

# O uso do software GeoGebra para o estudo de problemas de otimização no ensino médio

Josenildo Lima

Luciana de Freitas

## Resumo

Neste artigo apresentamos atividades que podem ser realizadas com turmas do Ensino Médio e que tenham noções básicas de funções, área, volume e desigualdade das médias. Apresentamos uma sequência didática, composta por diversas atividades, com a utilização do *software* GeoGebra, de modo que em cada uma delas, o aluno possa conjecturar um resultado de otimização numa aplicação em sala de aula. Algumas dessas atividades têm como objetivo a elaboração de um arquivo do tipo .ggb para se descobrir um valor ótimo para determinado elemento geométrico. Este estudo tem como finalidade mostrar que problemas de otimização podem ser trabalhados no Ensino Médio e que os resultados usados nas resoluções desses problemas são demonstrados com teoremas envolvendo conteúdos matemáticos do Ensino Básico.

**Palavras-chave:** Ensino de geometria; Otimização; Desigualdade das médias; GeoGebra.

## Abstract

In this article we present activities that can be performed with high school classes and that have basic notions of functions, area, volume and inequality of means. We present a didactic sequence, composed of several activities, using GeoGebra software, so that in each of them, the student can conjecture an optimization result in a classroom application. Some of these activities have as objective the elaboration of a file of type .ggb to discover an optimal value for a certain geometric element. The purpose of this study is to show that optimization problems can be worked out in High School and that the results used in the resolutions of these problems are demonstrated with theorems involving mathematical contents of Basic Education.

**Keywords:** Geometry teaching; Optimization; Inequality of means; GeoGebra.

## 1. Introdução

Desde os primórdios o homem procurou respostas para perguntas do tipo: "Qual o caminho mais curto entre tais pontos de partida e chegada?", "Como usar certa quantidade de arame para cercar a maior área possível?", "De que maneira vou construir um recipiente com volume fixado de modo a gastar a menor quantidade de material possível?" etc. Na atualidade, empresários buscam otimizar suas produções minimizando gastos ou maximizando lucros. A partir dessas questões cotidianas

surgiu o ramo da Matemática, que trata de problemas de máximos ou mínimos, denominado de otimização.

Os estudos de otimização e problemas de tangentes a curvas deram origem à noção de derivada que é um dos conteúdos do Cálculo que ajudam a simplificar a resolução de problemas de otimização, ver [3, p428]. Todavia, neste trabalho não usamos o Cálculo como ferramenta para a resolução desses problemas, pois no Ensino Básico, etapa para qual é proposta a aplicação deste estudo, normalmente o Cálculo ainda não é visto. Nos detemos a utilizar conteúdos como máximos ou mínimos de funções, vértice da parábola e desigualdade das médias.

O estudo de problemas de otimização, preponderantemente composto de situações contextualizadas, pode provocar no aluno um maior interesse pela disciplina de Matemática que corriqueiramente lhe é apresentada de maneira abstrata.

A otimização, com suas aplicações, contribui na resolução de problemas pertinentes à administração, à economia, às engenharias, à logística, às diversas áreas da ciência e, que podem ser trabalhados no Ensino Médio. Nota-se também que, de maneira elementar, problemas de otimização vêm sendo cobrados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Como exemplo podemos citar a prova de 2015 que traz consigo duas questões de otimização: a saber, a questão 136 da prova amarela, a qual pode-se resolver usando conhecimentos de função quadrática e a questão 176 que pode ser resolvida usando-se conhecimentos de funções trigonométricas. Já a questão 166 da prova amarela de 2014 pode ser resolvida usando a desigualdade triangular. Além disso, todas as provas, da forma como são elaboradas hoje, estruturadas em quatro matrizes e compostas por 45 questões para cada uma das áreas do conhecimento - modelo adotado desde o ano de 2009 - contêm, em média, cinco problemas elementares com as palavras *máximo* ou *mínimo*.

Uma proposta bem interessante presente neste trabalho é aliar o estudo de problemas de otimização com o uso de uma tecnologia digital, neste caso o uso do *software* matemático GeoGebra. A utilização de ferramentas tecnológicas nas aulas de Matemática, como o *software* GeoGebra, vem para estreitar a relação dos estudantes com as tecnologias digitais, tornando-as mais atrativas, potencializando a eficiência da aprendizagem dos conteúdos, além de promover a inclusão digital. O exponencial crescimento tecnológico exige uma formação contínua do professor: a preparação desse profissional é condição *sine qua non* para o sucesso do uso de tecnologias digitais em sala de aula. Nesse sentido, faz-se necessária a inserção dessas ferramentas tecnológicas em nossa prática pedagógica, conforme recomendam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio ,

*Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. [2, p87].*

Durante o desenvolvimento deste trabalho usamos a Matemática para entender a tecnologia quando, por exemplo, enfatizamos as limitações de *softwares* quanto a erros na  $n$ -ésima casa decimal de alguns resultados obtidos em algumas atividades. Por outro lado fizemos uso da tecnologia para entender a Matemática na medida que planejamos uma sequência didática na qual o aluno deve utilizar um *software* matemático (o GeoGebra) para que passo a passo ele resolva o problema proposto e conjecture o resultado geral para cada situação-problema trabalhada.

## 1.1. Objetivo geral

Propor uma sequência de atividades envolvendo problemas de otimização com a utilização do GeoGebra como ferramenta de apoio, e que pode ser aplicada em turmas do Ensino Médio, introduzindo assim o conceito de otimização e reforçando o estudo nos conteúdos de Geometria.

## 1.2. Objetivos específicos

- Apresentar uma sequência didática de problemas envolvendo conteúdos de Geometria;
- Elaborar as atividades a serem executadas no GeoGebra para a resolução dos problemas;
- Elaborar questões que estimulem o aluno a conjecturar resultados antes de serem apresentados formalmente;
- Utilizar conteúdos matemáticos elementares para demonstrar os resultados conjecturados;
- Estabelecer a importância de análise do erro dos *softwares* digitais, relacionando à formalização de resultados através de demonstrações matemáticas.

## 2. Teoria preliminar

Nesta seção trataremos da desigualdade das médias, máximos ou mínimos de funções e das funções quadráticas que servem de base para as demonstrações dos teoremas a serem conjecturados nas atividades propostas da próxima seção.

### 2.1. Desigualdade das médias

**Definição 1.** Considere  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  e  $a_n$  números reais positivos, com  $n \geq 2$ . Os números reais positivos

$$m_q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad (1)$$

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad (2)$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad (3)$$

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (4)$$

são denominados, respectivamente, de média quadrática, média aritmética, média geométrica e média harmônica de  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 1.** (Desigualdade das médias)

Dados  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reais positivos e  $m_q, m_a, m_g$  e  $m_h$  respectivamente, suas médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica, então

$$m_q \geq m_a \geq m_g \geq m_h. \tag{5}$$

Além do mais, duas quaisquer dessas médias são iguais se, e somente se,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

(Ver demonstração [6, p51])

Os resultados de otimização serão provados apenas utilizando máximos ou mínimos de função quadrática ou a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica,  $m_a \geq m_g$ , uma vez que as expressões envolvendo volumes e áreas se adequam a estes casos.

## 2.2. Mínimo ou máximo de funções

No nosso trabalho também usamos mínimos ou máximos de funções. Vejamos, então, as definições e os principais resultados utilizados.

**Definição 2.** Sendo  $D \subseteq \mathbb{R}$  o domínio de uma dada função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in D$  tal que  $f(x) \leq f(x_0)$  para todo  $x \in D$ , diz-se que a função  $f$  tem máximo absoluto em  $x_0$  ou que  $x_0$  é ponto de máximo absoluto de  $f$ . Além do mais,  $f(x_0)$  é dito valor máximo de  $f$  em  $D$ .

**Definição 3.** Sendo  $E \subseteq \mathbb{R}$  o domínio de uma dada função  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in E$  tal que  $g(x) \geq g(x_0)$  para todo  $x \in E$ , diz-se que a função  $g$  tem mínimo absoluto em  $x_0$  ou que  $x_0$  é ponto de mínimo absoluto de  $f$ . Além do mais,  $g(x_0)$  é dito valor mínimo de  $g$  em  $E$ .

**Definição 4.** Dados  $a$  e  $b$  pertencentes ao domínio  $D \subseteq \mathbb{R}$  de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , temos que:

- (i) Se existe um intervalo aberto  $I$  contido no domínio  $D$ , tal que  $a \in I$  e  $f(x) \leq f(a)$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  tem um máximo local em  $a$  e  $f(a)$  é dito valor de máximo local;
- (ii) Se existe um intervalo aberto  $J$  contido no domínio  $D$ , tal que  $b \in J$  e  $f(x) \geq f(b)$  para todo  $x \in J$ , então  $f$  tem um mínimo local em  $b$  e  $f(b)$  é dito valor de mínimo local.

**Definição 5.** Denomina-se função quadrática qualquer função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a, b$  e  $c$  números reais e  $a \neq 0$ .

**Teorema 2.** Uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem valor máximo absoluto (ou valor mínimo absoluto) dado por  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ , em  $x_v = \frac{-b}{2a}$ , onde  $\Delta = b^2 - 4ac$ , com  $y_v$  sendo valor máximo de  $f$  em  $\mathbb{R}$  quando  $a < 0$  (ou valor mínimo de  $f$  em  $\mathbb{R}$  quando  $a > 0$ ).

(Ver demonstração em [5, p14])

## 3. Orientações metodológicas gerais

Na próxima seção apresentamos atividades que servem como alternativa para o estudo de geometria, onde em cada uma delas, com a utilização do GeoGebra (versão 5.0.263.0), o aluno encontrará valores otimizados para elementos geométricos tais como: segmentos, ângulos, áreas e volumes.

Neste artigo apresentamos, sucintamente, o trabalho executado como dissertação de conclusão do PROFMAT de [5], onde são propostas doze atividades para o desenvolvimento de um projeto inovador em turmas do 2º ou do 3º ano do Ensino Médio. Caso o professor opte por executar todas as doze atividades, necessitará de aproximadamente cinquenta horas-aula (cerca de um bimestre completo), levando em consideração que serão realizadas aulas básicas para apresentação do *software* GeoGebra aos alunos, execução das atividades no GeoGebra, demonstrações formais das relações e propriedades conjecturadas, exercícios de fixação da aprendizagem, além de situações metodológicas a critério do professor, tais como: leituras complementares, atividades de verificação e investigação práticas envolvendo medições, dentre outras.

Em cada uma dessas atividades são sugeridos determinados números de casas decimais para vários objetos, tais como *controles deslizantes*, *ângulos*, *áreas*, *volumes*, etc. Quando trabalhamos com máquinas de calcular ou *softwares* digitais, podem ser cometidos erros por causa das próprias limitações das máquinas onde estão instalados esses *softwares*, já que estas têm capacidade finita.

*Tais resultados são produzidos, de forma geral, por erros de arredondamento: como uma calculadora só tem capacidade para armazenar números com representação decimal finita, todos os números com representação infinita (e mesmo aqueles com representação finita, porém superior a capacidade da máquina) são aproximados por números com representação finita. Isto é, as calculadoras (pelo menos as mais simples) não operam com números com representação decimal infinita, e sim com aproximações para esses números. A imprecisão nos resultados de cálculos aproximados pode aumentar quando os erros de arredondamento são propagados, isto é, quando resultados aproximados são usados em novos cálculos, gerando aproximações sobre aproximações. Evidentemente, algumas máquinas possuem capacidade de armazenamento superior a outras, podendo produzir resultados mais precisos, porém todas têm capacidade finita. Portanto cálculos com decimais infinitos envolverão necessariamente imprecisões e erros de alguma ordem. [4, p12]*

Com base nesses possíveis erros produzidos pelas limitações dos *softwares*, faz-se necessária a comprovação matemática formal das relações e propriedades conjecturadas.

## 4. Atividades usando o GeoGebra 2D

### 4.1. Atividade 1: Retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles

**Objetivo:** Determinar qual é o retângulo de área máxima dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles.

Dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles, qual é o que tem a maior área?

Para resolvermos esse problema, primeiro observemos o seguinte caso particular em que os catetos do triângulo retângulo medem 5 unidades de comprimento. Aplicamos a seguinte atividade com a turma em estudo.

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de*

*Visualização 2.* Para habilitar a *Janela de Visualização 2*, acesse no menu principal o botão *exibir* ou tecla *Ctrl+Shift+2*;

2. No terceiro botão, clique em *Segmento* e marque o segmento  $AB$ , onde  $A(5,0)$  e  $B(0,5)$ ;
3. Marque um ponto  $C$  no segmento  $AB$ ;
4. Digite, no campo de *Entrada*,  $D = (x(C), 0)$  obtendo, no eixo horizontal, um ponto com a mesma abscissa do ponto  $C$ ;
5. Digite, no campo de *Entrada*,  $E = (0, y(C))$  obtendo, no eixo vertical, um ponto com a mesma ordenada do ponto  $C$ ;
6. Marque um ponto na origem do sistema cartesiano e renomei-o de  $O$ ;
7. Clique no quinto botão e posteriormente sobre os pontos  $O, D, C, E$  e em  $O$  novamente, nessa ordem, obtendo, assim, o retângulo  $ODCE$ . Mude a cor e o estilo ao seu gosto, clicando no botão direito do *mouse*;
8. No oitavo botão escolha *Área* para obter a área do retângulo  $ODCE$ . Em seguida, no décimo botão (*Texto*), depois clique no segmento  $OD$ ; em *Editar* digite  $DistânciaOD=$ ; marque *Fórmula LaTeX* e em *Objetos*, clique em  $o$  se  $o$  for a medida de  $OD$ , para obter o comprimento do lado  $OD$  do retângulo. De modo análogo obtenha a medida do lado adjacente a  $OE$ . Coloque a área com três casas decimais e o comprimento dos lados com uma. Clique no primeiro botão do GeoGebra para, depois colocar essas medidas dos lados do retângulo num lugar mais conveniente para a sua visualização;
9. Clique na *Janela de Visualização 2* e, em seguida, digite, na caixa de *Entrada*,  $Area = (o, o * e)$ , onde  $o$  é a medida do lado  $OD$  e  $e$  é a medida do lado  $OE$ ;
10. Habilite o rastro do ponto (*Área*) obtido anteriormente. Movendo o ponto  $C$  você terá em suas janelas do GeoGebra a vista da Figura 1.

### Orientações metodológicas

Após a realização desses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

1. Movendo o ponto  $C$ , qual é o maior valor que você encontra para a área do retângulo  $CDFE$ ?
2. Encontrado esse maior valor para a área, quais são as medidas de cada lado do retângulo?
3. Quando essa maior área ocorre, como você descreve a posição do ponto "dinâmico" (*Área*) que destacamos no gráfico?
4. Dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles, qual é o que tem a maior área?

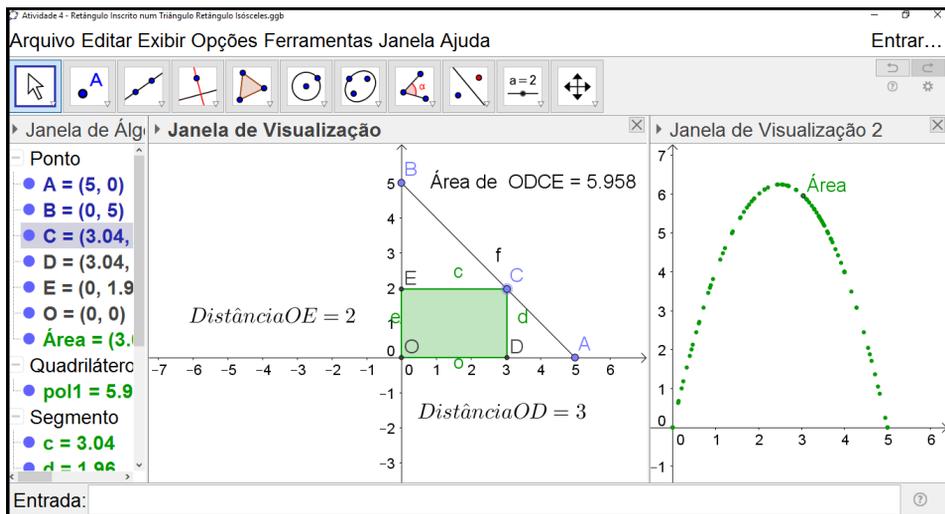


Figura 1: Retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles

As coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ , sugeridas no segundo passo, podem ser substituídas por outras, de modo  $x(A) = y(B)$  para que o triângulo  $AOB$  permaneça sendo retângulo isósceles. Os erros de arredondamento justificam o número de casas decimais propostos no oitavo passo dessa atividade. Note que se propuséssemos, por exemplo, uma casa decimal tanto para as medidas do lado do retângulo quanto para a área, obteríamos como área máxima 6,2 e diversos valores para as medidas dos lados do retângulo  $ODCE$  formando retângulos e não um quadrado como desejamos.

**Teorema 3.** *O retângulo de área máxima, inscrito no triângulo retângulo isósceles é o quadrado.*

*Demonstração.* Considere o triângulo isósceles  $AOB$  de base  $AB$  e  $OA = OB = a$ .

Por ser isósceles de base  $AB$ , o triângulo  $AOB$ , com ângulo  $\widehat{AOB}$  reto, tem  $\widehat{OAB} = \widehat{ABO} = 45^\circ$ . Sendo  $\overline{AD} = x$  e  $\overline{DE} = b$ , temos, no triângulo  $ADE$ :

$$\operatorname{tg}45^\circ = \frac{b}{x} \Rightarrow 1 = \frac{b}{x} \Rightarrow x = b. \quad (6)$$

Analogamente nota-se que

$$\overline{BF} = \overline{EF} = a - b. \quad (7)$$

Do Teorema 1 ( $m_a \geq m_g$ ) segue que

$$A = (a - b) \cdot b \leq \left( \frac{(a - b) + b}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}. \quad (8)$$

Assim, a maior área possível é

$$A = \frac{a^2}{4}, \quad (9)$$

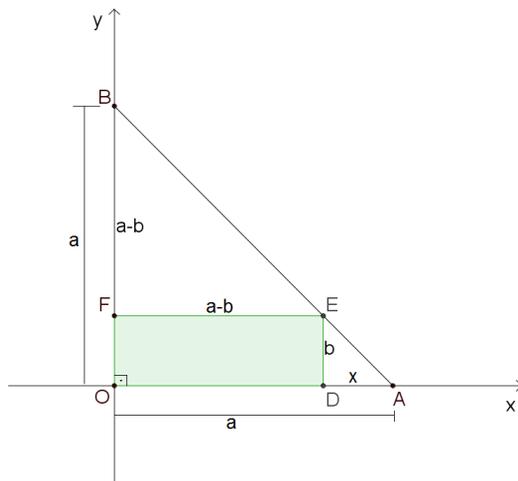


Figura 2: Retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles.

obtida quando

$$a - b = b. \quad (10)$$

Consequentemente

$$b = \frac{a}{2}. \quad (11)$$

Portanto, o retângulo  $ODEF$ , de área máxima, inscrito no triângulo retângulo isósceles  $AOB$  é o quadrado de lado  $\frac{a}{2}$ .  $\square$

## 4.2. Atividade 2: Retângulo inscrito num círculo

**Objetivo:** Determinar qual retângulo tem maior área dentre todos os retângulos inscritos num círculo.

Qual é o retângulo de maior área, que pode ser inscrito em um círculo de raio fixado?

Para responder a essa pergunta realizemos passo a passo a seguinte sequência didática:

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 2*. Retire os eixos da primeira janela de visualização;
2. Obtenha, na *Janela de Visualização*, um *Círculo dados Centro e Raio* com centro em um ponto  $O$  e raio  $r = 2$ . Clique com o botão direito do *mouse* para renomear o centro do círculo;

**Sugestão:** Para melhor visualização clique no último botão *Mover Janela de Visualização* da Barra de Ferramentas e dê um zoom na figura a ser trabalhada.

3. Escolha, no terceiro botão, *Reta*; clique sobre o círculo obtendo o ponto  $A$  e em seguida sobre outro ponto  $B$  do círculo, distinto de  $A$ ;
4. Obtenha duas retas perpendiculares à reta que contém os pontos  $A$  e  $B$ , intersectando-a nesses pontos, utilizando o quarto botão *Reta Perpendicular*;
5. No segundo botão em *Interseção de Dois Objetos*, obtenha os pontos de interseção entre as retas obtidas no item anterior e o círculo clicando próximo dos pontos de interseção distintos de  $A$  e  $B$ . Observe que surgirão os pontos  $C$  e  $D$ ;
6. Clique no quinto Botão *Polígono* e posteriormente sobre os pontos  $A, B, C, D$  e em  $A$  novamente, obtendo, assim, o retângulo  $ABCD$ ;
7. No último botão, clique em *Exibir/Esconder Objeto*, selecione as retas e em seguida clique em qualquer outro botão (observe que as retas desaparecem ficando apenas o retângulo inscrito no círculo);

8. No oitavo botão escolha *Área* para obter a área do retângulo  $ABCD$ , clique sobre esse polígono;
9. Clique no décimo botão *Texto* e observe que surgirá uma caixa de diálogo. No espaço *Editar* digite  $DistânciaAB=$ , selecione *Fórmula LaTeX*, em seguida *Objetos*, por fim escolha a opção  $a$  se  $a$  for a medida do segmento  $AB$ . De modo análogo obtenha a medida do segmento  $BC$ . Coloque a área com três casas decimais e o comprimento dos lados com uma casa decimal;

**Sugestão:** Para obter a área com três casas decimais clique com o botão direito do *mouse* sobre a área e depois em *Propriedades* → *Texto* → *Arredondamento* → *3 casas decimais* → *OK*; proceda de modo análogo para as medidas dos lados do retângulo com uma casa decimal.

**Sugestão:** Fixe a área e as distâncias obtidas nos passos anteriores clicando sobre esses textos com o botão direito do *mouse* e marque a opção *Fixar Objeto*.

10. Clique na *Janela de Visualização 2* e, em seguida, digite, na caixa de *Entrada*,  $Área = (a, q1)$ , onde  $a$  é a medida do lado  $AB$  e  $q1$  representa a área do retângulo em estudo. Habilite o rastro do ponto que representa a área.

## Orientações metodológicas

Finalizados esses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

1. Clicando em *Mover*, primeiro botão da barra de ferramentas, e, posteriormente, movendo o ponto  $A$  ou o ponto  $B$ , qual é o maior valor que você encontra para a área do retângulo  $ABCD$ ? (Observe o gráfico na *Janela de Visualização 2* - Ver Figura 3)
2. Encontrado esse maior valor para a área, quais são as medidas de cada lado do retângulo?
3. Dentre todos os retângulos inscritos em um círculo de raio fixo, qual é o que tem a maior área?

No segundo passo, note que o controle deslizante  $r$  representa a medida do raio do círculo e, portanto, deve ser maior do que zero. Quanto ao incremento, o professor pode escolher o valor que lhe convenha, conforme a precisão desejada. No décimo passo, sugerimos que se exibam a área

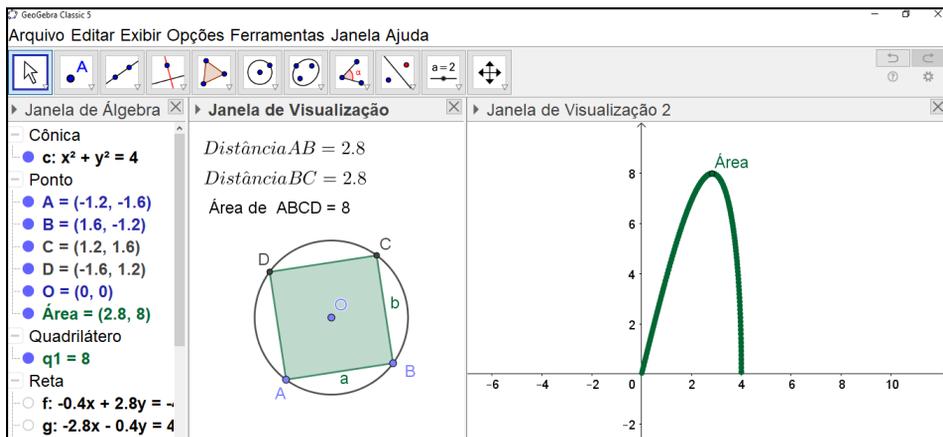


Figura 3: Retângulo de área máxima inscrito num círculo

com três casas decimais e o comprimento dos lados com apenas uma casa decimal com o intuito de "esconder" os erros a partir de determinadas casas decimais: erros comuns de aproximação por conta das limitações do *software*. Demonstraremos, a seguir, que o retângulo de área máxima inscrito num círculo de raio  $r$  é um quadrado. Observe, contudo, que se tivéssemos deixado os lados do retângulo e a sua área com uma casa decimal, encontraríamos 8 como a área máxima do retângulo e os lados  $AB$  e  $BC$  medido, por exemplo, 2,7 e 3 ou 2,7 e 2,9 ou 2,8 e 2,9; que seriam medidas de lados de retângulos e não um quadrado como desejamos.

**Teorema 4.** *O retângulo de área máxima inscrito num círculo de raio  $r$  é um quadrado.*

*Demonstração.* No retângulo  $ABCD$  inscrito num círculo de raio  $r$  temos que as diagonais  $AC$  e  $BD$  medem  $2r$ . Considerando  $\overline{AB} = 2x$  e  $\overline{BC} = 2y$ , obtemos  $r^2 = x^2 + y^2$ , logo,  $r^2 - x^2 = y^2 > 0$  e  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Uma vez que a área  $S$  do retângulo  $ABCD$  é igual a  $4xy$ , temos que

$$S = 4x\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow S^2 = -16x^4 + 16r^2x^2. \quad (12)$$

A fim de obter uma função quadrática, faremos a substituição  $z = x^2$ , ou seja,

$$S^2 = -16z^2 + 16r^2z. \quad (13)$$

Temos, então, a seguinte função quadrática em  $z$ :

$$f(z) = -16z^2 + 16r^2z, \quad (14)$$

que, de acordo com o Teorema 2, tem ponto máximo quando a abscissa do vértice da parábola for  $z_V = -\frac{16r^2}{2(-16)} = \frac{r^2}{2}$ . Como  $z = x^2$ , segue que  $x_V = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$ . Logo,

$$y_V = \sqrt{r^2 - x_V^2} \Rightarrow y_V = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} \Rightarrow y_V = \frac{r}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Portanto, a área máxima ocorre quando  $x = y$ , ou seja, o retângulo inscrito no círculo é um quadrado. □

### 4.3. Atividade 3: Desigualdade isoperimétrica dos triângulos

**Objetivo:** Determinar qual é o triângulo que tem a área máxima dentre todos os triângulos de perímetro fixado.

Nesta atividade vamos encontrar o triângulo de maior área entre todos os triângulos de perímetro fixado, ou seja, resolveremos o problema da desigualdade isoperimétrica<sup>1</sup> dos triângulos.

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 2*;
2. Na primeira janela de visualização, marque dois pontos  $A$  e  $B$  distando entre si menos que 7.5 *u.m.* (*u.m.*: unidades de medida);  
Vamos fixar o perímetro do triângulo  $ABC$  a ser construído em 15*cm*.
3. Obtenha um círculo de centro  $B$  e raio 5, usando a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*;
4. Ligue os pontos  $A$  e  $B$ , obtendo o segmento  $f$ . Esconda o rótulo  $f$ ;
5. Trace o círculo de centro  $A$  e raio  $15 - 5 - f$ ;
6. Marque uma das interseções entre os dois círculos criados anteriormente, obtendo o ponto  $C$ ;
7. Trace o triângulo  $ABC$  e mude a cor e o estilo a seu gosto;
8. Obtenha a área do triângulo e deixe-a numa posição fixa na primeira janela de visualização. Para isto, clique no oitavo botão em *Área*, depois sobre o triângulo. Note que ao mover esse texto *Área*, ele não se afasta muito do triângulo, fica preso num "círculo" no entorno do triângulo. Clique com o botão direito do *mouse* sobre o texto, em seguida, marque a opção *Posição Absoluta na Tela*, arraste esse texto até o local onde deseja fixar. Clique, novamente, com o botão direito do *mouse* sobre o texto, marque a opção *Fixar Objeto*;
9. Exiba nome e valor de cada um dos lados do triângulo  $ABC$ , clicando com o botão direito do *mouse* sobre o lado, depois em *Propriedades*, em seguida em *Básico* e por último em *Exibir Rótulo*, clicando na opção *Nome e Valor*;

**Sugestão:** Para mais precisão nos resultados, coloque a área com duas casas decimais e a medida de cada lado com apenas uma casa decimal.

10. Note que o lado  $c_1$  do triângulo  $ABC$  tem a mesma medida que  $f$ ; renomeie-o de  $c$ . Esconda os círculos;
11. Clique na *Janela de Visualização 2* e, em seguida, digite, na caixa de *Entrada*,  $\text{Área} = (b, \text{pol1})$ , onde  $b$  é a medida do lado  $AC$  e  $\text{pol1}$  representa a área do triângulo em estudo;
12. Habilite o rastro do ponto (*Área*) obtido anteriormente;
13. Mude a cor e habilite o rastro desse ponto;
14. Mova o ponto  $A$  ou o  $B$  para observar a variação da área do triângulo  $ABC$  (Ver Figura 4).

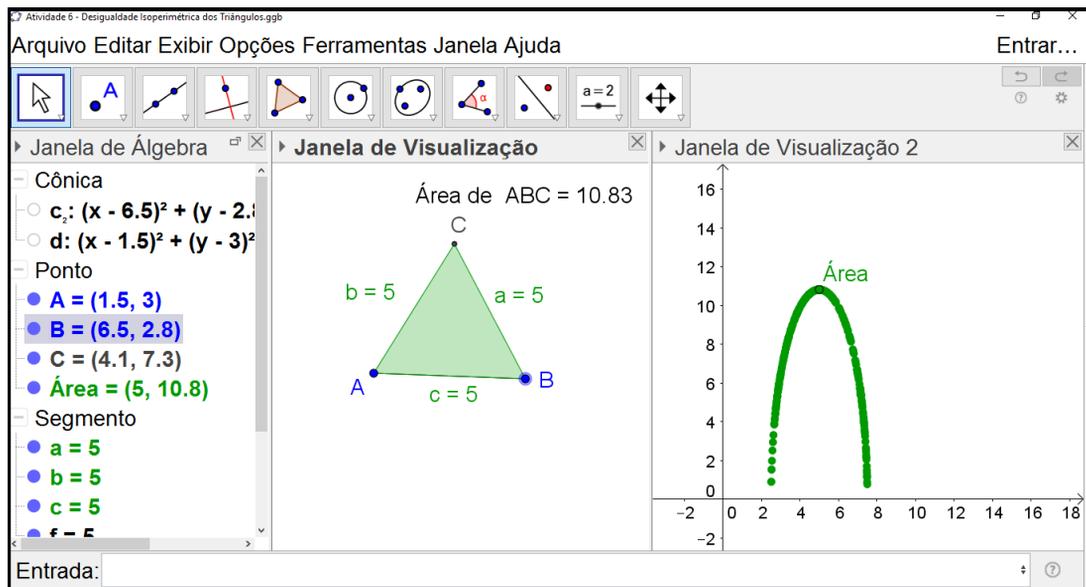


Figura 4: Procurando o triângulo de área máxima

### Orientações metodológicas

Concluída a realização desses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

1. Qual é a área máxima observada para este caso?
2. Quais são as medidas dos lados do triângulo quando esta área máxima ocorre?
3. Com base nessas observações, qual é o triângulo de área máxima, quando fixado seu perímetro?

Essa atividade é um caso particular, mas o professor que aplicá-la pode sugerir aos alunos que desenvolvam vários casos particulares, para que tenham a ideia de como conjecturar o caso geral da desigualdade isoperimétrica dos triângulos. Para adaptar as atividades a outros casos, basta observar que, no segundo passo, a necessidade da marcação de dois pontos  $A$  e  $B$  de modo que a distância entre eles seja menor do que a metade do perímetro que se deseja para o triângulo; no terceiro passo obter um círculo de centro  $B$  e raio igual a um terço desse perímetro; no quinto passo, um círculo de centro em  $A$  e raio  $p - \frac{1}{3} \cdot p - f$ , se, respectivamente,  $p$  for o perímetro do triângulo  $ABC$  e  $f$ , a medida do segmento  $AB$ . No nono passo também sugerimos determinados números de casas decimais para a área e as medidas dos lados do triângulo, levando em consideração os

<sup>1</sup> Isoperimétrico significa literalmente com perímetro igual. Todavia, em matemática, a isoperimetria é o estudo das figuras geométricas cujos contornos são congruentes. Em geometria plana, problemas isoperimétricos têm a finalidade de determinar uma figura de área máxima cujo perímetro é fixado.

erros de casas decimais comuns em máquinas de calcular e *softwares* digitais. Verifique que se modificarmos o número de casas decimais podemos não encontrar os resultados que esperamos com precisão.

Para a demonstração do teorema a seguir faremos uso dos seguintes resultados:

**(1<sup>o</sup>)** Se um triângulo possui os lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$  e o seu semiperímetro é  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , é possível demonstrar que sua área  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  (Fórmula de Heron). Veja a demonstração em [1, p32].

**(2<sup>o</sup>)** A área de um triângulo equilátero de lado  $a$  é dada por  $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ . Veja a demonstração em [1, p46]

**Teorema 5.** *O triângulo equilátero é o que tem a área máxima dentre todos os triângulos de perímetro fixado.*

*Demonstração.* Denotando por  $a, b$  e  $c$  as medidas dos lados do triângulo, o perímetro desse triângulo é  $p = a + b + c$ . Pela a fórmula de Heron a área do triângulo é dada por

$$A = \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - a\right) \left(\frac{p}{2} - b\right) \left(\frac{p}{2} - c\right)}. \quad (16)$$

Agora, usando a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, temos que

$$\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{p}{2} - a\right) \left(\frac{p}{2} - b\right) \left(\frac{p}{2} - c\right)} \quad (17)$$

isto é,

$$\left(\frac{p}{2} - a\right) \left(\frac{p}{2} - b\right) \left(\frac{p}{2} - c\right) \leq \left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3. \quad (18)$$

Logo,

$$A \leq \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3}. \quad (19)$$

Mas,

$$\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3} = \frac{p}{6}. \quad (20)$$

Segue que

$$\sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3} = \sqrt{\frac{p}{2} \cdot \frac{p^3}{216}} = \sqrt{\frac{p^4}{432}} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}. \quad (21)$$

Assim, a maior área a ser atingida por um triângulo de lados  $a, b$  e  $c$  é  $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ , onde  $p = a + b + c$ . E esta área máxima ocorre, de acordo com o Teorema 1,  $m_a = m_g$ , quando

$$\frac{p}{2} - a = \frac{p}{2} - b = \frac{p}{2} - c, \quad (22)$$

ou seja, quando

$$a = b = c. \quad (23)$$

Portanto, o triângulo equilátero é o triângulo de maior área dentre aqueles de perímetro fixado, com área igual a

$$\frac{p^2}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad (24)$$

onde  $a$  é a medida dos lados desse triângulo.

□

## 5. Atividades usando o GeoGebra 3D

### 5.1. Atividade 4: Recipiente cilíndrico de área mínima fixado o volume

**Objetivo:** Descobrir qual o recipiente cilíndrico de volume fixo que tem a menor área.

Para conjecturar a solução desse problema vamos desenvolver a seguinte atividade no *GeoGebra 3D*, utilizando o problema particular abaixo:

Uma indústria que fabrica chocolate pretende vender seu produto em recipiente cilíndrico de volume  $V = 314,2 \text{ cm}^3$ . Quais são as dimensões desse recipiente para que seja gasto o mínimo de material em sua fabricação?

1. Abra o GeoGebra 3D e coloque visíveis as janelas: *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 3D*;
2. Crie dois controles deslizantes  $r$  e  $h$  variando, respectivamente, de 0 a 8 e de 0 a 12, ambos com incremento 0.1;
3. Fixe o volume em 314,2 clicando com o botão direito do *mouse* no controle deslizante  $h$ , depois clique em *Propriedades* → *Programação*, na caixa *Ao Atualizar* escreva  $h = (314.159)/(3.14159 * r^2)$  e depois, em *OK*. Observe que, quando você tentar mover o controle deslizante  $h$ , ele desaparecerá da *Janela de Visualização*, mas continuará visível na *Janela de Álgebra*;
4. No menu principal clique em *Opções* → *Arredondamento* → *1 Casa Decimal*;
5. Crie um círculo  $c$  de centro  $A(0,0)$  e raio  $r$ ;
6. Na *Caixa de Entrada* digite: *Cilindro*[ $c,h$ ] para criar um cilindro de base circular  $c$  e altura  $h$ ;
7. Defina na *Caixa de Entrada* *Volume* =  $\pi * r^2 * h$  e em seguida, *Área* =  $2 * \pi * r * (r + h)$ , depois, *Diâmetro* =  $2 * r$  e, por fim, *Altura* =  $h$ . Arraste esses textos criados para a janela de visualização;
8. Exiba a área com 4 casas decimais clicando sobre o texto com o botão direito do *mouse* e, em seguida em *Propriedades* → *Texto* → *Arredondamento* → *4 Casas Decimais*.

## Orientações metodológicas

Observando o seu arquivo elaborado no GeoGebra, você obterá um resultado semelhante a Figura 5.

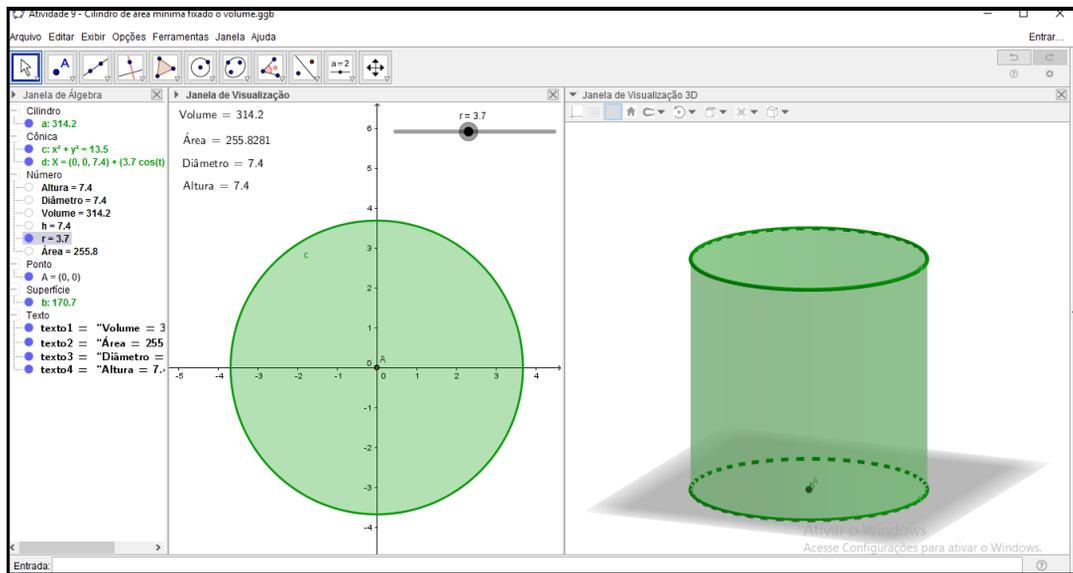


Figura 5: Cilindro de área mínima fixado o volume

Em seguida, para que seja obtido o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

1. Movimentando o controle deslizante  $r$ , qual é o menor valor que você encontra para a área do cilindro?
2. Quais são as medidas do raio e da altura que você encontra quando a área é mínima?
3. Que relação, aproximada, você pode estabelecer entre essas duas medidas?
4. Quais são as dimensões do recipiente para que seja gasto o mínimo de material na fabricação da lata cilíndrica em questão?
5. Como você pode conjecturar um resultado envolvendo a altura em função do raio de um cilindro quando fixamos seu volume e queremos obter sua área mínima?

**Teorema 6.** *O cilindro equilátero<sup>2</sup> é o recipiente cilíndrico de volume fixado que tem a menor área.*

<sup>2</sup>Cilindro equilátero é aquele cuja altura é igual ao diâmetro da base.

*Demonstração.* Consideremos  $x$  como sendo a medida do raio da base do recipiente cilíndrico e  $h$  a sua altura. O volume  $V$  do recipiente é dado por

$$V = \pi x^2 h. \quad (25)$$

Sua área total  $S$  é

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h. \quad (26)$$

Colocando  $S$  em função de  $x$  e  $V$ , pelo Teorema 1, temos que

$$S = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{3 \left( 2\pi x^2 + \frac{V}{x} + \frac{V}{x} \right)}{3} \geq 3 \sqrt[3]{2\pi x^2 \cdot \frac{V}{x} \cdot \frac{V}{x}} = 3 \sqrt[3]{2\pi V^2}, \quad (27)$$

assim, a área total do cilindro será mínima quando  $2\pi x^2 = \frac{V}{x}$ . Logo,

$$\frac{V}{x} = 2\pi x^2 \Rightarrow V = 2\pi x^3. \quad (28)$$

De acordo com as igualdades 25 e 28 segue que

$$h = 2x \quad (29)$$

conforme queríamos provar. Portanto, quando o volume é dado, o cilindro que tem área mínima é o cilindro equilátero.  $\square$

## 5.2. Atividade 5: Cilindro inscrito num cone

**Objetivo:** Determinar o cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito num cone circular reto.

Considere um cone circular reto. Diz-se que um cilindro circular reto está inscrito no cone circular reto se possui uma das bases sobre a base do cone e a circunferência da outra base pertencente à superfície lateral do cone.

Com a utilização do GeoGebra, vamos desenvolver os passos a seguir para descobrirmos o volume máximo de um cilindro circular reto inscrito num cone circular reto. Em princípio, vamos fazer o caso particular com um cone de altura 6 e raio da base 2.

1. Abra o GeoGebra 3D e coloque visíveis as janelas: *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização*, *Janela de Visualização 3D* e *Janela de Visualização 2*;
2. Obtenha um círculo de centro  $O(0,0)$  e raio 2;
3. Clique na *Janela de Visualização 3D*, selecione a ferramenta *Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone* para obter um cone de altura 6, clique no círculo obtido no passo anterior e, digite na caixa de diálogo que surgirá, o número 6;
4. Crie um controle deslizante  $h_1$  variando de 0 a 6 e incremento 0,04;
5. Trace o plano  $z = 6 - h_1$ . Use a caixa de *Entrada*;

6. Obtenha o círculo de interseção entre o plano obtido no passo anterior e o cone;
7. Esconda o plano;
8. Marque o ponto  $A$  sobre o círculo;
9. Digite, na caixa de *Entrada*,  $B = (0, 0, z(A))$ ;
10. Marque o ponto  $C$  no vértice do cone;
11. Ligue o segmento  $BC$ , renomei-o de  $h$ , mude sua cor e estilo;
12. Marque o ponto  $D = (x(A), y(A), 0)$ ;
13. Use a ferramenta *Círculo dados eixo e um de seus Pontos* para obter o círculo  $g$  que tem centro no eixo  $Oy$  e passa pelo ponto  $D$ ;
14. Obtenha o cilindro que tem como base o círculo  $g$  e altura  $6 - h$ ;
15. Clique na origem do plano cartesiano da *Janela de Visualização 2* e obtenha um segmento  $EF$  com comprimento fixo  $h$ . Mude sua cor e estilo;
16. Na *Janela de Visualização 2*, obtenha o ponto  $V = (x(F), i)$ , se  $i$  for o nome dado ao cilindro em estudo. Note que a abscissa de  $V$  representa a medida  $h$ , enquanto sua ordenada, o volume do cilindro. Habilite o rastro de  $V$  e mude sua cor. Mova o controle deslizante  $h_1$  (ou ative a animação) para verificar a variação do volume;
17. Outra forma de visualizar a variação do volume é criando um botão, na *Janela de Visualização 2*, para *Iniciar/Parar* a animação do controle deslizante  $h_1$ . Para isto, primeiro, digite, na caixa de *Entrada*,  $t = true$ , criando o *Valor Booleano*  $t$ . Depois selecione a ferramenta *Botão*, clique na *Janela de Visualização 2* onde surgirá a caixa de diálogo da Figura 6.

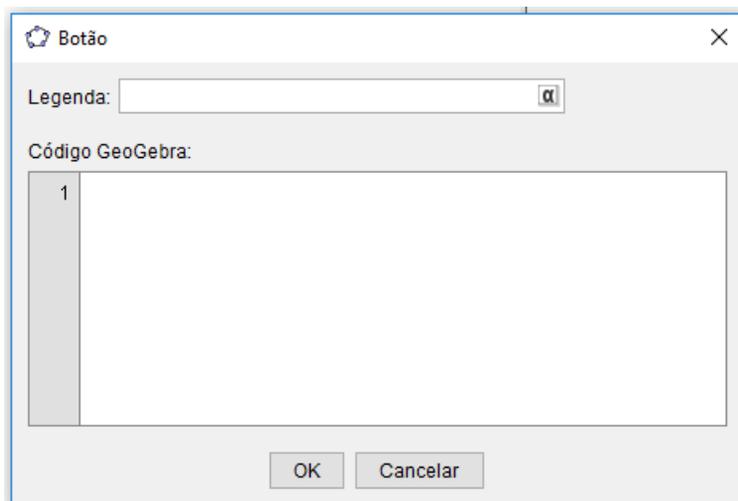


Figura 6: Botão Iniciar / Parar

Em *Legenda* digite *Iniciar/Parar*. E em *Código GeoGebra* digite:

DefinirValor[t,!t]

DefinirLegenda[DefinirValor[t,!t],Se[t,"Parar","Iniciar"]]

IniciarAnimação[h\_1,t]

Na Figura 7, vemos a atividade pronta no GeoGebra, onde aparecem a *Janela de Álgebra* com os dados algébricos, a *Janela de Visualização* com a vista superior do cilindro inscrito no cone, a *Janela de Visualização 3D* com a visão dos objetos em três dimensões e a *Janela de Visualização 2* com o gráfico que representa o volume do cilindro inscrito no cone. Para ver a animação elaborada no passo anterior basta clicar no botão *Iniciar / Parar*. Fazendo isso, surgirá também o botão com o desenho universal de pausar e reproduzir no canto inferior esquerdo da *Janela de Visualização 2*.

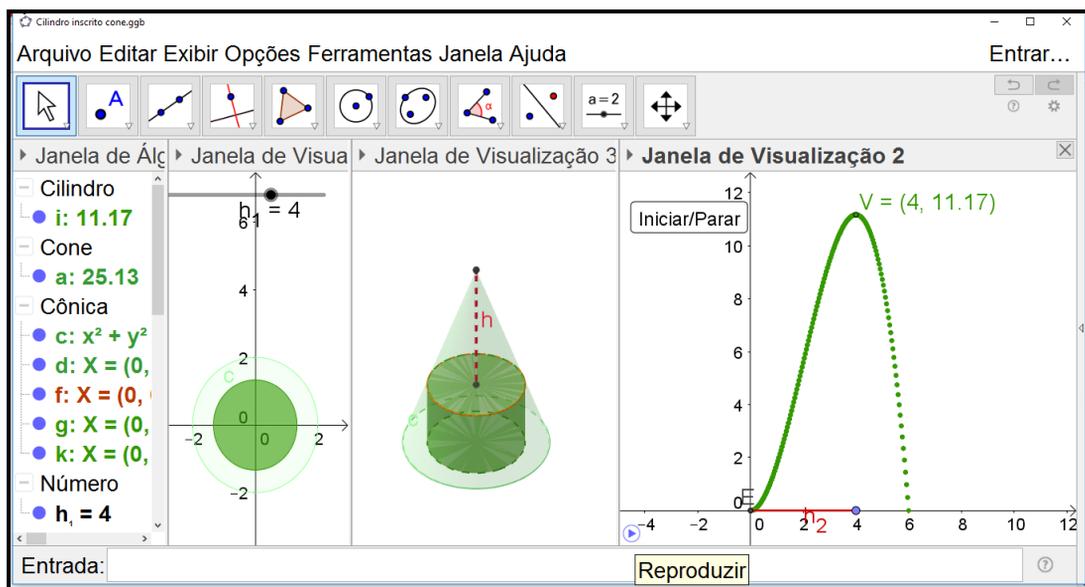


Figura 7: Cilindro de volume máximo inscrito num cone

## Orientações metodológicas

Finalizados esses passos, para que seja obtido o resultado esperado, o professor pode direcionar aos alunos, diversas perguntas, como as seguintes:

1. Qual é o volume máximo desse cilindro inscrito?
2. Qual é o valor de  $h$ , quando você obtém o volume máximo para o cilindro inscrito?

O professor pode reelaborar esta atividade, nomeando a altura do cilindro inscrito no cone de  $h$ . Nesta atividade, nomeamos por  $h$  o complemento da altura do cilindro com relação à altura do cone.

**Teorema 7.** O volume máximo de um cilindro circular reto inscrito num cone circular reto de altura  $a$  e raio da base  $b$  é  $V = \frac{4\pi ab^2}{27}$ .

*Demonstração.* Consideremos a seguinte figura que representa uma seção do cone circular reto que contém o vértice e o centro da base com altura  $a$  cuja raio da base é  $b$ , com um cilindro circular nele inscrito.

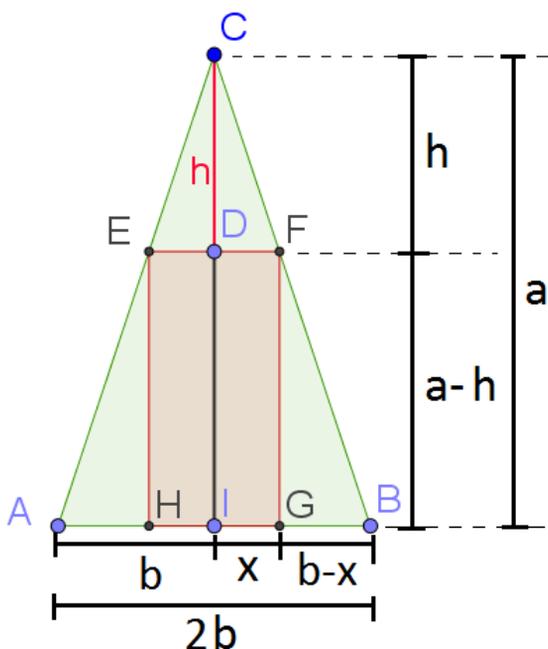


Figura 8: Seção central vertical

Consideremos a Figura 8. Da semelhança dos triângulos  $CDF$  e  $CIB$  segue que

$$\frac{h}{a} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{bh}{a}. \quad (30)$$

Observe que o volume do cilindro inscrito no cone é dado por

$$V = \pi x^2 \cdot (a - h), \quad (31)$$

ou seja,

$$V = \pi \cdot \left(\frac{bh}{a}\right)^2 \cdot (a - h). \quad (32)$$

Usando o fato de que a média geométrica é menor do que ou igual a média aritmética, temos que

$$\sqrt[3]{\frac{2b}{\pi a} V} = \sqrt[3]{\frac{bh}{a} \cdot \frac{bh}{a} \cdot \frac{2b}{a} \cdot (a-h)} \leq \frac{\frac{bh}{a} + \frac{bh}{a} + \frac{2b}{a} \cdot (a-h)}{3} = \frac{2b}{3}. \quad (33)$$

Logo, o valor máximo para o volume do cilindro ocorre quando

$$\frac{2b}{\pi a} V = \left(\frac{2b}{3}\right)^3 \Rightarrow V = \frac{4\pi ab^2}{27}, \quad (34)$$

que ocorre quando  $h = \frac{2}{3}a$ . Além disso, segue de 30 que  $x = \frac{2b}{3}$ . E, portanto, o cilindro procurado tem raio da base igual a  $\frac{2b}{3}$  e altura,  $\frac{a}{3}$ . □

## 6. Conclusões

Experiências evidenciam à influência positiva do uso do GeoGebra no ensino e na aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. O uso dessa ferramenta, para o ensino, proporciona aos alunos a realização de construções, manipulações, visualização de diversas formas e ângulos, formulação de conjecturas a partir da realização de uma sequência didática bem planejada e executada, facilitando a compreensão dos conceitos geométricos e até algébricos dos conteúdos estudados.

O que diferencia este trabalho dos outros existentes na literatura é o fato de que neste não é utilizada a aplicação de derivadas na resolução de problemas de otimização; aqui são utilizados os conteúdos de máximos ou mínimos de funções, funções quadráticas e desigualdade das médias. Além disso, inovamos na medida em que utilizamos o *software* GeoGebra para o desenvolvimento de uma sequência didática na qual o aluno possa conjecturar um resultado a ser demonstrado matematicamente fazendo o uso de teoremas envolvendo conteúdos do Ensino Médio.

## Referências

- [1] Batista, F. da S. *Um Estudo Sobre Área de Triângulos e Polígonos Convexos e Não-convexos*. Dissertação (Mestrado) - UFCG/CCT. Orientador: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes. Campina Grande, (2014). 95p. Disponível em: <[https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id94580](https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id94580)>. Acesso em 18 de maio de 2018.
- [2] Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*; Volume 2; Brasília: Ministério da Educação, (2006), 135 p.
- [3] Eves, H.; *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, (2004), 844p.
- [4] Giraldo, V., Caetano, P. e Mattos, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. UFRJ, UFSCar, UERJ/CP2. (2012), 240p.
- [5] Lima, J. da C. *O Estudo de Problemas de Otimização com a Utilização do Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) - UEPB/CCT. Orientadora: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas. Campina Grande, (2017). 97p. Disponível em: <[https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=160191364](https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160191364)>. Acesso em 17 de maio de 2018.

- [6] Moreira, G. N. A. *Desigualdades: uma abordagem através de problemas*. Dissertação (Mestrado) - UFCG/CCT. Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio da Silva Medeiros. Campina Grande, (2016). 95p. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=94580](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94580)>. Acesso em 17 de maio de 2018.

Josenildo Lima  
EEEFM Min. José A. de Almeida  
e EMEIF João César - Areia - PB  
<[josenildocunhalima@gmail.com](mailto:josenildocunhalima@gmail.com)>

Luciana de Freitas  
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB  
<[lucianarfreitas@hotmail.com](mailto:lucianarfreitas@hotmail.com)>

Recebido: 31/01/2018

# Equações algébricas e decisão do melhor investimento

Ronie Dario

Jeferson da Silva

## Resumo

Este trabalho explora a matemática envolvida nos métodos determinísticos de análise de investimentos baseados no Valor Presente Líquido (VPL) e na Taxa Interna de Retorno (TIR) de um projeto econômico-financeiro. Em especial, estrutura-se os conceitos e resultados envolvendo a existência e unicidade da TIR para um dado fluxo de caixa, mostrando como a utilização das equações algébricas pode ter grande importância na abordagem de problemas financeiros práticos.

**Palavras-chave:** equações algébricas, valor presente líquido, taxa interna de retorno.

## Abstract

This work explores the mathematics involved in the deterministic methods of investment analysis based on the Net Present Value (NPV) and the Internal Rate of Return (IRR) of an economic-financial project. In particular, the concepts and results involving the existence and uniqueness of the IRR for a given cash flow are structured, showing how the use of algebraic equations could have great importance in approaching practical financial problems.

**Keywords:** algebraic equations, net present value, internal rate of return.

## 1. Introdução

Frequentemente nos deparamos com a necessidade de optar entre um ou outro investimento, empréstimo pessoal, financiamento habitacional, entre outras operações financeiras.

Por exemplo, se decidirmos investir em renda fixa, teremos à disposição a Caderneta de Poupança, os Certificados de Depósito Bancário (CDB's), os títulos públicos federais (Tesouro Direto), e uma variedade de outras opções. Cada investimento tem sua taxa de juros definida em função do prazo de aplicação e dos riscos envolvidos. Por outro lado, se precisamos tomar um empréstimo ou fazer um financiamento, há diversas opções cujas taxas variam em função dos prazos de pagamento e das garantias oferecidas. A maior variedade de opções requer as melhores análises possíveis antes da tomada de decisão.

Decisões envolvendo projetos financeiros podem ser tomadas com melhor assertividade utilizando técnicas relativamente simples de análise do valor do dinheiro no tempo. Uma classe importante destas técnicas corresponde aos *métodos determinísticos de análise de investimentos*.

Para uma considerável variedade de problemas a utilização destes métodos pode ser feita por pessoas fora de áreas como administração financeira ou economia. A análise da melhor opção na aquisição de bens de consumo, por exemplo, pode ser explorada no ensino básico e médio, auxiliando as famílias a terem consciência da melhor escolha, ajudando assim no orçamento familiar. Além disso, pode ficar ainda mais clara aos professores de matemática a influência direta de conceitos da matemática básica na escolha de um ou outro projeto financeiro.

A apropriação da matemática envolvida nestes métodos é uma forma de aprimorar a própria utilização dos mesmos, pois pode permitir adaptações de acordo com a situação real.

Objetivamos neste trabalho estruturar adequadamente a matemática dos métodos determinísticos de análise de investimentos baseados nos conceitos de TIR e VPL, conforme explicamos a frente. Em boa parte das vezes, basta entender e aplicar a capitalização composta e inversamente, o cálculo do valor presente de determinados valores. Em diversas outras situações, faz-se necessário estudar as raízes de determinados polinômios, resolvendo equações algébricas. Em particular, é importante saber a quantidade de raízes distintas e a variação de sinal entre elas. Aqui precisaremos utilizar indução finita e algumas ferramentas do cálculo diferencial, como o Teorema de Rolle.

Esperamos que a exploração da matemática envolvida nos métodos possa dar suporte a outras publicações específicas de educação financeira voltadas ao ensino do tema e que possam ser desenvolvidas mais aplicações para utilização por professores de matemática em sala de aula. Neste sentido, procuramos desenvolver exemplos que possam ser utilizados ou adaptados no ensino do tema no nível básico e médio.

Um dos conceitos preferidos pelos analistas financeiros é o de Taxa Interna de Retorno (TIR) de um investimento. Costuma-se defini-la como a taxa de desconto que iguala o valor presente de caixa futuros ao valor do investimento inicial. O conceito preciso está na Definição 2.

Ocorre que uma TIR é uma raiz de um polinômio com grau tão elevado quanto o número de entradas ou saídas de caixa após o investimento inicial. A partir do estudo de equações polinomiais conclui-se que somente em situações muito específicas haverá uma única TIR. Uma delas é no caso de um fluxo de caixa conhecido como *convencional*. Este fluxo ocorre, por exemplo, em um investimento em um título público federal (levado ao vencimento) com pagamento semestral de cupom de juros.

No caso de um fluxo de caixa convencional utiliza-se um clássico teorema sobre variações de sinais dos coeficientes de um polinômio para obter como corolário imediato (Teorema 2) a existência e unicidade da TIR. A ênfase do nosso trabalho é sobre esse teorema e suas aplicações, devido ao fato que, essencialmente, este é o único caso tratado nas referências brasileiras e em geral sem muita preocupação com a matemática envolvida, inclusive em materiais oficiais de ensino do tema. Veja por exemplo [4] e [8].

Existem exemplos de ordem prática em que uma TIR sequer existe como número real. Em [3] é exposto um método para análise de um projeto de investimento desse tipo. Apesar disso, em algumas situações afirma-se que neste caso o investimento não possui taxa interna de retorno [6, p199].

A ocorrência de múltiplas TIR's começou a ser estudada a partir do clássico exemplo de [5] sobre prospecção de petróleo. Tornou-se tema de pesquisa em matemática/administração financeira. Veja, por exemplo, [3] e [11], onde são propostos métodos mais avançados.

Quase na sua totalidade, as operações financeiras são realizadas através do regime composto de capitalização de juros (*juros compostos*), no qual os juros que se formam ao final de cada período

$k$  pela aplicação da taxa correspondente  $i_k$ , participam da geração de juros do período seguinte. Assim, ao final do tempo  $t$ , um capital  $C_0$  transforma-se em um montante  $M(t)$  dado por

$$M(t) = C_0 \prod_{k=1}^t (1 + i_k). \quad (1)$$

Assumiremos sempre  $i_k \neq -1$ , para todo  $k$ . A Equação 1 pode ser estendida para o caso de variável contínua, que tem grande utilidade teórica. Porém, isto não se fará necessário no nosso trabalho.

Uma situação particular bastante frequente ocorre quando a taxa de juros acordada na operação financeira é constante, digamos igual a  $i$ . Neste caso, decorre da Equação 1 que

$$M(t) = C_0(1 + i)^t. \quad (2)$$

O valor presente do capital  $M(t)$  à taxa  $i$  é dado por

$$P(t) = \frac{M(t)}{(1 + i)^t}. \quad (3)$$

Na sequência expomos uma ferramenta elementar e útil para estudar um determinado projeto financeiro, o *fluxo de caixa*. Trata-se de uma representação gráfica do fluxo do dinheiro, ao longo do tempo.

Na terceira seção abordamos nossa primeira técnica determinística para análise de projetos financeiros, o método do Valor Presente Líquido (VPL). Veremos que do ponto de vista da matemática envolvida, o método não oferece grande dificuldade, bastando a aplicação do conceito de valor presente (Equação 3).

O conceito de Taxa Interna de Retorno é discutido na quarta seção. Expomos em detalhes a Regra de Sinais de Descartes, que na sequência é utilizada para a verificação da existência e unicidade da TIR de um fluxo de caixa convencional.

Concluímos o trabalho com uma breve indicação da continuidade natural do assunto, que é o estudo de projetos financeiros com múltiplas taxas de retorno, importante tema de pesquisa na matemática, administração financeira e economia. Em todas as seções apresentamos exemplos práticos que evidenciam a utilidade dos assuntos abordados. Este trabalho está baseado na dissertação de mestrado do primeiro autor [9].

## 2. Fluxo de Caixa

Na análise, planejamento, ou execução de determinado projeto financeiro é útil visualizar as entradas e saídas de recursos monetários por meio do diagrama denominado *fluxo de caixa*.

Costuma-se utilizar uma escala horizontal de tempo (ano, mês, dia, etc.) em períodos representados em intervalos contíguos de modo que cada número representa os períodos acumulados. Setas para cima representam as entradas e setas para baixo representam as saídas de caixa.

O diagrama seguinte representa uma saída de caixa hoje no valor de R\$ 1.000,00 com uma entrada de R\$ 500,00 no final do terceiro período e duas entradas de caixa iguais a R\$ 400,00 no final do quinto e do sexto períodos.

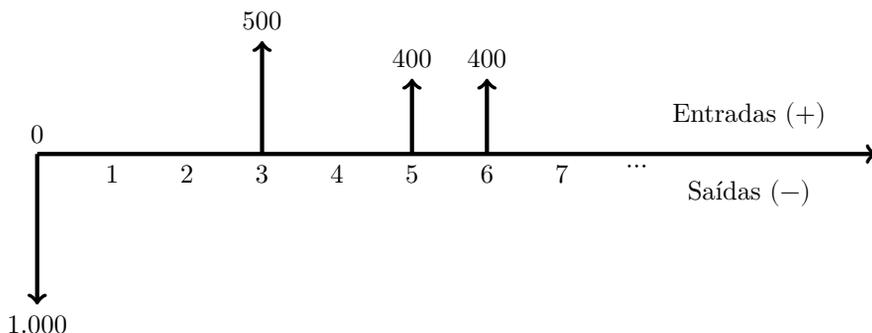


Figura 1: Exemplo de Fluxo de Caixa

Vejam os casos práticos do título negociado no Tesouro Direto chamado de Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais (antiga NTN-B), que possui rentabilidade vinculada à variação do IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo), acrescida de juros definidos no momento do investimento. Semestralmente há o pagamento de cupom de juros. Finalmente, no vencimento há o pagamento do valor de face (ou valor nominal) do título, juntamente com o pagamento do último cupom de juros.

A Figura 2 ilustra o fluxo de caixa do investimento.

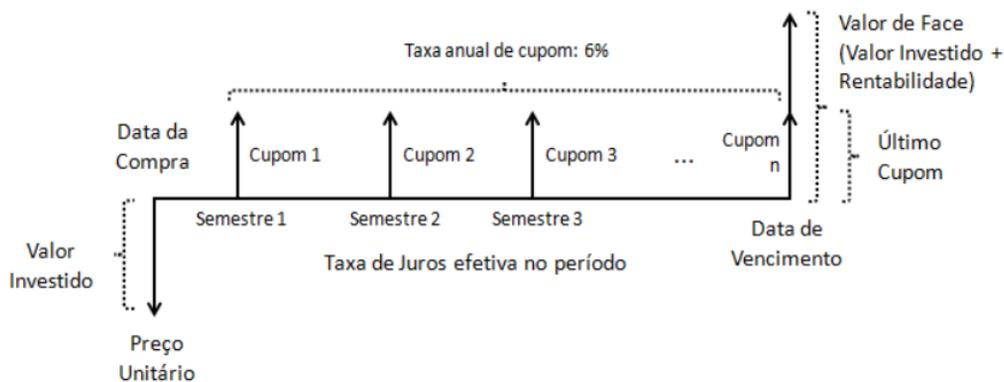


Figura 2: Fluxo de Caixa da NTN-B, Fonte [7]

### 3. Valor Presente Líquido (VPL)

A primeira etapa na análise de um projeto financeiro é o estudo do *custo de oportunidade do capital* do projeto, também referido como *taxa mínima de atratividade* (TMA), ou ainda, *valor do dinheiro*. Trata-se de decidir se é viável a realização do projeto comparando-o com alguma referência de rentabilidade opcional.

No caso de um investimento, uma medida para o custo de oportunidade é a rentabilidade de um

título de renda fixa com maturação no mesmo período do projeto. No Brasil isto é especialmente relevante, dado que o governo ainda oferece altas taxas de juros nos títulos públicos. No exemplo do título da seção anterior havia um ganho real de 6% ao ano. A definição desta taxa depende das particularidades e objetivos de cada projeto, assim como das opções disponíveis a quem considera realizá-lo. Vamos denotar a TMA por  $\kappa$ . Depois de também estabelecido o fluxo de caixa previsto para o projeto, uma maneira de determinar a viabilidade da realização do mesmo é analisar seu valor presente líquido, conforme a definição abaixo. Lembre que  $\kappa \neq -1$ .

**Definição 1.** Considere uma série de capitais  $c_0, \dots, c_n$  e a taxa mínima de atratividade  $\kappa$ . O **valor presente líquido** relativo a esta série e taxa é definido como

$$V = V(\kappa, c_0, \dots, c_n) = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(1 + \kappa)^i}.$$

A Definição 1 utiliza a Equação 3 para calcular o valor presente de cada capital da série trazendo-o para a data zero, levando em conta a TMA  $\kappa$ .

Se o projeto tratar de um investimento,  $c_0$  pode ser entendido como o aporte inicial, seguido de entradas de caixa  $c_1, \dots, c_n$ . Se o VPL for zero, os fluxos de caixa somente conseguiriam recuperar o capital investido e proporcionar o retorno equivalente à taxa mínima. Sendo o VPL positivo, os recursos investidos além de terem sido totalmente recuperados pela taxa  $\kappa$ , produziram ganho adicional. Em outras palavras, a decisão de investimento gerou riqueza.

Vejam um exemplo.

Suponha que um pequeno pecuarista deseje adquirir uma propriedade rural no valor de R\$ 125.000,00, visando ampliar seu rebanho. Com a aquisição, suas receitas com a venda de animais aumentariam em R\$ 30.000,00 anuais. Por outro lado, as despesas com a produção iriam atingir mais R\$ 7.750,00 por ano. Supondo que em dez anos a propriedade valerá nominalmente o quanto ela custou e que a TMA é de 18% ao ano, vejamos se é vantajosa a aquisição. Pela Definição 1, temos

$$V = -125.000 + \sum_{i=1}^{10} \frac{22.250}{(1,18)^i} + \frac{125.000}{(1,18)^{10}} = -1.123,52.$$

Portanto, a aquisição não é considerada viável nas condições dadas.

A técnica pode ser utilizada para decidir entre duas ou mais opções distintas de projetos econômico-financeiros. Nesse caso, comparam-se os respectivos valores presentes líquidos das opções envolvidas. Em uma aquisição, por exemplo, a indicação do método é pela escolha do projeto com menor valor presente líquido. Vejamos um caso prático desta situação.

Um imóvel pode ser adquirido de duas formas diferentes. A primeira é à vista, pelo valor de R\$ 170.000,00 e a segunda é pagando uma entrada de R\$ 15.000 e mais 60 parcelas de R\$ 3.350,00, sendo que a primeira prestação vence um mês após o fechamento do negócio. Suponha também que há uma opção de aplicação financeira que rende 1% ao mês (TMA). A aquisição do imóvel à vista tem VPL  $V_1 = 170.000,00$ , enquanto que para a compra parcelada temos

$$V_2 = 15.000 + \sum_{i=1}^{60} \frac{3.350}{(1,01)^i} = 165.599,38.$$

Como  $V_2 < V_1$ , temos que a melhor opção para o comprador é a segunda, isto é, comprar a prazo e ir mantendo o saldo aplicado após cada pagamento no período.

Em várias situações práticas a série de capitais é constante, isto é,  $c_i = R$ , para todo  $i$ . Ou mais geralmente,  $c_i = R$ , para todo  $i \geq i_0$ . Isto pode ocorrer em uma compra parcelada no cartão de crédito ou em um empréstimo pessoal contraído junto a uma instituição financeira. Para séries constantes a partir do tempo  $i = i_0$ , o VPL pode ser diretamente calculado por meio do seguinte teorema.

**Teorema 1.** *O valor presente líquido de uma série de capitais  $c_0, \dots, c_n$ , com  $c_i = R$ , para todo  $i \geq i_0 \geq 0$  e a uma dada taxa mínima de atratividade  $\kappa$ , é dado por:*

$$V = \sum_{i=0}^{i_0} \frac{c_i}{(1+\kappa)^i} + \frac{R}{\kappa} \left[ \frac{(1+\kappa)^{n-i_0} - 1}{(1+\kappa)^n} \right]. \quad (4)$$

Em particular, para  $i_0 = 0$ ,

$$V = c_0 + \frac{R}{\kappa} \left( 1 - \frac{1}{(1+\kappa)^n} \right). \quad (5)$$

*Demonstração.* Utilizando a Definição 1 e fazendo  $x = \frac{1}{1+\kappa}$ , temos

$$V = \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{(1+\kappa)^i} = \sum_{i=0}^{i_0} c_i x^i + R \sum_{i=i_0+1}^n x^i.$$

A soma dos termos  $x^{i_0+1}$  à  $x^n$  da progressão geométrica  $(x^i)$  é  $x^{i_0+1} \left( \frac{1-x^{n-i_0}}{1-x} \right)$ . Substituindo-se

$x = \frac{1}{1+\kappa}$ , obtêm-se

$$\sum_{i=i_0+1}^n x^i = \frac{(1+\kappa)^{n-i_0} - 1}{\kappa(1+\kappa)^n}.$$

□

Como aplicação do Teorema 1, vamos agora considerar o Projeto Faculdade do Pedro, estudante de ensino médio que pretende entrar para uma faculdade particular. Pedro terá até R\$ 500,00 por mês para custear a mensalidade do curso e precisa decidir entre duas possibilidades:

- (1) o curso 1, que custa R\$ 500,00 por mês e no qual Pedro espera ter um salário de R\$ 1.750,00 após se formar;
- (2) e o curso 2, que custa R\$ 350,00 por mês e no qual espera receber R\$ 1.400,00 após se formar.

Escolhendo o curso 2, Pedro poderá investir os R\$ 150,00 que sobrarão mensalmente em uma aplicação com rendimento de 0,8% ao mês. Mais algumas informações:

- os dois cursos duram quatro anos.
- os dois cursos tem uma taxa de matrícula de R\$ 500,00.

Analisando somente o VPL de cada opção, vejamos qual seria a melhor escolha de curso, supondo que Pedro trabalhe por cinco anos na profissão escolhida recebendo o salário desejado, e que o custo do dinheiro seja de 0,6% ao mês. Para a primeira opção temos o fluxo de caixa abaixo.

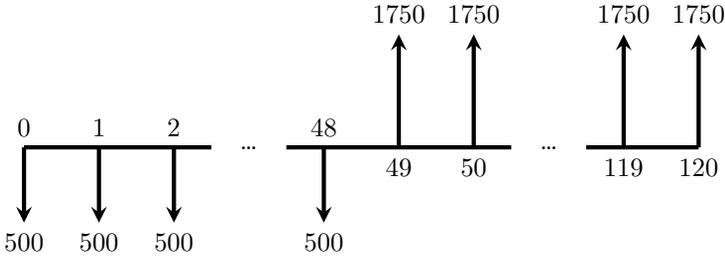


Figura 3: Fluxo de Caixa do Curso 1

Utilizando o Teorema 1, temos

$$\begin{aligned} \text{VPL}_1 &= -500 - \sum_{i=1}^{48} \frac{500}{(1,006)^i} + \sum_{i=49}^{120} \frac{1.750}{(1,006)^i} = -500 - \frac{500}{0,006} \left(1 - \frac{1}{(1,006)^{48}}\right) + \\ &\frac{1.750}{0,006} \left(\frac{(1,006)^{72} - 1}{(1,006)^{120}}\right) = 76.593,56 - 20.799,41 - 500 = 55.294,15. \end{aligned} \quad (6)$$

Para facilitar a análise da segunda opção vamos dividi-la em duas partes. A primeira (A) refere-se somente às despesas e retornos do curso 2 e tem fluxo de caixa representado abaixo.

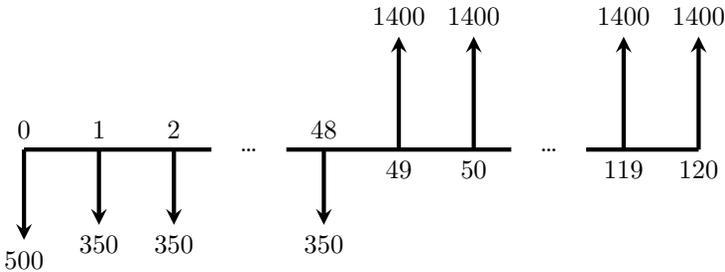


Figura 4: Fluxo de Caixa do Curso A

Novamente pelo Teorema 1,

$$\begin{aligned} \text{VPL}_A &= -500 - \sum_{i=1}^{48} \frac{350}{(1,006)^i} + \sum_{i=49}^{120} \frac{1.400}{(1,006)^i} = -500 - \frac{350}{0,006} \left(1 - \frac{1}{(1,006)^{48}}\right) \\ &+ \frac{1.400}{0,006} \left(\frac{(1,006)^{72} - 1}{(1,006)^{120}}\right) = 61.274,85 - 14.559,59 - 500 = 46.215,26. \end{aligned} \quad (7)$$

A segunda parte (B) refere-se ao investimento de R\$ 150,00 mensais e possui o fluxo de caixa abaixo.

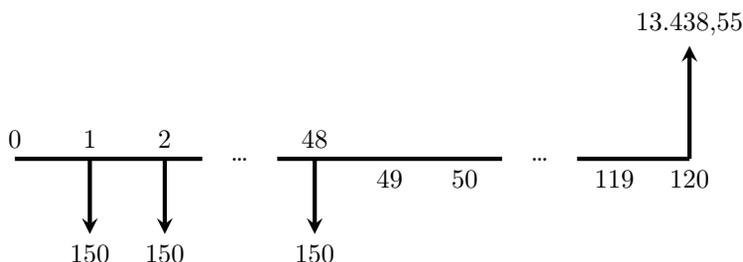


Figura 5: Fluxo do Investimento

A última entrada no valor de R\$ 13.438,55 corresponde ao montante acumulado até o mês 48, que denotaremos por  $S$ , corrigido até o último mês. Note que

$$S = 150 \sum_{i=0}^{47} (1,008)^i = 150 \left( \frac{1 - (1,008)^{48}}{1 - 1,008} \right) = 8.735,70.$$

Pela Fórmula 1, ao final do mês 120, teremos  $M(72) = 8.735,70(1,008)^{72} = 13.438,55$ . Segue que

$$VPL_B = - \sum_{i=1}^{48} \frac{150}{(1,006)^i} + \frac{13.438,55}{(1,006)^{120}} = 6.555,33 - 6.239,82 = 315,51.$$

Finalmente,

$$VPL_2 = VPL_A + VPL_B = 46.215,26 + 315,51 = 46.530,77.$$

Temos então  $VPL_1 > VPL_2$ . Portanto, sob a ótica do VPL, a melhor escolha para Pedro é o curso 1.

Uma grande desvantagem da técnica do VPL é que a rentabilidade do projeto não é apresentada. Em parte, esta é a motivação para o assunto da seção seguinte.

#### 4. Taxa Interna de Retorno (TIR)

Todo projeto de investimento traz implicitamente ao menos uma medida de rentabilidade, que pode ser entendida como uma taxa de retorno sobre o capital a ser utilizado. Desta forma, projetos distintos podem ser comparados por meio dessas taxas. Analistas financeiros utilizam muito esta ideia, pois ela mostra o quão rentável é um investimento.

Novamente utiliza-se a ideia de trazer os capitais a valor presente e considerar as taxas que fazem o valor presente do projeto ser nulo, conforme a definição abaixo.

**Definição 2.** Uma taxa interna de retorno para a série de capitais  $c_0, \dots, c_n$  é uma taxa  $\rho$  tal que

$$c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(1 + \rho)^i} = 0. \quad (8)$$

Definindo  $x = 1 + \rho$  e multiplicando (8) por  $x^n$ , podemos determinar as taxas internas de retorno encontrando as raízes do polinômio

$$p(x) = c_n + c_{n-1}x + \dots + c_0x^n. \quad (9)$$

Claramente a Definição 2 deve ser seguida de uma discussão sobre a natureza e o número de raízes distintas do polinômio (9), mas muitas vezes esta análise não acontece, ou ocorre de maneira superficial. Veja por exemplo [4], [8], [6].

Sabemos do clássico Teorema Fundamental da Álgebra que existem exatamente  $n$  raízes (contando as multiplicidades) para o polinômio (9). O primeiro problema é que estas raízes podem ser números complexos puros. Por exemplo, considere um projeto financeiro com três entradas ou saídas de caixa  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$  tais que o número  $c_1^2 - 4c_0c_2$  seja menor que zero. Usando  $n = 2$  em (9), a fórmula quadrática garante que  $p(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$  possui duas raízes complexas não reais. Um fluxo de caixa simples no qual tal situação ocorre é o da Figura 6.

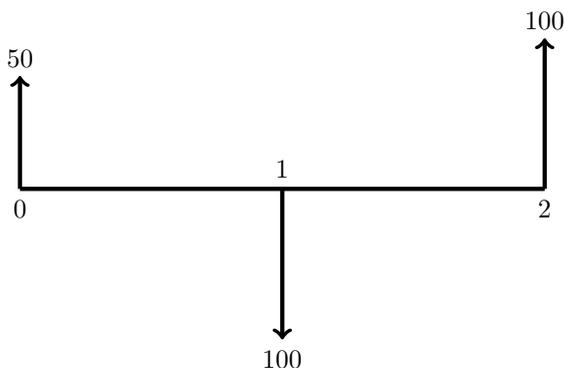


Figura 6: Fluxo de caixa com TIR's complexas

Na notação da Definição 2 temos

$$50 - \frac{100}{1 + \rho} + \frac{100}{(1 + \rho)^2} = 0,$$

donde obtemos a equação quadrática  $x^2 - 2x + 2 = 0$ , que não possui raízes reais.

Fluxos de caixa com taxas de retorno todas complexas não necessariamente precisam ser descartados, conforme citado em [6, p199]. Uma análise deste caso é feita em [3]. Contudo, apenas com vistas a limitar a abrangência deste trabalho, não abordaremos esse caso.

Nosso foco está em demonstrar a existência e unicidade da taxa interna de retorno no caso de um projeto financeiro que possui o chamado *fluxo de caixa convencional*, isto é, desembolsos iniciais  $c_0, \dots, c_{i_0}$  até a data  $i_0$  e retornos positivos  $c_{i_0+1}, \dots, c_n$  a partir de  $i_0 + 1$ . Veja a Figura 7. Este não é o caso do exemplo anterior, mas se enquadra perfeitamente no Projeto Faculdade do Pedro.

**Teorema 2.** *Um projeto financeiro com fluxo de caixa convencional possui uma única taxa interna de retorno.*

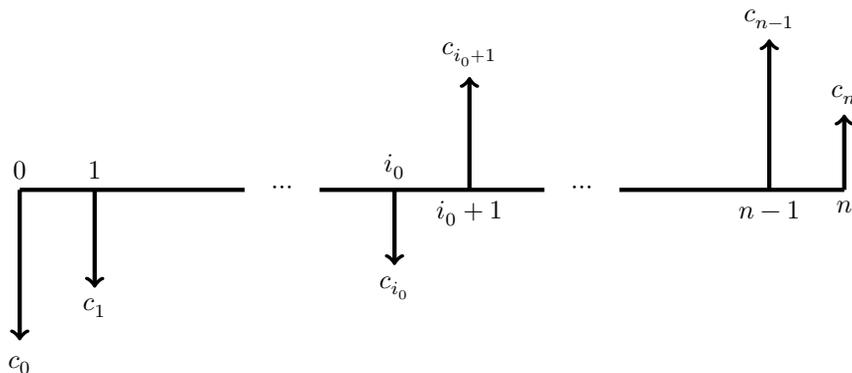


Figura 7: Fluxo de Caixa Convencional

Para demonstrarmos o Teorema 2 necessitamos de uma análise da relação entre o sinal de cada coeficiente do polinômio 9 e seu número de raízes reais positivas, que pode ser obtida usando a clássica Regra de Sinais de Descartes - teorema exposto a seguir. A demonstração está baseada nas ideias de [10]. Um refinamento recente sobre este teorema foi demonstrado em [1]. A Regra de Sinais tem aplicações interessantes no ensino médio. O leitor interessado pode consultar [2], onde também encontrará uma exposição bem mais detalhada do teorema e generalizações.

**Teorema 3** (Regra de Sinais de Descartes). *O número de raízes reais positivas do polinômio  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , com  $a_i \in \mathbb{R}$  não nulos, é igual ao número de variações de sinal da sequência dos coeficientes  $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n$ , ou um número menor, mas de mesma paridade.*

*Demonstração.* Vamos assumir  $a_n > 0$ . A análise para  $a_n < 0$  é análoga. Se  $a_0 = f(0) > 0$ , então o número de variações de sinal de  $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n$  é obrigatoriamente par, uma vez que o primeiro e o último termo da sequência são positivos. Por outro lado, temos  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Vejamos que isto implica que o número de raízes positivas também é par. De fato, o gráfico de  $f$  cruza o semi-eixo positivo  $x$  um número par de vezes, sem cortarmos multiplicidades. Se o gráfico de  $f$  toca (sem cruzar) o semi-eixo positivo  $x$  no ponto  $a$ , então a multiplicidade da raiz  $a$  é par [2, Lema 2.0.7]. Se o gráfico de  $f$  cruza o semi-eixo positivo  $x$  na raiz múltipla  $x = a$ , a multiplicidade de  $a$  é ímpar [2, Lema 2.0.6]. Desta forma, as raízes múltiplas contribuem com um número par de raízes positivas. Argumento similar pode ser usado no caso de  $a_0 = f(0) < 0$ . Neste caso, tanto o número de variações de sinal da sequência dos coeficientes de  $f$  como o número de zeros positivos de  $f$  são ímpares. Portanto, o número de raízes positivas tem a mesma paridade do número de variações de sinal. Resta agora mostrar que o número de variações de sinal dos coeficientes limita o número de raízes positivas. Para isto utilizaremos indução sobre o grau de  $f$ . Para  $n = 1$ , a única raiz de  $f(x) = a_0 + a_1x$  é positiva se e somente se  $a_0$  e  $a_1$  tiverem sinais opostos. Vamos agora assumir que a afirmação é válida para polinômios de grau  $\leq n - 1$ . Supondo que  $f$  tem  $m$  raízes reais positivas e que a quantidade de variações de sinal da sequência de seus coeficientes é  $k < m$ , seria necessário termos  $m \geq k + 2$  para manter a paridade. Agora, a derivada  $f'(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$  tem ao menos  $k + 1$  raízes reais positivas. De fato, no intervalo aberto entre duas raízes consecutivas de  $f$ , o Teorema de Rolle garante que há uma raiz para  $f'$ . Mas isso contraria a hipótese indutiva, já que a quantidade de variações de sinal dos coeficientes de  $f'$  é menor que  $k$ . Portanto,  $m \leq k$ .  $\square$

À um polinômio da forma mais geral  $f(x) = a_0x^{\alpha_0} + a_1x^{\alpha_1} + \dots + a_nx^{\alpha_n}$ , com  $a_i \in \mathbb{R}$  não nulos e  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$  também se aplica o Teorema, conforme [10].

Utilizando a Regra de Sinais de Descartes podemos facilmente demonstrar o Teorema 2.

*Demonstração.* (do Teorema 2) Sejam  $c_0, c_1, \dots, c_n$  números reais,  $c_i \leq 0$  para  $i = 0, \dots, i_0$  e  $c_j \geq 0$ , para  $j = i_0 + 1, \dots, n$ , com ao menos um par  $c_i, c_j$  tal que  $c_i c_j \neq 0$ . Da Definição 2, uma taxa interna de retorno para o projeto é uma taxa  $\rho$  tal que

$$c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(1 + \rho)^i} = 0.$$

Fazendo  $x = 1 + \rho$  e multiplicando a expressão acima por  $x^n$ , obtemos o polinômio  $p(x) = c_n + c_{n+1}x + \dots + c_0x^n$ . Notando que há somente uma mudança de sinal nos coeficientes deste polinômio, o Teorema 3 garante que há somente uma raiz positiva  $x$ , e portanto uma única TIR  $\rho$ .  $\square$

Tendo-se um projeto financeiro com fluxo de caixa convencional, pode-se utilizar a TIR como critério para realização ou não deste projeto. A comparação deve ser feita com a taxa mínima de atratividade (TMA), tratada antes da Definição 1 e denotada por  $\kappa$ . Por exemplo,

- Para um projeto de investimento, é necessário que  $TIR > \kappa$ .
- Do ponto de vista de um tomador de um empréstimo, deve-se ter  $TIR < \kappa$ .

Finalmente, entre dois ou mais projetos financeiros distintos com fluxo de caixa convencional, pode ser conveniente comparar suas respectivas taxas internas, conforme o exemplo a seguir.

Suponha que um investidor possua um capital de R\$ 120.000,00 que pode ser investido de duas formas. Na primeira opção os retornos serão de R\$ 95.000,00 após 3 anos, R\$ 70.000,00 após 5 anos e R\$ 90.000,00 após 7 anos. Na segunda alternativa, os retornos são de R\$ 50.000,00 após o primeiro ano, R\$ 80.000,00 após 2 anos e R\$ 35.000,00 após 3 anos. Vejamos qual é a melhor alternativa, admitindo uma TMA de  $\kappa = 18\%$  ao ano.

Para a primeira alternativa, temos

$$120.000 - \frac{95.000}{(1 + \rho_1)^3} - \frac{70.000}{(1 + \rho_1)^5} - \frac{90.000}{(1 + \rho_1)^7} = 0$$

Fazendo  $x = 1 + \rho_1$  e simplificando, obtemos

$$24x^7 - 19x^4 - 14x^2 - 18 = 0.$$

Esta equação possui como única raiz real  $x \approx 1,17265$ . Voltando na troca de variáveis, temos  $\rho_1 = 17,26\%$  ao ano.

Na segunda opção temos

$$120.000 - \frac{50.000}{(1 + \rho_2)} - \frac{80.000}{(1 + \rho_2)^2} - \frac{35.000}{(1 + \rho_2)^3} = 0.$$

Seguindo o mesmo processo, obtemos

$$24x^3 - 10x^2 - 16x - 7 = 0,$$

cuja única raiz real é  $x \approx 1,18607$ . Finalmente,  $\rho_2 = 18,61\%$  ao ano.

Portanto,  $\rho_1$  é menor que  $\rho_2$ . Ainda,  $\rho_1 < \kappa$ , o que nos leva a um VPL negativo para a primeira alternativa. Por outro lado,  $\rho_2 > \kappa$ , o que nos dá um VPL positivo para a segunda opção. Segue que a alternativa escolhida deve ser a segunda.

Comparar a taxa interna de retorno nem sempre é condição suficiente para afirmar que se  $TIR_A > TIR_B$  então o projeto  $A$  deve ser preferido ao projeto  $B$ . Por exemplo, poderia-se ter duas alternativas de investimentos mutuamente excludentes, como as mostradas na figura abaixo, para uma taxa mínima de atratividade de 20%.

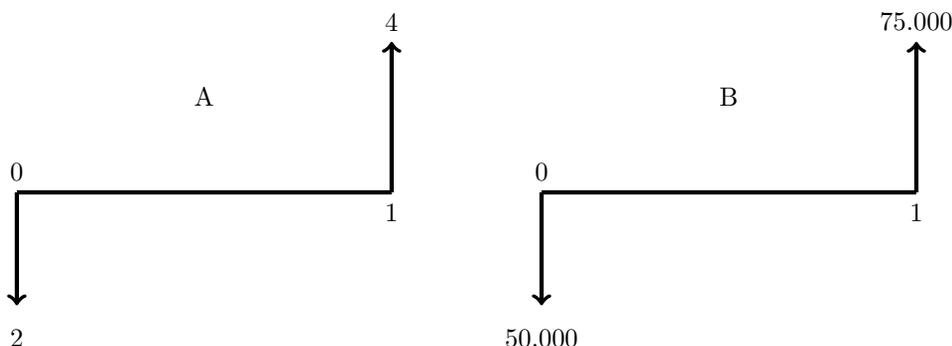


Figura 8: Alternativas Mutuamente Excludentes

A TIR do investimento  $A$  é de 100%. Já a do investimento  $B$  é de 50%, mas em  $A$  temos uma quantia tão pequena, tendo também um rendimento tão baixo que mesmo ela rendendo percentualmente o dobro de  $B$ , uma vez que haja a disponibilidade de recursos, a alternativa  $B$  deve ser escolhida. Este impasse pode ser solucionado aplicando à TMA as diferenças entre os investimentos e as parcelas que retornam.

## 5. Múltiplas taxas internas de retorno

Fluxos de caixa que geram mais de uma taxa interna de retorno são denominados *não convencionais*. Um exemplo motivatório interessante foi mostrado em [5], na área de prospecção de petróleo. Inicialmente há despesas com pesquisa e outras atividades pré-extração. Em seguida, há vários períodos em que predominam as receitas. Depois tem-se outros períodos nos quais são feitas novas prospecções e despesas a fim de gerar receitas nos anos subsequentes.

Várias outras situações econômicas geram fluxos de caixa deste tipo, de forma que trata-se de um caso de grande relevância prática. O problema não é simplesmente determinar todas as TIR, mas

saber qual delas faz sentido no problema. Diversas técnicas vem sendo desenvolvidas neste sentido, como por exemplo nos trabalhos [3] e [11].

## Referências

- [1] Avendano, M. 2010. *Descartes' rule of signs is exact!*. Journal of Algebra, v. 324, pp. 2884-2892.
- [2] Coutinho, A. C. 2016. *A regra dos sinais de Descartes*. Dissertação de Mestrado PROFMAT, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Disponível em: <<http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/adriano.pdf>>. Acesso em: 06 de junho de 2018.
- [3] Hartman, J. C., Schafrick, I. C. 2004. *The relevant internal rate of return*. The Engineering Economist, v. 49, n. 2, p. 139-158.
- [4] Filho, N. C., Kopitke, H. 2000. *Análise de investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial*. São Paulo: Ed. Atlas.
- [5] Lorie, J. H., Ssavage, L. J. 1995. *Three problems in rationing capital*. The Journal of Business, v. 28, n. 4, p. 228-239.
- [6] Mathias, W. F., Gomes, J. M. 2002. *Matemática Financeira*. São Paulo: Ed. Atlas.
- [7] Ministério da Fazenda; Tesouro Direto. 2018. Disponível em: <<http://www.tesouro.gov.br/tesouro-direto-entenda-cada-titulo-no-detalle>>. Acesso em: 06 de junho de 2018.
- [8] Puccini, E. C. 2011. *Matemática financeira e análise de investimentos*. Florianópolis: CAPES:UAB.
- [9] Silva, J. S. 2017. *Equações algébricas e progressões geométricas utilizadas nos métodos de decisão de investimentos baseados no VPL e TIR*. Dissertação de Mestrado PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2979>>. Acesso em: 06 de junho de 2018.
- [10] Wang, X. 2004. *A simple proof of Descartes's Rule of Signs*. The American Mathematical Monthly, v. 111, pp. 525-526.
- [11] Zhang, D. 2005. *A different perspective on using multiple internal rates of return: the IRR parity technique*. The Engineering Economist, v. 50, n. 4, pp. 327-335.

Ronie Dario  
UTFPR-Curitiba  
<[ronie@utfpr.edu.br](mailto:ronie@utfpr.edu.br)>

Jeferson da Silva  
UTFPR-Curitiba  
<[jazzfersound@gmail.com](mailto:jazzfersound@gmail.com)>

Recebido: 11/04/2018

# Progressões aritméticas de ordem superior

José Nobre

Rogério Rocha

## Resumo

Este artigo apresenta um estudo das Progressões Aritméticas (PAs) de ordem superior. Mais especificamente, mostraremos que a fórmula do termo geral dessas PAs permite, de forma simples, a resolução de diversos problemas interessantes que aparecem na literatura, a exemplo daqueles que apresentaremos como aplicações. Devido à carência de material que aborda esse conteúdo de forma satisfatória, este artigo servirá de apoio para os professores de Matemática do Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Progressões Aritméticas. Ordem Superior. Termo Geral. Aplicações.

## Abstract

This paper presents a study of Arithmetic Progressions (APs) of higher order. More specifically, we will show that the general term formula of these APs allows, in a simple way, the resolution of several interesting problems that appear in the literature, such as those that we present as applications. Due to the shortage of material that addresses this content in a satisfactory way, this article will be of support to teachers of Mathematics in High School.

**Keywords:** Arithmetic Progressions. Higher order. General term. Applications

## 1. Introdução

A história mostra que as Progressões Aritméticas (PAs) fazem parte da trajetória humana desde o surgimento da contagem, pois o próprio conjunto dos números naturais representa uma PA.

As sequências dos Números Figurados podem ter sido as primeiras manifestações de PAs de segunda ordem [6]. Os Números Figurados são números que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Se essa representação forma um polígono regular, esses números chamam-se Números Poligonais, dentre os quais destacamos os números triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais etc. A Figura 1 mostra um desenho medieval retratando os Números Poligonais. Mais detalhes históricos podem ser encontrados em [5, Seção 2] e [6].

Dos trabalhos existentes na literatura, relacionados a PAs de ordem superior, destacamos os seguintes:

- [2]: apresenta diversos resultados teóricos e ilustrações relacionados às PAs de ordem superior.
- [3]: desde que todo termo geral de uma PA de ordem  $k$  pode ser identificado com um polinômio

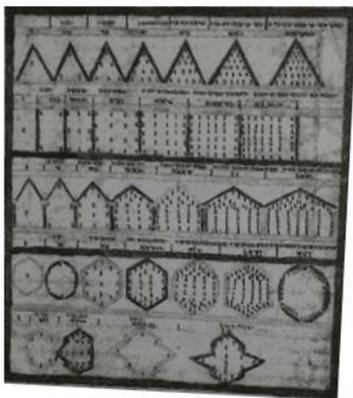


Figura 1: Manuscrito medieval contendo Números Figurados, FONTE: [1].

de grau  $k$  [3, Prop. 1], Lima propôs um estudo das PAs de ordem superior no qual os problemas propostos são resolvidos considerando o termo geral como um polinômio de grau  $k$ . Nesse sentido, os problemas são modelados como sistemas de  $(k + 1) \times (k + 1)$  equações lineares.

- [5]: nesse trabalho, o autor propõe uma abordagem em que os problemas propostos envolvendo PAs de ordem superior são resolvidos utilizando uma fórmula explícita para o termo geral que envolve coeficientes binomiais [5, Prop. 3.11].

Os trabalhos [3] e [5] são dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). Esses trabalhos utilizam abordagens distintas, que se complementam. Além disso, quando se resolve os problemas pela abordagem utilizada em [5], a solução torna-se mais simples (esse fato pode ser conferido no Exemplo 2 e na Observação 1, nos quais o termo geral de uma PA de ordem 4 é calculado de acordo com as duas abordagens).

Seguindo a abordagem de [5], vamos propor, neste trabalho, um estudo das PAs de ordem superior, apresentando a teoria básica necessária e diversas situações problema, que serão solucionadas com o auxílio da fórmula do termo geral que envolve coeficientes binomiais.

De forma geral, os livros didáticos de Matemática existentes na literatura nacional não abordam o tema “Progressões Aritméticas de ordem superior”. Nesse sentido, este trabalho, em conjunto com os demais citados acima, servirão de apoio para os professores do Ensino Médio.

### 1.1. Aspectos teóricos

Nesta seção, apresentaremos os conceitos e resultados que serão fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho. Mais detalhes podem ser conferidos, por exemplo, em [2], [3], [4] e [5].

**Definição 1 (Operador Diferença).** Dada uma seqüência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , define-se o chamado **operador diferença**  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , que constitui uma nova seqüência. Como  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forma uma nova seqüência, podemos novamente obter o operador diferença, isto é,  $(\Delta^1[\Delta^1 a_n])_{n \in \mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , e assim recursivamente,  $(\Delta^k a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , para  $k \geq 3$ .

**Definição 2 (Ordem de uma PA).** Uma seqüência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  será uma PA de **ordem**  $k$  se for necessário aplicar o operador diferença  $k$  vezes para se chegar a uma seqüência constante.

Desse modo, uma seqüência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  será uma PA de ordem 1 se o operador diferença  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  for uma PA constante; será uma PA de ordem 2 se o operador diferença  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  for uma PA constante, e assim por diante, ou, ainda, uma seqüência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  será uma PA de ordem 2 se  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  for uma PA de primeira ordem; será uma PA de ordem 3 se  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  for uma PA de primeira ordem, e assim por diante.

**Exemplo 1. a)** A seqüência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 7, 13, 21, 31, \dots)$ , onde  $a_1 = 3$  e  $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$ , para  $n \geq 1$ , é uma PA de ordem 2, pois,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = 2n + 2$ ,  $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 2$ , e assim,  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 6, 8, 10, \dots)$  e  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 2, 2, \dots)$ ;

**b)** A seqüência  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 8, 20, 40, 70, \dots)$ , onde  $b_1 = 2$  e  $b_{n+1} = b_n + n^2 + 3n + 2$ , para  $n \geq 1$ , é uma PA de ordem 3, pois,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 b_n = b_{n+1} - b_n = n^2 + 3n + 2$ ,  $\Delta^2 b_n = \Delta^1 b_{n+1} - \Delta^1 b_n = 2n + 4$ ,  $\Delta^3 b_n = \Delta^2 b_{n+1} - \Delta^2 b_n = 2$ , e assim,  $(\Delta^1 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 12, 20, 30, 42, \dots)$ ,  $(\Delta^2 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 8, 10, 12, \dots)$  e  $(\Delta^3 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 2, 2, \dots)$ ;

**c)** A seqüência  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 6, 20, 50, \dots)$ , onde  $c_1 = 1$  e  $c_{n+1} = c_n + (1/6)(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6)$ , para  $n \geq 1$ , é uma PA de ordem 4, pois,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 c_n = c_{n+1} - c_n = (1/6)(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6)$ ,  $\Delta^2 c_n = \Delta^1 c_{n+1} - \Delta^1 c_n = n^2 + 4n + 4$ ,  $\Delta^3 c_n = \Delta^2 c_{n+1} - \Delta^2 c_n = 2n + 5$ ,  $\Delta^4 c_n = \Delta^3 c_{n+1} - \Delta^3 c_n = 2$ , e assim,  $(\Delta^1 c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (5, 14, 30, 55, 91, \dots)$ ,  $(\Delta^2 c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (9, 16, 25, 36, \dots)$ ,  $(\Delta^3 c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (7, 9, 11, 13, \dots)$  e  $(\Delta^4 c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 2, 2, \dots)$ ;

**d)** A seqüência  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 0, 16, 97, 353, \dots)$ , onde  $d_1 = -1$  e  $d_{n+1} = d_n + n^4$ , para  $n \geq 1$ , é uma PA de ordem 5, pois,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 d_n = d_{n+1} - d_n = n^4$ ,  $\Delta^2 d_n = \Delta^1 d_{n+1} - \Delta^1 d_n = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ ,  $\Delta^3 d_n = \Delta^2 d_{n+1} - \Delta^2 d_n = 12n^2 + 24n + 14$ ,  $\Delta^4 d_n = \Delta^3 d_{n+1} - \Delta^3 d_n = 24n + 36$ ,  $\Delta^5 d_n = 24$ , e assim,  $(\Delta^1 d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 16, 81, 256, \dots)$ ,  $(\Delta^2 d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (15, 65, 175, 369, \dots)$ ,  $(\Delta^3 d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (50, 110, 194, 302, \dots)$ ,  $(\Delta^4 d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (60, 84, 108, 132, \dots)$  e  $(\Delta^5 d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (24, 24, 24, 24, \dots)$ .

Em seguida, enunciamos uma importante relação entre as PAs de ordem superior e as funções polinomiais, cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

**Proposição 1.** Se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem  $k$ , então seu termo geral  $a_n$  é um polinômio de grau  $k$  na variável  $n$ . Reciprocamente, se  $P(n)$  é um polinômio de grau  $k$ , então a seqüência

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P(1), P(2), P(3), \dots, P(n), \dots)$$

é uma PA de ordem  $k$ .

Com o objetivo de ilustrar essa Proposição, apresentamos o seguinte exercício.

**Exercício 1. a)** Supondo que uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seja uma PA de ordem 2 e que seus três primeiros termos sejam dados por  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 8$  e  $a_3 = 13$ , obtenha o polinômio de grau 2 que represente o termo geral  $a_n$ .

**b)** Dado o polinômio  $P(n) = n^3 - 3n^2 + 1$ , verifique que a sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P(1), P(2), \dots, P(n), \dots)$  é uma PA de ordem 3.

**Solução:**

**a)** Como  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem 2, pela Proposição 1, devemos ter  $a_n = P(n) = an^2 + bn + c$ . Assim,  $P(1) = 5$ ,  $P(2) = 8$  e  $P(3) = 13$ , ou seja,

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 9a + 3b + c = 13. \end{cases}$$

Verifica-se que a única solução desse sistema linear é  $a = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = 4$ . Portanto,  $a_n = n^2 + 4$ .

**b)** Como  $a_n = P(n) = n^3 - 3n^2 + 1$ , temos:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 a_n = P(n+1) - P(n) = 3n^2 - 3n - 2$ ,  $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 6n$  e  $\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = 6$ . Logo,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, -3, 1, 17, 51, \dots)$ ,  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-2, 4, 16, 34, \dots)$ ,  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 12, 18, 24, \dots)$  e  $(\Delta^3 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 6, 6, \dots)$ . Portanto,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem 3.  $\square$

**1.2. Termo geral de PAs de ordem superior**

A fórmula para o termo geral de PAs de ordem superior, a qual envolve coeficientes binomiais, será útil para a resolução de diversos problemas. A seguir, enunciamos o termo geral das PAs de ordens 1, 2, 3, 4 e o termo geral de uma PA de ordem  $k$ . As demonstrações podem ser conferidas em [5, Seção 3.5].

Se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de **primeira ordem** de razão  $r$ , então  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ , ou seja,

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} r. \tag{1}$$

Se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de **segunda ordem** e  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_1, \dots, b_n, \dots)$  e  $(\Delta^2 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r, \dots, r, \dots)$  são operadores diferenças associados à  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , então

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} b_1 + \binom{n-1}{2} r. \tag{2}$$

Se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de **terceira ordem** e  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_1, \dots, b_n, \dots)$ ,  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_1, \dots, c_n, \dots)$  e  $(\Delta^3 a_n) = (r, \dots, r, \dots)$  são operadores diferenças associados à  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , então

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} b_1 + \binom{n-1}{2} c_1 + \binom{n-1}{3} r. \tag{3}$$

Se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de **quarta ordem** e  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_1, \dots, b_n, \dots)$ ,  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_1, \dots, c_n, \dots)$ ,  $(\Delta^3 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (d_1, \dots, d_n, \dots)$  e  $(\Delta^4 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r, \dots, r, \dots)$  são operadores diferenças associados à

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , então

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} b_1 + \binom{n-1}{2} c_1 + \binom{n-1}{3} d_1 + \binom{n-1}{4} r. \quad (4)$$

De forma geral, temos:

Se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem  $k$  e  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\Delta^1 a_1, \dots, \Delta^1 a_n, \dots)$ ,  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\Delta^2 a_1, \dots, \Delta^2 a_n, \dots)$ ,  $(\Delta^{k-1} a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\Delta^{k-1} a_1, \dots, \Delta^{k-1} a_n, \dots)$  e  $(\Delta^k a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r, \dots, r, \dots)$  são operadores diferenças associados à  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , então

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_1 + \binom{n-1}{k} r. \quad (5)$$

**Exemplo 2.** No Exemplo 1, as seqüências  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 7, 13, 21, 31, \dots)$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 8, 20, 40, \dots)$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 6, 20, 50, 105, \dots)$  e  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 0, 16, 97, 353, \dots)$  são apresentadas na forma recursiva, as quais são PAs de ordens 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Portanto, por (2), (3), (4) e (5), temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \binom{n-1}{0} 3 + \binom{n-1}{1} 4 + \binom{n-1}{2} 2 \\ &= \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} 3 + \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} 4 + \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} 2 \\ &= n^2 + n + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \binom{n-1}{0} 2 + \binom{n-1}{1} 6 + \binom{n-1}{2} 6 + \binom{n-1}{3} 2 \\ &= \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} 2 + \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} 6 + \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} 6 + \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} 2 \\ &= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \binom{n-1}{0} 1 + \binom{n-1}{1} 5 + \binom{n-1}{2} 9 + \binom{n-1}{3} 7 + \binom{n-1}{4} 2 \\ &= \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} 1 + \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} 5 + \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} 9 + \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} 7 + \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} 2 \\ &= \frac{1}{12}(n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_n &= \binom{n-1}{0}(-1) + \binom{n-1}{1}1 + \binom{n-1}{2}15 + \binom{n-1}{3}50 + \binom{n-1}{4}60 + \binom{n-1}{5}24 \\
 &= \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!}(-1) + \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} + \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!}15 + \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!}50 + \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}60 + \frac{(n-1)!}{5!(n-6)!}24 \\
 &= \frac{1}{30}(6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n - 30).
 \end{aligned}$$

*Observação 1.* Dado que o termo geral  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de uma PA de ordem  $k$  é um polinômio de grau  $k$  na variável  $n$  (Proposição 1), podemos calcular o termo geral dessas PAs por meio da resolução de sistemas de equações lineares. No entanto, tal procedimento é muito mais árduo que o ora exposto. Por exemplo, a sequência  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 6, 20, 50, 105, \dots)$  do Exemplo 1 é uma PA de ordem 4. Portanto, seu termo geral é da forma  $c(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ . Assim, devemos ter  $c(1) = 1$ ,  $c(2) = 6$ ,  $c(3) = 20$ ,  $c(4) = 50$ ,  $c(5) = 105$ , ou seja,

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 1 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 6 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = 20 \\ 256a + 64b + 16c + 4d + e = 50 \\ 625a + 125b + 25c + 5d + e = 105. \end{cases}$$

Existem diversos métodos (por exemplo, o método de eliminação de Gauss) para resolver esse sistema linear, que tem como solução  $a = 1/12$ ,  $b = 1/3$ ,  $c = 5/12$ ,  $d = 1/6$  e  $e = 0$  e, portanto,

$$c_n = (1/12)(n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n).$$

Para PAs de ordem elevada, a resolução só é viável computacionalmente. Por exemplo, para uma PA de ordem 9, deve-se resolver um sistema de  $10 \times 10$  equações lineares.  $\square$

**Exercício 2.** Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-9, -2, 17, 54, \dots)$ , onde  $a_1 = -9$  e  $a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1$ , para  $n \geq 1$ , e considere a sequência  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , a sequência das somas parciais de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Verifique que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem 3.
- Verifique que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem 4.
- Calcule a soma dos 15 primeiros termos de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Solução:**

a) Pela Def. 2, é suficiente observarmos o seguinte:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = 3n^2 + 3n + 1$ ,  $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 6n + 6$ ,  $\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n \equiv 6$ , isto é,  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (7, 19, 37, 61, 91, \dots)$ ,  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (12, 18, 24, 30, \dots)$  e  $(\Delta^3 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 6, 6, \dots)$ .

b) Observemos que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 S_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1$ ,  $\Delta^2 S_n = \Delta^1 S_{n+1} - \Delta^1 S_n = a_{n+1} + 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (a_n + 3n^2 + 3n + 1) = a_{n+1} - a_n + 6n + 6 = 3n^2 + 9n + 7$ ,  $\Delta^3 S_n = \Delta^2 S_{n+1} - \Delta^2 S_n = 6n + 12$ ,  $\Delta^4 S_n = \Delta^3 S_{n+1} - \Delta^3 S_n \equiv 6$ , isto é,  $(\Delta^1 S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-2, 17, 54, 115, 206, \dots)$ ,  $(\Delta^2 S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (19, 37, 61, 91, 127, \dots)$ ,  $(\Delta^3 S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (18, 24, 30, 36, \dots)$  e  $(\Delta^4 S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 6, 6, 6, \dots)$ . Portanto,  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem 4.

c) Desejamos calcular o 15<sup>o</sup> termo da sequência  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , isto é, o  $S_{15}$ . Pelo item b),  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem 4. Assim, por (4),

$$\begin{aligned} S_n &= \binom{n-1}{0}(-9) + \binom{n-1}{1}(-2) + \binom{n-1}{2}19 + \binom{n-1}{3}18 + \binom{n-1}{4}6 \\ &= \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2 - 40n). \end{aligned}$$

Portanto,  $S_{15} = \frac{1}{4}(15^4 + 2 \cdot 15^3 + 15^2 - 40 \cdot 15) = 14250$ . □

O exercício anterior nos fornece um exemplo de uma PA de ordem 3, cuja sequência das somas parciais associada é uma PA de ordem 4, o que é verdade em geral, conforme a Proposição a seguir.

**Proposição 2.** *Se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem  $k$ , então a sequência das somas parciais de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denotada por  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , é uma PA de ordem  $k + 1$ .*

**Prova:** Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  uma PA de ordem  $k$  e considere

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots).$$

Observe que  $(\Delta^1 S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_2, a_3, a_4, \dots)$ . Assim,  $(\Delta^1 S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem  $k$  e, portanto,  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem  $k + 1$ . □

## 2. Aplicações

Nesta seção, apresentaremos alguns problemas que podem ser modelados por PAs de ordem superior. Observamos que, de posse da fórmula do termo geral que envolve coeficientes binomiais, os cálculos que conduzem às soluções desses problemas se tornam bem simples.

**Problema 1** (Números Poligonais). Os Números Poligonais são casos particulares de Números Figurados. Denominam-se Números Figurados aqueles que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Caso tal arranjo seja um polígono regular, esses números são chamados de Números Poligonais. A Figura 2 apresenta as sequência dos números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais.

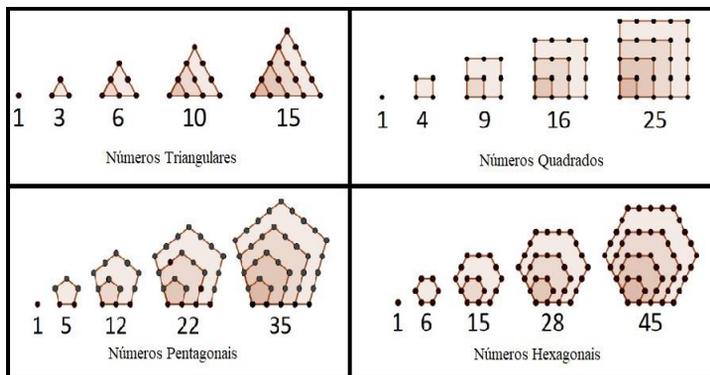


Figura 2: Amostra de números poligonais  
FONTE: [5].

Verifique que as seqüências formadas por esses números poligonais são PAs de segunda ordem e obtenha os seus respectivos termos gerais.

**Solução:** Analisando a Figura 2, observe que as seqüências formadas pelos números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais são dadas por  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 6, 10, 15, \dots)$ , onde  $T_n = 1 + 2 + \dots + n$ ;  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ , onde  $Q_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ ;  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 5, 12, 22, 35, \dots)$ , onde  $P_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$ , e  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 6, 15, 28, 45, \dots)$ , onde  $H_n = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3)$ , respectivamente. Então,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 T_n = n + 1$ ,  $\Delta^2 T_n = 1$ ,  $\Delta^1 Q_n = 2n + 1$ ,  $\Delta^2 Q_n = 2$ ,  $\Delta^1 P_n = 3n + 1$ ,  $\Delta^2 P_n = 3$ ,  $\Delta^1 H_n = 4n + 1$  e  $\Delta^2 H_n = 4$ . Assim,  $(\Delta^1 T_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 3, 4, 5, \dots)$ ,  $(\Delta^2 T_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, 1, \dots)$ ,  $(\Delta^1 Q_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 5, 7, 9, 11, \dots)$ ,  $(\Delta^2 Q_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, \dots)$ ,  $(\Delta^1 P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 7, 10, 13, \dots)$ ,  $(\Delta^2 P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 3, 3, \dots)$ ,  $(\Delta^1 H_n)_{n \in \mathbb{N}} = (5, 9, 13, 17, \dots)$  e  $(\Delta^2 H_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 4, 4, 4, \dots)$ . Logo, as seqüências  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são PAs de segunda ordem. Portanto, por (2),

$$\begin{aligned} T_n &= \binom{n-1}{0} 1 + \binom{n-1}{1} 2 + \binom{n-1}{2} 1 \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_n &= \binom{n-1}{0} 1 + \binom{n-1}{1} 3 + \binom{n-1}{2} 2 \\ &= n^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_n &= \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}4 + \binom{n-1}{2}3 \\
 &= \frac{3n^2 - n}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_n &= \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}5 + \binom{n-1}{2}4 \\
 &= 2n^2 - n.
 \end{aligned}$$

**Problema 2** (Castelo de cartas). A Figura 3 mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para construir um castelo de 10 andares?

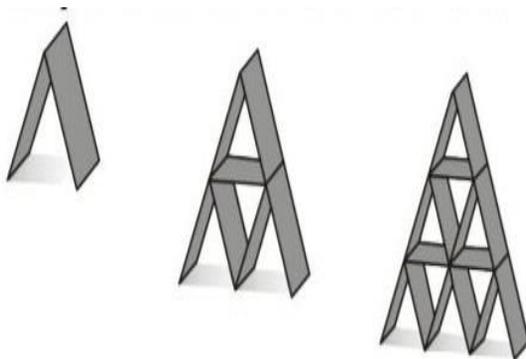


Figura 3: Castelo de Cartas, FONTE: OBMEP-2009.

**Solução:** Seguindo a lógica da Figura 3, deduz que o  $n$ -ésimo termo da sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $a_1 = 2$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = a_n + 3n + 2$ , isto é,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 7, 15, 26, 40, \dots)$ , representa a quantidade mínima de cartas para construir um castelo de  $n$  andares. Observe que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 a_n = 3n + 2$  e  $\Delta^2 a_n \equiv 3$ , isto é,  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (5, 8, 11, 14, \dots)$  e  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 3, 3, 3, \dots)$ . Logo,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de segunda ordem. Assim, por (2),

$$\begin{aligned}
 a_n &= \binom{n-1}{0}2 + \binom{n-1}{1}5 + \binom{n-1}{2}3 \\
 &= \frac{1}{2}(3n^2 + n).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $a_{10} = (1/2)(3 \times 10^2 + 10) = 155$  representa o número mínimo de cartas para construir um castelo de 10 andares. Como um baralho tem 52 cartas, serão necessários, no mínimo, 3 baralhos para construir um castelo de 10 andares.

**Problema 3** (Lançamento oblíquo). Um operador de canhão está fazendo testes para medir a relação entre a quantidade de pólvora usada na explosão e a distância atingida pela bala quando o canhão está com inclinação de 45 graus. Ele já sabe que, para cada meio quilo de pólvora, há uma variação de 10 m/s na velocidade de lançamento. Quanto de pólvora deve ser utilizada no canhão para que o projétil ultrapasse 300 metros? A Figura 4 ilustra esse problema e a Tabela 1 mostra algumas relações que foram calculadas pelo operador.

Nota: após alguns testes, o operador de canhão percebeu que a sequência das distâncias atingidas  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  obedece ao seguinte padrão:  $D_1 = 10.2$  e,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $D_{n+1} = D_n + 20.41n + 10.2$ .

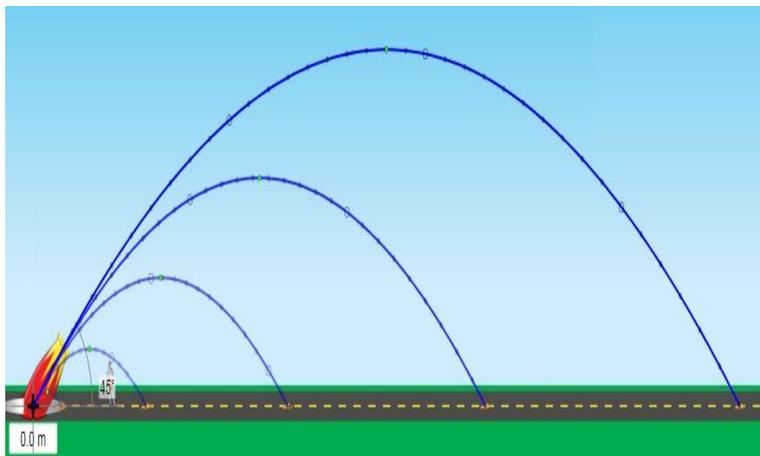


Figura 4: Lançamento Oblíquo, FONTE:[5].

Pólvora (kg)	Velocidade (m/s)	Distância (m)
0.5	10	10.2
1	20	40.81
1.5	30	91.83
2	40	163.26

Tabela 1: Dados complementares do Problema 3.

**Solução:** Seja  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}} = (10.2, 40.81, 91.83, 163.26, \dots)$ , onde  $D_1 = 10.2$  e,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $D_{n+1} = D_n + 20.41n + 10.2$ , a sequência das distâncias atingidas. Assim,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 D_n = 20.41n + 10.2$  e  $\Delta^2 D_n \equiv 20.41$ , isto é,  $(\Delta^1 D_n)_{n \in \mathbb{N}} = (30.61, 51.02, 71.43, 91.84, \dots)$  e  $(\Delta^2 D_n)_{n \in \mathbb{N}} =$

(20.41, 20.41, ...). Desse modo,  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de segunda ordem e, então, por (2),

$$\begin{aligned} D_n &= \binom{n-1}{0} 10.2 + \binom{n-1}{1} 30.61 + \binom{n-1}{2} 20.41 \\ &= 10.205n^2 - 0.005n. \end{aligned}$$

Assim, para que o projétil ultrapasse 300 metros, devemos ter  $10.205n^2 - 0.005n > 300$ , o que nos leva a  $n > 5.42$ . Pela Tabela 1,  $v = 10n$ . Logo, a velocidade requerida para ultrapassar 300 metros deverá ser maior que  $54.2 \text{ m/s}$ , o que equivale a dizer, por proporção, que serão necessários mais que  $2.71 \text{ kg}$  de pólvora para que o projétil ultrapasse 300 metros.

**Problema 4** (Queda livre). Um objeto foi solto de uma altura  $h$ , em queda livre. A partir do 3<sup>o</sup> segundo de queda, um sistema começou a monitorar as alturas desse objeto em relação ao seu tempo de queda. Alguns dos dados monitorados estão disponíveis na Tabela 2 a seguir.

Objeto em Queda Livre	
Tempo (s)	Altura (m)
3	955
4	920
5	875
6	820
7	755

Tabela 2: Altura em função do tempo de queda.

- De que altura o objeto foi solto?
- Quanto tempo o objeto gastará para chegar ao solo?

**Solução:** Como os tempos fornecidos são consecutivos, podemos interpretar as respectivas alturas como termos de uma sequência. Assim, seja  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\dots, 955, 920, 875, 820, 755, \dots)$ , onde  $h_1 = 955$  e,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $h_{n+1} = h_n - 10n - 25$ , a sequência das alturas. Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 h_n = h_{n+1} - h_n = -10n - 25$  e  $\Delta^2 h_n = \Delta^1 h_{n+1} - \Delta^1 h_n \equiv -10$ , isto é,

$$(\Delta^1 h_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\dots, -35, -45, -55, -65, \dots) \text{ e } (\Delta^2 h_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\dots, -10, -10, -10, \dots).$$

Logo, as alturas formam uma PA de segunda ordem. Portanto, por (2), o termo geral de  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é dado por

$$\begin{aligned} h_n &= \binom{n-1}{0} 955 + \binom{n-1}{1} (-35) + \binom{n-1}{2} (-10) \\ &= -5n^2 - 20n + 980. \end{aligned}$$

Uma vez calculado o termo geral da PA, vamos apresentar as respostas às perguntas formuladas.

a) Nesse caso, desejamos calcular  $h_{(-2)}$  (isso é possível, pois consideramos o terceiro termo da sequência como o primeiro). Portanto,

$$h_{(-2)} = -5 \cdot (-2)^2 - 20 \cdot (-2) + 980 = 1000,$$

ou seja, o objeto foi solto a uma altura de 1000 metros.

b) Nesse caso, resolvemos a equação  $-5n^2 - 20n + 980 = 0$ , o que resulta em  $n \cong 12.14$ . Isto é, o objeto gastará, aproximadamente,  $12.14 + 3 = 15.14$  segundos para chegar ao solo.

**Problema 5** (Espiral de naturais). Os números naturais foram dispostos em uma espiral retangular, como mostra a Figura 5 a seguir. Qual será o número que ocupará a vigésima posição na direção indicada?

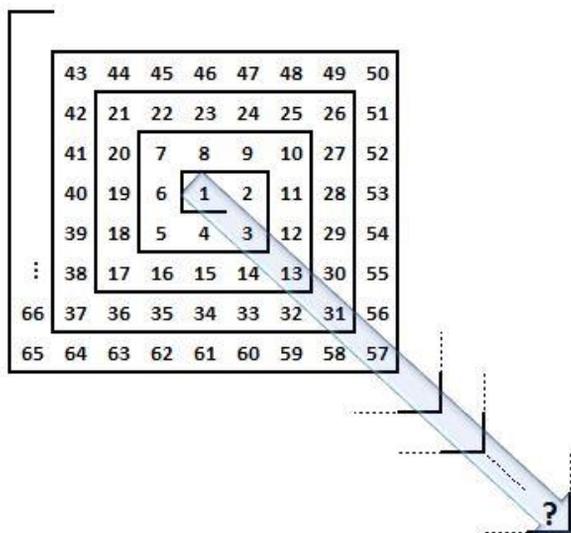


Figura 5: Números Naturais em espiral retangular.

**Solução:** Seguindo a lógica da Figura 5, observamos que os números indicados formam a sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $a_1 = 1$  e,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = a_n + 8n - 6$ , isto é,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 13, 31, 57, \dots)$ . Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = 8n - 6$  e  $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n \equiv 8$  e, assim,  $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 10, 18, 26, \dots)$  e  $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (8, 8, \dots)$ . Então,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de segunda ordem. Daí, por (2), temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \binom{n-1}{0} 1 + \binom{n-1}{1} 2 + \binom{n-1}{2} 8 \\ &= 4n^2 - 10n + 7. \end{aligned}$$

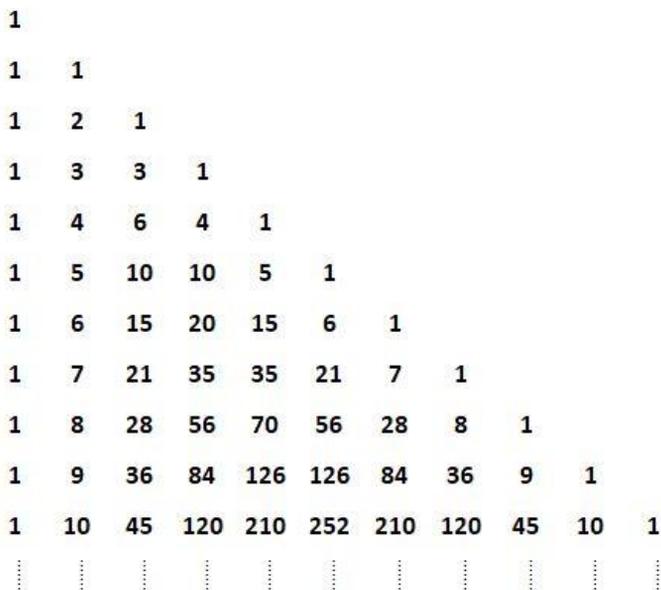


Figura 6: Triângulo de Pascal, FONTE: [5].

Portanto,  $a_{20} = 4(20)^2 - 10(20) + 7 = 1407$  é o número procurado.

Na próxima aplicação, vamos usar o Triângulo de Pascal, que é uma estrutura numérica na qual a  $n$ -ésima linha é composta pelos coeficientes de  $(a + b)^n$ . Desse modo, temos:

$$\begin{aligned} (a + b)^0 &= 1, \\ (a + b)^1 &= a + b, \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \\ (a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5. \end{aligned}$$

Prosseguindo analogamente, teremos o triângulo numérico conhecido como o Triângulo de Pascal, cujas primeiras linhas são mostradas na Figura 6 a seguir.

Uma das principais propriedades do Triângulo de Pascal é que a soma de dois números consecutivos de uma linha  $l$  resulta no elemento da linha  $l+1$  imediatamente abaixo do segundo número somado.

**Problema 6** (Triângulo de Pascal). Considere a Figura 6.

- Mostre que a sequência contida na 5ª coluna do Triângulo de Pascal é uma PA de quarta ordem.
- Calcule o termo geral da PA contida na 5ª coluna do Triângulo de Pascal.
- Obtenha a expressão que fornece a soma dos  $n$  primeiros termos da PA contida na 5ª coluna.

**Solução:**

- Seja  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 5, 15, 35, 70, \dots)$ , onde  $P_1 = 1$  e,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+1} = P_n + (1/6)(n+1)(n+2)(n+3)$ ,

a sequência contida na  $5^a$  coluna. Assim,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^1 P_n = P_{n+1} - P_n = (1/6)(n+1)(n+2)(n+3)$ ,  $\Delta^2 P_n = \Delta^1 P_{n+1} - \Delta^1 P_n = (1/2)(n+3)(n+2)$ ,  $\Delta^3 P_n = \Delta^2 P_{n+1} - \Delta^2 P_n = n+3$  e  $\Delta^4 P_n \equiv 1$ , ou seja,  $(\Delta^1 P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 10, 20, 35, 56, \dots)$ ,  $(\Delta^2 P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 10, 15, 21, 28, \dots)$ ,  $(\Delta^3 P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 5, 6, 7, 8, \dots)$  e  $(\Delta^4 P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots)$ . Portanto, pela Definição 2,  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de quarta ordem.

b) Com base no item a) e em (4), temos:

$$\begin{aligned} P_n &= \binom{n-1}{0} 1 + \binom{n-1}{1} 4 + \binom{n-1}{2} 6 + \binom{n-1}{3} 4 + \binom{n-1}{4} 1 \\ &= \frac{1}{24}(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n). \end{aligned}$$

c) Seja  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência contida na  $5^a$  coluna e  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência das somas parciais de  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Como  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem 4, temos que, pela Proposição 2,  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA de ordem 5. Como  $S_1 = 1$ ,  $\Delta^1 S_1 = 5$ ,  $\Delta^2 S_1 = 10$ ,  $\Delta^3 S_1 = 10$ ,  $\Delta^4 S_1 = 5$  e  $\Delta^5 S_1 = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} S_n &= \binom{n-1}{0} 1 + \binom{n-1}{1} 5 + \binom{n-1}{2} 10 + \binom{n-1}{3} 10 + \binom{n-1}{4} 5 + \binom{n-1}{5} 1 \\ &= \frac{1}{120} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4). \end{aligned}$$

*Observação 2.* Os elementos de uma coluna  $c$  do triângulo de Pascal formam uma PA de ordem  $c - 1$ , em que  $c \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .

### 3. Considerações finais

Pelo exposto, entendemos que é necessária uma abordagem apropriada de PAs de ordem superior no Ensino Médio, em especial, para os professores que trabalham com olimpíadas de Matemática, servindo-lhes mesmo de base para a propositura de problemas mais avançados.

### Referências

- [1] Contador, P. R. M. 2007. *A Matemática na Arte e na Vida*. São Paulo: Livraria da Física.
- [2] Dlab, V. 2011. *Arithmetic progressions of higher order*. Teaching Mathematics and Computer Science, v. 4, p. 225-239.
- [3] Lima, W. A. F. 2015. *Progressões Aritméticas de Ordem Superior: uma proposta de abordagem no Ensino Médio*. Dissertação (PROFMAT-UEM), Maringá-PR.
- [4] Morgado, A. C. O., Carvalho, P. C. P. 2015. *Matemática Discreta*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM.
- [5] Nobre, J. F. F. 2018. *Progressões Aritméticas: abordando as ordens superiores*. Dissertação (PROFMAT-UFT), Palmas-TO.
- [6] Roque, T. 2012. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

José Nobre  
Diretoria Regional de Ensino - Araguatins - TO  
<[josefilho010@gmail.com](mailto:josefilho010@gmail.com)>  
Rogério Rocha  
Universidade Federal do Tocantins - Palmas - TO  
<[azevedo@uft.edu.br](mailto:azevedo@uft.edu.br)>

Recebido: 02/05/2018

# CORDIC: Funções hiperbólicas

Claudemir Aniz

Antônio Giansante

## Resumo

O COordinate Rotation DIgital Computer, abreviado por CORDIC, é um método numérico introduzido por Volder para calcular funções trigonométricas. Walther generalizou este algoritmo para calcular funções hiperbólicas, logarítmicas, exponenciais e raiz quadrada. Neste artigo, apresentaremos este método para as funções seno e cosseno hiperbólicos.

**Palavras-chave:** cosseno hiperbólico; seno hiperbólico; condição de convergência

## Abstract

The Coordinate Rotation DIgital Computer, abbreviated by CORDIC, is a numerical method introduced by Volder to calculate trigonometric functions. Walther generalized this algorithm to calculate hyperbolic, logarithmic, exponential and square root functions. In this paper, we will present this method for the sine and cosine hyperbolic functions.

**Keywords:** hyperbolic cosine; hyperbolic sine; convergence condition

## 1. Introdução

De acordo com Sultan [7], as calculadoras utilizam o método CORDIC para calcular seno, cosseno e outras funções. Em 1959 Jack E. Volder [9] desenvolveu o algoritmo CORDIC para o cálculo em tempo real das funções trigonométricas sem o uso de muito hardware, e sugeriu que com pequenas modificações poderia se calcular outras funções elementares. Em 1971, J. S. Walther [10] generalizou este método para calcular funções hiperbólicas, exponenciais, logarítmicas e raiz quadrada. O CORDIC que aproxima as funções seno e cosseno hiperbólicos, consiste em realizar  $n$  iterações em três equações, dadas por

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_k y_k 2^{-\phi(k)} \\ y_{k+1} = y_k + \delta_k x_k 2^{-\phi(k)} \\ z_{k+1} = z_k - \delta_k \varepsilon_k \end{cases} .$$

Sendo  $k \geq 1$ ,  $\varepsilon_k = \tanh^{-1}(2^{-\phi(k)})$ ,  $x_1 = \prod_{k=1}^n \cosh \varepsilon_k$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = \theta$ ,  $\tanh^{-1}$  a função inversa da tangente hiperbólica e  $\delta_k = \operatorname{sgn}(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } z_k \geq 0 \\ -1 & \text{se } z_k < 0 \end{cases}$ . A função  $\phi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  é

definida pondo  $\phi(k) = k - p$ , onde  $p$  é o maior inteiro tal que  $3^{p+1} + 2p - 1 \leq 2k$ . Uma condição para convergência é dada pelo teorema 1, e o erro que se comete nas aproximações depende do número de iterações. As adaptações feitas por Walther para garantir a convergência, e que são realizadas pela função  $\phi$ , são citadas em [10] com indicação sucinta de sua demonstração. O principal objetivo deste artigo é demonstrar em detalhes estas correções. Outros trabalhos utilizando CORDIC no cálculo das funções elementares podem ser encontradas em [2], [3], [5], [6] e [8].

Este trabalho está dividido em duas partes. A primeira contém um resumo das principais propriedades das funções hiperbólicas e um exemplo de como calcular  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$  usando rotações hiperbólicas. A segunda é dedicada à apresentação detalhada do algoritmo CORDIC com foco na demonstração das correções que garantem a sua convergência.

## 2. Funções hiperbólicas

Considere a hipérbole  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = 1\}$ . O ponto  $P = (x, y) \in H$  define um setor hiperbólico  $AOP$  e um ângulo hiperbólico  $\widehat{AOP}$ . Dizemos que o ângulo hiperbólico  $\widehat{AOP}$  mede  $\theta$  se a área do setor hiperbólico  $AOP$  mede  $\theta/2$  unidades de área, Figura (1). Convenção:

- i) Se o ponto  $P$  estiver acima do eixo  $x$ , o ângulo terá medida positiva.
- ii) Se o ponto  $P$  estiver abaixo do eixo  $x$ , o ângulo terá medida negativa.

Com esta convenção os valores de  $\theta$  estarão entre  $-\infty$  e  $+\infty$ .

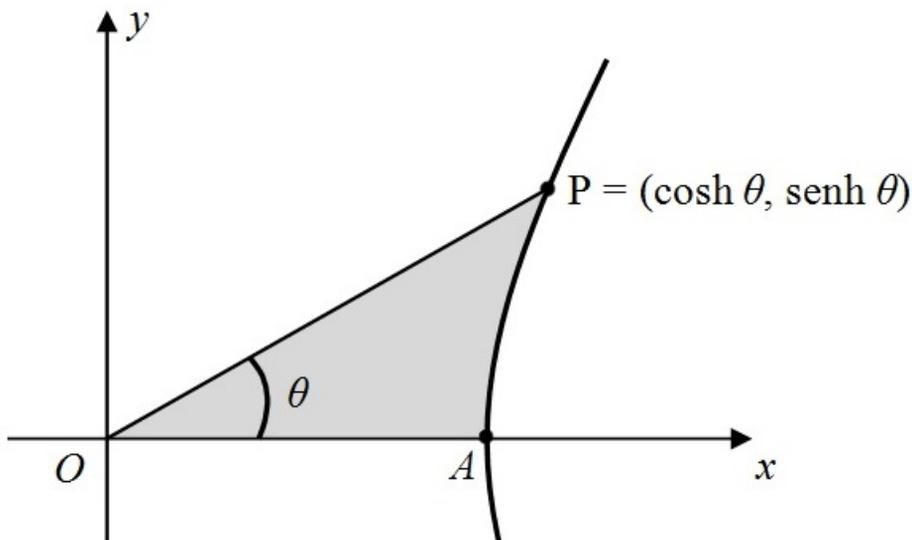


Figura 1: setor hiperbólico

O ponto  $P$  tem coordenadas  $x = \cosh \theta$  e  $y = \sinh \theta$ , cosseno e seno hiperbólico. Em [1], encontram-se as seguintes igualdades:

$$\text{iii) } \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2};$$

$$\text{iv) } \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

Usando as relações (iii) e (iv), podemos mostrar que :

$$\text{v) } \cosh(\theta_1 \pm \theta_2) = \cosh \theta_1 \cosh \theta_2 \pm \sinh \theta_1 \sinh \theta_2;$$

$$\text{vi) } \sinh(\theta_1 \pm \theta_2) = \sinh \theta_1 \cosh \theta_2 \pm \cosh \theta_1 \sinh \theta_2;$$

vii) A função cosseno hiperbólico é par e a função seno hiperbólico é ímpar.

Seja  $P_1 = (x_1, y_1) \in H$ , a rotação hiperbólica de um ângulo  $\theta$  do vetor  $\overrightarrow{OP_1}$  é o deslocamento do vetor de modo que sua extremidade permaneça em  $H$  e percorra um ângulo hiperbólico  $\theta$ . O vetor  $\overrightarrow{OP_2}$  obtido por esta rotação tem coordenadas  $(x_2, y_2) \in H$  onde

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = M_\theta \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ e } M_\theta = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}.$$

Observe que a rotação hiperbólica não tem o mesmo significado da rotação circular.

A função tangente hiperbólica é definida por  $\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}$  e vale a igualdade  $\tanh \theta = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}$ . Os próximos resultados serão utilizados na última seção.

**Lema 1.**  $\frac{1}{2} \tanh \theta \leq \tanh \left( \frac{\theta}{2} \right)$  para todo  $\theta \geq 0$ .

*Demonstração.*  $\frac{1}{2} \tanh \theta \leq \tanh \left( \frac{\theta}{2} \right)$  se, e somente se,  $\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} \leq \frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1}$  se, e somente se,  $(e^{2\theta} - 1)(e^\theta + 1) \leq 2(e^\theta - 1)(e^{2\theta} + 1)$  se, e somente se,  $(e^\theta - 1)^3 \geq 0$ . A última desigualdade é verdadeira para todo  $\theta \geq 0$ .  $\square$

**Lema 2.**  $\frac{1}{2^n} \leq \tanh \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right)$  para todo natural  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* A demonstração é feita por indução. Para  $n = 1$ , a desigualdade é verdadeira, visto que,  $\frac{1}{2} \leq \tanh(1) \approx 0.762$ . Se  $\frac{1}{2^n} \leq \tanh \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right)$  para algum  $n \geq 1$ , então

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \cdot \tanh \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq \tanh \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Ou seja,  $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \tanh \left( \frac{1}{2^n} \right)$ .  $\square$

A função tangente hiperbólica é estritamente crescente e sua inversa será denotada por  $\tanh^{-1}$ . Pelo lema 2, temos  $\tanh^{-1} \left( \frac{1}{2^n} \right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , para todo  $n \geq 1$ .

### 3. Calculando cosseno e seno hiperbólico

Dado  $\theta$ , suponha que queremos calcular  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$ . A ideia é aproximar o ângulo  $\theta$  por somas de ângulos  $\pm\theta_k$  onde  $\theta_k = \tanh^{-1}(1/2^k)$  para números naturais  $k \geq 1$ . Ao se aproximar o ângulo  $\theta$  pela soma  $s_{n+1}$ , os valores de  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$  são aproximados pelas coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP_{n+1}} = (\cosh(s_{n+1}), \sinh(s_{n+1}))$  obtido do vetor  $\overrightarrow{OP_1} = (1, 0)$  pela rotação hiperbólica do ângulo  $s_{n+1}$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} \cosh(s_{n+1}) \\ \sinh(s_{n+1}) \end{bmatrix} = M_{\pm\theta_n} \cdots M_{\pm\theta_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que,

$$M_{\pm\theta_k} = \begin{bmatrix} \cosh(\pm\theta_k) & \sinh(\pm\theta_k) \\ \sinh(\pm\theta_k) & \cosh(\pm\theta_k) \end{bmatrix} = \cosh \theta_k \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tanh(\pm\theta_k) \\ \tanh(\pm\theta_k) & 1 \end{bmatrix}.$$

Para exemplificar, calculemos  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$  para  $\theta = 0.61$ , Figura (2). O ângulo  $\theta = 0.61$  é aproximado por

$$\begin{aligned} s_5 &= \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 \\ &= 0.549306144 + 0.255412811 - 0.125657214 - 0.062581571 \\ &= 0.616480170 \end{aligned}$$

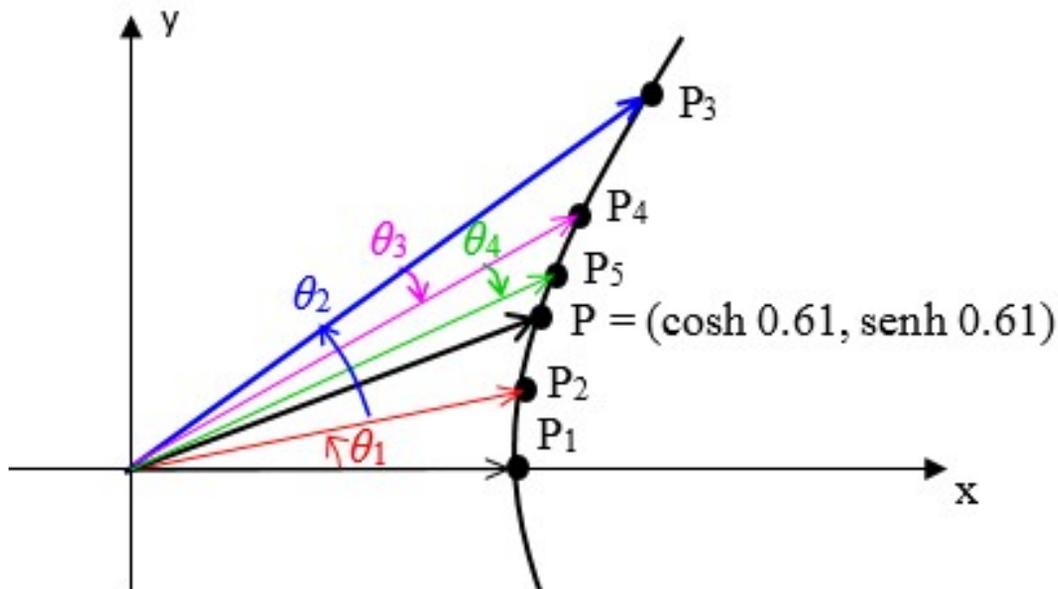


Figura 2: seqüência de aproximações

Então,

$$\begin{bmatrix} \cosh(s_5) \\ \sinh(s_5) \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo  $K = \cosh \theta_4 \cdot \cosh \theta_3 \cdot \cosh \theta_2 \cdot \cosh \theta_1 = 1.204351713$ .

Efetuando os produtos, obtemos

$$\begin{bmatrix} \cosh(s_5) \\ \sinh(s_5) \end{bmatrix} = 1.204351713 \cdot \begin{bmatrix} 0.993164062 \\ 0.544921875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.196118839 \\ 0.656277593 \end{bmatrix}.$$

Logo,  $\cosh 0.61 \approx 1.196118839$  e  $\sinh 0.61 \approx 0.656277593$ .

Infelizmente, não podemos garantir que somas de ângulos  $\pm\theta_k$  convirjam para qualquer valor de  $\theta$ . A próxima seção fornece uma condição para que isto ocorra.

#### 4. Condição de convergência

A garantia de convergência do algoritmo CORDIC depende do próximo teorema, demonstrado em [6].

**Teorema 1.** (Teorema de Convergência) *Suponha que  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n > 0$  é uma sequência finita de números reais tal que*

$$\varepsilon_k \leq \varepsilon_n + \sum_{j=k+1}^n \varepsilon_j, \text{ para } 1 \leq k < n, \quad (1)$$

e suponha que  $r$  é um número real tal que

$$|r| \leq \sum_{j=1}^n \varepsilon_j. \quad (2)$$

Se  $s_1 = 0$  e  $s_{k+1} = s_k + \delta_k \varepsilon_k$  para  $1 \leq k \leq n$ , onde

$$\delta_k = \operatorname{sgn}(r - s_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } r \geq s_k \\ -1, & \text{se } r < s_k \end{cases}$$

então

$$|r - s_k| \leq \varepsilon_n + \sum_{j=k}^n \varepsilon_j, \text{ para } 1 \leq k \leq n,$$

em particular  $|r - s_{n+1}| \leq \varepsilon_n$ .

A desigualdade (1) é a condição de convergência, e a desigualdade (2) fornece o raio de convergência.

A sequência de números reais positivos  $\theta_k = \tanh^{-1}(2^{-k})$ , com  $1 \leq k \leq 13$ , é decrescente mas não satisfaz a condição de convergência, Tabela (1).

	$\theta_k$	$\theta_{13} + \sum_{j=k+1}^{13} \theta_j$		$\theta_k$	$\theta_{13} + \sum_{j=k+1}^{13} \theta_j$
1	0.549306144	0.506163226	8	0.003906270	0.003906252
2	0.255412811	0.250750415	9	0.001953127	0.001953125
3	0.125657214	0.125093201	10	0.000976563	0.000976562
4	0.062581571	0.062511630	11	0.000488281	0.000488281
5	0.031260178	0.031251452	12	0.000244141	0.000244140
6	0.015626271	0.015625181	13	0.000122070	
7	0.007812659	0.007812522			

Tabela 1: seqüência  $\theta_k$ , com  $1 \leq k \leq 13$ , seguida das somas da desigualdade (1)

Duplicando as entradas quatro e treze da Tabela (1), obtemos a seqüência  $\varepsilon_k$ , para  $1 \leq k \leq 15$ , Tabela (2).

	$\varepsilon_k$	$\varepsilon_{15} + \sum_{j=k+1}^{15} \varepsilon_j$		$\varepsilon_k$	$\varepsilon_{15} + \sum_{j=k+1}^{15} \varepsilon_j$
1	0.549306144	0.568866867	9	0.003906270	0.004028322
2	0.255412811	0.313454056	10	0.001953127	0.002075195
3	0.125657214	0.187796842	11	0.000976563	0.001098632
4*	0.062581571	0.125215271	12	0.000488281	0.000610351
5*	0.062581571	0.062633700	13	0.000244141	0.000366210
6	0.031260178	0.031373522	14*	0.000122070	0.000244140
7	0.015626271	0.015747251	15*	0.000122070	
8	0.007812659	0.007934592			

Tabela 2: seqüência obtida da Tabela (1), duplicando as entradas quatro e quatorze.

Observando a Tabela (2), podemos concluir que  $\varepsilon_k \leq \varepsilon_{15} + \sum_{j=k+1}^{15} \varepsilon_j$  para todo  $1 \leq k < 15$ , isto é, a seqüência  $\varepsilon_k$  satisfaz a condição de convergência. Em [10], Walther pontuou que os índices que devem ser repetidos pertencem ao conjunto  $\{4, 13, 40, 121, \dots, i, 3i + 1, \dots\}$ . Na próxima seção apresentaremos a demonstração deste resultado.

## 5. Correções da seqüência

Esta seção contém a parte principal deste trabalho. Demonstramos em detalhes as correções feitas na seqüência  $\theta_k$  para garantir a condição de convergência.

**Lema 3.**  $2^{-3n+3} - 2^{-3n+2} \geq 2^{-5n+5} - 2^{-5n+3}$  para todo natural  $n \geq 2$ .

*Demonstração.* Vamos demonstrar a desigualdade utilizando indução matemática. Para  $n = 2$ , a desigualdade  $2^{-3} - 2^{-4} \geq 2^{-5} - 2^{-7}$  é verdadeira, pois é equivalente a  $\frac{8}{128} \geq \frac{3}{128}$ . Suponha que  $2^{-3n+3} - 2^{-3n+2} \geq 2^{-5n+5} - 2^{-5n+3}$  é verdadeira para  $n \geq 2$ . Como  $2^{-3} \geq 2^{-5}$ , então

$$2^{-3}(2^{-3n+3} - 2^{-3n+2}) \geq 2^{-5}(2^{-5n+5} - 2^{-5n+3}).$$

Ou seja,  $2^{-3(n+1)+3} - 2^{-3(n+1)+2} \geq 2^{-5(n+1)+5} - 2^{-5(n+1)+3}$ . □

Em [4], pág. 525, encontra-se a igualdade  $\theta_k = \tanh^{-1}(2^{-k}) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+2^{-k}}{1-2^{-k}} \right)$  para todo  $k \geq 1$ , que será utilizada nos próximos resultados.

**Lema 4.**  $2\theta_n + \theta_{3(n-1)+1} - \theta_{n-1} \geq 0$  para todo natural  $n \geq 2$ .

*Demonstração.* As desigualdades abaixo são equivalentes.

- i)  $2\theta_n + \theta_{3(n-1)+1} - \theta_{n-1} \geq 0$ ;
- ii)  $\frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{1+2^{-n}}{1-2^{-n}} \right)^2 \cdot \left( \frac{1-2^{-(n-1)}}{1+2^{-(n-1)}} \right) \cdot \left( \frac{1+2^{-(3n-2)}}{1-2^{-(3n-2)}} \right) \right] \geq 0$ ;
- iii)  $(1+2^{-n})^2 \cdot (1-2^{-n+1}) \cdot (1+2^{-3n+2}) \geq (1-2^{-n})^2 \cdot (1+2^{-n+1}) \cdot (1-2^{-3n+2})$ ;
- iv)  $2^{-3n+3} - 2^{-5n+5} + 2^{-5n+3} - 2^{-3n+2} \geq 0$ .

Pelo lema 3, a desigualdade (iv) é verdadeira. □

**Lema 5.**  $2^{-3m+2} - 2^{-3m-1} - 2^{-3m+1} \geq -2^{-5m+2} + 2^{-5m+4}$  para todo natural  $m \geq 2$ .

*Demonstração.* Vamos demonstrar a desigualdade utilizando indução matemática. Para  $m = 2$ , a desigualdade  $2^{-4} - 2^{-7} - 2^{-5} \geq -2^{-8} + 2^{-6}$  é verdadeira, pois é equivalente a  $\frac{6}{256} \geq \frac{3}{256}$ . Suponha que  $2^{-3m+2} - 2^{-3m-1} - 2^{-3m+1} \geq -2^{-5m+2} + 2^{-5m+4}$  é verdadeira para  $m \geq 2$ . Como  $2^{-3} \geq 2^{-5}$ , então  $2^{-3}(2^{-3m+2} - 2^{-3m-1} - 2^{-3m+1}) \geq 2^{-5}(-2^{-5m+2} + 2^{-5m+4})$ . Portanto,

$$2^{-3(m+1)+2} - 2^{-3(m+1)-1} - 2^{-3(m+1)+1} \geq -2^{-5(m+1)+2} + 2^{-5(m+1)+4}.$$

□

**Lema 6.**  $2\theta_m - \theta_{3m+1} - \theta_{m-1} + \theta_{3(m-1)+1} \geq 0$  para todo natural  $m \geq 2$ .

*Demonstração.* As desigualdades abaixo são equivalentes.

- i)  $2\theta_m - \theta_{3m+1} - \theta_{m-1} + \theta_{3(m-1)+1} \geq 0$ ;
- ii)  $\frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{1+2^{-m}}{1-2^{-m}} \right)^2 \left( \frac{1-2^{-(m-1)}}{1+2^{-(m-1)}} \right) \left( \frac{1+2^{-(3m-2)}}{1-2^{-(3m-2)}} \right) \left( \frac{1-2^{-(3m+1)}}{1+2^{-(3m+1)}} \right) \right] \geq 0$ ;
- iii)  $M_1 \geq M_2$ , sendo  $M_1 = (1+2^{-m})^2(1-2^{-m+1})(1+2^{-3m+2})(1-2^{-3m-1})$  e  $M_2 = (1-2^{-m})^2(1+2^{-m+1})(1-2^{-3m+2})(1+2^{-3m-1})$ ;
- iv)  $S_1 + S_2 \geq 0$ , onde  $S_1 = 2^{-5m+1} - 2^{-5m-1} + 2^{-9m+2}$  e  $S_2 = 2^{-3m+2} - 2^{-3m-1} - 2^{-3m+1} + 2^{-5m+2} - 2^{-5m+4}$ .

Como  $S_1 \geq 0$  para todo  $m \geq 2$  e pelo lema 5,  $S_2 \geq 0$ , o resultado segue. □

**Lema 7.** Se  $\theta_{n-k} \leq \theta_n + \left( \sum_{j=(n-k)+1}^n \theta_j \right) + \theta_{3(n-k)+1}$  para  $1 \leq k < n - 1$  e  $n \geq 3$ , então

$$\theta_{n-(k+1)} \leq \theta_n + \left( \sum_{j=(n-(k+1))+1}^n \theta_j \right) + \theta_{3(n-(k+1))+1}.$$

*Demonstração.* As desigualdades abaixo são equivalentes:

- i)  $\theta_{n-(k+1)} \leq \theta_n + \sum_{j=n-k}^n \theta_j + \theta_{3(n-k-1)+1}$ ;
- ii)  $\theta_n + \sum_{j=n-k}^n \theta_j - \theta_{n-(k+1)} + \theta_{3(n-k-1)+1} \geq 0$ ;
- iii)  $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \geq 0$ , onde  $N_1 = \theta_n + \left( \sum_{j=(n-k)+1}^n \theta_j \right) + \theta_{n-k}$ ,  
 $N_2 = \theta_{n-k} - \theta_{n-k}$ ,  $N_3 = \theta_{3(n-k)+1} - \theta_{3(n-k)+1}$  e  $N_4 = -\theta_{n-k-1} + \theta_{3(n-k-1)+1}$ .
- iv)  $P_1 + P_2 \geq 0$ , sendo  $P_1 = \theta_n + \left( \sum_{j=(n-k)+1}^n \theta_j \right) + \theta_{3(n-k)+1} - \theta_{n-k}$  e  
 $P_2 = 2\theta_{n-k} - \theta_{3(n-k)+1} - \theta_{(n-k)-1} + \theta_{3((n-k)-1)+1}$ .

Por hipótese  $P_1 \geq 0$  e pelo lema 6,  $P_2 \geq 0$ . □

**Teorema 2.** Seja  $\theta_k = \tanh^{-1}(2^{-k})$  para  $k \geq 1$ , então

$$D_k : \theta_{n-k} \leq \theta_n + \left( \sum_{j=(n-k)+1}^n \theta_j \right) + \theta_{3(n-k)+1}, \text{ para } 1 \leq k < n \text{ e } n \geq 2. \quad (3)$$

*Demonstração.* A desigualdade  $D_k$  é verdadeira para  $k = 1$ , pois neste caso

$$D_1 : \theta_{n-1} \leq \theta_n + \theta_n + \theta_{3(n-1)+1},$$

que é válida para todo  $n \geq 2$ , pelo lema 4. Se  $D_k$  é verdadeira para algum  $1 \leq k < n - 1$  e  $n \geq 3$ , então pelo lema 7,  $D_{k+1}$  é verdadeira. □

Como consequência do teorema 2, a sequência obtida repetindo os termos  $\theta_k$  para  $k$  pertencente ao conjunto  $\{4, 13, 40, 121, \dots, i, 3i+1, \dots\}$  satisfaz a condição de convergência. A seguir apresentamos algumas desigualdades, decorrentes da desigualdade (3).

- i)  $\theta_1 \leq \theta_4 + (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + \theta_4$ ;
- ii)  $\theta_2 \leq \theta_4 + (\theta_3 + \theta_4) + \theta_7 \leq \theta_4 + (\theta_3 + \theta_4) + \theta_4$ ;

- iii)  $\theta_3 \leq \theta_4 + (\theta_4) + \theta_{10} \leq \theta_4 + (\theta_4) + \theta_4$ ;
- iv)  $\theta_4 \leq \theta_{13} + (\theta_5 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{13}$ ;
- v)  $\theta_5 \leq \theta_{13} + (\theta_6 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{16} \leq \theta_{13} + (\theta_6 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{13}$ ;
- vi)  $\theta_6 \leq \theta_{13} + (\theta_7 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{19} \leq \theta_{13} + (\theta_7 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{13}$ ;
- vii)  $\theta_{13} \leq \theta_{40} + (\theta_{14} + \dots + \theta_{40}) + \theta_{40}$ ;
- viii)  $\theta_{14} \leq \theta_{40} + (\theta_{15} + \dots + \theta_{40}) + \theta_{43} \leq \theta_{40} + (\theta_{15} + \dots + \theta_{40}) + \theta_{40}$ .

As desigualdades de i) até viii) são para  $k$  em  $\{4, 13, 40\}$ .

Em [5], pp139, define-se a função  $\phi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  pondo  $\phi(k) = k - p$ , onde  $p$  é o maior inteiro tal que  $3^{p+1} + 2p - 1 \leq 2k$ . Para exemplificar, calculemos alguns valores de  $\phi$ :  $\phi(43) = 43 - 3 = 40$ ,  $\phi(42) = 42 - 2 = 40$ ,  $\phi(41) = 41 - 2 = 39$ ,  $\phi(15) = 15 - 2 = 13$ ,  $\phi(14) = 14 - 1 = 13$ ,  $\phi(13) = 13 - 1 = 12$ ,  $\phi(5) = 5 - 1 = 4$ ,  $\phi(4) = 4 - 0 = 4$ ,  $\phi(3) = 3 - 0 = 3$ . Utilizando a função  $\phi$ , a sequência obtida com as repetições de  $\theta_k$  pode ser escrita por  $\varepsilon_k = \theta_{\phi(k)}$ . Note que,

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \dots, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{15}, \dots, \varepsilon_{41}, \varepsilon_{42}, \varepsilon_{43}) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_4, \dots, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{13}, \dots, \theta_{39}, \theta_{40}, \theta_{40}).$$

Para contornar o problema de qual  $\theta_k$  deve ser repetido, Eklund [2] decide repetir todos os  $\theta_k$  para  $k \geq 2$ . Neste caso, a demonstração do critério de convergência é mais simples, porém o algoritmo fica mais lento, sendo necessário um número maior de iterações para obter a mesma precisão usando a sequência  $\varepsilon_k$ .

## 6. Algoritmo CORDIC

Considere a matriz

$$M_{\pm\varepsilon_k}^* = \begin{bmatrix} 1 & \tanh(\pm\varepsilon_k) \\ \tanh(\pm\varepsilon_k) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \pm 2^{-\phi(k)} \\ \pm 2^{-\phi(k)} & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que,

$$M_{\pm\varepsilon_k}^* \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \cdot 2^{-\phi(k)} \\ y_1 \pm x_1 \cdot 2^{-\phi(k)} \end{bmatrix}.$$

Se  $s_{n+1} = \sum_{k=1}^n \pm\varepsilon_k$ , então

$$\begin{bmatrix} \cosh(s_{n+1}) \\ \sinh(s_{n+1}) \end{bmatrix} = M_{\pm\varepsilon_n}^* \cdots M_{\pm\varepsilon_1}^* \cdot \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} \text{ onde } K = \cosh \varepsilon_n \cdots \cosh \varepsilon_1. \quad (4)$$

Reescrevendo a Equação (4) e adicionando a sequência que aproxima o ângulo  $\theta$ , obtemos as equações CORDIC para calcular seno e cosseno hiperbólico,

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_k y_k 2^{-\phi(k)} \\ y_{k+1} = y_k + \delta_k x_k 2^{-\phi(k)} \\ z_{k+1} = z_k - \delta_k \varepsilon_k \end{cases}.$$

Aqui,  $k \geq 1$ ,  $\varepsilon_k = \tanh^{-1}(2^{-\phi(k)})$ ,  $x_1 = \prod_{k=1}^n \cosh \varepsilon_k$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = \theta$  e

$$\delta_k = \operatorname{sgn}(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } z_k \geq 0 \\ -1 & \text{se } z_k < 0 \end{cases}.$$

A soma dos elementos da Tabela (2) é  $\sum_{j=1}^{15} \varepsilon_j = 1.118050941$ . Portanto, para  $n \geq 15$  os valores de  $|\theta| \leq 1.11$  pertencem ao intervalo de convergência.

**Teorema 3.** Se  $|\theta| \leq 1.11$ , então  $|\cosh \theta - x_{n+1}| < \frac{1}{2^{\phi(n)-2}}$  e  $|\sinh \theta - y_{n+1}| < \frac{1}{2^{\phi(n)-2}}$ .

*Demonstração.* Note que,  $x_{n+1} = \cosh(s_{n+1})$  e  $y_{n+1} = \sinh(s_{n+1})$ . Aplicando o teorema do valor médio ([4], pág. 232), a função cosseno hiperbólico, existe um número  $c$  entre  $\theta$  e  $s_{n+1}$  tal que

$$\frac{\cosh \theta - \cosh(s_{n+1})}{\theta - s_{n+1}} = \cosh' c = \sinh c.$$

Pelo teorema 1,  $|\theta - s_{n+1}| \leq \varepsilon_n = \tanh^{-1}(2^{-\phi(n)})$ , e pelo lema 2,  $\tanh^{-1}(2^{-\phi(n)}) \leq 1/2^{\phi(n)-1}$ .

Segue que,

$$|\cosh \theta - x_{n+1}| \leq |\theta - s_{n+1}| \cdot |\sinh c| \leq \frac{1}{2^{\phi(n)-1}} \cdot |\sinh c|$$

Como a função seno hiperbólico é estritamente crescente e  $|c| \leq 1.2$ , então  $|\sinh c| < 2$ .

Portanto,

$$|\cosh \theta - x_{n+1}| < \frac{1}{2^{\phi(n)-1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^{\phi(n)-2}}.$$

Analogamente,

$$|\sinh \theta - y_{n+1}| \leq |\theta - s_{n+1}| \cdot |\cosh c| < \frac{1}{2^{\phi(n)-1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^{\phi(n)-2}}.$$

□

O teorema 3 fornece um limitante superior para o erro cometido ao se aproximar  $\sinh \theta$  e  $\cosh \theta$  por  $\sinh(s_{n+1})$  e  $\cosh(s_{n+1})$ . Para  $n = 43$ , o erro é menor que  $\frac{1}{2^{\phi(43)-2}} = \frac{1}{2^{38}} \approx 3.638 \cdot 10^{-12}$ , portanto a precisão é de 10 casas decimais.

## Referências

- [1] Carvalho, Sonia Pinto de. *As Funções Hiperbólicas*. Disponível em: <http://doc-player.com.br/5125774-Sonia-pinto-de-carvalho.html>, acessado em 14/12/2017.
- [2] Eklund, N. *CORDIC: Elementary Function Computation Using Recursive Sequences*. Electronic Proceeding of the ICTCM, C027, 1998.

- [3] Giansante, Antônio Cézare de Araújo. *Algoritmo CORDIC no cálculo das funções elementares*. Dissertação de Mestrado - Profmat, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.
- [4] Leithold, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 1, Terceira Edição, Editora Harbra, 1994.
- [5] Muller, Jean-Michel. *Elementary Functions: Algorithms and Implementation*. Second Edition, Birkhäuser Boston, 2006.
- [6] Schelin, Charles W. *Calculator Function Approximation*. The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 5, 317- 325, 1983.
- [7] Sultan, Alan. *CORDIC: How Hand Calculators Calculate*. The College Mathematics Journal, 87-92, 2009.
- [8] Underwood, J. and Edwards, B. *How do calculators calculate trigonometric functions?* Disponível em: <https://people.clas.ufl.edu/bruceedwards/files/paper.pdf>, acessado em 22/12/2017.
- [9] Volder, J. E. *The CORDIC Trigonometric Computing Technique*. IRE Trans. Computers, EC-8, 330-334, 1959.
- [10] Walther, J. S. *A Unified Algorithm for Elementary Functions*. Joint Computer Conference Proceedings, Springer Vol. 38, 379-385, 1971.

Claudemir Aniz  
UFMS - Campo Grande - MS  
<[claudemir.aniz@ufms.br](mailto:claudemir.aniz@ufms.br)>

Antônio Giansante  
UNEMAT - Tangará da Serra - MT  
<[profcab@yahoo.com.br](mailto:profcab@yahoo.com.br)>

Recebido: 12/01/2018

# Subtração de números inteiros na reta geométrica

Silvio Esquinca

## Resumo

O uso da linguagem geométrica, para o ensino de subtração de números inteiros, em particular na reta de números inteiros, ensinada aos sétimos anos do ensino fundamental, pode trazer uma melhor aprendizagem desse conteúdo ao aluno, de forma que possa, posteriormente, compreender as regras de sinais como um método prático para se obter agilidade com os cálculos.

**Palavras-chave:** Subtração; Números; Inteiros; Geometria; Reta.

## Abstract

The use of geometric language, for the teaching of subtraction of integer numbers, in particular in the line of integer numbers, taught in the seventh year of elementary school, can bring a better learning of this content to the student, so that he can later understand the signal rules as a practical method for agility with calculations.

**Keywords:** Subtraction; Numbers; Integers; Geometry; Line

## 1. Introdução

No segundo dia de formação, promovido pela Semed, Secretaria Municipal de Educação, de Campo Grande-MS, cujo tema foi “Organização do Trabalho Didático”, para professores da rede municipal de ensino, sendo a Escola Municipal Professor Plínio Mendes dos Santos um polo para o encontro de professores, em março de 2018, levantou-se a questão de como ensinar subtração de números inteiros, geometricamente na reta de números inteiros, para tornar mais acessível este conteúdo ao aluno. Assim, foi apresentada uma abordagem desse conteúdo no livro: Vontade de Saber, 7º ano, página 105, a qual segue na figura abaixo:

Mas nessa abordagem, o aluno deve saber que  $- (-)$  equivale a  $+ (+)$  e gostaríamos de apresentar um método prático, de melhor compreensão, sem a necessidade do uso dessa equivalência, para depois a compreendermos.

## 2. Desenvolvimento

Os profissionais que ministravam a formação, buscaram uma outra alternativa para abordar a expressão  $(-17) - (-28)$  de modo a obter o seu valor 11, geometricamente na reta de números inteiros, apresentando a figura abaixo:

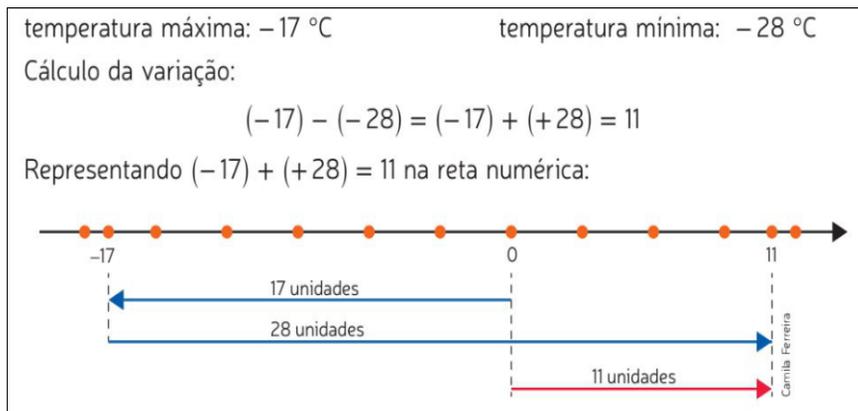


Figura 1: Subtração de números inteiros na reta geométrica de números inteiros.

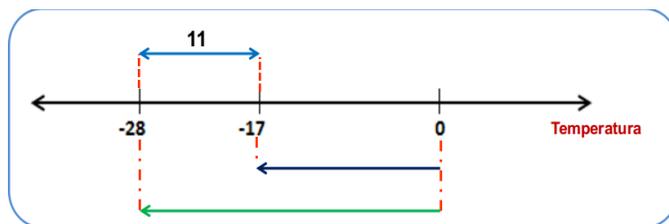


Figura 2: Subtração de números inteiros na reta geométrica de números inteiros.

E com relação a esta abordagem, foram feitas algumas explicações para se tentar chegar no valor 11 para a expressão  $(-17) - (-28)$ , objetivando encontrar uma praticidade nos esquemas montados na figura.

Algumas reflexões sobre o conteúdo: Subtração de Números Inteiros, contextualizado com a geometria, em particular com a reta de números inteiros, permitiram obter o raciocínio descrito no texto abaixo.

Sejam  $x$  e  $y$  dois números inteiros quaisquer. É verdade, já demonstrada em livros de vários autores de matemática, que:

$$|x - y| = |y - x|,$$

significando: “a distância, na reta, do ponto associado ao número inteiro  $x$  ao ponto associado ao número inteiro  $y$ , independentemente do sentido, se do ponto associado a  $x$  para o ponto associado a  $y$  ou do ponto associado a  $y$  para o ponto associado a  $x$ . Simplesmente, o módulo fornece apenas tal distância.

Acontece que, trabalhando sem o módulo, a expressão  $x - y$  também significará geometricamente, na reta, a distância entre os pontos associados a  $x$  e  $y$ , porém sendo necessária a indicação de um sentido, do ponto associado a  $x$  para o ponto associado a  $y$  ou do ponto associado a  $y$  para o ponto associado a  $x$ .

A leitura da expressão  $x - y$  é feita da esquerda para a direita, permitindo extrair, geome-

tricamente, a seguinte interrogação: “o ponto associado a  $x$  distancia-se do ponto associado a  $y$  para qual sentido e em quantas unidades de distância na reta?”

A reta possui dois sentidos, um representado pelo sinal  $+$  e outro pelo sinal  $-$ , conforme figura abaixo.

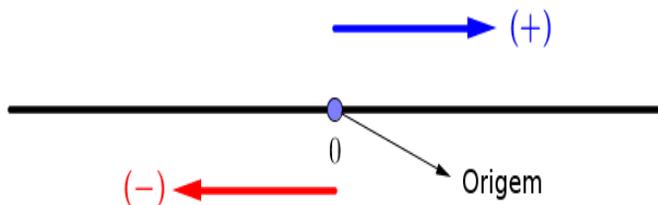


Figura 3: Sentidos na reta.

Se  $x = y$  então não haverá distanciamento entre os pontos associados a  $x$  e  $y$ , consequentemente não existirá sentido, pois os dois pontos serão congruentes. Caso  $x < y$ , haverá uma distância entre os pontos da reta associados a eles, o ponto associado a  $x$  permanecendo à esquerda do ponto associado a  $y$ . Portanto, o sentido de distanciamento do ponto associado a  $x$ , com relação ao ponto associado a  $y$ , será indicado pelo sinal de menos  $(-)$ , conforme a figura abaixo.

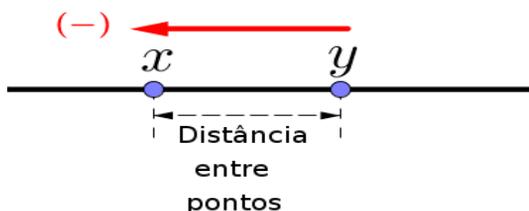


Figura 4: Sentido de um ponto com relação a outro ponto dado.

Mas se  $x > y$ , também haverá uma distância entre os pontos associados a eles, o ponto associado a  $x$  permanecendo à direita do ponto associado a  $y$ . Portanto, o sentido de distanciamento do ponto associado a  $x$ , com relação ao ponto associado a  $y$ , será indicado pelo sinal de mais  $(+)$ , conforme a figura abaixo.

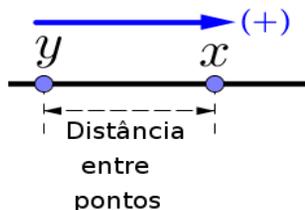


Figura 5: Sentido de um ponto com relação a outro ponto dado.

### 3. Conclusão

Assim, podemos fornecer os seguintes exemplos com interpretação geométrica:

a)

<b>(-5)</b>	<b>-</b>	<b>(-3)</b>	<b>=</b>	<b>-</b>	<b>2</b>
O ponto associado ao (-5)	distancia-se	do ponto associado ao (-3)	no	sentido negativo	duas unidades de distância

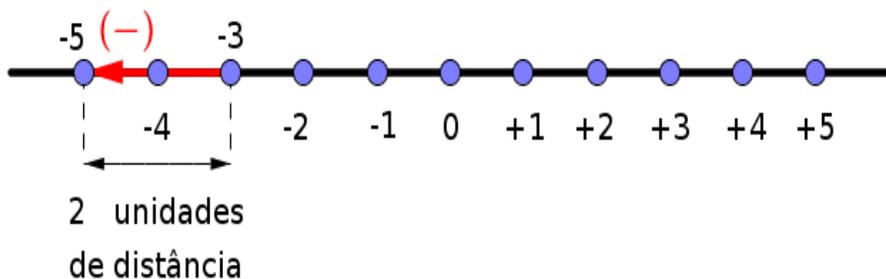


Figura 6:  $(-5) - (-3)$  na reta geométrica.

Observação 1: na reta de números inteiros,  $-5$  posiciona-se à esquerda de  $-3$ . Então, como a contagem de unidades de distância ocorrem a partir do  $-3$ , para a esquerda, até chegar em  $-5$ , adota-se o sinal de menos (-) seguido de duas unidades de distância, para o resultado procurado, ou seja, obtendo-se o valor  $-2$  para tal expressão numérica.

b)

<b>(-5)</b>	<b>-</b>	<b>(+3)</b>	<b>=</b>	<b>-</b>	<b>8</b>
O ponto associado ao (-5)	distancia-se	do ponto associado ao (+3)	no	sentido negativo	oito unidades de distância

equivalente a

<b>(-5)</b>	<b>-</b>	<b>3</b>	<b>=</b>	<b>-</b>	<b>8</b>
O ponto associado ao (-5)	distancia-se	do ponto associado ao $3 = +3$	no	sentido negativo	oito unidades de distância

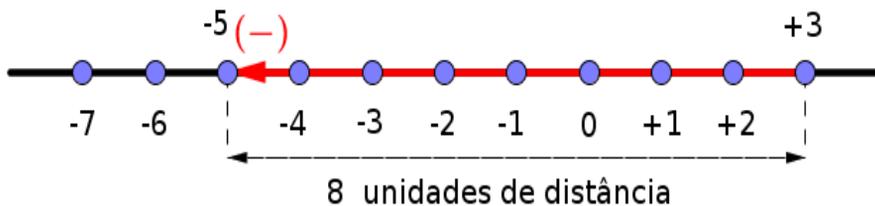


Figura 7:  $(-5) - (+3)$  na reta geométrica.

c)

$(-3)$	-	$(-5)$	=	+	2
O ponto associado ao $(-3)$	distancia-se	do ponto associado ao $(-5)$	no	sentido positivo	duas unidades de distância

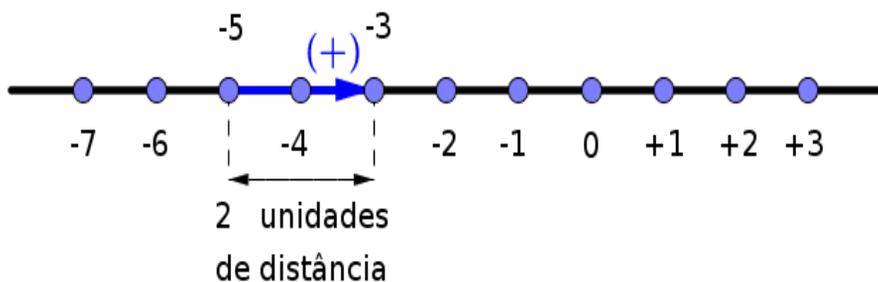


Figura 8:  $(-3) - (-5)$  na reta geométrica.

Observação 2: na reta de números inteiros,  $-3$  posiciona-se à direita de  $-5$ . Então, como a contagem de unidades de distância ocorrem a partir do  $-5$ , para a direita, até chegar em  $-3$ , adota-se o sinal de mais (+) seguido de duas unidades de distância, para o resultado procurado, ou seja, obtendo-se o valor  $+2 = 2$  para tal expressão numérica.

d)

$(-3)$	-	$(+5)$	=	-	8
O ponto associado ao $(-3)$	distancia-se	do ponto associado ao $(+5)$	no	sentido negativo	oito unidades de distância

equivalente a

$(-3)$	-	5	=	-	8
O ponto associado ao $(-3)$	distancia-se	do ponto associado ao $5 = +5$	no	sentido negativo	oito unidades de distância

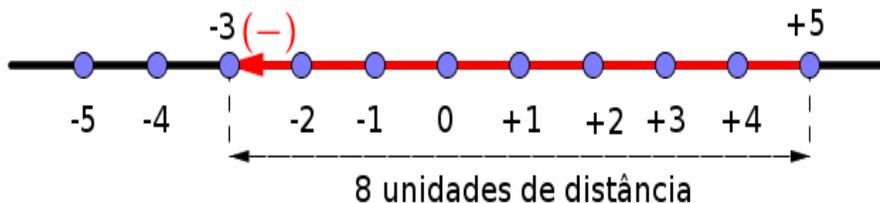


Figura 9:  $(-3) - (+5)$  na reta geométrica.

e)

$(+5)$	-	$(+3)$	=	+	2
O ponto associado ao $(+5)$	distancia-se	do ponto associado ao $(+3)$	no	sentido positivo	duas unidades de distância

equivalente a

$(+5)$	-	3	=	+	2
O ponto associado ao $(+5)$	distancia-se	do ponto associado ao $3 = +3$	no	sentido positivo	duas unidades de distância

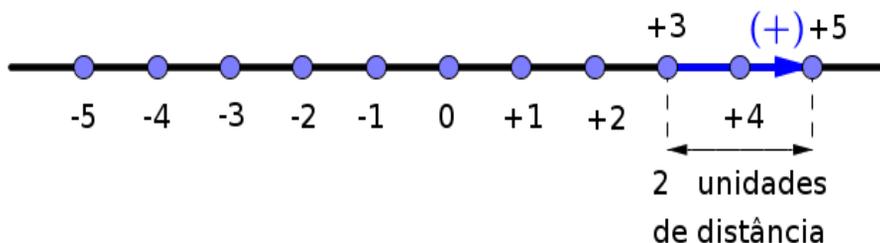


Figura 10:  $(+5) - (+3)$  na reta geométrica.

f)

(+3)	-	(+5)	=	-	2
O ponto associado ao (+3)	distancia-se	do ponto associado ao (+5)	no	sentido negativo	duas unidades de distância

equivalente a

3	-	5	=	-	2
O ponto associado ao $3 = +3$	distancia-se	do ponto associado ao $5 = +5$	no	sentido negativo	duas unidades de distância

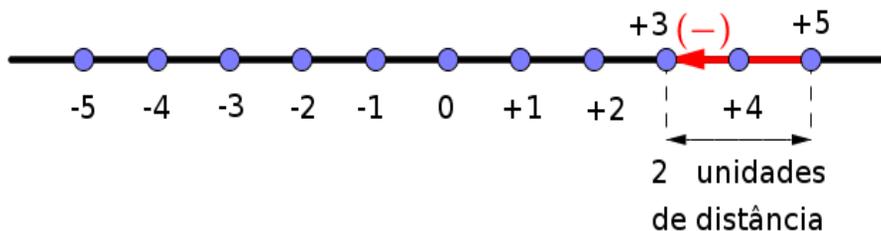


Figura 11:  $(+3) - (+5)$  na reta geométrica.

## Referências

- [1] SOUZA, Joamir e PATARO, Patrícia Moreno. *Vontade de Saber*, 7º Ano. São Paulo: FTD, 2015.
- [2] LEITHOLD, Louis. *Cálculo com Geometria Analítica*. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994.

Silvio Esquinca  
 Secretaria Municipal de Educação de Campo Grande-MS  
 Escola Municipal Prof. Plínio Mendes dos Santos  
 Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul  
 Escola Estadual José Ferreira Barbosa  
[<profesquinca@gmail.com>](mailto:profesquinca@gmail.com)

Recebido: 05/06/2018

# A irracionalidade e transcendência de certos logaritmos

Ronald Pinto

Liliana da Costa

## Resumo

Neste artigo exibimos algumas demonstrações de irracionalidade de certos logaritmos. A importância deste fato relaciona-se com a caracterização dos números irracionais pela representação decimal infinita não-periódica. Tanto nas antigas tábuas de logaritmos como nas calculadoras eletrônicas os valores dos logaritmos são representados na forma de uma expressão decimal finita. Isto pode gerar a falsa impressão de que se tratam necessariamente de números racionais. Ao contrário de diversos textos e artigos sobre o assunto, não ficamos restritos ao logaritmo decimal. Com efeito, mostramos uma condição suficiente para o número  $\log_b a$  ser irracional, onde  $a > 0$  e  $b > 1$  são inteiros e também um critério que estabelece a irracionalidade de  $\log_b a$  quando  $b > 1$  for livre de quadrados. Mostramos por fim, lançando mão do Teorema de Gelfond-Schneider, algumas provas da transcendência de certos logaritmos e tratamos de logaritmos de números reais não-inteiros.

**Palavras-chave:** números irracionais, logaritmos, Teorema Fundamental da Aritmética, números transcendententes.

## Abstract

In this article we show some demonstrations of irrationality of certain logarithms. The importance of this fact is related to the characterization of the irrational numbers by the infinite non-periodic decimal representation. In both the old logarithmic tables and the electronic calculators, the logarithmic values are represented in the form of a finite decimal expression. This may generate the false impression that they are necessarily rational numbers. Unlike many texts and articles on the subject, we are not restricted to the decimal logarithm. In fact, we show a sufficient condition for the  $\log_b a$  number to be irrational, where  $a > 0$  and  $b > 1$  are integers and also a criterion that establishes the irrationality of  $\log_b a$  when  $b > 1$  is square free. We finally show, using Gelfond-Schneider's Theorem, some proof of the transcendence of certain logarithms, and we deal with logarithms of non-integer real numbers.

**Keywords:** irrational numbers, logarithms, Fundamental Theorem of Arithmetic, transcendent numbers.

## 1. Introdução e primeiro exemplo

Os logaritmos surgem desde o Ensino Médio como  $\log 2$ , por exemplo. Tais números aparecem nas calculadoras eletrônicas, ou mesmo nas antigas tábuas de logaritmos, na forma de uma expressão decimal finita. Isso pode levar um aluno de Ensino Médio a concluir erroneamente que se tratam de números racionais. Como podemos estabelecer a irracionalidade de certos logaritmos? Em geral não é tão simples examinar a natureza (quanto a racionalidade ou não) de um número real. Veremos como o Teorema Fundamental de Aritmética (um resultado acessível ao aluno de Ensino Médio) nos ajuda a investigar a irracionalidade de logaritmos. Antes, no entanto, não é demais relembrar algumas definições.

Sejam  $a$  e  $b \neq 0$  dois números inteiros. Dizemos que  $b$  divide  $a$  quando existe um inteiro  $c$  tal que  $a = bc$ . Neste caso, dizemos também que  $b$  é um *divisor* de  $a$  ou que  $a$  é um *múltiplo* de  $b$ .

Todo inteiro positivo  $a$  diferente de 1 possui ao menos dois divisores positivos, já que 1 e  $a$  são divisores de  $a$ . Um número inteiro  $p > 1$  é dito *primo* quando possui exatamente dois divisores positivos. Um inteiro maior do que 1 que não é primo é dito *composto*.

**Teorema 1** (Teorema Fundamental da Aritmética). *Seja  $a$  um inteiro diferente de 1,  $-1$  e 0. Então existem números primos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  e inteiros positivos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  tais que  $a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ . Além disso, esta decomposição é única, a menos de ordem dos fatores.*

Apresentamos, no Exemplo 1, uma aplicação do teorema acima, também conhecido como Teorema da Fatoração Única. Para isso recordamos a definição de logaritmo: dado um número real  $a > 0$ , seu *logaritmo na base*  $b > 0$ , com  $b \neq 1$ , é o número real  $x$  tal que  $b^x = a$ . Denotamos o logaritmo de  $a$  na base  $b$  o por  $\log_b a$ . Quando  $b = 10$  o logaritmo é dito *decimal* e denotamos  $\log_{10} a$  simplesmente por  $\log a$ . Vamos admitir conhecidas as propriedades operatórias dos logaritmos. Ao longo deste artigo, exceto ao comentar o logaritmo natural, tratamos de logaritmos de base inteira.

**Exemplo 1.** O número  $\log 2$  é irracional.

Note inicialmente que  $\log 2 > \log 1 = 0$ . Por contraposição, podemos supor que existam inteiros positivos  $m$  e  $n$  tais que  $\log 2 = \frac{m}{n}$ . Assim, pela definição de logaritmo,  $2 = 10^{\frac{m}{n}}$ . Elevando ambos os membros a potência  $n$  obtemos  $2^n = 10^m = 2^m 5^m$ . Segue do Teorema Fundamental da Aritmética que  $m = 0$ , o que contraria a nossa suposição inicial. Portanto,  $\log 2$  é irracional.

### 1.1. Uma generalização

O ponto crucial no argumento acima foi o fato de 2 e 10 terem fatores primos diferentes. De forma mais precisa, o fator 5 está na decomposição em primos do número 10, mas não está, evidentemente, na decomposição do número 2. Assim, podemos generalizar o argumento do exemplo anterior para investigar a irracionalidade de  $\log_b a$ , conforme a proposição a seguir.

**Proposição 1.** *Sejam  $a$  e  $b$  inteiros positivos com  $b \geq 2$ . Se as decomposições (ou fatorações) em fatores primos de  $a$  ou  $b$  apresentam pelo menos um fator que não é comum, então  $\log_b a$  é um número irracional.*

*Demonstração.* Vamos supor, por contraposição, que existam dois números inteiros positivos  $m$  e  $n$  tais que  $\log_b a = \frac{m}{n}$ . Assim,  $a = b^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow a^n = b^m$ . Da última igualdade concluímos, com o auxílio do Teorema Fundamental da Aritmética, que os números  $a$  e  $b$  possuem exatamente os mesmos fatores primos.  $\square$

Será que vale a recíproca da Proposição 1, ou seja, se  $\log_b a$  for irracional, então as decomposições em fatores primos de  $a$  e de  $b$  têm, necessariamente, pelo menos um fator primo desigual? Como

$$\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = \log 2 + 1,$$

segue do Exemplo 1 que  $\log 20$  é irracional. No entanto, os números  $20 = 2^2 \cdot 5$  e  $10 = 2 \cdot 5$  possuem os mesmos fatores primos. Logo, a recíproca da Proposição 1 é falsa.

Vamos mostrar agora que o número  $\log_b a$ , nas condições da Proposição 1, é transcendente. Antes, no entanto, lembramos a definição de números algébricos e de números transcendentos. Um número complexo é dito *algébrico* quando é raiz de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros. Todo número racional  $r$  é algébrico já que  $r = \frac{m}{n}$ , com  $m$  e  $n \neq 0$  inteiros, é solução da equação  $nx - m = 0$ . Um número complexo que não é algébrico é dito *transcendente*. Existe uma infinidade (não-enumerável<sup>1</sup>) de números reais transcendentos [5]. Por exemplo, os números  $e$  e  $\pi$  são transcendentos. Figueiredo (2002).

Uma poderosa ferramenta que nos permite verificar a transcendência de diversos números reais é o Teorema de Gelfond-Schneider (provado no ano de 1934 por Gelfond e independentemente por Schneider em 1935) enunciado a seguir e cuja prova pode ver-se em [3] ou [4].

**Proposição 2** (Teorema de Gelfond-Schneider). *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  números algébricos. Se  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 1$  e  $\beta$  não for um número real racional, então  $\alpha^\beta$  é transcendente.*

Sejam  $a$  e  $b > 1$  inteiros positivos. Vamos supor que existe um número primo que pertence à fatoração de apenas um dos números  $a$  ou  $b$ . Da Proposição 1 concluímos que  $\log_b a$  é irracional. Pelo fato de ser inteiro, o número  $b$  é algébrico. Suponha que  $\log_b a$  seja também algébrico. Segue da Proposição 2 que  $b^{\log_b a}$  é transcendente, o que não pode ocorrer pois  $b^{\log_b a} = a$  e  $a$  é algébrico. Portanto,  $\log_b a$  é transcendente.

Da transcendência de  $\log_b a$ , decorre a sua não construtibilidade com régua e compasso. Com efeito, somente números algébricos de grau<sup>2</sup> igual a uma potência de 2 são construtíveis com os instrumentos euclidianos, como se pode ver em [2].

O logaritmo natural, isto é, o logaritmo de base  $e$  ( $\log_e a = \ln a$ ) é tão, ou mais, importante que o logaritmo decimal. Aqui, portanto, cabe a seguinte questão:  $\ln 2$ , por exemplo, é racional ou irracional? Para responder essa pergunta devemos lançar mão da irracionalidade<sup>3</sup> do número  $e^r$  quando  $r$  é um número racional não nulo. Uma prova deste fato encontra-se em [3]. Suponha, por

<sup>1</sup>Um conjunto infinito  $A$  é *enumerável* quando existe uma função bijetiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Do contrário, o conjunto é dito *não-enumerável*. Sabe-se que o conjunto dos números algébricos, a exemplo do conjunto dos números racionais é enumerável, como se pode ver em [1].

<sup>2</sup>Seja  $n$  um inteiro positivo. Um número é dito *algébrico de grau  $n$*  quando é raiz de uma equação polinomial de grau  $n$  e não é raiz de nenhuma equação de grau menor do que  $n$ .

<sup>3</sup>O resultado mais geral, cuja prova encontra-se em [3] e conhecido como Teorema de Lindemann, afirma que  $e^\gamma$  é transcendente quando  $\gamma$  é um algébrico diferente de zero.

contraposição, que  $\ln 2 = r$ , onde  $r$  é um número racional não nulo. Daí,  $2 = e^r$ , absurdo pois  $e^r$  é irracional. Portanto,  $\ln 2$  é irracional. O argumento acima pode ser estendido para  $\ln q$ , onde  $q$  é um número racional positivo e diferente de 1. Daí concluímos que  $\ln q$  é irracional quando  $q$  é um racional diferente de 1.

## 2. Um critério para a irracionalidade de $\log_b a$

Voltamos a nossa atenção aos logaritmos de base inteira.

Um número inteiro  $b \neq 0$  é dito *livre de quadrados* ou *sem fator quadrático*, quando é um inteiro que não é divisível por nenhum quadrado perfeito diferente de 1.

Por exemplo, o número 18 não é livre de quadrados pois é divisível por  $3^2$ . O mesmo ocorre com o número  $24 = 2^3 \cdot 3$  que, ao ser divisível por  $2^3$ , também é divisível por  $2^2$ . Por outro lado, o número  $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$  é livre de quadrados.

Segue do Teorema Fundamental da Aritmética que se  $b > 1$  é um inteiro livre de quadrados então  $b = p_1 p_2 \dots p_r$  onde  $p_1, p_2, \dots, p_r$  são primos distintos. Abaixo seguem alguns números livres de quadrados: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41. Vamos agora estabelecer um critério que decide pela racionalidade de  $\log_b a$ , quando  $b > 1$  é um inteiro livre de quadrados. O resultado a seguir generaliza a questão da irracionalidade do logaritmo decimal  $\log a$ , quando  $a$  é um inteiro, tratado em [5].

**Proposição 3.** *Seja  $a$  um inteiro positivo e  $b > 1$  um inteiro livre de quadrados. O número  $\log_b a$  é racional se, e somente se,  $a = b^\alpha$ , onde  $\alpha$  é um inteiro não negativo.*

*Demonstração.* Primeiramente devemos observar que  $\log a \geq 0$  quando  $a > 0$  é inteiro. Além disso,  $\log 1 = 0$ . Seja  $b = p_1 p_2 \dots p_r$ , onde  $p_1, p_2, \dots, p_r$  são primos distintos. Suponha agora que existem inteiros positivos  $m$  e  $n$  tais que  $\log_b a = \frac{m}{n}$ . Segue da Proposição 2 que  $a$  e  $b$  possuem os mesmos fatores primos em suas respectivas fatorações. Portanto, os fatores primos de  $a$  são, precisamente,  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Assim,

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}. \quad (1)$$

Desta forma,  $a = b^{\frac{m}{n}}$  e  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = (p_1 p_2 \dots p_r)^{\frac{m}{n}}$ . Elevando a  $n$  ambos os membros da última igualdade temos:  $p_1^{n\alpha_1} p_2^{n\alpha_2} \dots p_r^{n\alpha_r} = p_1^m p_2^m \dots p_r^m$ . Segue do Teorema Fundamental da Aritmética que  $m = n\alpha_1 = n\alpha_2 = \dots = n\alpha_r$ . Como  $n \neq 0$  segue que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r$ . Logo, da Equação (1) concluímos que  $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_1} = (p_1 p_2 \dots p_r)^{\alpha_1} = b^{\alpha_1}$ . A recíproca é imediata. Com efeito, se  $a = b^\alpha$  onde  $\alpha \geq 0$  é um inteiro, então  $\log_b a = \log_b b^\alpha = \alpha$ .  $\square$

Em particular, como o número  $10 = 2 \cdot 5$  é livre de quadrados, segue da proposição anterior que, para  $a$  inteiro positivo,  $\log a$  é racional se, e somente se,  $a = 10^n$  onde  $n$  é um inteiro não negativo. Segue que  $\log a$  é inteiro ou irracional.

Utilizando este fato podemos rapidamente determinar se um número  $\log a$  é irracional, dado o inteiro  $a > 0$ . Por exemplo,  $\log 120$  é irracional pois está estritamente entre dois inteiros consecutivos. Com efeito,  $2 = \log 10^2 = \log 100 < \log 120 < \log 1000 = \log 10^3 = 3$ .

Será que a Proposição 3 continua válida para um inteiro  $b > 1$  qualquer no lugar de um inteiro livre de quadrados? A resposta é não. Por exemplo,  $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ .

### 3. Sobre a irracionalidade de logaritmos de números reais

A questão que se pretende agora responder diz respeito à racionalidade do número  $\log_b a$ , com  $b > 1$  inteiro e  $a > 0$  real não inteiro. Por exemplo,  $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$  é racional e  $\log_2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log_2 3$  é irracional pela Proposição 1. Assim, se  $a$  não é inteiro  $\log_b a$  tanto pode ser racional como irracional.

A resposta fornecida acima não esgota o assunto proposto nesta seção. De fato, os números  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$  são ambos irracionais algébricos. Assim, pode-se formular a seguinte pergunta: o que se pode dizer sobre a racionalidade de logaritmos (de base inteira) de números irracionais transcendentais ou de números racionais (não-inteiros)? Começamos respondendo a questão da irracionalidade do número  $\log_b t$ , onde  $b > 1$  é um inteiro e  $t > 0$  é transcendente. Para isso utilizamos o corolário a seguir.

**Corolário 1.** *Seja  $t$  um número transcendente e  $n$  um inteiro positivo. Então a potência  $t^n$  é um número transcendente.*

*Demonstração.* Vamos supor que  $t^n$  é um número algébrico. Então ele é raiz da equação polinomial  $c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$ , com  $m > 0$  inteiro e os coeficientes  $c_m \neq 0$ ,  $c_{m-1}, \dots, c_1$  e  $c_0$  números inteiros. Logo,

$$0 = c_m (t^n)^m + c_{m-1} (t^n)^{m-1} + \dots + c_1 t^n + c_0 = c_m t^{nm} + c_{m-1} t^{n(m-1)} + \dots + c_1 t^n + c_0.$$

Portanto,  $t$  é solução da equação polinomial  $c_m x^{nm} + c_{m-1} x^{n(m-1)} + \dots + c_1 x^n + c_0 = 0$  com coeficientes inteiros. Ou seja,  $t$  é um número algébrico.  $\square$

Agora já estamos em condições de provar que o número  $\log_b t$  é irracional, onde  $b > 1$  é um número inteiro e  $t > 0$  é transcendente. Provemos por redução ao absurdo. Suponhamos que existam inteiros positivos  $m$  e  $n$  tais que  $\log_b t = \frac{m}{n}$ . Segue que  $b^{\frac{m}{n}} = t$  e, portanto,

$$b^m = t^n. \tag{2}$$

Como  $t$  é transcendente, segue do Corolário 1 que  $t^n$  é transcendente. Por outro lado, o número  $b^m$  é algébrico, pois o conjunto dos números algébricos é fechado em relação a operação de multiplicação como se pode ver em [1]. Logo, a igualdade (2) não pode ocorrer. Assim o número  $\log_b t$  é irracional.

Nesta seção, tratamos de logaritmos (de base inteira) de números algébricos irracionais e de números transcendentais. Já nas seções anteriores, tratamos de logaritmos de números inteiros. Agora nos resta investigar a natureza dos logaritmos (de base inteira) de números racionais não-inteiros. Para isso, sejam  $m$  e  $n > 1$  inteiros positivos (primos entre si) e  $b > 1$  um número inteiro. Vamos supor que o número  $\log_b \frac{m}{n}$  seja racional. Portanto, existem inteiros  $p$  e  $q > 0$ , tais que

$$\log_b \frac{m}{n} = \frac{p}{q}. \tag{3}$$

Vamos dividir a nossa argumentação em dois casos. Suponha, primeiramente que  $p > 0$ . Decorre da igualdade (3) que:  $b^{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n} \Rightarrow nb^{\frac{p}{q}} = m \Rightarrow n^q b^p = m^q$ . Segue do Teorema Fundamental da Aritmética que todo fator primo de  $n$  é também fator primo de  $m$ . No entanto, isso não pode

ocorrer pois os números  $m$  e  $n > 1$  são, por hipótese, primos entre si. Portanto, o número  $\log_b \frac{m}{n}$  é irracional.

Suponha agora que  $p < 0$ . Da igualdade (3) temos que:

$$b^{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n} \Rightarrow nb^{\frac{p}{q}} = m \Rightarrow n^q b^p = m^q \Rightarrow n^q = m^q b^{-p} \Rightarrow n^q = m^q b^{p_1}, \text{ onde } p_1 = -p > 0.$$

Do Teorema Fundamental da Aritmética e da última igualdade acima, concluímos que todo fator primo de  $m$  é também fator primo de  $n$ . No entanto,  $m$  e  $n$  são primos entre si. Assim, concluímos que  $m = 1$  e que  $n^q = b^{p_1}$ . Em palavras,  $n^q$  é uma  $p_1$ -ésima potência de  $b$ . Portanto, esta é a única situação em que  $\log_b \frac{m}{n}$  é um número racional.

Por exemplo, o número  $\log_4 \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$  é racional. Note que  $8^2 = 4^{-(-3)}$ . Isso completa o nosso estudo quanto a irracionalidade de um logaritmo de base inteira de um número racional não inteiro.

#### 4. Resultados adicionais

Vamos apresentar, nesta seção, alguns problemas de logaritmos decimais cuja solução recai no Teorema Fundamental da Aritmética ou no Teorema de Gelfond-Schneider. Começemos com a seguinte indagação: o número  $\frac{\log 3}{\log 2}$  é racional ou irracional? O resultado a seguir responde a esta questão.

**Proposição 4.** *Sejam  $a$  e  $b \neq 1$  inteiros positivos tais que as suas decomposições (ou fatorações) em fatores primos apresentam pelo menos um primo que não é comum. Então o número  $\frac{\log a}{\log b}$  é irracional.*

*Demonstração.* Basta notar que  $\frac{\log a}{\log b} = \log_b a$  e utilizar a Proposição 1 para obter a tese.  $\square$

A proposição a seguir nos diz que o número  $\frac{\log 3}{\log 2}$ , além de irracional, é transcendente.

**Proposição 5.** *Sejam  $a, b > 0$  números reais algébricos com  $b \neq 1$ . O número real  $\frac{\log a}{\log b}$  é racional ou transcendente.*

*Demonstração.* Suponha que  $\frac{\log a}{\log b} = \beta$ , onde  $\beta > 0$  é um irracional algébrico. Com isso,

$$a = b^\beta. \tag{4}$$

Como  $b \neq 1$  é positivo e  $\beta$  é, por hipótese, um irracional algébrico, segue da Proposição 3 que  $b^\beta$  é transcendente. Por outro lado,  $a$  é algébrico, o que origina uma contradição em virtude da igualdade (4). Portanto, o número  $\frac{\log a}{\log b}$  é transcendente.  $\square$

Segue do resultado anterior que o número  $\frac{\log a}{\log b}$ , nas condições da Proposição 4, é transcendente.

Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais positivos. Dizemos que  $\log a$  e  $\log b$  são *linearmente independentes* sobre  $\mathbb{Q}$  quando a equação  $r \log a + s \log b = 0$ , com  $r$  e  $s$  racionais, implica em  $r = s = 0$ . Do contrário, dizemos que são *linearmente dependentes* sobre  $\mathbb{Q}$ .

Vamos denotar por  $\mathcal{A}$  o conjunto dos números reais algébricos.

**Proposição 6.** *Sejam  $a$  e  $b$  números reais algébricos positivos. A independência linear de  $\log a$  e  $\log b$  sobre  $\mathbb{Q}$  implica na independência linear sobre  $\mathcal{A}$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $a, b, \alpha$  e  $\beta$  são números algébricos tais que  $\alpha \log a + \beta \log b = 0$ . Daí segue que  $\frac{\log a}{\log b} = -\frac{\beta}{\alpha}$ . Como  $\alpha$  e  $\beta$  são algébricos, então  $-\frac{\beta}{\alpha}$  também é um número algébrico

[1]. Como não é transcendente, segue da Proposição 5 que  $\frac{\log a}{\log b} = r$ , onde  $r$  é um número racional. Portanto,  $\log a = r \log b \Rightarrow \log a - r \log b = 0$ . Ou seja,  $\log a$  e  $\log b$  são linearmente dependentes sobre  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

Como  $\mathbb{Q}$  é um subconjunto de  $\mathcal{A}$  então a independência linear de  $\log a$  e  $\log b$  sobre  $\mathcal{A}$  implica na independência sobre  $\mathbb{Q}$ . Ou seja, a recíproca da proposição anterior é verdadeira.

*Observação 1.* A Proposição 6 é equivalente ao Teorema de Gelfond-Schneider, provado no ano de 1934. Ela nos diz que se  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais algébricos, com  $\log a$  e  $\log b$  linearmente independente sobre  $\mathbb{Q}$ , então  $\alpha \log a + \beta \log b \neq 0$ . No ano de 1966 o matemático inglês Alan Baker provou que este resultado continua verdadeiro para uma quantidade arbitrária de logaritmos. Essa prova lhe rendeu a Medalha Fields em 1970 ([3]).

## 5. Conclusão

Os exemplos de irracionalidade no Ensino Médio normalmente se restringem somente a poucos números como  $\sqrt{2}$ , o Número de Ouro  $\phi$  ou  $\pi$ , além de números cuja expressão decimal é fornecida. No entanto, a demonstração da irracionalidade do número  $\pi$  requer conhecimentos de Cálculo. Assim apresentamos outros exemplos de números irracionais que surgem para alunos do Ensino Médio (os logaritmos) e cuja prova é acessível já que utiliza somente o Teorema Fundamental da Aritmética.

## Referências

- [1] Figueiredo, Djairo Guedes. *Números Irracionais e Transcendentes*. Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- [2] Herstein, I. N. *Topics in Algebra*. 2. ed. Wiley India Pvt. Limited, 2006.
- [3] Marques, Diego. *Teoria dos números transcendentos*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [4] Niven, Ivan. *Irrational numbers*. Washington D.C. Mathematical Association of America, 1967.
- [5] Niven, Ivan. *Numbers: Rational and Irrational*. Washington D.C. Mathematical Association of America, 1961.

Ronald Pinto  
Colégio Pedro II  
<[ronaldsimoes@gmail.com](mailto:ronaldsimoes@gmail.com)>

Liliana da Costa  
Colégio Pedro II  
<[lmgccosta@gmail.com](mailto:lmgccosta@gmail.com)>

Recebido: 25/06/2018