanto expande nosso olhar sobre os objetos matemáticos. Em certas ocasiões em que se pretendia desenvolver determinados planejamentos e tarefas, observamos outras propriedades, características que não estavam contidas nestes planejamentos. Assim, trabalhar dentro desta proposta pode nos reservar gratas surpresas. Isso é importante, pois estimula novas investigações.

Referências

[1] Brocardo, J., Oliveira, H., Ponte, J. P. *Investigação Matemática em Sala de Aula*. Segunda Edição. Autêntica Editora: Belo Horizonte, 2009.

[2] Simons, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. MacGraw Hill: São Paulo, 1987.

[3] Vasconcelos, J. E. S. *Álgebras Associadas a Grafos Orientados em Níveis e a Propriedade da Koszulidade*. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

[4] Vaz, D. A. F. *Experimentando, Conjecturando, Formalizando e Generalizando: Articulando Investigação Matemática com o GeoGebra*. Em: Educativa. Goiânia. Editora da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, jan./jun. V.15. n. 1. p. 39-51, 2012.

Duelci Vaz
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG)
Pontifícia Universidade Católica de Goiás
<duelci.vaz@gmail.com>

José Eder de Vasconcelos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG)
<salvadordevasconcelos@yahoo.com.br>

Osni Filho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG)
<osnifilho@live.com>

Recebido: 2015
Publicado: 2015

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.3, n.1, 2015
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2015/pmo33

Progressões geométricas e o estudo da matemática financeira

Márcio Rodrigues Vitor Petry

Resumo

Neste trabalho são apresentadas atividades desenvolvidas com alunos do Ensino Médio, buscando mostrar a relação entre problemas de matemática financeira e progressão geométrica (PG). As atividades desenvolvidas e as discussões estabelecidas permitiram aos alunos a compreensão de conceitos relacionados à matemática financeira através de uma sequência numérica, de forma a proporcionar um aprendizado baseado na construção do conhecimento, onde situações do dia a dia são discutidas, facilitando a tomada de decisões que podem influenciar a vida financeira dos cidadãos. Proporcionou-se assim o processo de ensino e aprendizagem tendo o aluno como protagonista de sua formação.

Palavras-chave: Progressão geométrica; Matemática financeira; Aprendizagem; Sistema de amortização francês.

Abstract

In this work are presented activities developed with high school students, trying to show the relationship between problems of financial mathematics and geometric progression (GP). The activities developed and the discussions established allowed the students to understand concepts related to financial mathematics through a numerical sequence, in order to provide learning based on the construction of knowledge, where everyday situations are discussed, facilitating the decisions that can influence the financial life of citizens. The teaching and learning process was thus provided with the student as the protagonist of his/her training.

Keywords: Geometric progression; Financial math; Learning; French amortization system.

1. Introdução

Diante das estatísticas sobre a avaliação do ensino de matemática no Brasil fica evidente a necessidade de se promover melhorias que passam pela realização de trabalhos diferenciados na forma de ensinar Matemática, despertando o interesse e a motivação dos alunos para facilitar o processo de aprendizagem. Neste sentido, destaca-se a necessidade de apresentar os conteúdos e conceitos matemáticos de forma que possam ser compreendidos e tenham significado para os alunos, além da consideração de seus conhecimentos prévios em relação aos conceitos a serem trabalhados. De acordo com [1], autor que propôs o conceito da aprendizagem significativa, o fator mais importante que influencia o aprendizado é aquilo que o aprendiz já conhece [1]. Para conhecermos as percepções prévias dos alunos sobre tópicos de matemática financeira, estes responderam a um questionário elaborado para esta finalidade. Além disso o primeiro autor era o professor de matemática responsável pela a turma que participou do desenvolvimento das atividades, o que contribuiu para o conhecimento e a compreensão destas percepções.

O estudo da matemática financeira possibilita a compreensão de conceitos matemáticos de forma simples e de aplicação visível para o aluno, onde é possível perceber que todos podem aprender conceitos básicos de matemática que contribuirão para a melhoria de sua qualidade de vida. Esta percepção pode servir de elemento motivador para o trabalho de conceitos matemáticos em sala de aula. Neste sentido é fundamental que as aulas sobre matemática financeira não se restrinjam apenas a conceitos de juros simples e compostos, sem a devida contextualização que gere a compreensão de significados. Consideramos ser viável estabelecer relações entre os conceitos relacionados à matemática financeira e ao estudo de progressões, possibilitando conexões desses tópicos com situações do cotidiano dos alunos.

Segundo Ausubel [1], quando as informações são aprendidas sem interagir com conceitos relevantes na estrutura cognitiva, temos uma aprendizagem mecânica. Para compreender a relevância dos conceitos estudados, os sujeitos envolvidos no estudo fizeram consultas em estabelecimentos comerciais, concessionárias de veículos, bancos e financeiras com a finalidade de observar as principais formas de financiamento adotadas pelo mercado, chegando a conclusão de que o Sistema de Amortização Francês (SAF) é muito utilizado em financiamentos. O presente trabalho é resultado das atividades desenvolvidas em uma dissertação de mestrado do PROFMAT [6] onde trabalhou-se com alunos do Ensino Médio com a finalidade de estabelecer relações entre os conceitos envolvendo o estudo de progressões geométricas (PG) e o SAF, de forma a explicitar os significados desses conceitos para favorecer o processo de ensino e aprendizagem. Para Ausubel aprender significativamente é ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura mental e com isso ser capaz de relacionar novos conteúdos ([3]). Entende-se que esta forma de trabalho permite aos alunos o exercício de sua cidadania através de atitudes positivas, como a autonomia, confiança quanto as capacidades matemáticas e perserverança na solução de problemas, despertando o interesse para um assunto que gera muitas dúvidas e discussões na sociedade. Também observou-se o desenvolvimento de algumas habilidades de cálculo e a compreensão do significado e da demonstração de propriedades e teoremas relativos ao conteúdo de PG e a conceitos de matemática financeira. Dessa forma, o aprendizado deixou de ser um processo passivo, visto que este contribuiu para que o educando desenvolvesse potencialidades e a capacidade de pensar na tomada de decisões a partir dos conceitos aprendidos.

O objetivo deste trabalho é de apresentar algumas atividades desenvolvidas com alunos do Ensino Médio que mostram a possibilidade de trabalhar de forma integrada conceitos de progressões e de matemática financeira. Inicialmente foi aplicado um questionário para a identificação dos conhecimentos prévios dos sujeitos da pesquisa referente ao tema em discussão. A partir da avaliação de suas respostas, foram planejadas atividades de intervenção que culminaram no desenvolvimento do projeto. A aprendizagem foi observada de forma contínua ao longo de todo o desenvolvimento das atividades e através da aplicação de um novo questionário (pós teste) onde os alunos responderam questões sobre os tópicos desenvolvidos.

Apresentou-se aos alunos uma relação de exemplos de problemas de matemática financeira envolvendo situações com as quais muitos deles se deparam com certa frequência. Alguns dos exemplos foram elaborados pelos autores e outros obtidos em livros didáticos. A finalidade da apresentação desses exemplos foi a de instigar os alunos para solucionar tais problemas e em não conseguindo resolvê-los com os conceitos matemáticos já conhecidos por eles, motivá-los para a aprendizagem de novos conceitos a fim de resolver os problemas em questão. Alguns dos problemas propostos aos alunos são apresentados ao longo do texto com o intuito de analisar o processo de aprendizagem ocorrido durante o desenvolvimento das atividades.

As atividades a que se refere o presente trabalho foram desenvolvidas junto a alunos do Ensino Médio de uma escola pública no interior do estado de São Paulo. Na sequência, apresenta-se um breve comentário sobre os juros compostos e equivalência de capitais acompanhados de algumas das discussões feitas com os alunos a cerca da resolução de exemplos envolvendo este estudo. O SAF também é apresentado, abordando conceituação, sua origem e utilização, acompanhado da análise de alguns exemplos de aplicações trabalhadas em sala de aula, buscando identificar o significado das expressões envolvidas. Apresentam-se aplicações do SAF em situações reais, onde é oportunizada aos alunos a compreensão dos conceitos através da representação de dados em planilhas eletrônicas. Também são apresentadas atividades que relacionam o estudo de PG com a matemática financeira, utilizando resultados de PG para resolver problemas do SAF. Por fim, faz-se uma reflexão dos resultados observados durante a aplicação e o desenvolvimento das atividades junto aos alunos.

2. Juros compostos

No sistema de juros compostos, deve-se calcular o juros no fim de cada período, formando um montante sobre o qual se calculam os juros do período seguinte, até esgotar o tempo de aplicação ([2]). Para motivar a introdução desse tema, foram trabalhados problemas de juros compostos, associando a sua resolução ao desenvolvimento de conceitos de PG. Para a percepção da necessidade de estabelecer uma relação geral, foi proposto aos alunos o problema inverso dado pelo exemplo 1.

Exemplo 1. *Qual deve ser o tempo de integralização para que a quantia de* R\$ 30.000,00 *gere um montante de* R\$ 32.781,81, *quando aplicada a uma taxa de 3% ao mês, no sistema de juros compostos?*

A partir dos problemas desenvolvidos anteriormente usando indução matemática, chegou-se à expressão para o cálculo do juro composto que é enunciado no teorema que segue ([4, p45]), cuja demonstração não será apresentada neste trabalho, porém foi realizada com os alunos.

Teorema 1. *No regime de juros compostos de taxa i, um principal M_o transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante igual a:*

$$M_n = M_o \cdot (1+i)^n. \tag{1}$$

Usando a expressão (1) e as propriedades de logaritmos, que já haviam sido discutidas anteriormente com os alunos, o problema proposto foi resolvido considerando que $M_o =$ R\$ 30.000,00, $i =$ 3% ao mês, $M =$ R\$ 32.781,81 e n é a incógnita:

Temos, $M_n = M_o \cdot (1+i)^n$, $(1+i)^n = \dfrac{M_n}{M_o}$, $(1{,}03)^n = \dfrac{32781{,}81}{30000} = 1{,}092727$, assim,

$$n = \frac{\log(1{,}092727)}{\log(1{,}03)} = 3.$$

Portanto o tempo deve ser de 3 meses.

A partir desse desenvolvimento, vários outros problemas foram propostos e resolvidos pelos alunos.

3. Equivalência de capitais

Sabe-se que o valor de uma quantia depende da época a qual ela está referida. Veja que, em uma situação onde o dinheiro rende 1% ao mês, pagar R$ 100,00 hoje ou pagar R$ 101,00 daqui a um mês é equivalente.

Discutindo algumas situações com os alunos de Ensino Médio e propondo alguns exemplos percebeu-se algumas dificuldades na compreensão quanto ao fator deslocamento no tempo, evidenciando-se a necessidade de fazer algumas exposições sobre os conceitos importantes envolvidos nestas situações. Essas discussões se deram a partir dos exemplos que seguem. O exemplo dois foi adaptado de [4, p46].

Exemplo 2. *Um indivíduo tomou um empréstimo de R$ 500,00 a juros mensais de 10%. Dois meses após, este indivíduo pagou R$ 250,00 e no mês seguinte liquidou o seu débito. Qual o valor desse último pagamento?*

Realizou-se a análise do problema proposto com os alunos, conforme descrição que segue: de acordo com o Teorema 1, $M_n = M_o \cdot (1+i)^n$ é uma quantia relacionada ao tempo atual, ou seja, M_o transformar-se-á, após n períodos de tempo em $M_o \cdot (1+i)^n$, isto é, uma quantia, cujo valor atual é M_o equivale no futuro, depois de n períodos de tempo a $M_n = M_o \cdot (1+i)^n$. Daí pode-se concluir que para descobrir o valor futuro deve-se multiplicar por $(1+i)^n$. Reciprocamente, para descobrir o valor atual, deve-se dividir por $(1+i)^n$.

A partir dessa análise a resolução do problema fica da seguinte forma:

Considerando inicialmente que o valor atual do empréstimo é de R$ 500,00 equivale a um valor futuro

$$500 = \frac{250}{(1+0{,}1)^2} + \frac{P}{(1+0{,}1)^3}.$$

visto que foi feito um pagamento de R$ 250,00 após dois meses e um pagamento P após três meses. Segue então que $P =$ R$ 390,50.

Outra situação que levou a várias discussões em aula foi o problema proposto no exemplo 3, adaptado de [4, p47]:

Exemplo 3. *Um produto é oferecido em uma loja nas seguintes condições:*
a) À vista, com 10% de desconto.
b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.
c) Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.
Qual a melhor opção para a compra desse produto, se o dinheiro vale, para o comprador, 5 % ao mês?

Para facilitar a discussão, fixou-se, sem perda de generalidade, um preço de R$ 30,00. Para pagamento à vista rapidamente os alunos concluíram que o valor seria de R$ 27,00. Assim, a discussão ficou em torno dos itens b e c, cujo resultado segue, comparando em cada uma das situações os valores pagos futuramente com os valores atuais, considerando uma atualização monetária de 5 % ao mês, conforme previsto no exemplo:

Analisando o item b, tem-se: $V_b = \frac{15}{1{,}05} + \frac{15}{1{,}05^2} \approx 27{,}89$.

Analisando o item c, tem-se: $V_c = 10 + \frac{10}{1{,}05} + \frac{10}{1{,}05^2} \approx 28{,}59$.

Após cada uma dessas análises, amplamente discutidas e justificadas com os alunos, conclui-se que a melhor opção é a compra à vista. Destaca-se neste caso a importância de não considerar apenas as taxas praticadas pelo mercado, mas também, o rendimento que o consumidor eventualmente pode ter ao ficar com seu dinheiro por mais tempo, no caso de uma compra à prazo. Novamente aproveitou-se o exemplo para ampliar a discussão sobre equivalência de capitais. Outras situações problemas foram analisados com os alunos envolvendo a aplicação do Teorema 1 e suas consequências. Várias situações são encontradas em [4].

Dando sequência ao trabalho, foi introduzido o conceito de séries de pagamentos uniformes, cuja ilustração é feita com o exemplo 4, adaptado de [4, p51].

Exemplo 4. *Um produto cujo preço à vista era de R\$ 1.000,00 foi comprado em 6 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra. Se os juros são de 10% ao mês, determine o valor das prestações.*

Usando as idéias discutidas anteriormente, estabeleceu-se a expressão que fornecesse o valor atual de cada parcela futura, de forma que a soma de todas as parcelas representasse o valor à vista do produto, conforme segue:

$$1000 = \frac{P}{1{,}1} + \frac{P}{1{,}1^2} + \frac{P}{1{,}1^3} + \frac{P}{1{,}1^4} + \frac{P}{1{,}1^5} + \frac{P}{1{,}1^6}$$

Dessa forma, o problema ficou caracterizado como uma soma dos termos de uma PG em que seu primeiro termo é $a_1 = \dfrac{P}{1{,}1}$ e sua razão é $q = \dfrac{1}{1{,}1}$. Usando os conhecimentos relativos a soma dos termos de uma PG finita, foi possível chegar ao valor de cada prestação, conforme segue:

$$1.000 = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\dfrac{P}{1{,}1}\left[\left(\dfrac{1}{1{,}1}\right)^6 - 1\right]}{\dfrac{1}{1{,}1} - 1}$$

de forma que $P =$ R\$ 229,60.

Acredita-se que estas discussões são fundamentais para que os alunos não fiquem apenas fazendo contas e substituições de valores em fórmulas prontas sem estabelecer significados para o que estão fazendo, sem a devida compreensão. Estabeleceu-se na análise desse exemplo uma estreita relação entre o ensino de progressões geométricas e a compreensão de conceitos e de resultados de matemática financeira, de fundamental importância para a administração financeira de qualquer cidadão.

Após a compreensão do processo, foi proposto uma generalização para o cálculo do valor da parcela em séries de pagamentos uniformes, cujo resultado segue enunciado no Teorema 2, disponível em [4] que foi demonstrado, usando o mesmo raciocínio proposto no exemplo 4, porém de forma algébrica.

Teorema 2. *O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, é*

$$P_v = P\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \tag{2}$$

sendo i a taxa de juros e P_v pagamento à vista.

Demonstração. Seguindo os argumentos utilizados no exemplo anterior, escreve-se o valor do pagamento à vista como uma soma de parcelas futuras em valores atuais, conforme segue:

$$P_v = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

utilizando a soma dos termos de uma PG finita obtém-se:

$$\frac{P_v}{P} = (1+i)^{-1} \cdot \frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1} = \frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)\cdot\left(\dfrac{1}{1+i}-1\right)} = \frac{(1+i)^{-n}-1}{\dfrac{(1+i)\cdot(1-1-i)}{1+i}} = \frac{(1+i)^{-n}-1}{-i}$$

de onde segue que:

$$P_v = P\cdot\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

□

Após a generalização, vários problemas foram propostos e resolvidos pelos alunos. Para dar continuidade ao trabalho com os alunos, foi solicitado que estes realizassem uma pesquisa sobre os principais modelos usados para financiamentos de bens como veículos e imóveis. Nesta pesquisa, destacaram-se dois sistemas de amortização que foram estudados em aula: O SAF e o SAC (sistema de amortização constante). O estudo do SAF será abordado na sequência desse trabalho.

4. Sistema de Amortização Francês (SAF)

O SAF, também conhecido como tabela Price, é muito utilizado nos cálculos de financiamentos ([4]). Segundo [5], a denominação tabela Price é em homenagem ao filósofo, teólogo e matemático inglês Richard Price, que viveu no século XVIII e incorporou a teoria dos juros compostos às amortizações de empréstimos. O nome francês deve-se ao fato do sistema ser desenvolvido na França, no século XIX.

De acordo com [7, p220], "esse sistema consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação, ou pagamento, é composto por duas parcelas distintas: uma de juros e outra de capital (chamada amortização)."

Apesar da pesquisa feita pelos alunos apontar este sistema como um dos mais usados pelo mercado, principalmente em financiamentos de curto e médio prazo, como é o caso do financiamento de automóveis, observou-se que a maioria dos alunos tiveram dificuldade de compreender o funcionamento desse sistema. Foi necessário explorar os conceitos trazidos por eles a partir de exemplos para a adequada compreensão do sistema de amortização em questão. Uma das percepções apresentadas pelos alunos a partir da pesquisa foi a de que se tratava de um sistema de amortização em que o valor das parcelas era constante. Dessa forma a discussão passou a ser vinculada ao estudo anterior, encarando o problema como uma série de pagamentos uniformes. Os alunos trouxeram para a aula vários exemplos e tabelas em planilhas já prontas que serviram de base para o início dos estudos. O exemplo 5, adaptado de [4, p52], serviu para a construção de uma tabela Price com os alunos utilizando uma planilha eletrônica, buscando compreender o significado dos dados em uma tabela Price.

Exemplo 5. Uma pessoa deseja fazer um empréstimo de R\$ 1.000,00 e pagar este empréstimo em 6 parcelas iguais, a uma taxa de 5% ao mês. Construa uma tabela para representar os dados utilizando o SAF.

Inicialmente foi calculado o valor de cada parcela, usando a equação (2), visto que o SAF é composto por parcelas de valor constante.

$$1000 = P \cdot \left(\frac{1-(1+0{,}05)^{-6}}{0{,}05} \right) \Rightarrow 50 = P \cdot (0{,}253785) \Rightarrow P = \text{R\$ } 197{,}02.$$

Assim, as seis parcelas são no valor de R\$ 197,02, o que permitiu o início da construção da planilha, conforme mostrado na segunda coluna da tabela 1.

Note que 5% da dívida inicial que é de R\$ 1.000,00 corresponde ao juro do primeiro mês, isto é, $J_1 =$ R\$ 50,00. Assim, a amortização do primeiro mês A_1 é o valor da parcela subtraído do juro, ou seja, $A_1 =$ R\$ 197,02 − R\$ 50,00 = R\$ 147,02. Dessa forma a dívida após o pagamento da primeira parcela (isto é, após o primeiro mês) passa a ser, $D_1 =$ R\$ 1000,00 − R\$ 147,02 = R\$ 852,98, conforme mostrado na linha correspondente ao primeiro mês na tabela 1. De forma análoga, calculando os 5% dessa dívida tem-se um juros de $J_2 =$ R\$ 42,65 e uma amortização de $A_2 =$ R\$ 197,02 − R\$ 42,65 = R\$ 154,37. Portanto a dívida para o próximo mês é de $D_2 =$ R\$ 852,98 − R\$ 154,37 = R\$ 698,61 e assim sucessivamente até o pagamento da 6 parcela, quando a dívida é liquidada.

Tabela 1: Liquidação de dívida em tabela Price.

Tempo (n)	Parcelas (P_n)	Juros (J_n)	Amortização (A_n)	Dívida (D_n)
0	–	–	–	R\$ 1000,00
1	R\$ 197,02	R\$ 50,00	R\$	R\$ 852,98
2	R\$ 197,02	R\$ 42,65	R\$ 154,37	R\$ 698,61
3	R\$ 197,02	R\$ 34,93	R\$ 162,09	R\$ 536,52
4	R\$ 197,02	R\$ 26,83	R\$ 170,19	R\$ 366,33
5	R\$ 197,02	R\$ 18,31	R\$ 178,70	R\$ 187,63
6	R\$ 197,02	R\$ 9,38	R\$ 187,63	Dívida liquidada

Utilizando planilha eletrônica foram criadas pelos alunos tabelas Price para a realização de simulações de vários problemas propostos em sala de aula, o que possibilitou a descoberta e discussão dos principais aspectos desse tipo de financiamento de forma que o estudo não se limitou a uma simples análise do comportamento dos juros compostos. Os resultados observados no desenvolvimento da tabela Price foram formalizados com os alunos através do teorema 3, disponível em [4, p60].

Teorema 3. *No sistema francês de amortização, sendo i a taxa de juros e n o número de pagamentos, temos:*

$$P_k = D_o \cdot \left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right),\ D_k = D_o \cdot \left(\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}\right),\ J_k = i \cdot D_{k-1},\ A_k = P_k - J_k$$

sendo P_k o valor da parcela, D_o a dívida inicial, D_k o valor da dívida , J_k o juro pago e A_K a amortização, relativas à k-ésima parcela.

Observou-se ainda que ao lançar um número muito grande de parcelas, essa parcela passaria a não se alterar significativamente, concluindo-se que quanto menor o número de parcelas, menor é o valor total de juros a serem pagos. De fato, observou-se que no limite quando o número de parcelas tende ao infinito, o valor da parcela tende a um valor fixo que corresponde ao juro do primeiro mês. Essa situação foi discutida a partir do exemplo 6.

Exemplo 6. *Considere o financiamento de um automóvel pelo SAF com a primeira parcela sendo paga um mês após a compra e cujo valor financiado é de R\$ 24.000,00. Se a taxa de juros é de 2% ao mês, determine o valor das prestações para financiamento em 24, 60 e 120 meses. Faça uma simulação também para verificar o valor da parcela para uma situação hipotética de esse financiamento ser em 180, 360 e 720 meses. Faça uma análise do comportamento do valor da parcela para uma quantidade grande de parcelas.*

Pelo desenvolvimento da soma dos termos da PG:

$$24000 = \frac{P}{1{,}02} + \frac{P}{1{,}02^2} + \frac{P}{1{,}02^3} + \cdots + \frac{P}{1{,}02^{24}}$$

ou pela equação (2) segue que para pagamento da dívida em 24 meses, o valor de cada parcela fica $P =$ R\$ 1.298,91. De forma análoga, para as demais situações solicitadas no problema, obtém-se o valor da parcela, conforme ilustrado na tablela 2.

Tabela 2: Relação entre quantidade de parcelas e valor de cada parcela.

Número de parcelas	Valor da parcela
24	R\$ 1.298,91
60	R\$ 690,43
120	R\$ 529,15
180	R\$ 493,99
360	R\$ 480,39
720	R\$ 480,00

Após a simulação de vários financiamentos a longo prazo usando o SAF, os alunos perceberam que quando se aumenta indefinidamente o número de parcelas, a variação do valor das parcelas fica cada vez menor. Voltando ao problema proposto no exemplo 6, ao considerar mais de 720 parcelas, a variação ocorreria apenas a partir da quarta casa decimal, que para valores monetários é desprezada. Na prática, isto significa que se continuar aumentando o número de parcelas, o valor da parcela fica inalterado. Essa discussão motivou o estudo de progressões geométricas infinitas, para compreender o que ocorre nestas situações do ponto de vista matemático.

Considerando uma PG de termo geral $a_n = a_1 \cdots q^{n-1}$, a soma de seus termos é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \ q \neq 1 \tag{3}$$

Para $|q| < 1$, a soma S_n em (3) tem um limite finito quando $n \to \infty$, pois em

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \ \text{quando } |q| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0-1)}{q-1}$$

e portanto:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{4}$$

Quando $|q| \geq 1$, q^n diverge e portanto $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ diverge quando $n \to \infty$ e essa soma representa uma PG divergente.

Embora não seja objetivo discutir formalmente conceitos de limite no Ensino Médio, a compreensão intuitiva é perfeitamente possível e a notação usada para sua representação também é compreendida pelos alunos. Observou-se com os alunos que nos casos estudados envolvendo situações de financiamento, a razão da PG é dada por $q = \dfrac{1}{1+i}$ de forma que $|q| < 1$, visto que $i > 0$. Assim, a soma converge. Voltando ao exemplo 6, usando a equação (4) tem-se:

$$24.000{,}00 = \frac{P}{1{,}02} + \frac{P}{1{,}02^2} + \frac{P}{1{,}02^3} + \cdots = P \cdot \left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} + \cdots \right)$$
$$= P \cdot \left(\frac{\frac{1}{1{,}02}}{1 - \frac{1}{1{,}02}} \right) = P \cdot \left(\frac{\frac{1}{1{,}02}}{\frac{1{,}02-1}{1{,}02}} \right) = P \cdot \left(\frac{1}{0{,}02} \right) = 50P$$

de forma que ao considerar “infinitas” parcelas, o valor de cada parcela fica: $P =$ R\$ 480,00.

Isto significa dizer que aumentando indefinidamente o número de prestações, o valor da parcela tende a um valor fixo não havendo possilidade de ficar abaixo desse valor. Observando o problema, os alunos perceberam que 2% do valor da dívida de R\$ 24.000,00 corresponde a R\$ 480,00. Isto significa que ao aumentar indefinidamente o número de prestações, o consumidor passa a pagar apenas o juro de sua dívida e não faz a amortização da mesma. Esse raciocínio é confirmado ao generalizar a situação discutida anteriormente no exemplo.

Consideramos uma dívida de valor atual D_0 a uma taxa de juros i para pagamento em n parcelas iguais e sucessivas, vencendo a primeira um período de tempo após o instante atual. Considerando que $P = P(n)$, se fizermos o número de parcelas crescer indefinidamente, isto é, fazendo $n \to \infty$, temos a soma de uma PG com infinitos termos. Segue então, usando a equação (4):

$$\begin{aligned}
D_0 &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{P}{1+i}+\frac{P}{(1+i)^2}+\frac{P}{(1+i)^3}+\cdots+\frac{P}{(1+i)^n}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} P\cdot\left(\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\cdots\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} P\cdot\left(\frac{\dfrac{1}{(1+i)}}{1-\dfrac{1}{(1+i)}}\right)=\lim_{n\to\infty} P\cdot\left(\frac{\dfrac{1}{(1+i)}}{\dfrac{(1+i)-1}{(1+i)}}\right)=\lim_{n\to\infty} P\cdot\left(\frac{1}{i}\right)
\end{aligned}$$

ou seja: $\lim\limits_{n\to\infty} P = i\cdot D_0$, o que significa que de fato o valor da parcela corresponde ao valor do juro mensal relativo à dívida, ou equivalentemente ao juro do primeiro mês, visto que a dívida se manterá constante. Note que $i \cdot D_o$ é o valor limite da prestação. Uma vez que no sistema monetário são usadas apenas duas casas decimais, pela definição de limite fica evidente que na prática poderá ser considerada a igualdade $P = i\cdot D_0$.

5. Financiamento com carência para pagamento

Em muitas situações práticas, o agente financeiro oferece uma carência para o início dos pagamentos, porém com a manutenção da incidência de juros sobre o valor da dívida. Ao tratar as questões de matemática financeira como aplicação do estudo da PG, esta situção fica de simples compreensão, conforme ilustrado no exemplo 7, adaptado de [4, p63].

Exemplo 7. *Um indivíduo fez uma compra no valor de R\$ 2.000,00 para pagamento em 12 parcelas mensais iguais a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor de cada parcela se a 1ª é paga:*

(a) no ato da compra.

(b) cinco meses após a compra.

Para a solução do item (a), note que sobre a primeira parcela não poderá incidir juro, uma vez que ela é paga no ato da compra. Assim, o juro passa a ser contabilizado a partir da segunda parcela, conforme segue:

$$\begin{aligned}
2000 &= P+\frac{P}{1{,}02}+\frac{P}{1{,}02^2}+\frac{P}{1{,}02^3}+\cdots+\frac{P}{1{,}02^{11}} = P.\left(1+\frac{1}{1{,}02}+\frac{1}{1{,}02^2}+\frac{1}{1{,}02^3}+\cdots+\frac{1}{1{,}02^{11}}\right)\\
&= P\cdot\frac{\left[\left(\dfrac{1}{1{,}02}\right)^{12}-1\right]}{\dfrac{1}{1{,}02}-1} = P\cdot\frac{1{,}02^{-12}-1}{1{,}02^{-1}-1}\approx P\cdot(10{,}787)
\end{aligned}$$

de onde segue, considerando arredondamento para duas casas decimais (sistema monetário), que: $P = 185{,}41$.

Para a solução do item (b) devemos considerar que a primeira parcela será para 5 meses após a compra, de forma que seu valor já deve ser reajustado em 5 períodos. Assim, a expressão para a obtenção da parcela fica:

$$2000 = \frac{P}{1{,}02^5} + \frac{P}{1{,}02^6} + \frac{P}{1{,}02^7} + \cdots + \frac{P}{1{,}02^{16}} = \frac{P}{1{,}02^5} \cdot \left(1 + \frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \cdots + \frac{1}{1{,}02^{11}}\right)$$

$$= \frac{P}{1{,}02^5} \cdot \left(\frac{\left[\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^{12} - 1\right]}{\frac{1}{1{,}02} - 1}\right) = \frac{P}{1{,}02^5} \cdot \left(\frac{1{,}02^{-12} - 1}{1{,}02^{-1} - 1}\right) \approx P \cdot (9{,}77)$$

o que resulta para o sistema monetário que: $P = 204{,}71$.

Assim, o valor da prestação, para pagamento da primeira parcela após cinco meses é de R$ 208,31.

6. Análise do processo de aprendizagem

Ao longo de todo processo de aplicação do projeto foram realizadas observações e anotações que possibilitaram avaliar e analisar o processo de aprendizagem dos conceitos discutidos com os sujeitos da pesquisa. Observou-se que ao trabalhar conceitos de matemática financeira como aplicação de outros conteúdos, em particular, da PG, o aluno consegue estabelecer com certa facilidade as relações entre o valor das parcelas e os períodos em que serão feitos os pagamentos, sem a necessidade de recorrer a muitas fórmulas prontas que em determinados momentos não fazem muito sentido para ele. Da forma como foi trabalhado o conteúdo proposto, os alunos mantiveram-se motivados e participativos, pois ficou-lhes evidente a aplicabilidade dos conteúdos e tiveram consciência da importância desse conhecimento para seu cotidiano.

Com a orientação do professor, os alunos foram capazes de estabelecer associações entre os conteúdos trabalhados, percebendo a aplicação prática do estudo da PG em um contexto de muita importância para sua organização financeira. Observou-se intervenções e contribuições de forma a tornarem-se os protagonistas do processo de aprendizagem. Percebeu-se que a maioria dos alunos envolvidos neste trabalho conseguiu atribuir significados aos conceitos e às relações matemáticas trabalhadas.

Ao longo do trabalho desenvolvido, observou-se que além dos conceitos abordados de PG e de matemática financeira os alunos desenvolveram habilidades de trabalho com planilhas eletrônicas, organização de dados, análise dos sistemas financeiros e compreensão, mesmo que de forma bastante intuitiva e superficial, do conceito de limites.

A aplicação do questionário final mostrou que os sujeitos envolvidos ampliaram significativamente seus conhecimentos de matemática financeira e progressões, o que lhes permitiu desenvolver questões mais complexas sobre questões financeiras do cotidiano, conseguindo estabelçecer relações entre conceitos e mostrando capacidade de fazer planejamentos financeiros. Foi observada uma grande evolução dos alunos no período entre a aplicação dos dois questionários.

Entende-se que para ensinar e aprender matemática é necessário que sejam proporcionadas reflexões sobre o que e como trabalhar determinados conteúdos. É fundamental que o professor procure relacionar conteúdos que em muitas situações são trabalhados de forma desconexa, para facilitar a atribuição de significados ao que se ensina. Os alunos tiveram a percepção de que os conceitos matemáticos aprendidos não são independentes entre si. Espera-se que este trabalho contribua como uma sugestão para os docentes de matemática que queiram trabalhar os conteúdos de forma mais integrada.

7. Considerações finais

No trabalho foram apresentadas atividades desenvolvidas com alunos do Ensino Médio, mostrando a possibilidade de trabalhar de forma integrada conceitos de diferentes conteúdos da Matemática. Nestas atividades foram trabalhados tópicos de matemática financeira integrados com conceitos de progressões geométricas. A avaliação das atividades feita pela observação dos sujeitos durante o desenvolvimento da pesquisa e dos questionários aplicados mostra que a estratégia se mostrou bastante eficiente, permitindo a ampliação significativa dos conhecimentos acerca dos temas discutidos.

Agradecimentos

O primeiro autor foi bolsista da CAPES pelo PROFMAT durante o desenvolvimento do projeto.

Referências

[1] Ausubel, D. P. *A Aprendizagem Significativa: A Teoria de David Ausubel*. São Paulo-SP: Moraes, 1982.

[2] Dante, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. São Paulo-SP: Editora Ática, 2011.

[3] Fernandes, E. *David Ausubel e A aprendizagem Significativa*. Revista Nova Escola, edição 248, 2011. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/formacao/david-ausubel-aprendizagem-significativa-662262.shtml>. Acesso em: 05 de julho de 2014.

[4] Morgado, A. C. *Progressões e Matemática Financeira*. Rio de Janeiro: SBM, Quinta Edição, 2010.

[5] Pereira, M. G. *Plano Básico de Amortização pelo Sistema Francês e Respectivo Fator de Conversão*. Dissertação de doutorado. São Paulo-SP: FCEA, 1965.

[6] Rodrigues, L. M. *O Ensino da Matemática Financeira no Ensino Médio*. Dissertação de mestrado, UTFPR-PROFMAT. Curitiba-PR, 2013.

[7] Sobrinho, J. D. V. *Matemática Financeira*. São Paulo-SP: Editora Atlas, Sétima Edição, 2000.

Márcio Rodrigues
E. E. Professor Pascoal Grecco e Colégio Lantagi - COC
<marluro2@yahoo.com.br>

Vitor Petry
Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS - Chapecó - SC
<vitor.petry@uffs.edu.br>

Recebido: 2015
Publicado: 2015

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.3, n.1, 2015
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2015/pmo34

Entendendo problemas e conceitos em quadros diferentes da matemática

Paulo Teixeira

Resumo

Este trabalho objetiva refletir acerca de questões relativas ao ensino e à aprendizagem de conceitos matemáticos em quadros diferentes, dentro da Matemática. Muitas vezes - particularmente em geometria - quando um problema é proposto há necessidade de se mudar de contexto no qual ele é apresentado de modo a poder resolvê-lo. A essa passagem de um contexto para outro Régine Douady chama de *mudança de quadro* (*Jogo de quadros*). Por vezes, fazer uma *mudança de quadro* pode facilitar a resolução de um problema e/ou ajudar na compreensão de certo procedimento, inclusive quanto à prova de sua validade. Neste trabalho vamos apresentar treze exemplos, em distintos contextos, e relacioná-los às caracterizações acerca do *Jogo de quadros*, não como necessidade para resolver um problema, mas para mostrar que em outro contexto cada um deles ganha outros olhares, seja para a melhor compreensão dos procedimentos envolvidos, seja para dimensionar o alcance dos conceitos.

Palavras-chave: Jogo de quadros; Mudança de quadro; Ensino de Matemática; Conhecimento; Saber.

Abstract

This work aims to reflect on issues related to the teaching and learning of mathematical concepts in different frameworks within Mathematics. Many times – particularly in geometry – when a problem is proposed there is a need to change the context in which it is presented so that it can be solved. To this passage from one context to another Régine Douady calls a *change of framework* (*Game of frameworks*). Sometimes making a *change in the framework* can facilitate the resolution of a problem and/or help in understanding a certain procedure, including proof of its validity. In this work we present thirteen examples, in different contexts, and relate them to the characterizations about the *Game of Frameworks*, not as a necessity to solve a problem, but to show that in another context each of them gains other looks, to the procedures involved or to rescale the scope of the concepts.

Keywords: Game of frameworks; Change of framework; Mathematics Teaching; Knowledge; Wisdom.

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

1. Introdução

O conceito de “quadro, mudança de quadro e jogo de quadros” foi utilizado na didática da matemática francesa, pela primeira vez, por Régine Douady ([3]) na sua tese de doutoramento “Jogo de quadros e dialética ferramenta/objeto”.

Segundo [3], um quadro é constituído de “ferramentas” de uma área da Matemática, de relações entre os “objetos”, de formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais que estão associadas às “ferramentas” em questão. Assim, 2 (dois) quadros podem ter os mesmos “objetos”, mas ser diferentes por conta das imagens mentais e da problemática que é proposta para cada um deles [6, p389].

A noção de quadros (mudança de quadros) é importante na resolução de problemas, uma vez que é possível que em diferentes quadros se possam mobilizar diferentes “ferramentas” para resolvê-los. Douady ([3]) propôs essa noção e a “dialética ferramenta objeto” quando observou o trabalho de pesquisadores de matemática em atividade enquanto resolviam problemas.

Segundo Douady ([3]), “[...] na atividade de pesquisa, para resolver um problema, a mudança de quadro, ou seja, uma mudança de contexto ou de modelo teórico é, às vezes, uma mudança decisiva” [3, p54].

Para um dado conceito matemático, no contexto da mudança de quadros, distingue-se o conceito “ferramenta” – onde interessa o uso que é feito do conceito para a resolução de um problema (uma “ferramenta” adapta-se aos diversos problemas em que o conceito está presente) do conceito “objeto” – aqui, o conceito está presente dentro de um contexto mais geral, reconhecido que é pela comunidade de educadores e matemáticos [3, p9].

Muitas vezes - particularmente em problemas de geometria - quando um problema é proposto, para resolvêlo é necessário mudar o contexto em que ele é apresentado de modo a poder resolvê-lo. Essa passagem, de um contexto para outro, foi chamado por Douady ([3]) de *mudança de quadro* (*Jogo de quadros*).

Por vezes, fazer uma *mudança de quadro* pode facilitar a resolução de um problema. Mas, também, pode ajudar na compreensão de certo procedimento que por vezes o professor apresenta e faz uso com seus alunos e, por estar em um contexto diferente daquele em que está sendo utilizado, ou então, por necessitar de outros conceitos matemáticos que justifiquem sua validade, o professor se vê impossibilitado de naquele particular contexto poder justificar para seus alunos sua adequação e validade.

Assim, neste caso, embora o procedimento seja adequado para aquele contexto nele o professor não dispõe de razões apropriadas/adequadas - dentro do contexto em que ele está sendo utilizado – para apresentar a prova de sua validade, necessitando, portanto, mudar de quadro (de contexto) para que possa, assim, fazê-lo.

Neste trabalho vamos apresentar exemplos, em diferentes contextos - da Educação Básica e da Álgebra Linear - e relacioná-los às caracterizações presentes no *Jogo de quadros*.

Mas, estes exemplos serão desenvolvidos não como necessidade para resolver um problema em si, mas para mostrar que em outro contexto cada um deles ganha outros olhares, seja para a melhor compreensão dos procedimentos que foram utilizados no desenvolvimento, seja para dimensionar o alcance dos conceitos apresentados de início.

É o caso do exemplo de Álgebra Linear, que será apresentado. Nele, conceitos associados às transformações lineares são consolidados mediante uma identificação com conceitos já consolidados da Teoria das Matrizes. Igualmente, conceitos identificados com as transformações lineares também podem ser definidos, de maneira similar, na Teoria das Matrizes. Nestas situações, diz-se que fica estabelecido um isomorfismo (um operador linear bijetor) entre cada matriz de elementos reais e a correspondente transformação linear associada a ela.

A Mudança de quadros é (deveria ser) muito importante no cenário do ensino de Matemática, uma vez que ela contribui para melhorar a compreensão de novos conceitos e procedimentos utilizados ao longo do desenvolvimento de determinado conteúdo matemático.

2. O que é um “quadro”?

Douady ([5]) caracteriza a noção de quadro da seguinte maneira: “Um quadro é constituído de objetos de um campo da matemática, de relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diferentes e das imagens mentais associadas a esses objetos e a essas relações” [5, p135].

Temos como exemplos o quadro algébrico, o quadro geométrico, o quadro numérico, o quadro das funções, o quadro da estatística, o quadro vetorial, o quadro do cálculo numérico, etc. Um quadro pode ser subdividido em outros quadros se o modelo teórico que o define (conjunto de axiomas da teoria) for diferente. Assim, por exemplo, o quadro geométrico pode ser subdividido em quadro da geometria euclidiana, quadro da geometria hiperbólica, quadro da geometria esférica, quadro da geometria projetiva, quadro da geometria afim, quadro da geometria das transformações, quadro da perspectiva cônica, quadro da perspectiva cavaleira, quadro da geometria descritiva, quadro da geometria analítica, etc...

3. O que é um “mudança de quadro”?

Segundo Douady ([5]), uma mudança de quadro é uma passagem de um quadro para outro com o propósito de obter formulações diferentes para um problema.

As mudanças de quadro podem ser espontâneas (iniciativa do aluno) ou provocadas (intervenção de outro aluno ou do professor). Essa mudança pode acarretar encontrar novas dificuldades e o funcionamento de “ferramentas e técnicas” não pertinentes na primeira formulação. Utilizamos uma mudança de quadro sempre que num quadro o problema a ser solucionado ou a proposição a ser demonstrada apresenta dificuldades.

Assim, pode-se mudar do quadro da geometria euclidiana para o quadro da geometria analítica ou vice-versa. Outras vezes pode se mudar do quadro das funções para o quadro geométrico. Dependendo do problema proposto, uma mudança de quadro pode ser necessária para obter a solução de uma questão ou pode apenas facilitar a resolução de um problema.

Um jogo de quadros consiste em trabalhar uma mesma questão de Matemática em 2 (dois) diferentes domínios da Matemática. Assim, uma mudança de quadro é a passagem de um quadro para outro e a volta, com o problema resolvido, para o quadro inicial. Os matemáticos, em geral, utilizam o jogo de quadros para contribuir com o entendimento e o caminhar de suas descobertas de resultados e as correlações entre os conceitos que estão presentes em um quadro e em outro.

O avanço nas pesquisas empreendidas por [3] foi o de transportar alguns elementos deste procedimento de mudança de quadro - próprio dos matemáticos - para os alunos da Educação Básica ou

Superior, com o propósito de contribuir para a melhoria da aprendizagem de novos conceitos e as relações entre diferentes conceitos da Matemática.

Uma mudança de quadro se faz necessária quando existe uma grande dificuldade para resolver um problema ou para demonstrar um resultado em um determinado quadro no qual o conceito ou o problema está sendo apresentado.

Portanto, e de modo a resolver esse impasse, se procura outro quadro onde as “ferramentas” e os “objetos” matemáticos disponíveis facilitam a resolução do problema ou a demonstração e se tenha argumentos que validem os procedimentos utilizados. Depois, uma vez resolvido o problema ou feita a demonstração, se transporta a solução para o quadro inicial.

Porém, de maneira a justificar a necessidade de fazer-se uma mudança de quadro no ensino da Matemática é preciso contar com os conceitos presentes na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de autoria de Raymond Duval ([7]), uma vez que essa teoria é forte aliada neste processo por conta de estar diretamente relacionada com os procedimentos que precisam ser feitos por conta da utilização de novos registros e representações presentes no novo quadro e a correta correlação com os registros e representações do quadro anterior.

Douady ([5]) sugere um jogo interativo entre quadros para fazer progredir os alunos na fase de busca de uma solução para um problema. Esse “Jogo de Quadros” consiste em mudanças de quadro provocadas por iniciativa do professor em certas situações as quais permitem fazer avançar o aluno na resolução do problema. Trata-se do desenvolvimento de um procedimento no qual se transfere o problema de um quadro para outro, interpretam-se as correspondências entre os elementos dos 2 (dois) quadros, resolve-se o problema, e finalmente volta-se com a solução do problema para o quadro de partida.

Nesses procedimentos para a busca da solução do problema, Douady ([3]) distingue 3 (três) fases: o problema deve mobilizar conhecimentos anteriores dos alunos, mas estes conhecimentos são insuficientes para resolver o problema proposto. Assim, será preciso fazer uma transferência de um quadro para o outro, onde nesse último é dada uma interpretação ao fenômeno a ser estudado; um novo conceito deve ser estabelecido no novo quadro para resolver o problema, por meio de correspondências imperfeitas (seja por razões matemáticas ou por conhecimentos insuficientes por parte dos alunos) entre objetos e relações dos dois quadros. Uma nova e adequada “ferramenta” é estabelecida, ampliando os conhecimentos anteriores dos alunos, contribuindo para ampliar a visão conceitual e, finalmente, uma melhoria que se obtém entre essas correspondências - permitindo o progresso do conhecimento em cada um dos quadros quando o professor institucionaliza o novo “objeto” que surgiu das ampliações conceituais, fornecendo ao “objeto” a categoria de um novo “objeto matemático”.

Com a conclusão das três fases é possível dimensionar o alcance que a mudança de quadro proporciona para a ampliação dos conceitos conhecidos de início, e a correlação entre eles.

Ademais, a própria compreensão acerca dos novos conceitos e procedimentos que surgem ao longo das fases, e a posterior sistematização e consolidação destes pelo professor, justificam plenamente fazer uma mudança de quadro, quando necessária.

Segundo Duval ([7]), autor da “Teoria dos Registros de Representação Semiótica”, os “objetos” de estudo em Matemática recorrem a notações simbólicas, gráficos, tabelas, figuras e esquemas como seus representantes.

Segundo o autor, de modo que se adquira compreensão em Matemática é preciso fazer distinção entre o “objeto” e a sua “representação”. Com o passar do tempo, havendo dúvidas entre o papel de um e do outro, tal prática acarreta perda da compreensão acerca do conceito matemático envolvido, pois os conhecimentos apropriados tornam-se elementos que destoam dos contextos de aprendizagem – geram ausência de atenção ou passam a ser representações que não têm razão de ser produzidas.

Segundo o autor, “as representações semióticas dos objetos matemáticos são extrínsecas à aprendizagem conceitual dos objetos” [7, p14]. Assim, “para começar em Matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática” [7, p15].

Segundo Duval ([7]), uma mudança de quadro é uma mudança de contexto, uma mudança de modelo teórico, uma mudança de direção do pensamento. Daí decorre a importância que se empresta à Teoria dos Registros de Representação Semiótica para que se façam Mudanças de Quadros pertinentes e apropriadas. Segundo Rogalski ([8]), “para certos tipos de objetos alguns registros serão mais adaptados a determinados quadros, às vezes difíceis de distinguir quadro e registro” [8, p15]

Segundo o autor, a noção de ponto de vista é menos precisa que a de quadro e registro, pois se pode dizer que uma mudança de quadro ou de registro é uma ação que está relacionada à mudança de ponto de vista de um “objeto”. Por outro lado, é possível que, mesmo mudando de ponto de vista, se permaneça em um mesmo quadro ou em um mesmo registro.

Para Almouloud ([1]), pontos de vista diferentes para um objeto matemático são maneiras diferentes de olhá-lo, de fazê-lo funcionar e, eventualmente, de defini-lo. Nesse sentido, olhar um objeto em diferentes quadros é ter diferentes pontos de vista, embora se possam ter vários pontos de vista dentro de um mesmo quadro ([1, p81]).

4. Diferentes exemplos de mudanças de quadros

Por vezes, ao necessitar de outro conceito matemático para justificar a adequação e a validade de alguma afirmação, o professor se vê impossibilitado de naquele particular contexto de resolução de um problema ou durante o desenvolvimento de um conteúdo, fazer isso com argumentos simples e próprios do contexto.

Assim, será preciso lançar mão de um diferente contexto daquele que está sendo utilizado de modo a elucidar a questão posta. Transitar para este novo contexto é fazer uma *mudança de quadro*. A mudança facilita a resolução de um problema e ajuda na compreensão de um conceito ou de um procedimento e, por essa, o professor ou o aluno deve fazer uso dessa possibilidade/necessidade.

Portanto, ao considerar que o procedimento esteja adequado para aquele contexto, mas não dispondo de razões apropriadas/adequadas, no universo do quadro que está sendo utilizado para garantir a prova da sua validade, é perfeitamente aceitável e, por vezes, imprescindível, que uma *Mudança de Quadro* seja feita. Apresentamos, a seguir, exemplos em diferentes contextos no universo da Matemática, e os relacionamos com as características presentes no *Jogo de Quadros*.

Os exemplos que serão desenvolvidos a seguir não têm como necessidade premente ter de fazer uma *Mudança de Quadro* para resolver o problema em si, mas para mostrar a importância que a mudança de quadro em si tem, uma vez que novo contexto (quadro), cada um dos exemplos ganha um novo olhar - seja para a melhor compreensão dos procedimentos utilizados durante a resolução, seja para ampliar o campo conceitual em relação à questão apresentada de início, permitindo identificar as relações entre diferentes conceitos próprios da Matemática e contribuindo para a apropriação de novos conhecimentos matemáticos.

Assim, conhecimentos de conteúdo e conhecimentos pedagógicos de conteúdo devem caminhar juntos no dia a dia da sala de aula com o propósito de contribuir para uma aprendizagem efetiva. Sobretudo, mostra a necessidade de o professor estar preparado para ensinar, em conformidade com as considerações de Shulman (1986) ([9] apud Shulman (1986)).

É o caso do exemplo de Álgebra Linear, segundo o qual os conceitos associados às Transformações Lineares são consolidados mediante a identificação com os conceitos presentes na Teoria das Matrizes, e vice-versa. Nessas situações, fica estabelecido um isomorfismo (um operador linear bijetor) entre uma matriz de elementos reais e a correspondente Transformação Linear associada a ela. Portanto, conceitos e resultados da Teoria das Matrizes podem ser obtidos e provados mediante o desenvolvimento inicial das Transformações Lineares.

Exemplo 1. O quadro da Aritmética de números naturais é constituído da construção do conjunto, de operações elementares e de resultados envolvendo esses elementos. Já o quadro da Teoria dos Conjuntos é constituído por relações de pertinência, de inclusão e operações entre conjuntos, entre outros. Se a axiomática que envolve os números naturais for considerada, o quadro inclui todos os resultados já matematicamente provados.

Para provar que o procedimento de determinação de todos os divisores de um número - bastante utilizado nos livros didáticos da Educação Básica - sempre funciona, mas se torna incipiente para resolver outras situações que têm proximidade com os conceitos envolvidos, será preciso lançar mão da ideia de mudança de quadros, segundo a perspectiva de Douady ([5]).

Inicialmente, se quer resolver o seguinte: Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 12?

Uma parcela considerável de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental utiliza o seguinte processo para determinar quais são os divisores de 12 e como calcular o quantitativo desses divisores:

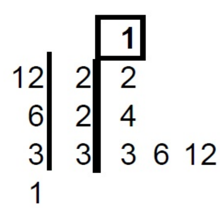

Figura 1: Dispositivo prático para a determinação dos divisores de 12.

É um procedimento canônico bastante conhecido e utilizado pelos professores e, igualmente, está presente em muitos livros didáticos. Da maneira como o procedimento é apresentado e desenvolvido, ele funciona bastante bem para certo tipo de situações que envolvem a determinação de todos os divisores de um número e a totalidade deles por contagem direta, como é o caso do exemplo acima. As questões que se colocam são: Porque esse procedimento funciona? Qual justificativa matemática está presente na sua utilização?

Depois de dividir o número pelos divisores primos em ordem monótona (iguais ou maiores do que) e, assim, "fatorar" o número dado segundo números primos, por vezes o professor desenha um traço vertical e coloca o número 1 em destaque (Por que razão se faz assim? Porque é assim, costumam os professores referir-se a esse repetido hábito) e, em seguida, multiplica-se os fatores primos do número dado pelos resultados anteriores até que o último primo tenha sido multiplicado pelos anteriores. Por fim, o professor informa a seus alunos que pelo fato de 12 ser escrito como $12 = 2^2 \cdot 3^1$, então para determinar o quantitativo de divisores de 12 basta tomar os expoentes dos fatores primos do número dado e, um a um, e após somar uma unidade a cada um deles, multiplicar os resultados entre si, obtendo como resultado a totalidade de divisores do número dado. Assim, o total de divisores de 12 é: $(2+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 = 6$ divisores. Mas, porque isso sempre funciona? Por que é costume fazer-se assim?

De modo a provar que esta técnica funciona perfeitamente bem vamos fazer uma *Mudança de Quadros* de maneira a provar que o procedimento é válido e que ele encontra fundamentação teórica matemática que garante sua validação e, portanto, que o resultado é verdadeiro.

De fato: Um número a é divisor de 12 se e somente se a é da forma $a = 2^m \cdot 3^n$, $m \in \{0, 1, 2\}$ e $n \in \{0, 1\}$, pois $12 = 2^2 \cdot 3^1$.

Como 1 é divisor de qualquer número diferente de zero, então as escolhas $m = 0$ e $n = 0$ são as escolhas triviais, ou seja, são as menores escolhas para os expoentes de cada um dos fatores primos do número dado, e, quando combinados pelo produto, resulta no valor 1. Essas escolhas sempre serão possíveis de ser feitas quando se "fatora" o número do qual se deseja conhecer os divisores e para determinar a quantidade de divisores. No exemplo, as escolhas recaem nos fatores primos 2 e 3, a saber: $2^m \cdot 3^n = 2^0 \cdot 3^0 = 1$. As outras opções de escolhas para os expoentes dos fatores primos 2 e 3 são as seguintes:

$m = 1$ e $n = 0$, que determina o divisor $2^m \cdot 3^n = 2^1 \cdot 3^0 = 2$; $m = 2$ e $n = 0$, que determina o divisor $2^m \cdot 3^n = 2^2 \cdot 3^0 = 4$; $m = 0$ e $n = 1$, que determina o divisor $2^m \cdot 3^n = 2^0 \cdot 3^1 = 3$; $m = 1$ e $n = 1$, que determina o divisor $2^m \cdot 3^n = 2^1 \cdot 3^1 = 6$; $m = 2$ e $n = 1$, que determina o divisor $2^m \cdot 3^n = 2^2 \cdot 3^1 = 12$. Essas escolhas encerram todas as "combinações" possíveis escolhas entre os fatores primos e os respectivos expoentes que, por sua vez, remete à ideia combinatória, presente em um dos significados do conceito da multiplicação de números naturais.

A tabela de dupla entrada a seguir ilustra as "combinações" que são feitas entre dos fatores primos 2 e 3 e seus possíveis expoentes:

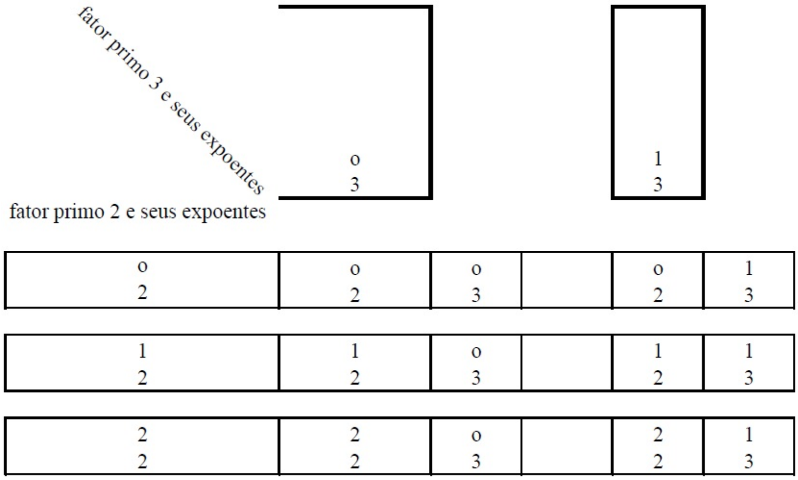

Figura 2: Tabela de dupla entrada com as "combinações" entre os fatores primos de 12 e seus expoentes.

Portanto, o total de divisores do número 12 é 6 (seis). Há 3 modos de escolher o expoente do fator primo 2, consoante sejam as escolhas 0, 1 ou 2. Há 2 modos de escolher o expoente do fator primo 3, conforme sejam as escolhas 0 ou 1. Para cada escolha do expoente do fator primo 2 se pode combinar com uma escolha para o expoente do fator primo 3. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo (ou Princípio da Multiplicação), da Análise Combinatória, tem-se que o número total de escolhas possíveis é $3 \cdot 2 = 6$, correspondente ao total de divisores do número 12.

De modo similar ao procedimento sistemático de colocar o número 1 em destaque (como visto no procedimento anterior), tal fato se justifica pelas escolhas iguais a zero, sempre, dos expoentes de cada um dos fatores primos do número dado, como foi feito na observação anterior quando da escolha de $m = 0$ e de $n = 0$ (uma escolha imediata, natural). Assim, se um número possui os fatores primos 2, 3, 5, 7, 11, etc, sempre será possível fazer a escolha natural de todos os expoentes iguais a zero para cada um dos fatores primos que estão presentes na fatoração do número dado, o que acarreta encontrar, então, o valor $1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 ...$

Essa escolha é sempre possível de ser feita uma vez que o conjunto de opções dos expoentes de cada um dos fatores primos de um número é um conjunto de números naturais em que o 0 (zero) é sempre um de seus elementos.

Por outro lado, fica claro que elevar qualquer fator primo do número dado à potência 1 e os demais fatores primos do número à potência zero determina todos os fatores primos do número dado que, obviamente, também são divisores imediatos, do número dado. No exemplo dado tem-se: $2^1 \cdot 3^0 = 2$ e $2^0 \cdot 3^1 = 3$ como os divisores primos diferentes de 1.

Assim, para provar que o procedimento apresentado acima de fato "funciona", será preciso fazer uma Mudança de Quadros para o quadro da Análise Combinatória, onde é possível provar que o "procedimento" em tela nada mais é que um mecanismo para justificar as escolhas do zero como os expoentes dos fatores primos do número dado para determinar o divisor 1, e que os demais divisores do número são obtidos por "combinações" entre as possíveis escolhas entre os expoentes dos fatores primos presentes no número.

A prova por meio de conceitos da Análise Combinatória é bastante motivadora, pois ela amplia o campo conceitual no sentido de permitir responder a outras questões dentro do mesmo contexto de divisores de um número que não o seriam apenas com os conhecimentos acerca do procedimento em si como por exemplo, o de decidir se um determinado número é ou não divisor de outro sem que seja preciso determinar todos os divisores do número dado e compará-los com os divisores do número que foi dado, mas a compreensão acerca do modo como o número é escrito como o produto de seus fatores primos elevados aos possíveis expoentes, respondendo à pergunta apenas tomando por base a possibilidade ou não da escolha de todos os expoentes do número que se deseja verificar se é divisor, ou não, para os respectivos fatores primos presentes nos dois números.

Assim, por exemplo, responder se 8 é ou não divisor de 12 se resume a "fatorar" o número 8, o que dá 2^3, e constatar que 3 não é uma possível escolha dentre as opções dos expoentes do fator primo 2 que está presente quando da "fatoração do número 12", que são os expoentes: 0 (zero), 1 (um) ou 2 (dois), pois $12 = 2^2 \cdot 3^1$. Portanto, 8 não é divisor de 12, mas 6 é divisor de 12.

Exemplo 2. Suponha que se está diante da situação de determinar qual o menor número natural que tem 24 divisores. Como proceder? O procedimento apresentado acima, de "fatorar" um número e determinar seus divisores não é suficiente para resolver este problema. Nesse caso, a decisão deve recair sobre as possíveis escolhas dos expoentes dos fatores primos 2, 3, 5 e 7, respectivamente os expoentes m, n, p e q, que satisfaçam aos possíveis produtos dos expoentes somados à unidade, conforme: $(m+1) \cdot (n+1) \cdot (p+1) \cdot (q+1) = 24$, tomando-se os fatores primos de dois em dois, de três em três ou até os quatro fatores, e decidir sobre quais expoentes determinam o menor número que tem 24 divisores. Assim, possivelmente um aluno começaria a solução desse problema construindo a tabela abaixo (ou outra similar) com a escolha de dois, três ou até quatro dentre os fatores primos 2, 3, 5 ou 7.

24 escrito em 2, 3 ou 4 produtos	Expoente do fator primo 2	Expoente do fator primo 3	Expoente do fator primo 5	Expoente do fator primo 7	Número obtido contendo 24 divisores	Situação
24=3.2.2.2	2	1	1	1	2^2*3^1*5^1*7^1=420	MAIOR
24=2.3.2.2	1	2	1	1	2^1*3^2*5^1*7^1=630	MAIOR
24=2.3.4	1	2	3	0	2^1*3^2*5^3*7^0=750	MAIOR
24=2.4.3	1	3	2	0	2^1*3^3*5^2*7^0=1350	MAIOR
24=3.2.4	2	1	3	0	2^2*3^1*5^3*7^0=1500	MAIOR
24=3.4.2	2	3	1	0	2^2*3^3*5^1*7^0=540	MAIOR
24=4.2.3	3	1	2	0	2^3*3^1*5^2*7^0=600	MAIOR
24=4.3.2	3	2	1	0	2^3*3^2*5^1*7^0=360	**MENOR**
24=3.8	2	7	0	0	2^2*3^7*5^0*7^0=...	MAIOR
24=4.6	3	5	0	0	2^3*3^5*5^0*7^0=...	MAIOR

Figura 3: Determinação do menor número que tem 24 divisores.

Analisando os resultados obtidos na tabela acima, conclui-se que o menor número que tem 24 divisores é o número 360, o que é coerente com a proposta de ter de escolher os maiores valores dos expoentes para os respectivos menores valores dos respectivos fatores primos, entre os números primos 2, 3, 5 ou 7.

Exemplo 3. Como proceder para determinar quantos números menores que 100 têm 12 divisores?

Neste caso, a decisão deve recair sobre todas as possíveis escolhas dos expoentes dos respectivos fatores primos 2, 3 e 5 que satisfazem aos possíveis produtos $(m+1)\cdot(n+1)\cdot(p+1) = 12$ que determinam números com 12 divisores que sejam menores que 100.

Aqui, também pode ser feita uma *Mudança de Quadros* para o quadro da Análise Combinatória e realizar uma avaliação acerca das possibilidades presentes nas "folhas terminais" de uma árvore de possibilidades, como mostrado na tabela a seguir, considerando que os valores indicados por `MENOR (*)` são os números menores que 100 que têm 12 divisores e, portanto, atendem à solução.

12 escrito em 2 ou 3 produtos.	Expoente fator primo 2.	Expoente fator primo 3.	Expoente fator primo 5.	Número obtido, com 12 divisores.	Situação
12=2.2.3	1	1	2	2^1*3^1*5^2=150	MAIOR
12=2.3.2	1	2	1	2^1*3^2*5^1=90	***MENOR que 100(*)***
12=3.2.2	2	1	1	2^2*3^1*5^1=60	***MENOR que 100(*)***
12=1.12	0	11	0	2^0*3^11*5^0=......	MAIOR
12=12.1	11	0	0	2^11*3^0*5^0=......	MAIOR
12=2.6	1	5	0	2^1*3^5*5^0=486	MAIOR
12=6.2	5	1	0	2^5*3^1*5^0=96	***MENOR que 100(*)***
12=3.4	2	3	0	2^2*3^3*5^0=108	MAIOR
12=4.3	3	2	0	2^3*3^2*5^0=72	***MENOR que 100(*)***

Figura 4: Determinação dos números menores que 100 que têm 12 divisores.

Analisando os resultados da tabela acima, apenas os números 60, 72, 90 e 96 são os números menores que 100 que possuem 12 divisores.

Exemplo 4. O propósito é o de determinar o número de modos que se tem para iluminar uma sala que possui 4 lâmpadas, todas elas em perfeito estado de funcionamento, e fixas ao teto da sala. Considere as lâmpadas L_1, L_2, L_3 e L_4. De uma maneira simplificada, podemos obter a solução após utilizar a enumeração de todas as possibilidades de escolhas de uma ou mais lâmpadas, independentemente da posição da lâmpadas ou lâmpadas que estará (ao) acesa (s) e, em seguida, efetuar a contagem direta. A seguir, todas as possibilidades de iluminar a sala:

- iluminando a sala com uma única lâmpada: L_1 ou L_2 ou L_3 ou L_4, ou seja, 4 (quatro) possibilidades;

- iluminando a sala com duas lâmpadas: L_1 e L_2 ou L_1 e L_3 ou L_1 e L_4 ou L_2 e L_3 ou L_2 e L_4 ou L_3 e L_4, ou seja, 6 (seis) possibilidades;

- iluminando a sala com três lâmpadas: L_1 e L_2 e L_3 ou L_1 e L_2 e L_4 ou L_1 e L_3 e L_4 ou L_2 e L_3 e L_4, ou seja, 4 (quatro) possibilidades;

- iluminando a sala com todas as 4 (quatro) lâmpadas: L_1 e L_2 e L_3 e L_4, ou seja, 1 (uma) única possibilidade.

É possível obter a solução construindo uma árvore de possibilidades, tomando por base as ideias do Princípio Multiplicativo, da Análise Combinatória e, assim, por meio da enumeração de todas as possibilidades obteremse a solução. A figura a seguir apresenta a construção de 4 (quatro) árvores de possibilidades que, juntas, mostram todas as diferentes maneiras que se têm de iluminar uma sala que possui 4 (quatro) lâmpadas:

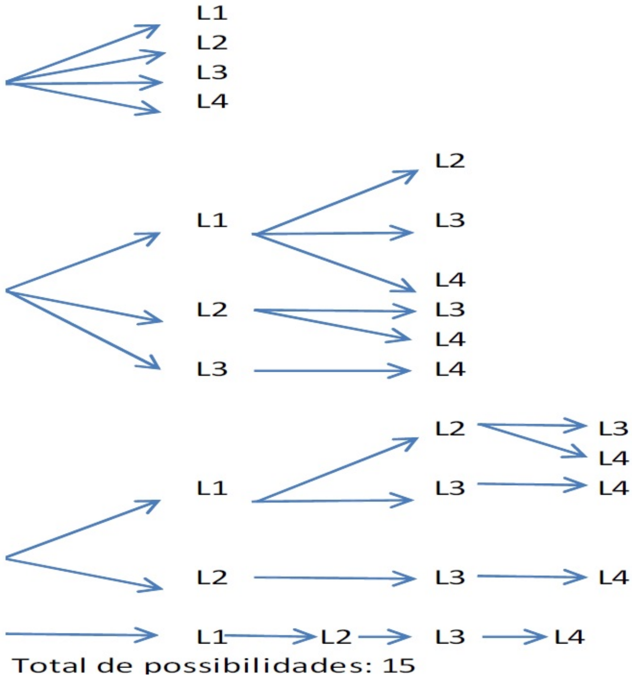

Figura 5: Árvore de possibilidades para obter a solução do exemplo 4.

Assim, por meio da enumeração de todas as possibilidades que compõem a solução do problema proposto, é feita a contagem direta e se obtêm as 15 (quinze) diferentes maneiras para iluminar uma sala que possui 4 (quatro) lâmpadas.

Uma *Mudança de Quadros* poderia ser feita de modo a provar, por outros argumentos, agora utilizando conceitos da Teoria dos Conjuntos, que o resultado do exemplo 4 é verdadeiro. Assim, Dado o conjunto $A = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$, o conjunto de partes desse conjunto é dado por:

$$\begin{aligned}\wp(A) =&\{\emptyset, \{L_1\}, \{L_2\}, \{L_3\}, \{L_4\}, \{L_1, L_2\}, \{L_1, L_3\}, \{L_1, L_4\}, \{L_2, L_3\}, \{L_2, L_4\}, \{L_3, L_4\},\\ &\{L_1, L_2, L_3\}, \{L_1, L_2, L_4\}, \{L_1, L_3, L_4\}, \{L_2, L_3, L_4\}, \{L_1, L_2, L_3, L_4\}\}\end{aligned}$$

A quantidade de elementos do conjunto de partes é dada por $\#\wp(A) = 2^4 = 16$. Como deve haver ao menos 1 (uma) lâmpada acesa de modo que a sala fique iluminada, o conjunto $\emptyset$ não deve ser considerado em função de representar a ideia de que todas as lâmpadas estão desligadas. Assim, tem-se um total de $2^4 - 1 = 15$ possibilidades para iluminar a sala. Essa resolução permitir fazer uma ampliação conceitual e determinar o total de maneira de iluminar uma sala com k lâmpadas.

É possível fazer uma nova *Mudança de Quadros* para provar, de outro modo, que o resultado acima é verdadeiro, agora utilizando propriedades do Triângulo de Pascal. Sabe-se que o somatório dos elementos da n-ésima linha do Triângulo de Pascal é dado por 2^n. No caso particular deste exemplo, considerando a $4^{\underline{a}}$ linha do triângulo de Pascal, uma vez que se dispõe de 4 lâmpadas na sala, esse somatório é dado por $2^4 = 16 = c_{4,0} + c_{4,1} + c_{4,2} + c_{4,3} + c_{4,4}$. Cada uma das parcelas pode ser entendida como $c_{4,p}$, ou seja, o número de modos de acender p lâmpadas entre 4 lâmpadas disponíveis, onde $p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. O coeficiente binomial $c_{4,0}$ indica a opção de, entre as 4 lâmpadas disponíveis, não ter escolhido acender nenhuma delas, o que, evidentemente, não atende à solução do problema. Assim, esta opção não deve ser considerada. Portanto, o total de possibilidades é dado por $16 - 1 = 15$.

Ainda dentro do quadro da análise combinatória, prova-se que o resultado acima é verdadeiro, novamente utilizando conceitos próprios da Análise Combinatória: o Princípio Multiplicativo.

Há 2 (duas) possibilidades para a lâmpada L_1: estar acesa ou apagada. O mesmo se aplica para as demais lâmpadas da sala. Assim, o total de possibilidades é dado por $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ possibilidades. Mas, dentre essas 16 possibilidades, incluímos a possibilidade de que as 4 (quatro) lâmpadas estivessem todas apagadas. Logo, desse total de 16 possibilidades, é preciso retirar essa possibilidade (todas as lâmpadas apagadas) ficando, então, com $16 - 1 = 15$ distintos modos de ter a sala acesa, quando se dispõe de 4 lâmpadas.

Esse resultado pode ser generalizado para um quantitativo de n lâmpadas disponíveis em uma sala, quando se quer calcular o total de diferentes modos de iluminar essa sala, o que dá um total de $(2^n - 1)$ diferentes modos de a sala ficar iluminada.

Segundo Teixeira (2012), situações-problema de contagem com as que foram apresentadas acima não são comuns de ser desenvolvidas por professores da Educação Básica em sala de aula. Assim se refere Teixeira (2012) acerca dessa questão: ,

> Ademais, são raros os livros didáticos que sinalizam para a motivação quanto à mobilização de diferentes estratégias para a resolução de um mesmo problema de contagem uma vez que, grande parte deles apresenta a resolução de situações-problema exemplos por meio da aplicação direta de uma fórmula que, em geral, foi somente apresentada de início. Além disso, também não identificamos nos livros didáticos a preocupação de orientar o aluno de que não há necessidade do uso de uma fórmula para determinar a solução para um problema de contagem por meio da apresentação de soluções para problemas de contagem que explorem o uso do Princípio Multiplicativo, do Princípio Aditivo e por meio de uma representação, como a árvore de possibilidades, sem o uso de uma fórmula em prosseguimento (Teixeira, 2012, p. 391-392)

Exemplo 5. Avaliamos, a seguir, uma Mudança de Quadro presente em conceitos próprios da Álgebra Linear. Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

A matriz ampliada desse sistema (1) é formada pela matriz dos coeficientes das variáveis e a matriz dos termos independentes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

Assim, o sistema linear pode ser representado pelo produto matricial $A \cdot X = B$, onde $A_{m\times n}$ é a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $B_{m\times 1}$ é a matriz $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e $X_{n\times 1}$ é a matriz $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. O sistema linear acima também pode ser representado por meio da equação vetorial

$$X_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + \cdots + X_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) = (b_1, \dots, b_m).$$

A matriz $A_{m\times n}$ é vista como uma aplicação linear $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônicas $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ de $\mathbb{R}^m$. Diz-se, também, que podemos associar a matriz $A_{m\times n}$ como:

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto T_A(v). \end{aligned}$$

Seja $X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $T_A(v) = A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$. Então, $T_A(v) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$, onde $y_i = A_i \cdot X$ e A_i é a i-ésima linha de A. Em geral,

$$\begin{aligned} T_A(u+v) &= A\cdot(u+v) = Au + Av = T_A(u) + T_A(v); \\ T_A(\alpha v) &= A\cdot(\alpha v) = \alpha(Au) = \alpha T_A(u). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto T_A(v). \end{aligned}$$

é uma transformação linear. Assim, dada uma matriz $A_{m\times n}$, ela produz uma transformação linear

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto T_A(v). \end{aligned}$$

em relação às bases canônicas $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ de $\mathbb{R}^m$.

Neste caso, fez-se uma *Mudança de Quadro* associado aos conceitos presentes na Teoria das Matrizes e dos Sistemas Lineares para o quadro da Álgebra Linear, particularmente, para o estudo das Transformações Lineares.

Por outro lado, dada uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ela pode ser representada por uma matriz $[T]^\beta_{\beta'}$, relativamente às bases $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$, respectivamente, de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$, tal que

$$\begin{aligned} T(v_1) &= u_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot w_i \\ &\vdots \\ T(v_n) &= u_n = \sum_{i=1}^{m} a_{im} \cdot w_i \end{aligned} \tag{3}$$

Daí: $[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ é a matriz de T em relação às bases canônicas $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\beta' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ de $\mathbb{R}^m$. Ademais, a matriz c é a transposta da matriz dos coeficientes do sistema linear apresentado acima, ou seja, $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$. Portanto, T passa a ser a aplicação linear associada à matriz A e bases $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \ldots, w_m\}$, isto é, $T = T_A$. Portanto, as propriedades que a matriz $A_{m\times n}$ possui estão diretamente associadas às propriedades da transformação linear associada a ela, como por exemplo:

- $dim(Im(T)) = p =$ posto da matriz $[T]_{\beta'}^{\beta} =$ número de linhas não nulas da matriz $B_{m\times n}$, a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a $A_{m\times n}$.

- $dim(Ker(T)) = dim(Nuc(T)) =$ nulidade da matriz $[T]_{\beta'}^{\beta} = n - p =$ diferença entre o número de colunas da matriz $A_{m\times n}$ e o posto da matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$.

- a transformação linear $T\colon V \to W$ é inversível se e somente se $det([T]_{\beta'}^{\beta}) \neq 0$.

- se a transformação linear $T\colon V \to W$ é inversível então $T^{-1}: W \to V$ é operador linear e $[T^{-1}]_{\beta}^{\beta'} = \left([T]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1}$.

Essa *Mudança de Quadro*, presente na Teoria das Matrizes e na Álgebra Linear, permite compreender que todo o estudo dos operadores lineares, aí associados os conceitos relativos ao estudo dos autovalores e dos autovetores; os operadores auto-adjuntos e ortogonais; as formas lineares, bilineares e quadráticas, e a classificação de cônicas e quádricas, podem ser feitas com a utilização das ferramentas matemáticas associadas à Teoria das Matrizes e à Teoria dos Determinantes, configurando-se em valioso instrumento para a exploração de conceitos que estão presentes nas cônicas, seções cônicas e nas quádricas, por exemplo, por meio de conceitos algébricos, em estreita correlação com os fundamentos da geometria que foram estudadas pelos gregos, e desenvolvidas a partir de suas propriedades geométricas, presentes nos trabalhos de Apollonius (260-170 A.C.). As considerações teóricas acerca dos conceitos próprios da álgebra Linear estão em [2].

Exemplo 6. Outra situação de Mudança de Quadros se configura no caso de determinar o total de diagonais de um polígono regular de n lados, $n \geq 3$.

Escolhido um vértice qualquer v_1, os segmentos de reta que unem os vértices adjacentes a esse vértice (v_2 e v_n) são lados do polígono e, assim, não podem ser contados como diagonais. Sobram $(n-3)$ vértices do polígono cujos segmentos de reta que os unem ao vértice v_1 são diagonais do polígono. Portanto, a partir do vértice v_1 se pode traçar $(n-3)$ diagonais. O mesmo ocorre para quaisquer um dos outros $(n-1)$ vértices do polígono. Assim, é possível traçar um subtotal de $(n-3)\cdot n$ diagonais. Mas, todas as diagonais assim consideradas foram duplamente contadas quando se conta as diagonais a partir de cada um dos vértices nas extremidades dessas diagonais, o que evidencia uma contagem em dobro. De modo a obter a contagem real, divide-se esse total por 2. Assim, há $d = \frac{(n-3)\cdot n}{2}$ diagonais em um polígono regular de n vértices (correspondentemente, n lados), $n \geq 3$.

Vamos fazer uma *Mudança de Quadros* para provar, de outro modo, que o resultado acima é verdadeiro no quadro da análise combinatória: Se um polígono regular tem n lados, ao escolher 2 (dois) quaisquer de seus vértices e uni-los por meio de um segmento de reta, é possível traçar uma diagonal ou um lado do polígono. Por outro lado, o número total de modos de fazer a escolha de 2 (dois) quaisquer vértices é calculado por $C_{n,2}$ (número de modos de escolher 2 (dois) objetos dentre n objetos distintos dados (combinações simples dois a dois)). Assim, o total $C_{n,2}$ de escolhas define, unicamente, o total de diagonais acrescido do número de lados do polígono de n vértices, ou seja: $C_{n,2}$ = número de diagonais (d) + número de lados (n). Portanto, $d = C_{n,2} - n = \frac{n\cdot(n-1)}{2} - n = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$, $n \geq 3$.

Uma nova *Mudança de Quadros* poderia ser feita para provar, por Indução no número de vértices (respectivamente lados), que o resultado acima é verdadeiro.

O polígono regular com o menor número de vértices é o triângulo, que possui 3 vértices. Portanto, o triângulo não possui diagonais. Assim, vale a primeira propriedade de indução P_1, pois, para $n = 3$ tem-se que $d_3 = \frac{3\cdot(3-3)}{2} = 0$.

Considere, por hipótese de indução, que o resultado acima é válido para $n = k$. Assim, $d_k = \frac{k\cdot(k-3)}{2}$. Vamos acrescentar um vértice v_{k+1} ao polígono anterior, entre os vértices v_j e v_{j+1}, $1 \leq j \leq n$. Desse novo vértice traçam-se $k-2$ novas diagonais (exceto para os vértices vizinhos ao vértice v_{k+1}, que são os vértices v_j e v_{j+1}), e mais uma diagonal (a diagonal que conecta os vértices v_j e v_{j+1}. No polígono anterior, ao conectar os vértices v_j e v_{j+1} forma-se um lado do novo polígono. Assim, no novo polígono, tem-se $(k-2)+1 = k-1$ diagonais a mais que o total de diagonais presentes no polígono anterior. Logo:

$$d_{k+1} = (k-1) + \frac{k\cdot(k-3)}{2} = \frac{2k-2+k^2-3k}{2} = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k-2)\cdot(k-1)}{2} = \frac{(k+1)\cdot[(k+1)-3]}{2}.$$

Portanto, o resultado fica provado, por indução.

Outra situação de Mudança de Quadros, agora no quadro da análise combinatória, de modo que se queira estender a ideia anterior para um poliedro regular de n vértices, de maneira a determinar o total de diagonais internas de poliedros regulares.

Ao escolher 2 (dois) quaisquer de seus vértices (cuja totalidade é dada por $C_{n,2}$) e uni-los por meio de um segmento de reta, pode acarretar uma das três situações seguintes: ou se obtém uma diagonal de face, ou uma diagonal interna do poliedro ou uma aresta do poliedro. Assim, $C_{n,2}$ = número de diagonais de face (DF) + número de diagonais internas (DI) + número de arestas (A). Logo: número de diagonais internas $(DI) = C_{n,2}$ − número de diagonais de face (DF) − número de arestas (A), ou seja: $(DI) = C_{n,2} - (DF) - (A)$. Vejamos o seguinte exemplo: Quantas diagonais internas possui um octaedro?

As 8 (oito) faces do octaedro são formadas por triângulos equiláteros que, obviamente, não têm diagonais de face. Além disso, o octaedro possui 6 vértices e 12 arestas (as quatro arestas da parte de cima, as quatro da parte de baixo e as quatro ao redor dos quatro vértices na parte central). Assim: $(DI)= C_{6,2} - 0 - 12 = 15 - 0 - 12 = 3$, ou seja, o octaedro possui 3 (três) diagonais internas, que são as seguintes: a diagonal que une os dois vértices isolados e as duas diagonais que unem, dois a dois, os vértices que estão na parte central.

De modo similar, prova-se que um tetraedro não possui diagonais internas, pois: $(DI) = C_{4,2} - 0$ (as faces são triangulares) $-$ 6 (as três arestas que ligam os vértices da base ao vértice de cima mais as três arestas que ligam os três vértices da base) $= 6 - 0 - 6 = 0$. O quadro abaixo mostra o total de diagonais internas para cada um dos Poliedros de Platão:

Poliedro	número de vértices (V)	número de faces	polígono das faces	número de diagonais por face	total de diagonais de face (DF)	número de arestas (A)	C V,2	D = C V,2 - A - DF diagonais internas
Tetraedro	4	4	triângulo	0	4 x 0 =0	(4 X 3)/2 = 6	6	0
Octaedro	6	8	triângulo	0	8 x 0 = 0	(8 X 3)/2 = 12	15	3
Cubo	8	6	quadrado	2	6 x 2 = 12	(6 X 4)/2 = 12	28	4
Dodecaedro	20	12	pentágono	5	12 x 5 = 60	(12 X 5)/2 = 30	190	100
Icosaedro	12	20	triângulo	0	20 x 0 = 0	(20 X 3)/2 = 30	435	405

Figura 6: Determinação do total de diagonais internas dos Poliedros de Platão.

Como ampliação das ideias conceituais tratadas se pode determinar uma maneira de contabilizar o número total de diagonais internas de um prisma regular reto que possui em suas bases um polígono regular de n lados.

Podemos fazer assim: Esse prisma possui n retângulos, congruentes entre si, que formarão as n faces laterais do prisma. Como cada retângulo possui 2 (duas) diagonais tem-se, então, um subtotal de $2n$ diagonais de face, contabilizadas no total de faces laterais do prisma. As 2 (duas) faces (superior e inferior) são formadas por um polígono regular de n lados, $n \geq 3$ e portanto, cada uma das faces possui um total de $d = \frac{(n-3)\cdot n}{2}$ diagonais.

Assim, há um subtotal de $(n-3)\cdot n$ diagonais de face contabilizadas nas 2 (duas) bases. Portanto, tem-se o total de $2n + (n-3)\cdot n$ diagonais de face em um prisma regular reto que tem em suas bases um polígono regular de n lados.

Qual o total de diagonais internas desse prisma regular reto?

Inicialmente vamos numerar os n vértices da face superior e os n vértices da face inferior obedecendo à mesma ordem dentre os índices desses vértices, isto é, para um dado vértice v_j da face superior, a aresta que o conecta com a face inferior encontra, exatamente, logo abaixo, o vértice w_j. Assim, escolhido um vértice qualquer v_j da face superior, os segmentos de reta que unem os vértices da face inferior "próximos deste vértice" - que são os vértices adjacentes w_{j-1}, w_j e w_{j+1} - quando conectados ao vértice v_j definem as seguintes situações: uma aresta (v_j, w_j) ou então as diagonais de face (v_j, w_{j-1}) e (v_j, w_{j+1}) (lembre que essas diagonais já foram incluídas na contagem anterior). Portanto, escolhido um vértice v_j na face superior, há $(n-3)$ vértices na face inferior que, quando conectados ao vértice v_j da face superior, definem diagonais internas. Portanto, contabilizando o total de diagonais internas para todos os vértices da face superior, há um total de $n \cdot (n-3)$ diagonais internas.

Se repetíssemos o procedimento para os vértices localizados na face inferior, estaríamos contando novamente essas mesmas diagonais internas. Então, há um total de $2n + (n-3)\cdot n$ diagonais de face e $n\cdot(n-3)$ diagonais internas, totalizando $2[n+n\cdot(n-3)] = 2[n^2-2n] = 2n\cdot[n-2]$ diagonais de um prisma, cujas bases são formadas por polígonos regulares de n vértices.

Ainda dentro do quadro da análise combinatória, é possível provar que o resultado acima é verdadeiro.

Se o prisma regular tem $2n$ vértices, ao escolher 2 (dois) quaisquer de seus vértices e uni-los por meio de um segmento de reta, podemos obter uma das três situações: uma diagonal de face, uma aresta ou uma diagonal interna desse poliedro. Por outro lado, o número de modos de fazer a escolha de 2(dois) quaisquer vértices, como visto, é determinado por $C_{2n,2}$ (número de modos de escolher 2 (dois) objetos dentre os $2n$ objetos distintos dados (combinações simples)). Assim, esse total de escolhas ($C_{2n,2}$) define, unicamente, o total de diagonais de face, acrescido do total de arestas e acrescido do total de diagonais internas desse poliedro. Ou seja: $C_{2n,2}$ = número de diagonais de face (DF) + número de arestas (A) + número de diagonais internas (DI). Portanto,

$$DI + DF = C_{2n,2} - A. \tag{4}$$

O número total de arestas é calculado assim: n arestas que conectam os vértices da face inferior aos vértices da face superior, mais as $2n$ arestas (que são os lados dos 2 (dois) polígonos regulares das faces superior e inferior) dos 2 (dois) polígonos regulares que constituem o prisma, totalizando $3n$ arestas. Assim, de (4) tem-se:

$$DI + DF = \frac{2n(2n-1)}{2} - 3n = \frac{4n^2 - 2n - 6n}{2} = \frac{4n^2 - 8n}{2} = \frac{2n^2 - 4n}{1} = 2n(n-2). \tag{5}$$

Se quiséssemos calcular o total de diagonais internas (DI), poderíamos, utilizando a igualdade (5), proceder assim: Primeiramente vamos determinar o total de diagonais de face: As faces são de dois tipos: retângulos (as faces laterais) e polígonos regulares de n lados (a face superior e a face inferior do prisma). Nos retângulos, há um total de: $n \cdot [C_{4,2} - 4] = n \cdot [6 - 4] = 2n$ diagonais de face. Nos polígonos regulares (faces superior e inferior) há um total de: $2 \cdot \frac{(n-3)\cdot n}{2} = n \cdot (n-3) = n^2 - 3n$ diagonais de face. Logo, o total de diagonais de face é dado por

$$DF = 2n + n^2 - 3n = n^2 - n. \tag{6}$$

Portanto, de (5) e (6), tem-se que:

$$DI = 2n \cdot (n-2) - (n^2 - n) = 2n^2 - 4n - n^2 + n = n^2 - 3n = n \cdot (n-3),$$

como provado antes.

5. Considerações finais

Com frequência uma Mudança de Quadros vem acompanhada de uma mudança de registro. Uma mudança de registro coincide, em muitos casos, com uma Mudança de Quadro. Nas situações-problema que foram apresentadas identificam-se diferentes registros de representação semiótica[1], alguns deles dentro do mesmo quadro - da Análise Combinatória - e outros nos quadros da Teoria dos Conjuntos, da Teoria das Matrizes e da Álgebra Linear. A mudança de resolução, em qualquer uma das situações apresentadas, para o caso inicial ou vice-versa, representa uma Mudança de Quadros. Quando se obtém, em uma mesma situação-problema, uma Mudança de Quadros, e, a seguir, por uma nova Mudança de Quadros se retorna ao quadro anterior, dizse que fizemos uso de um Jogo de Quadros.

Para descrever uma *Mudança de Quadro* é preciso se centrar essencialmente sobre uma situação-problema enquanto que, para descrever uma mudança de registro é preciso se centrar essencialmente sobre os objetos que estão sendo representados.

[1]Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, fornecem-nos um referencial estruturado de análise do funcionamento cognitivo da compreensão em matemática através da Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, o seu acesso passa, necessariamente, por representações semióticas (formas sob a qual a informação é descrita).

Assim, segundo Raymond Duval ([7]), a compreensão conceitual sobre o objeto matemático *função*, por exemplo, só é alcançada quando se coordenam os registros algébricos, tabular e gráfico. E esta é a condição para que o objeto não seja confundido com a sua representação.

Por essa razão considera-se que a passagem entre registros não se constitui em opção pedagógica do professor que permita enriquecer a resolução de uma situação-problema, mas é desejável que ela deva ser considerada como uma tarefa imprescindível e obrigatória para encaminhar o processo de ensino aprendizagem.

O autor deste artigo entende que a passagem de registros se trata de um momento da aprendizagem que não pode ser deixado de lado pelos professores, mas que cada um deve considerá-lo como uma tarefa docente necessária e obrigatória para se atingir uma aprendizagem significativa.

Por essas razões entende que para encaminhar uma aprendizagem efetiva, não há um acesso direto ao objeto matemático quando este é apresentado separado das suas representações quando se procura oferecer aos alunos um conhecimento abrangente e aprofundado do objeto matemático em questão.

Com as considerações que foram apresentadas neste trabalho - estendendo-se também para outros conceitos matemáticos -, o autor considera que Mudanças de Quadros devem ser incorporadas ao trabalho docente do professor. E este, por sua vez, também precisa incentivar seus alunos a fazerem o mesmo quando propuser que eles resolvam situações-problema pertinentes ao desenvolvimento de conceitos matemáticos em quadros diferentes da Matemática.

Práticas como a que aqui foi apresentada têm o propósito de incentivar a ampliação conceitual de alunos e professores, construindo pontes entre diferentes conceitos da Matemática.

Referências

[1] Almouloud, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática.* Curitiba. Editora UFPR, 2007.

[2] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L., Wetzler, H. G. *Álgebra Linear.* Harper & Row do Brasil, 1980.

[3] Douady, R. *Jeux de Dadres et Dialectique Outil-Objet dans l´Enseignement des Mathématiques.* Tese (Doutorado), 1986.

[4] Douady, R. *Jeux de Cadres et Dialectique Outil-Objet.* Recherches en Didactique dês Mathématiques (RDM), vol. 7.2, p. 5-31, 1986.

[5] Douady, R. *Repères.* IREM, n. 6, Janvier, 1992.

[6] Douady, R. *L'ingènierie Didactique, Um Moyen pour l'Enseignant d'Organiser lês Rapports Entie l'Enseignement et l'Apprentissage.* Chaier de DIDIREM, n. 19, IREM, Université Paris VII, 1993.

[7] Duval, R. *Semiósis e O Pensamento Humano.* São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[8] Rogalski, M. *Les Chagements de Cadre dans La Pratique dês Mathématiquas et Le Jeu de Cadre de Règine Douady.* In: Actes de La jounée em Hommage à Règine Douady, Université Paris 7, 2001.

[9] Teixeira, P. J. M. *Um Estudo sobre Os Conhecimentos Necessários ao Professor de Matemática para A Exploração de Problemas de Contagem no Ensino Fundamental.* Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNIBAN (Universidade Bandeirante de São Paulo), São Paulo, 2012.

Paulo Teixeira
IME-UFF, Colégio Pedro II
<pjuff@yahoo.com.br>

Recebido: 2015
Publicado: 2015

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.3, n.1, 2015
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2015/pmo35

Geometria dinâmica no ensino de transformações no plano

Margarete Medeiros Maria Gravina

Resumo

Este artigo trata de uma experiência didática com foco nas transformações geométricas no plano e no uso do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra. A experiência, na forma de oficina, foi com professores do Ensino Fundamental. Tendo como conteúdo matemático as transformações geométricas, a proposta integrou geometria e arte através da construção de pavimentações do plano e de mosaicos de Escher. O trabalho foi desenvolvido dentro dos princípios da Engenharia Didática e, para a realização das análises, usamos a teoria sócio-histórica, cuja referência principal é a obra de Vygotsky e, também, a teoria dos registros de representação de Duval, que trata do processo de aprendizagem da matemática sob o ponto de vista da semiótica. A partir das análises foi possível constatar que os professores participantes se apropriaram dos recursos e do sistema de representação que se tem no GeoGebra, bem como dos conceitos da geometria das transformações.

Palavras-chave: Transformações Geométricas; Arte; Geometria Dinâmica.

Abstract

This article deals with a didactic experience focusing on geometric transformations in the plane and use of the GeoGebra dynamic geometry environment. The experience, in the form of a workshop, was performed with elementary school teachers. Having as mathematical content the geometric transformations, the proposal integrated geometry and art through the construction of tessellation and Escher mosaics. The work was developed within the principles of Didactic Engineering and, for the accomplishment of the analyzes, we use the social-historical theory, whose main reference is the work of Vygotsky and also the theory of the records of representation by Duval, that deals with the process of learning of Mathematics from the point of view of semiotics. From the analysis, it was possible to verify that the participating teachers appropriated the resources and the system of representation that one has in GeoGebra, as well as the concepts of the geometry of the transformations.

Keywords: Geometric transformations; Art; Dynamic geometry.

1. Introdução

O objetivo da oficina foi fazer a formação de professores para o uso de tecnologias, com concomitante aprendizagem de conceitos da geometria das transformações. Também tivemos como

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

propósito desencadear um processo multiplicador de uso de tecnologia na escola – aos nossos alunos, então professores, caberia transpor para as suas salas de aula a experiência vivida ao longo da oficina. Assim estaríamos também provocando possibilidades de mudanças nas práticas pedagógicas, quando os professores nelas incorporam as tecnologias.

A oficina tratou de discutir novas formas de trabalhar a geometria escolar. Para isto, escolhemos o *software* de geometria dinâmica *GeoGebra*[1], uma ferramenta com consistente organização de conteúdos e *menus*, e produzida dentro da filosofia do *software* livre. Escolhemos o tema das transformações geométricas no plano e pavimentações, porque este é um assunto fortemente sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a ser trabalhado a partir das séries finais do Ensino Fundamental. Feita as escolhas, lançamo-nos nas leituras e reflexões que subsidiaram a concepção e implementação da experiência de formação de professores. Neste artigo apresentamos um recorte de tal proposta. O trabalho completo encontra-se na dissertação de mestrado "Geometria Dinâmica no Ensino de Transformações no Plano – uma experiência com professores da Educação Básica"[2], apresentada pelo primeiro autor do artigo no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS.

2. Algumas reflexões teóricas

De acordo com [15], nos últimos anos tem existido um crescente interesse pelo estudo da semiótica no campo da Educação Matemática. Segundo este pesquisador, diferentes são as razões que justificam esse interesse. Uma primeira razão diz respeito à tomada de consciência de que a atividade matemática é essencialmente uma atividade simbólica, e nesta direção ele menciona o trabalho de [6] sobre registros de representações. Uma segunda razão está na importância da compreensão da natureza do discurso matemático, no qual a semiótica aparece como uma teoria apropriada para dar conta da sua complexidade. Uma terceira razão se refere ao uso cada vez maior da tecnologia digital no ensino da matemática, e aqui a semiótica ajuda a entender o potencial das novas representações dinâmicas, disponíveis em diferentes *softwares*. E, por último, [15] destaca que a tecnologia e os signos são portadores de convenções e formas culturais de significação que fazem da semiótica um campo importante de pesquisa. Os trabalhos que hoje tratam de semiótica e aprendizagem da matemática, como aqueles de Radford e Duval, tem avançado com importantes contribuições sobre funcionamentos cognitivos que acompanham os processos de aprendizagem e as dificuldades que lhe são inerentes.

Apoiando-nos nas razões elencadas acima, decidimos tomar como embasamento teórico de nosso trabalho as ideias de Vygotsky, que já nos anos 30 tratavam da importância dos signos na construção do conhecimento. Nossas reflexões sobre os diferentes conceitos que estão na teoria de Vygotsky foram feitas a partir de publicações de diferentes autores (Ivic, 2010; [1], [11], [14], [15], [12]). Procuramos evidenciar o potencial da teoria sócio-histórica na construção das bases de propostas de ensino que visemo desenvolvimento cognitivo dos indivíduos e consideramos que os conceitos de interação social, mediação, interiorização e zona de desenvolvimento proximal podem ser norteadores de escolhas de procedimentos educativos. De acordo com Ivic (2010) nenhuma teoria psicológica do desenvolvimento confere tanta importância à educação quanto a de Vygotsky. Este autor também enfatiza que as referências à educação escolar que encontramos na obra de Vygotsky devem ser

[1]GeoGebra é um software de matemática dinâmica e multiplataforma de livre distribuição que pode ser encontrado no site www.geogebra.org.

[2]Disponível em http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/54888.

consideradas não como descrições das realidades educacionais, mas como propostas para renovar a educação.

Segundo Moll ([12]), Vygotsky afirma que "o fato central em nossa psicologia é o da mediação". É fato que nas nossas atividades utilizamos instrumentos que atuam como mediadores, dentre os quais se destacam as ferramentas e os signos. Segundo Moysés ([14]), no caso da aprendizagem da Matemática, muitos são os instrumentos que podem atuar como mediadores – por exemplo, a linguagem oral e escrita, os objetos concretos do mundo físico, os objetos virtuais como *softwares*. Radford ([15]) destaca a função mediadora dos signos na reconstrução da ação que leva a internalização do saber. Já Mariotti ([11]) afirma que a internalização do saber também depende de intercâmbios sociais que fazem uso do registro especial de linguagem que é o 'discurso do professor' – o professor é um especialista na cultura matemática e pode atuar como um mediador no processo de desenvolvimento cognitivo do aluno.

Existem, pelo menos, dois níveis de desenvolvimento cognitivo identificados por Vygotsky: um real, já formado, o que significa que processos mentais já estão estabelecidos; e um potencial, ainda a acontecer, e que diz respeito a capacidade de aprender com outra pessoa. Ainda segundo Vygotsky, aprendizagem e o desenvolvimento estão inter-relacionados, e dependem das interações sociais que acontecem naquilo que ele denomina de zona de desenvolvimento proximal. Moysés ([14]) destaca que o trabalho na zona de desenvolvimento proximal exige a interação entre aluno e professor e que o aluno progride no seu processo cognitivo quando tem alguém que sabe pô-lo a pensar. Radford ([15]) também descreve que Vygotsky em uma de suas palestras[3] chamou a atenção para o fato de que o ser humano está imerso em mundo de dispositivos artificiais (artefatos) e que estes dispositivos alteram o curso do desenvolvimento natural dos processos psíquicos, indo além de simples dispositivos de auxílio; e além dos dispositivos físicos, existem os dispositivos abstratos, como por exemplo os sistemas semióticos. Duval ([6]) afirma que a pluralidade de sistemas semióticos permite uma diversificação das representações de um mesmo objeto e isso aumenta as capacidades cognitivas dos indivíduos e suas representações mentais. As representações mentais funcionam sempre em simbiose com os sistemas semióticos - a partir de nossa imagem mental criamos a representação que nos permite a comunicação e a partir da representação que já existe, interiorizamos novas imagens mentais.

A articulação dessas diferentes representações é condição para a compreensão em Matemática. É essencial não confundir o objeto matemático, como, por exemplo as retas, com suas representações, pois um mesmo objeto matemático pode ter muitas representações diferentes. "A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles". [7, p15]. Duval ([7]) denomina registros[4] as diferentes representações semióticas que se fazem presentes na Matemática. Os registros são sistemas cognitivamente produtores de possibilidade de criação de novo conhecimento e o autor classifica estes registros: as frases em língua natural, sendo este registro discursivo o primeiro registro para o funcionamento do pensamento; as equações; as figuras; os gráficos e os diagramas. Na aprendizagem da Geometria, diferentes são os registros utilizados: o registro em língua natural quando definimos os objetos geométricos; o registro figura quando desenhamos o objeto; o registro algébrico quando descrevemos os objetos por meio de equações.

Associada ao conceito de registro tem-se a noção de transformação de registro, também introduzida

[3]Em uma conferência em 1930 na Academia de Educação Comunista.

[4]O emprego da palavra *registro* cristaliza a tomada de consciência de outro modo de funcionamento cognitivo do pensamento, modo mais potente para os matemáticos. Isso confere a essa palavra um valor teórico. [7].

por [6]. Duas são as transformações: o tratamento e a conversão. O tratamento é a transformação de uma representação em outra, dentro de um mesmo registro - por exemplo, acrescentar elementos geométricos em figura que apoia uma argumentação. A conversão é a transformação de uma representação em outra dentro de novo registro; por exemplo, passar do registro em língua natural, quando definimos um objeto geométrico, para o registro figura quando desenhamos o objeto. Na próxima sessão vamos tratar dos diferentes registros que podem ser usados de forma simultânea no *software* GeoGebra.

3. O potencial semiótico do software GeoGebra

Faz tempo que muitos autores apontam para potencial da tecnologia digital no âmbito da Educação Matemática (Balacheff e Kaput, 1996; [3], [8], [2]). Pesquisas que atestam este potencial, em especial, quanto ao uso de *softwares* de geometria dinâmica já foram produzidas (Laborde, 1996; [8]). No entanto, a utilização destes *softwares* ainda não se faz presente, de forma sistemática, em nossas salas de aula. É na direção de contribuir para mudar esta realidade que foi desenvolvida a proposta de oficina de formação para professores para o uso do GeoGebra, com foco nas transformações geométricas e também em aspectos relativos à construção do conhecimento, quando se faz o uso de ambientes de geometria dinâmica.

O GeoGebra[5] é um *software* gratuito, de livre acesso, de fácil instalação e utilização. A escolha deste *software* se deu, principalmente, pela sua interface dinâmica e pela versatilidade na realização de transformações de registros. O GeoGebra permite tratar a Álgebra e a Geometria com mesmo grau de importância, ao disponibilizar simultaneamente janelas para trabalhar nestas duas áreas. Ele apresenta diferentes tipos de registros semióticos: o algébrico, o geométrico e o discursivo. Por exemplo, conforme ilustra a Figura 1, ao colocarmos no campo *Entrada* a equação do círculo $x^2 + y^2 = 9$, temos na *Janela de Álgebra* o registro algébrico; na *Janela de Visualização* tem-se o desenho do correspondente círculo, aqui o registro figura. Um outro modo de obter o círculo é escolher no *menu* a ferramenta *Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos* e com esta escolha estamos trabalhando com o registro discursivo. No *menu Exibir* do GeoGebra tem-se o *Protocolo de Construção* (registro discursivo) que permite acompanhar o procedimento de construção de um objeto geométrico (registro figura). A Figura 2 ilustra estes diferentes registros no GeoGebra. Os exemplos apresentados acima ilustram de que forma diferentes ações feitas no GeoGebra propiciam o trabalho com os diferentes registros de representação elencados por Duval. E no caso do estudo da Geometria enfatizamos, em especial, a importância da mobilização de dois registros – o discursivo e a figura.

4. Transformações geométricas e geometria dinâmica

As transformações geométricas são funções que associam a cada ponto do plano, um outro ponto também do plano, obedecendo certas regras. Estamos aqui interessados nas *isometrias*, isto é, transformações que preservam distâncias. Se Π e Π' são dois planos, uma transformação $T : \Pi \to \Pi'$ é uma *isometria* quando a distância entre os pontos $T(A)$ e $T(B)$ é igual à distância entre os pontos A e B, para quaisquer pontos A e B; ou seja , quando $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$ para quaisquer pontos A e B. Do livro de Lima ([10, p13-14]) trazemos enunciados de algumas propriedades que nele estão demonstradas: *a) Toda isometria* $T : \Pi \to \Pi'$ *transforma retas em*

[5] Disponível para download em www.geogebra.org. Neste *site*, que pode ser acessado em diversos idiomas, e nele tem-se mais informações sobre o GeoGebra.

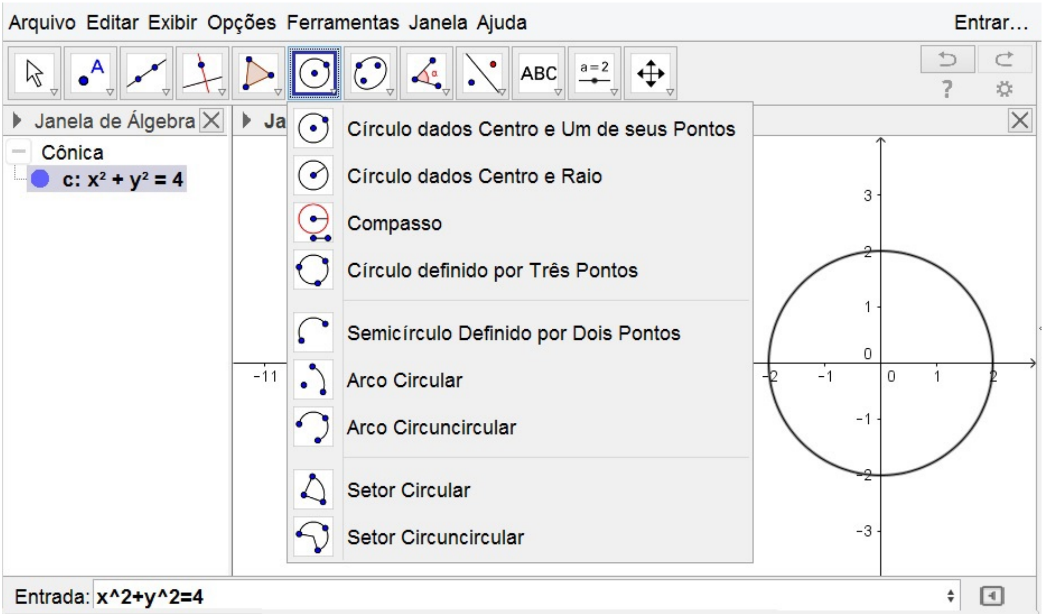

Figura 1: Registros de representação para o círculo.

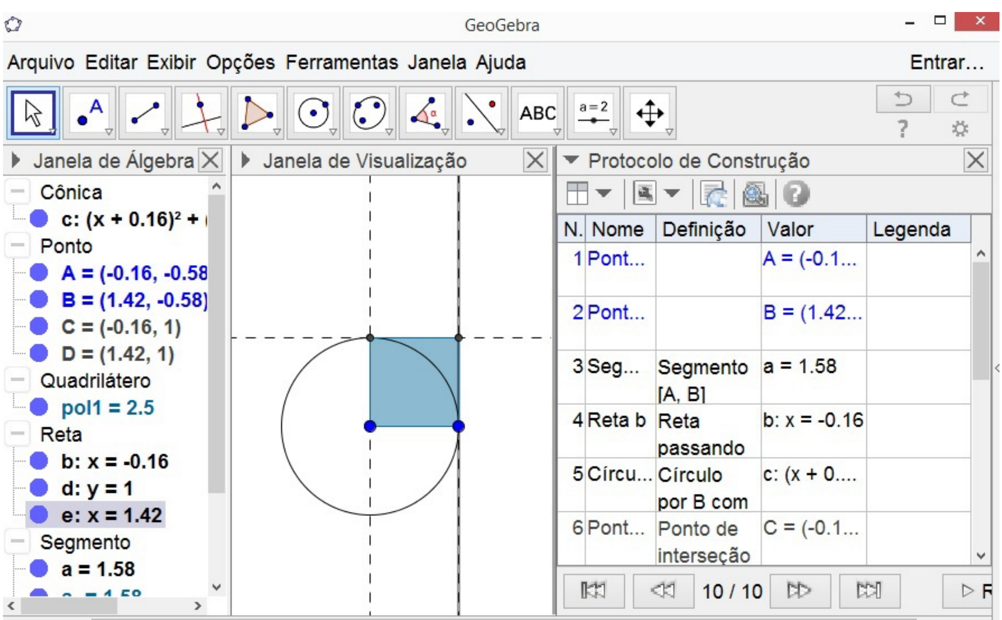

Figura 2: Construção do quadrado no GeoGebra.

retas; *b) Toda isometria* $T : \Pi \to \Pi'$ *transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares*; *c) Toda isometria* $T : \Pi \to \Pi'$ *é uma bijeção, cuja inversa* $T^{-1} : \Pi' \to \Pi$ *é ainda uma isometria*; *d) Toda isometria* $T : \Pi \to \Pi'$ *transforma um ângulo em outro ângulo de mesma medida.*

Pelo fato de uma isometria preservar segmentos, ângulos e suas medidas, tem-se que a imagem de uma figura F por uma isometria é uma figura F' *congruente* à F. As isometrias que vamos tratar são: a translação, as reflexões segundo um ponto e segundo uma reta, e a rotação. Apresentamos a seguir as definições destas transformações, bem como as rotinas de uso no *menu* do GeoGebra, destacado na Figura 3.

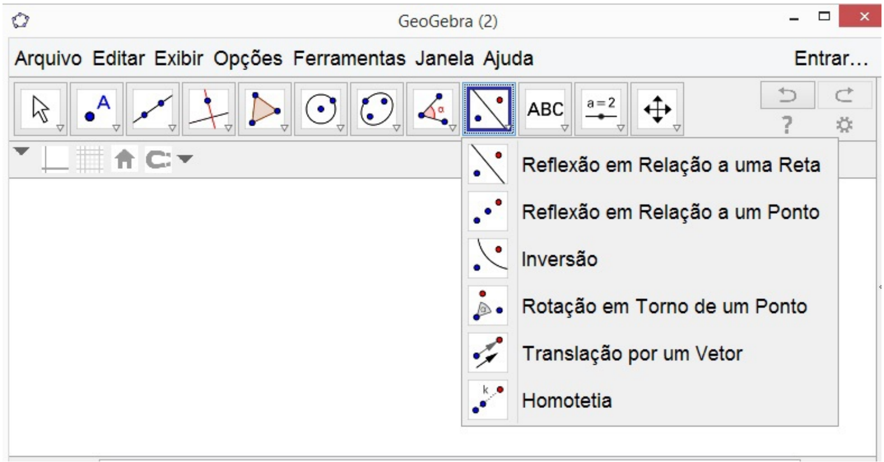

Figura 3: *Menu* das transformações geométricas no GeoGebra.

- A transformação de translação

A noção de translação está relacionada ao conceito de vetor (do Latin "vehere" = transportar). Um vetor é dado pela direção, sentido e comprimento de uma família de "setas" equivalentes. Na Figura 4 temos duas famílias de setas equivalentes, portanto indicando dois vetores. As setas das famílias são usadas para representar o vetor.

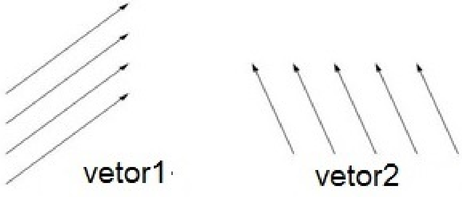

Figura 4: Representação de vetor no plano.

A translação determinada pelo vetor v, representado pela 'seta' UV, é a transformação que associa cada ponto A do plano ao ponto A' de forma tal que:

- se A não pertence a reta determinada pela 'seta' UV, os pontos A, A', V e U, nesta ordem, formam um paralelogramo,

- se $A = U$ então $A' = V$; se A é diferente de U e pertence a reta determinada pela 'seta' UV e, então A' pertence a mesma reta e é tal que as 'setas' determinadas pelos pontos U e A, V e A', respeitando esta ordem de correspondência, são equivalentes.

Na Figura 5 tem-se o ponto A' transladado do ponto A, segundo o vetor v.

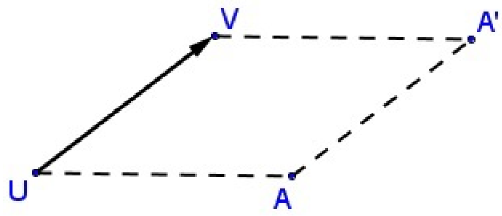

Figura 5: Translação do ponto A segundo o vetor v.

A translação é uma isometria (isto se demonstra) e assim transforma qualquer figura em outra congruente. Na Figura 6 tem-se o vetor u representado por uma seta, o triângulo ABC e o triângulo $A'B'C'$ que é o seu transladado. Para obter tal resultado no GeoGebra, o procedimento é: usando ferramenta do *menu* inicialmente constrói-se um *Vetor* u e depois com a ferramenta *Polígono* se constrói o triângulo ABC; com a ferramenta *Translação por um Vetor* seleciona-se o triângulo ABC e após o vetor u e então é produzido o triângulo $A'B'C'$.

Com a ferramenta *Mover* pode-se mudar a posição dos vértices do triângulo ABC, e este movimento resulta em alteração no triângulo $A'B'C'$, mas ele se mantém sempre um transladado do primeiro triângulo.

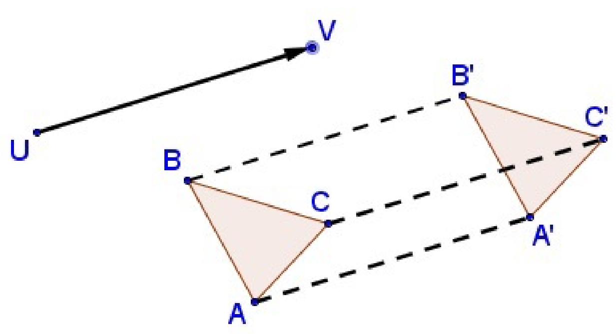

Figura 6: Translação do triângulo ABC segundo o vetor u.

A Figura 7 ilustra sucessivas translações segundo um o mesmo vetor. Nesta construção, inicia-se com uma reta definida por dois pontos para dar a ideia de um 'cordão esticado'. Em seguida, com a ferramenta *Polígono* constrói-se um pentágono na forma de 'bandeirinha'. A partir deste pentágono são feitas sucessivas translações segundo um mesmo vetor (a seta está destacada na Figura 7, da primeira para a segunda 'bandeirinha') e, desta forma, se obtém coleção de 'bandeirinhas' coloridas. Ao ser aplicada a ferramenta *Mover* nos vértices do primeiro pentágono, todas as bandeirinhas se modificam, simultaneamente,mantendo-se congruentes, entre si.

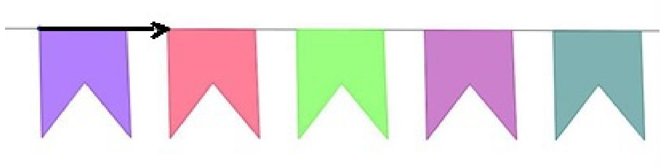

Figura 7: Sucessivas translações segundo um mesmo vetor.

- As transformações de reflexão

A reflexão de centro O é a transformação geométrica que associa a cada ponto A do plano, um ponto A' tal que

- se $A = O$ então $A' = O$.

- se A é diferente de O então A' está na semi-reta oposta à semi-reta OA e os segmentos OA e OA' são congruentes.

Apresentamos na Figura 8 a reflexão segundo um ponto O, construída no GeoGebra, conforme o seguinte roteiro: inicia-se com a construção do ponto O centro da reflexão, depois constrói-se o ponto A e então usando a ferramenta *Reflexão em Relação a um Ponto* seleciona-se o ponto A e em seguida o ponto O.

Aparece então o ponto A', que é a reflexão de A em relação ao ponto O e pode ser observado que os segmentos segmentos OA e OA' se mantém congruentes, ao aplicar-se *Mover* no ponto A.

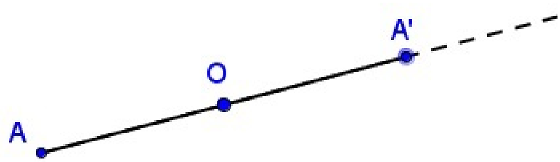

Figura 8: Reflexão do ponto A em torno do ponto O.

A reflexão segundo a reta r é a transformação geométrica que associa a cada ponto A do plano, um ponto A' tal que:

- se o ponto A pertence a reta r, então $A = A'$.

- se o ponto A não pertence a reta r, então A' pertence a reta perpendicular à r passando por A e OA e OA' são segmentos congruentes entre si, sendo que O é o ponto de interseção da reta perpendicular com r.

A rotina de uso desta transformação no GeoGebra é: constrói-se uma reta r a partir de dois pontos, a qual será o eixo de reflexão; depois constrói-se um ponto A que não pertence a reta r. Com a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, seleciona-se primeiro o ponto A e depois a reta r e assim obtém-se o ponto A', que é o refletido de A. Na Figura 9 tem-se a construção feita no GeoGebra.

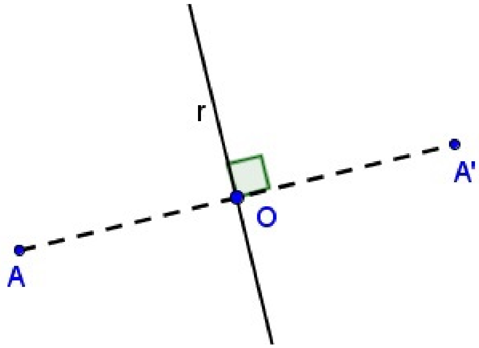

Figura 9: Reflexão do ponto A segundo a reta r.

A reflexão segundo uma reta é uma isometria (isto se demonstra) e, portanto, transforma cada figura F em outra F', congruente à primeira. Vamos ver como isto funciona no GeoGebra: constrói-se uma reta r e um triângulo ABC, tal que os vértices A, B e C estão no mesmo semiplano em relação à reta r. Com a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta* seleciona-se o triângulo ABC e depois a reta r e obtém-se o triângulo $A'B'C'$, o refletido do primeiro. A Figura 10 ilustra esta transformação. Movimentando um dos vértices do triângulo ABC com a ferramenta *Mover*, o triângulo refletido também se modifica, mas se mantém sempre o refletido do primeiro triângulo.

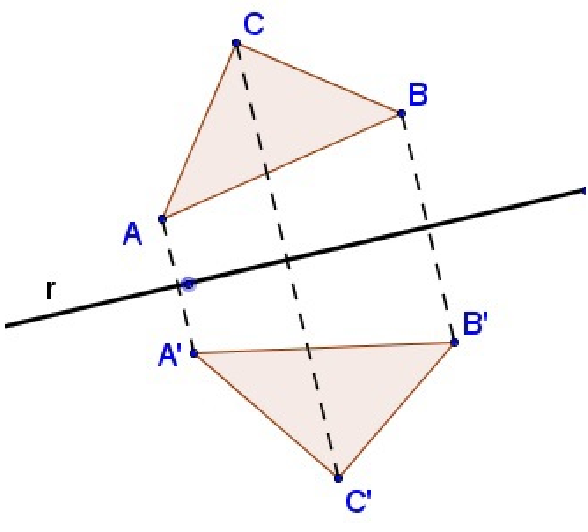

Figura 10: Reflexão do triângulo ABC segundo a reta r.

- A transformação de rotação

Dado um ponto fixo O no plano e um ângulo de medida α, a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto A' de forma tal que:

- se $A = O$ então $A' = O$.

- se A é diferente de O então o ângulo formado pelas semiretas OA e OA' tem medida α, sendo que ângulo é medido no sentido anti-horário da semireta OA para a semirreta OA'.

- os segmentos OA' e OA são congruentes.

O procedimento para fazer a rotação do ponto A em torno do ponto O sob um ângulo $\alpha = 45°$ no GeoGebra é o seguinte: constrói-se o ponto O e depois o ponto A. Com a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo*, seleciona-se o ponto A e, em seguida, o ponto O e de imediato o *software* disponibiliza uma caixa de diálogo contendo as opções para escolha da amplitude do ângulo e o sentido da medição – escolhe-se um ângulo de medida $\alpha = 45°$ e escolhe-se o sentido anti-horário de rotação – e como resultado tem-se o ponto A'. A Figura 11 ilustra o resultado do procedimento feito.

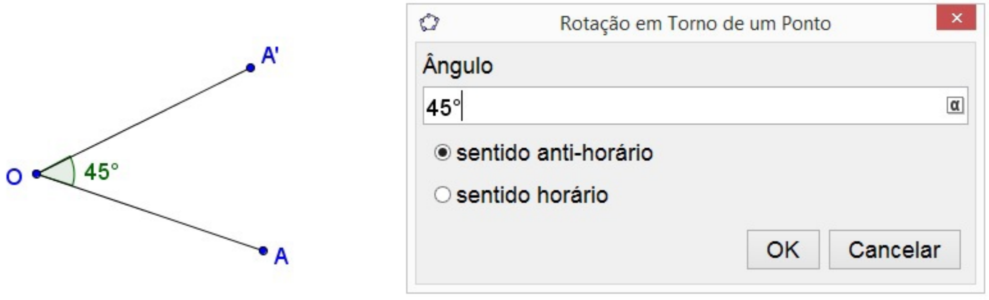

Figura 11: Rotação do ponto A em torno do ponto O.

A rotação também é uma isometria (isto se demonstra), portanto transforma uma figura F em outra F', congruente à primeira. A rotação de um triângulo, no Geogebra, assim funciona: constrói-se um ponto O (centro de rotação) e com a ferramenta *Polígono* constrói-se o triângulo ABC; escolhe-se a ferramenta *Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo*, seleciona-se o triângulo ABC e o ponto O, e escolhe-se como medida de ângulo, por exemplo, $\alpha = 60°$ e escolhe-se sentido anti-horário, e assim obtém-se o triângulo $A'B'C'$ que é o rotacionado do triângulo ABC. A Figura 12 ilustra esta transformação.

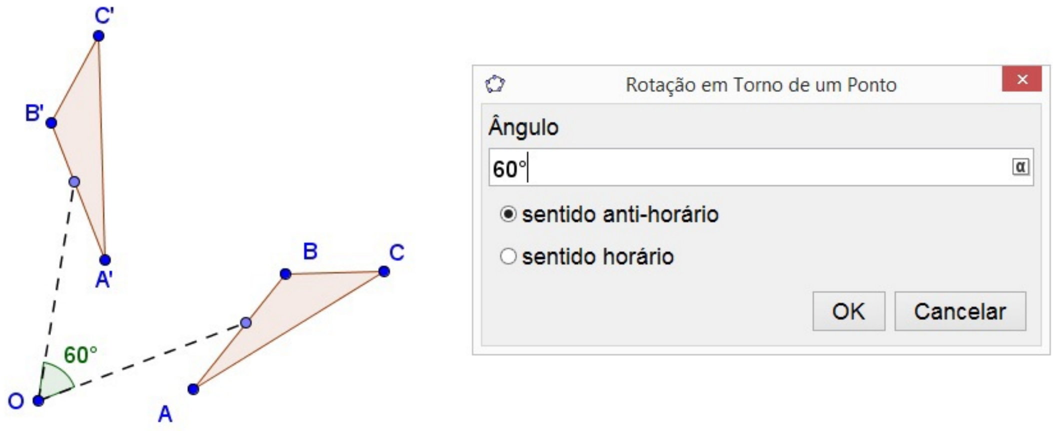

Figura 12: Rotação do triângulo ABC em torno do ponto O.

Pode-se fazer sucessivas rotações de uma figura em torno de um mesmo ponto, segundo um mesmo ângulo, obtendo-se assim uma coleção de figuras rotacionadas e todas congruentes à figura inicial. A Figura 13 ilustra o resultado de sucessivas aplicações da rotação em torno do ponto B (neste caso o ponto B é o centro de rotação), segundo um ângulo de 45° e no sentido anti-horário, que inicia com a rotação do triângulo ABC. Aplicando a ferramenta *Mover* em qualquer um dos vértices do triângulo inicial ABC, todos os vértices correspondentes sofrem a mesma movimentação. Na construção ilustrada na Figura 13, escolheu-se cores diferentes para cada triângulo, criando um efeito tipo 'hélices de um cata-vento'.

Figura 13: Sucessivas rotações em torno de um mesmo ponto.

5. A concepção e a implementação da experiência didática

Na concepção da experiência, a questão norteadora foi: de que forma professores de Matemática se apropriam do software GeoGebra para trabalhar com transformações geométricas e mosaicos? A questão foi respondida através de pesquisa de caráter qualitativo. Por meio de filmagens foram feitos registros dos momentos de trabalho dos professores; as produções feitas pelos professores foram gravadas e junto com os protocolos de construção se constituíram em material de análise; as produções dos alunos desses professores também fizeram parte de nossa coleta de dados.

A organização da pesquisa tomou como referência a Engenharia Didática. Este método de pesquisa é composto de quatro fases assim distribuídas: Análises Prévias; Concepção e Análise A *priori*; Experimentação; Análise A *posteriori* e Validação da Experiência ([5]). Nas análises prévias tratamos de três dimensões: a dimensão cognitiva, ao trazer as ideias de Vygotsky sobre aprendizagem e desenvolvimento; a dimensão epistemológica e também cognitiva, ao trazer o trabalho de Duval que discute o quanto os sistemas de representações semióticas são constitutivos do saber matemático e a sua importância no processo de aprendizagem; a dimensão didática, ao referenciar as diretrizes dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) e ao fazer a análise dos livros didáticos, bem como ao discutir o potencial da tecnologia no ensino da Matemática.

No que segue vamos nos concentrar na concepção e na implementação da experiência, trazendo um pouco das análises a priori e a posteriori. A experiência foi implementada através de oficina e dela participaram sete professoras de Matemática e uma responsável pelo laboratório de informática da rede municipal de Sombrio-SC. Dentre as tarefas propostas havia a realização de uma prática, na qual a professora deveria criar atividades para sua sala de aula, tratando de transformações geométricas com uso do *software* GeoGebra. A oficina se organizou em seis encontros. Nos quatro primeiros tratamos: da familiarização com o *software*; da construção de pavimentações regulares e semirregulares; da reprodução de mosaicos; da construção de mosaicos de Escher. No início de cada assunto foi feita a apresentação de um vídeo[6] de sensibilização[7]. O quinto encontro ficou destinado para a organização das práticas das professoras e o último para a apresentação dos resultados.

Como material de apoio utilizamos o CD Mídias Digitais I[8] (Figura 14) constituído de sete módulos, dentre os quais destacamos os módulos I e II como os principais recursos consultados pelas professoras. O CD serviu como fonte de pesquisa para os conceitos básicos de Geometria e fonte de sugestões de atividades para serem desenvolvidas com os alunos, utilizando o GeoGebra.

O primeiro encontro ficou destinado às atividades coletivas de familiarização com o *software*. Foram abordados os conceitos básicos da Geometria Plana, tais como, ponto, reta, segmento; foram explorados o *menu* das transformações geométricas e também alguns dos outros recursos (retas paralelas e perpendiculares, ângulo, triângulo, paralelogramo, mediatriz, bissetriz, círculo). Ao abordar os conceitos da Geometria Plana, tivemos como objetivo revisá-los, pois as professoras já tinham conhecimento sobre o assunto. Esta revisão se fez por meio da utilização de um roteiro de construção de figuras no GeoGebra.

---

[6] Arte GeoGebra http://www.youtube.com/watch?v=5fHFi3xbCfQ&feature=related, Tesselation slideshow http://www.youtube.com/watch?v=5-3tOa9CPb0 , Igrejas Matrizes da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul (em DVD – UNIFRA - Centro Universitário Franciscano), Escher e a Geometria http://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY, Matemática em toda parte, Construção/ Pavimentação com polígonos http://www.youtube.com/watch?v=y___0a7TDbfs, Escher Style http://www.youtube.com/watch?v=h2AWKgU0cN4.

[7] Segundo Moran ([13]), um bom vídeo é interessante para introduzir um novo assunto, para despertar a curiosidade, a motivação para novos temas.

[8] Este CD faz parte do material a ser utilizado nas disciplinas de Mídias Digitais I e Prática Pedagógica I do Curso de Especialização "Matemática, Mídias Digitais e Didática". Este curso também possui um *site* que apresenta possibilidades de utilização de diferentes *softwares* e objetos de aprendizagem para o ensino e aprendizagem da Matemática. Os conteúdos de matemática a serem trabalhados são: geometria euclidiana, transformações geométricas no plano, geometria analítica, funções e gráficos. O *site* foi implementado pelas bolsistas: Fernanda Abreu Lima, Larissa Weyh Monzon e Mariângela Torre Dias, alunas do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS em 2009 e por Marina Menna Barreto (tutora à distância do curso), sob a coordenação da professora Maria Alice Gravina do Instituto de Matemática da UFRGS e com financiamento da UAB/MEC.

Figura 14: *Interface* do CD Mídias Digitais I
Fonte: http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/.

Em relação à exploração do *menu* das transformações geométricas planas, esperávamos que as professoras reconhecessem a conservação de algumas propriedades das figuras sujeitas aos movimentos de reflexão, translação ou rotação. Esperávamos que, usando o dinamismo de figuras que se tem no GeoGebra e que é revelador de invariantes geométricos, elas reconhecessem que tais transformações preservam as distâncias e os ângulos, o paralelismo e o perpendicularismo. Mas foi ainda com bastante hesitação nos procedimentos de construção que ao final do primeiro encontro as professoras apresentaram suas primeiras produções.

Figura 15: Construção no GeoGebra da professora M.

No segundo encontro foi feita uma exploração coletiva das ferramentas *Polígonos* e *Polígonos Regulares* do GeoGebra. A atividade também exigia o uso do *menu* das transformações para construir uma pavimentação regular e uma semirregular. Nessa atividade o objetivo foi de que as professoras estabelecessem a diferença no uso das ferramentas *Polígono* e *Polígono Regular*. Quando se utiliza a ferramenta *Polígono Regular*, obtém-se figura que, sob a ação da ferramenta *Mover*, não se deforma, diferentemente daquilo que acontece quando se usa a ferramenta *Polígono*. Quanto ao conhecimento matemático, teve-se como objetivo a identificação das condições necessárias para a construção de uma pavimentação com polígonos regulares. Foi após esta atividade de construção que foi apresentado o Teorema de Kepler[9]: ,

> Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições: a) se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum; b) a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma. (Alves Dalcin,1999, p.12).

Com a utilização do teorema de Kepler e fazendo uso da notação [10] das 11 possibilidades de pavimentações com polígonos regulares (a saber, $(3, 12, 12)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(6, 6, 6)$, $(4, 4, 4, 4)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$, $(3, 3, 4, 3, 4)$ e $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$), cada professora teve como tarefa construir uma das pavimentações.

A professora C. fez sua pavimentação, ilustrada na Figura 16, utilizando a ferramenta *Polígono Regular* para construir o hexágono regular e depois, usando vetores determinados por vértices do hexágono regular, aplicou a transformação de translação. Entre os hexágonos regulares coloridos de vermelho, formaram-se triângulos equiláteros, os quais a professora coloriu de azul. Observamos que sua proposta de mosaico não está incluída na categoria dos semi-regulares do teorema de Kepler, pois a distribuição dos polígonos em torno dos vértices não se mantém sempre a mesma (em alguns vértices a distribuição é $(6, 3, 3, 6)$, em outros é $(6, 3, 6, 3)$ ou ainda $(3, 6, 6, 3)$).

[9] A primeira pessoa a exibir os mosaicos semirregulares foi J. Kepler, em um trabalho publicado em 1619, no qual está este teorema. Alves e Dalcin demonstram este teorema apresentando todas as possibilidades de formação dos mosaicos regulares e semirregulares. (Alves e Dalcin, 1999).

[10] A notação $(3, 12, 12)$ indica que em cada vértice tem-se o encontro de três polígonos regulares: um triângulo e dois dodecágonos regulares.

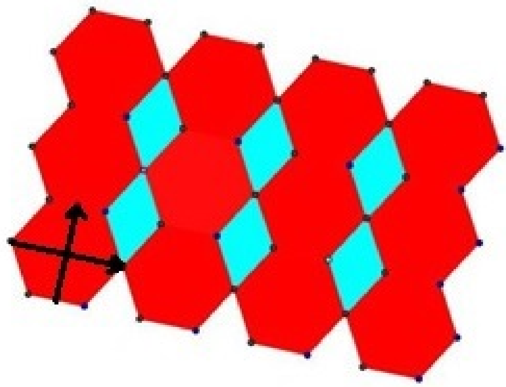

Figura 16: Construção da professora C.

Na Figura 17, temos a produção da professora D que resultou em mosaico que respeita o arranjo $(3, 3, 4, 3, 4)$.

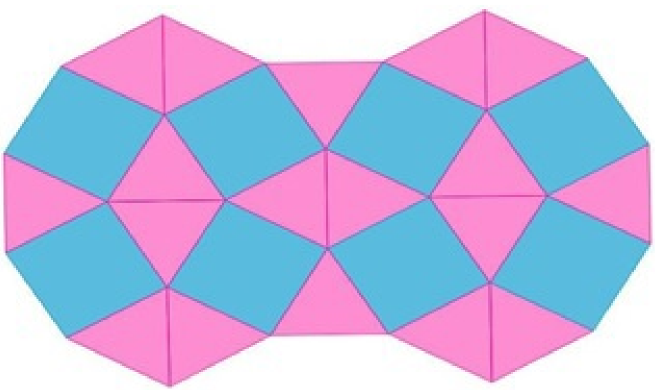

Figura 17: Construção da professora D.

Para o terceiro encontro foi proposta a reprodução de mosaico que tivesse sido visto em algum local da cidade. Nesta atividade foi solicitado uma descrição dos elementos geométricos utilizados na construção; comentários sobre o local onde foi visto o mosaico; a construção do mosaico no GeoGebra; considerações sobre a construção realizada, informando sobre as dificuldades encontradas, tanto de Geometria quanto de utilização do *software* GeoGebra. Na Figura 18 tem-se uma destas reproduções, feita pela professora D.

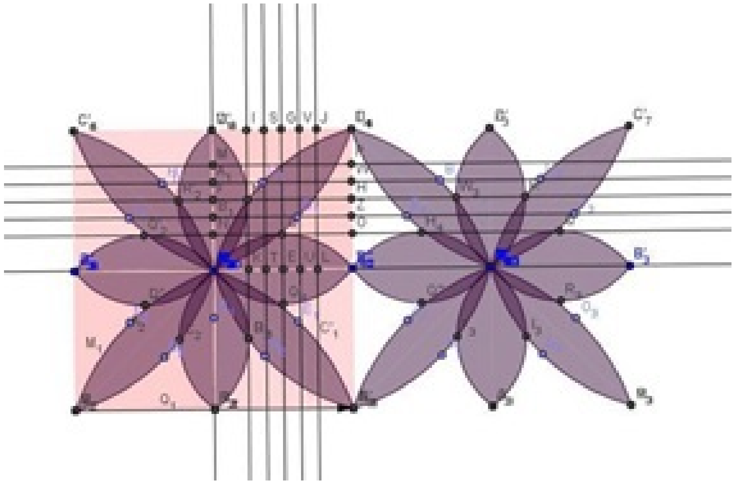

Figura 18: Reprodução de Mosaico da professora D.

A construção começa com um quadrado e depois foram determinados sucessivos pontos médios, iniciando com aquele correspondente ao do lado do quadrado. Feixes de retas paralelas passando por estes pontos foram construídos, na tentativa de criar uma malha quadriculada que ajudasse na construção das pétalas do mosaico. Esta estratégia não funcionou como esperado e então a professora solicitou nossa ajuda. Sugerimos então que utilizasse uma ferramenta que ainda não havia sido utilizada – o *Arco Circular definido por Três Pontos*. Ela selecionou os três primeiros pontos para produzir o primeiro arco de círculo, com sucesso, e usando a transformação de reflexão segundo uma reta ela conseguiu fazer a primeira pétala da flor. E foi usando sucessivas reflexões segundo retas que foram construídas as demais pétalas, de modo a completar o padrão do mosaico. Feito o primeiro mosaico, foi com a transformação de translação que ela construiu, ao lado, o segundo mosaico. Foi possível observar que a professora D, ao longo dos encontros, foi aumentando o nível de complexidade de suas construções. Isso indica um amadurecimento na apropriação das ferramentas do *software* e no domínio dos conceitos geométricos em questão. Ao final de sua reprodução, foi aplicada a ferramenta *Mover* e o mosaico manteve suas propriedades geométricas.

Na Figura 19, vemos a produção da professora L. Ela iniciou sua construção com um segmento $\overline{AB}$ e após construiu dois círculos com centros em A e B, respectivamente, e raio com medida igual à do segmento $\overline{AB}$. Foram determinados os pontos C e D de interseção dos círculos e traçadas as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$. Usando os pontos de interseção dessas retas com os círculos, foram construídas retas paralelas e isto resultou em uma malha triangular. Na malha foram construídos alguns hexágonos e, após, com rotações e reflexões, foram construídos os demais. Foi observado que a professora utilizou conceitos básicos da Geometria para a construção de seu mosaico, e, além disso, sua produção preservou as propriedades geométricas ao aplicar-se a ferramenta *Mover*.

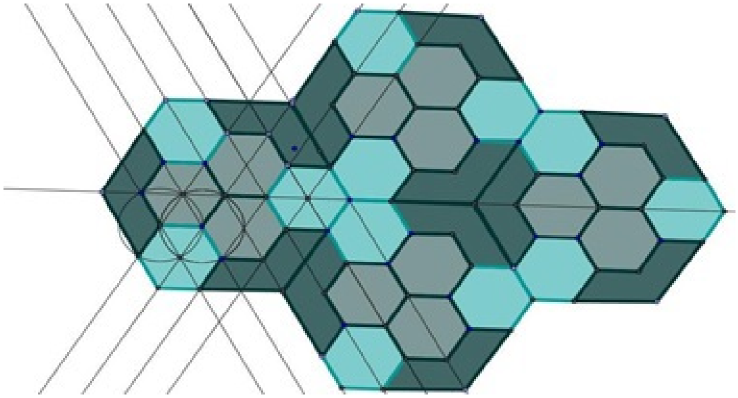

Figura 19: Reprodução do Mosaico da professora L.

No quarto encontro foram explorados os mosaicos de Escher. Este artista utilizou padrões geométricos e transformações geométricas no seu trabalho com mosaicos. Com o GeoGebra é possível fazer a construção de pavimentações com movimentos no estilo de Escher, conforme ilustra a sequência de procedimentos dada na Figura 20. Inicia-se com um hexágono regular, diferentes ‘recortes’ são rotacionados em torno de vértices do hexágono (destacados como recortes verde, azul e vermelho) e assim obtém-se o polígono padrão inicial; segue-se então com a aplicação da transformação de rotação sobre este polígono.

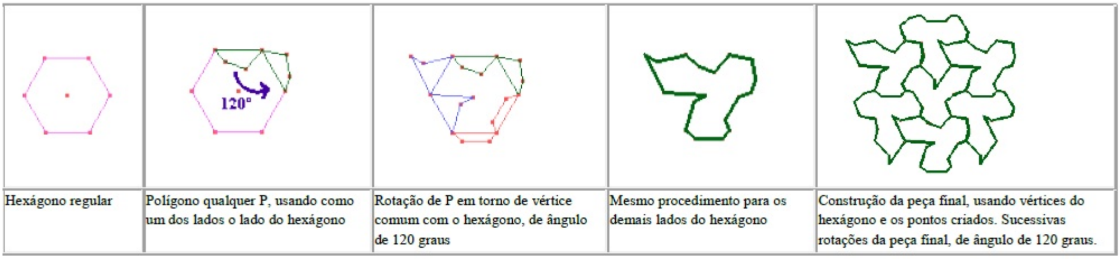

Figura 20: Construção do Mosaico. Fonte: CD Mídias Digitais I.

Na primeira atividade, que fez uso de *applets* com mosaicos dinâmicos (disponíveis no CD Midias Digitais I), foi solicitado que as professoras participantes identificassem o polígono padrão inicial, bem como a transformação geométrica utilizada para produzir a pavimentação. Na segunda atividade, elas foram convidadas a produzir mosaicos no estilo de Escher. Na Figura 21 tem-se a produção de uma das professoras – uma pavimentação que muda dinamicamente seu desenho, conforme são movimentados vértices do polígono padrão inicial, colocado em destaque.

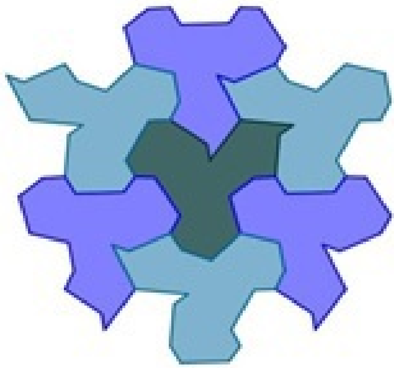

Figura 21: Construção de “mosaico em movimento” da professora L.

O quinto encontro foi reservado para organizar a apresentação das experiências que as professoras fizeram com seus alunos. Relembramos que no início da oficina foi combinado com as professoras que elas iriam aplicar com seus alunos os conhecimentos adquiridos durante a formação. Na realização de suas práticas as professoras propuseram atividades similares aquelas desenvolvidas na formação. Mas também surgiram algumas ideias diferentes: relacionar os mosaicos com a arte do *patchwork*; fazer reproduções de habitações de animais, como por exemplo colmeias; reproduzir algumas formas geométricas encontradas na natureza, as flores por exemplo. No último encontro, as professoras relataram suas experiências.

Diríamos que ao longo da realização da oficina, houve muita participação e muito interesse por parte das professoras. Elas constantemente indagavam sobre os objetivos na utilização do vídeo de sensibilização, sobre a utilização do *software*, sobre a pertinência da sequência de atividades e sobre as alternativas para ensinar Geometria na escola. Na perspectiva de Vygotsky, a troca de experiência e a interação social fizeram com que as professoras pudessem internalizar os conhecimentos trabalhados na oficina, e nisso as indagações e discussões foram fundamentais. Em diversos momentos da oficina, houve a necessidade da nossa intervenção como professora mediadora. No primeiro encontro observamos as dificuldades iniciais e, a partir de nossa intervenção, constatamos os progressos das professoras quanto ao uso dos recursos do GeoGebra. Procuramos atuar na zona de desenvolvimento proximal, ou seja, fizemos intervenções necessárias para que o conhecimento, que era potencial nas professoras-alunas, se transformasse em real.

Os conceitos relativos as diferentes transformações geométricas foram introduzidos através do GeoGebra e de forma a integrar Arte e Matemática. Através da aplicação da sequência de atividades foi proporcionada uma gradativa aquisição de conhecimento sobre o GeoGebra; nenhuma das professoras, bem como seus alunos, conhecia o *software*. Além disso, na perspectiva de [7], o *software* permitiu a mobilização de diferentes registros de representação, bem como os tratamentos e as conversões de registros.

6. Considerações finais

Nossa proposta de capacitação docente proporcionou às professoras participantes a familiarização com o *software* GeoGebra, a oportunidade de revisar os conceitos básicos de Geometria Plana e uma introdução ao estudo das transformações geométricas (este um assunto pouco trabalhado na escola) em situação que integrou arte e geometria.

A característica dinâmica do *software* permitiu às professoras trabalharem as transformações geométricas em contexto concreto-abstrato – com o uso de diferentes ferramentas foram construídas situações geométricas correspondentes as diferentes transformações e com o uso da ferramenta *Mover* propriedades geométricas puderam ser observadas e assim novos conceitos foram sendo aprendidos.

A utilização do GeoGebra proporcionou a experimentação, a simulação, o questionamento e a análise de situações geométricas. Tal vivência entusiasmou as professoras e fez com que concluíssem que fazendo uso GeoGebra é possível trabalhar as transformações geométricas na escola – foi esta prática que elas fizeram com seus alunos. A introdução na formação de um tal software de geometria dinâmica fez com que as professoras repensassem suas práticas.

Mas entendemos que, ao fazer uso de um *software*, o professor não pode perder de vista o que pretende ensinar.

O software não deve ser utilizado apenas para fazer uma aula diferente, mas sim para que o aluno aprenda matemática. Nisso os sistemas dinâmicos de representação veiculados através da tecnologia digital podem muito ajudar e foi neste espírito que foi implementada a proposta de formação apresentada neste artigo.

Referências

[1] Baquero, R. *Vygotsky e a aprendizagem escolar*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

[2] Borba, M., Villarreal, M. *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking*. New York: Springer, 2005.

[3] Borba, M., Penteado, M. G. *Informática e Educação Matemática*. São Paulo: Autêntica, 2007.

[4] Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. DF: Ministério da Educação e do Desporto, 1998.

[5] Carneiro, V. C. G. *Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetike*. Campinas, v.13,p. 85-118, 2005.

[6] Duval, R. *Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[7] Duval, R. *Ver e Ensinar a Matemática de outra forma*. São Paulo: Proem, 2011.

[8] Gravina, M. A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. Tese de Doutorado, Porto Alegre: UFRGS, 2001.

[9] Gravina, M. A., Barreto, M. *Mídias Digitais I. Material Didático. Curso de Especialização: Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica*. Porto Alegre, UAB/IM/UFRGS, 2009. Disponível em: www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/.

[10] Lima, E. L. *Isometrias*. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[11] Mariotti, M. A. *Artifacts and signs after a Vygotskian perspective*. Disponível em http://www.mendeley.com/research/artifacts-signs-after-vygotskian-perspective-role-teacher-1/. Acesso em 15 dez. 2011.

[12] Moll, L. C. *Vygostky e a educação: Implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

[13] Moran, J. M. *O vídeo na Sala de Aula. Comunicação & Educação*. ECA-Ed.Moderna, p27-35. jan/abr 1995.

[14] Moysés, L. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. São Paulo: Papirus Editora, 2010.

[15] Radford, L. *Introducción. Semiótica Y Educación Matemática*. Revista Latino Americana en Matematica Educativa . México, Distrito Federal. p.7-21. 2006.

Margarete Medeiros
IFC - *Campus* Sombrio
<margarete.farias@ifc-sombrio.edu.br>

Maria Gravina
UFRGS
<gravina@mat.ufrgs.br>

Recebido: 2015
Publicado: 2015