

Resoluções Visuais de Alguns Problemas de Matemática da Educação Básica

Hilário Alencar¹

Larissa Cândido²

Milena Farias

Resumo

Em seu consagrado livro *Problem-Solving Through Problems*, Loren C. Larson propôs doze estratégias para a resolução de problemas. Inspirados no planejamento recomendado, construímos resoluções de alguns problemas de Matemática, envolvendo álgebra, geometria e trigonometria, que são conhecidos na Educação Básica. Observamos que das estratégias apresentadas, foram utilizadas com maior predominância a segunda, sexta e sétima estratégias, que são, respectivamente, trace uma figura, explore as simetrias e divida em casos. Dessa forma, no decorrer deste artigo, apresentamos o que denominamos de “resolução visual” para uma série de problemas, mediante uma sequência de figuras.

Palavras-chave: Resoluções visuais; Educação básica; Álgebra; Geometria; Trigonometria.

Abstract

In his well-established book *Problem-Solving Through Problems*, Loren C. Larson proposed twelve problem-solving strategies. Inspired by the recommended planning, we construct resolutions of some Mathematical problems, involving algebra, geometry and trigonometry, that are known in Basic Education. We observed that the second, sixth and seventh strategies, which are, respectively, trace a figure, explore the symmetries and divide in cases, were used with greater predominance. Thus, in the course of this article, we present what we call “visual resolution” for a series of problems, through a sequence of figures.

Keywords: Visual resolutions; Basic education; Algebra; Geometry; Trigonometry.

Introdução

O conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas é denominado *heurística*, do grego *heuristiké*. Essencialmente, essa palavra significa a arte de encontrar, descobrir. Esse tema é fértil em publicações de textos, artigos, teses e dissertações;

¹Parcialmente apoiado pelo CNPq.

²Parcialmente apoiada pelo INCTMat/CNPq.

como por exemplo, [2], [6], [9], [10], [11], [12] e [13].

Neste trabalho consideraremos *problema* como descrito por A. H. Schoenfeld, ver [12], isto é, uma proposição não resolvida, que constitui um desafio e oferece algum grau de dificuldade para aquele que se propõe a resolvê-la. De fato, Schoenfeld diferencia problema e exercício. Um *exercício* é uma proposição não resolvida que pode ser solucionada usando procedimentos de rotina, sem que haja a necessidade de raciocínios mais elaborados. Vale observar ainda que uma proposição pode ser um problema para um indivíduo e, ao mesmo tempo, ser um mero exercício para outro. Por exemplo, encontrar o triângulo de área máxima dentre todos os triângulos inscritos em um círculo dado é um problema para aqueles alunos que têm conhecimento apenas de Matemática em termos de Ensino Médio, mas é um exercício de rotina para universitários que conhecem o cálculo e sabem maximizar funções de várias variáveis.

Em Matemática os problemas surgem, ver [9], a partir de:

- Uma questão concreta da realidade envolvendo outras ciências;
- Uma questão proposta após observar exemplos de situações simples que possuem soluções;
- Generalizações de resultados demonstrados em situações diferentes.

Um problema em Matemática deve ter uma clareza no seu enunciado e, além disso, suas hipóteses são completamente essenciais na sua resolução. Ademais, a originalidade e a complexidade cristaliza as técnicas envolvidas na solução caracterizam sua importância na Matemática. A tentativa de solucionar um problema conduz ao desenvolvimento intelectual, além de potencializar habilidades como o raciocínio lógico, tenacidade, disciplina, paciência, visão geométrica, entre outras.

A resolução de um problema em Matemática pressupõe um conhecimento científico e é resultado de uma investigação metódica, onde se observam fortemente as suposições postas na questão, isto é, as *hipóteses* do problema. De fato, um caminho para a descoberta de novos resultados em Matemática requer, em geral, que teorias sejam desenvolvidas na medida em que os conceitos estão sendo introduzidos, uso de resultados já provados, observação de exemplos existentes sobre o problema e determinação de suas propriedades.

Em [6], são listadas doze estratégias para a resolução de problemas. Diferentemente de [9], o autor não lista um roteiro a ser seguido, nem regras gerais sobre como proceder na resolução de problemas matemáticos, mas apresenta as principais estratégias usadas na resolução de problemas. Larson, deixa claro que essa lista não esgota todas as possibilidades de estratégias de um problema, isto é, existirão problemas nos quais as estratégias citadas não poderão ser aplicadas.

No que segue, faremos uma breve descrição de cada uma das doze estratégias.

1. Procure por um padrão.

Virtualmente, todos os resolvidores de problemas iniciam sua análise gerando um sentimento sobre o problema, convencendo-se sobre a plausibilidade do resultado. Isso é feito da melhor maneira examinando-se os casos particulares mais imediatos. Quando essa exploração é empreendida de um modo sistemático, os padrões podem emergir e irão inspirar ideias sobre como proceder na resolução do problema.

2. Trace uma figura.

Sempre que possível é útil descrever um problema de forma pictórica, o que pode ser uma figura, um diagrama ou um grafo, por exemplo. A representação por diagramas geralmente torna mais fácil a assimilação de dados relevantes e a percepção de relações e dependências.

3. Formule um problema equivalente.

Nem sempre um problema pode ser resolvido diretamente, seja porque os cálculos tornam-se muito complicados ou porque o problema simplesmente não possui casos especiais que lancem qualquer visão sobre uma possível resolução. Nesse caso, é recomendável tentar reformular o problema para que tenha uma forma mais simples, mas ainda equivalente ao problema original e, para isso, apela-se para a imaginação e criatividade de cada um. Algumas dessas técnicas envolvem manipulações algébricas ou trigonométricas, mudança de variáveis e reinterpretação do problema em outros contextos (álgebra, geometria, combinatória etc).

4. Modifique o problema.

No decorrer do trabalho para a resolução do problema A, podemos ser levados a considerar o problema B. De um modo característico, essa mudança de problemas ocorre pelo uso das frases “É suficiente mostrar que ...”, ou “Podemos assumir que ...”, ou ainda “Sem perda de generalidade ...”.

5. Escolha uma notação efetiva.

Um dos primeiros passos ao se trabalhar em um problema de Matemática é traduzir esse problema. Inicialmente, todos os conceitos-chave devem ser identificados e rotulados. As redundâncias na notação podem ser eliminadas à medida que novas relações são descobertas.

6. Explore as simetrias.

A presença de simetria em um problema normalmente significa a redução de trabalho na resolução do problema. Por exemplo, ao realizarmos o produto $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ vemos que ambas as parcelas são simétricas com relação aos símbolos a , b e c , ou seja, se realizarmos uma permutação qualquer entre os símbolos a , b e c , a expressão permanece inalterada. Assim é de se esperar que, se o termo a^3 aparece no produto, os fatores b^3 , c^3 também apareçam. Se a^2b aparecer, os termos a^2c , ab^2 , ac^2 , b^2c , bc^2 também deverão aparecer com os mesmos coeficientes.

7. Divida em casos.

Frequentemente pode acontecer de um problema ser dividido em um pequeno número de subproblemas. Isso é especialmente verdade quando o problema contém um quantificador universal (‘para todo x ...’). Por exemplo, na prova de uma proposição da forma ‘para todos os inteiros...’, podemos provar separadamente os casos de inteiros pares e ímpares. De modo similar, um teorema sobre triângulos pode ser demonstrado separando os casos em que ele é agudo, retângulo ou obtuso. Às vezes, os subproblemas podem ser organizados hierarquicamente em submetas de tal forma que a solução possa ser realizada em sucessivos estágios.

8. Raciocine de trás para frente.

Raciocinar de trás para frente significa assumir a conclusão e então deduzir fatos dessa conclusão até aparecer algo que possa ser facilmente demonstrado. Depois de chegar às hipóteses ou a algo conhecido, revertemos os passos do argumento e seguimos na ordem original (começando das hipóteses e terminando na afirmação do problema).

9. Argumente por contradição.

Argumentar por contradição significa assumir que a conclusão é falsa e então derivar raciocínios até se deparar com uma afirmação que contradiz a hipótese (forma contrapositiva), ou algo que sabemos ser verdadeiro (*reductio ad absurdum* ou redução ao absurdo). Dessa forma, por exemplo, para demonstrar que raiz quadrada de 2 é irracional, podemos assumir que ela é

racional e derivar daí um absurdo. Esse método é frequentemente apropriado quando a conclusão é facilmente negável, quando a hipótese fornece poucas informações para manipulação ou quando existe uma escassez de ideias sobre como proceder na solução do problema.

10. Procure por paridade.

Muitos problemas podem ser resolvidos observando a invariância da paridade e imparidade dos números inteiros que aparecem nas informações do problema.

11. Considere os casos extremos.

Nos estágios iniciais da exploração do problema, frequentemente é útil considerar as consequências da variação dos parâmetros entre casos extremos. Isso ocorre frequentemente com o uso das frases “Na pior (melhor) das hipóteses ...” e “No pior (melhor) dos casos ...”.

12. Generalize.

Isto pode parecer paradoxal, mas é frequente o caso em que um problema pode ser simplificado e tornado mais tratável e inteligível depois de generalizado. Esse fato é bem apreciado por matemáticos. Com efeito, generalizações são características básicas da Matemática. Uma abordagem mais geral fornece uma perspectiva mais clara, elimina informações não essenciais e providencia um arsenal inteiro de novas técnicas.

O uso de estratégias para resoluções de problemas de Matemática é foco de muitas pesquisas, como por exemplo, [1], [3], [4], [5], [7], [8], [9], [14] e [15]. Neste artigo construímos, inspirados nessas pesquisas, resoluções de alguns problemas de Matemática, os quais são apresentados na Educação Básica, envolvendo álgebra, geometria e trigonometria. Para resolver os problemas propostos, utilizamos predominantemente a segunda estratégia listada por Larson, isto é, “trace uma figura”, bem como a sexta estratégia “explore as simetrias” e a sétima estratégia “divida em casos”. De fato, a resolução visual de cada problema é dada por uma sequência de figuras.

Problemas de matemática e suas resoluções visuais

Nesta seção apresentamos resoluções de alguns problemas de Matemática, que geralmente são contemplados na Educação Básica.

A primeira resolução visual que apresentamos refere-se ao Teorema de Pitágoras. Nesse caso, consideramos um triângulo retângulo de lados a , b e c (Figura 1). Assim, a Figura 1 ilustra a sequência de passos necessários para obter a resolução do problema proposto, isto é,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

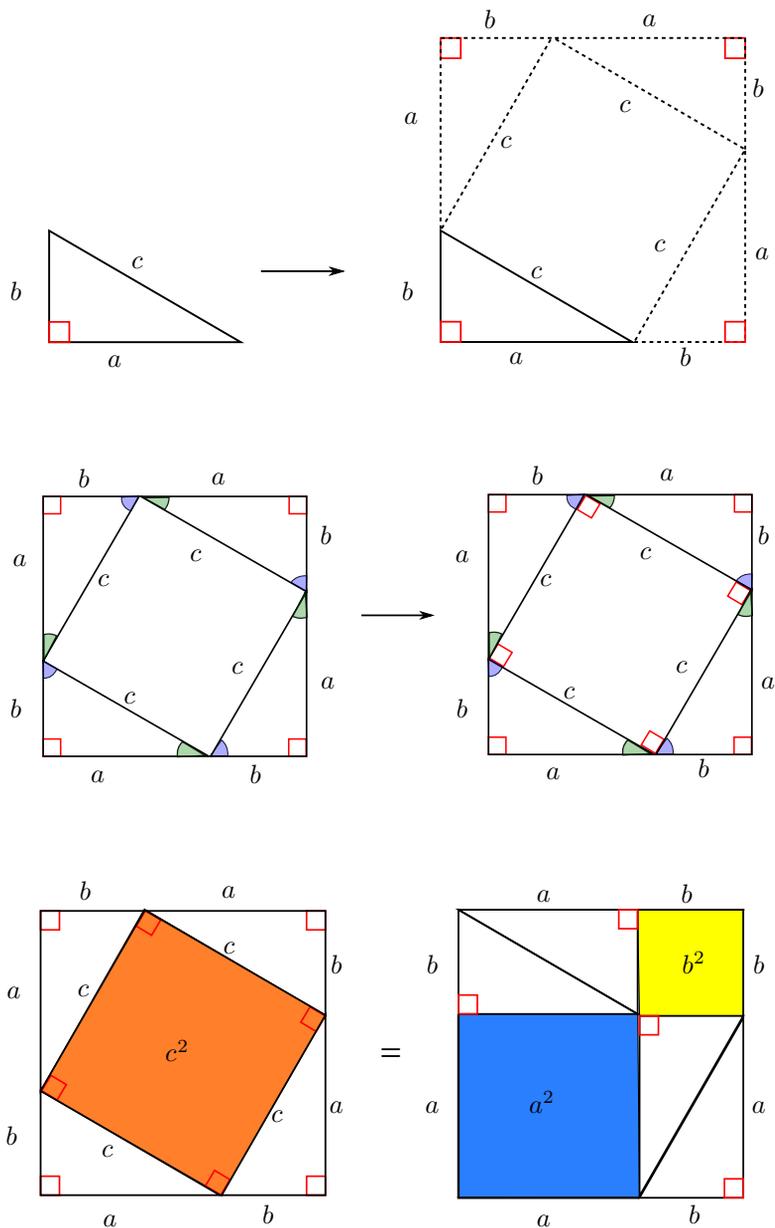


Figura 1: Resolução visual para o Teorema de Pitágoras
Fonte: Autoria própria

Considerando n um número natural, a Figura 2 ilustra como é possível mostrar que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

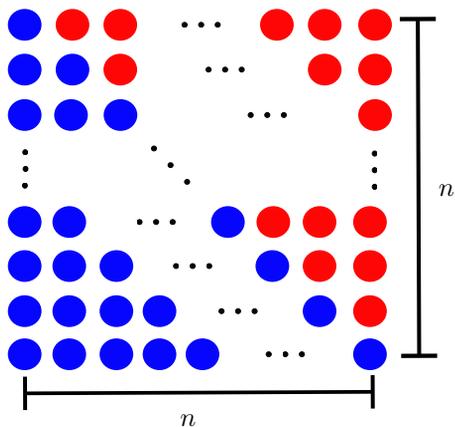
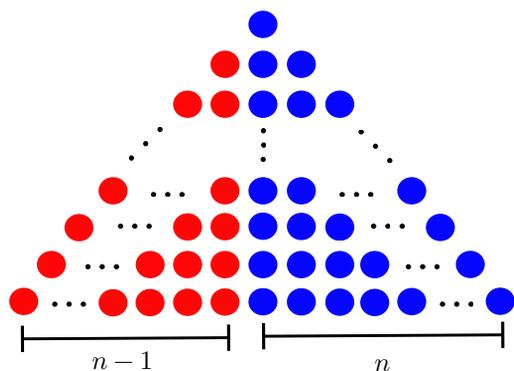
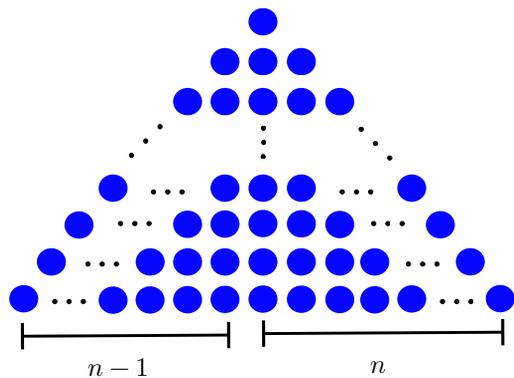
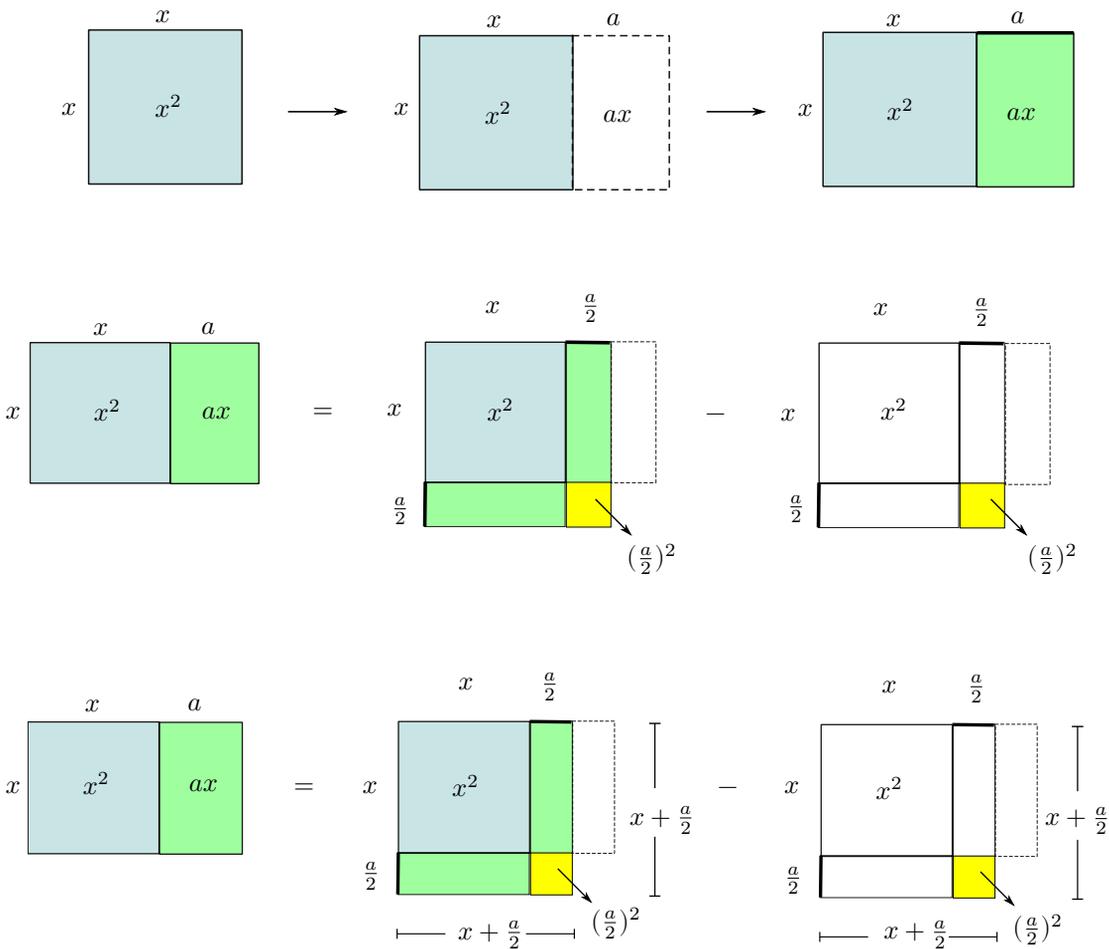


Figura 2: Resolução visual para a soma dos n primeiros números ímpares
 Fonte: Autoria própria

O terceiro problema proposto refere-se ao completamento de quadrados, ou seja,

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

onde $x > 0$ e $a > 0$. Mostramos (Figura 3) como tal algebrismo torna-se viável ao utilizar somente figuras.



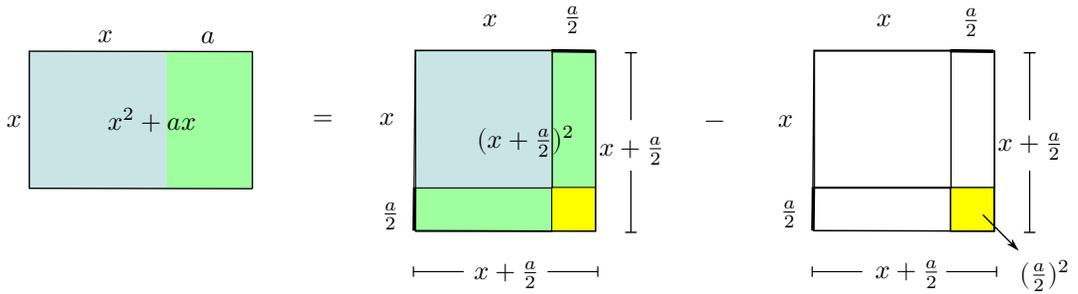
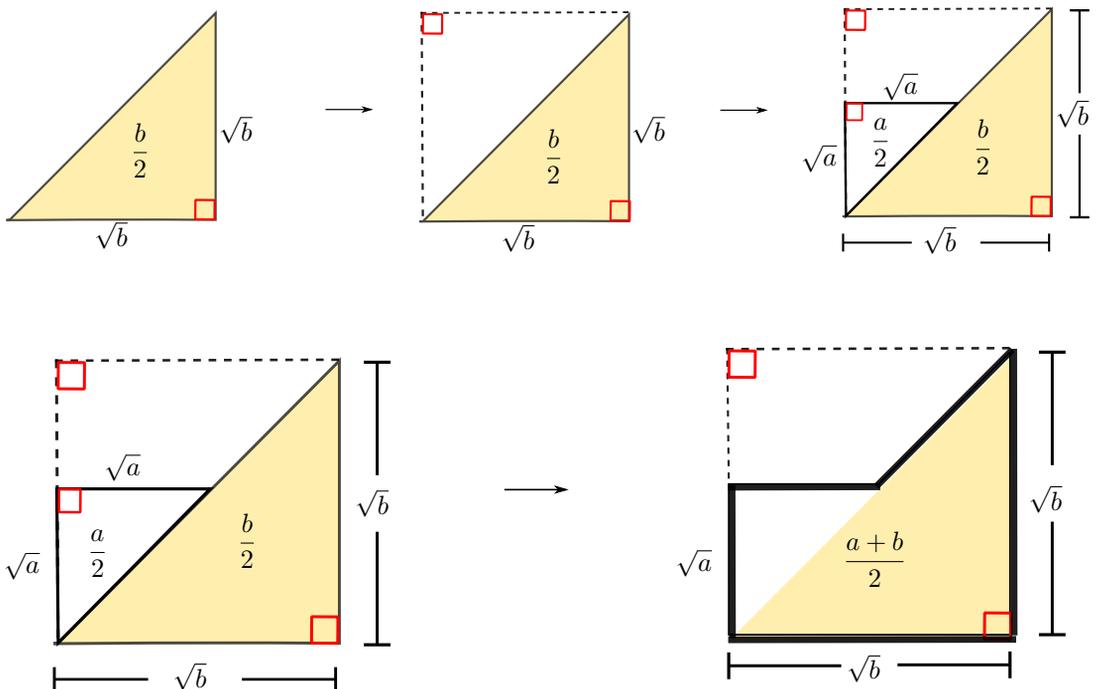


Figura 3: Resolução visual para o completamento de quadrados
 Fonte: Autoria própria

A próxima resolução visual que apresentamos concerne a desigualdade entre média aritmética e geométrica, isto é,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

onde $a > 0$, $b > 0$ e $a < b$. Ilustramos a resolução desta desigualdade com uma sequência de figuras (Figura 4).



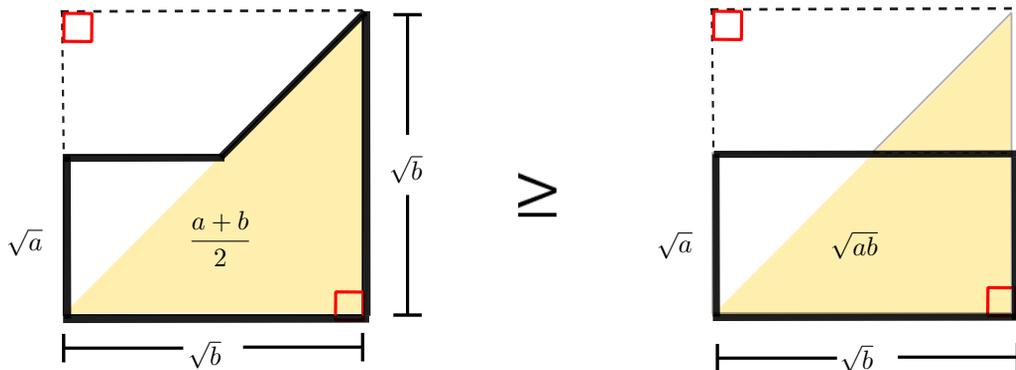
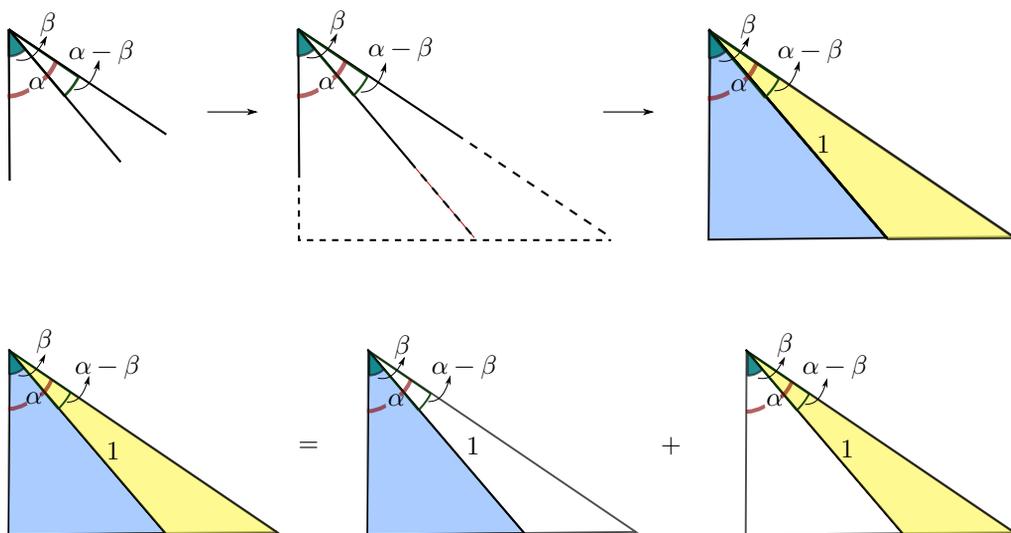


Figura 4: Resolução visual para a desigualdade entre média aritmética e geométrica
Fonte: Autoria própria

Dados dois ângulos α e β tais que $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, apresentamos na Figura 5 a resolução visual para o seno da diferença de dois ângulos, isto é,

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \text{sen } \beta \cos \alpha.$$



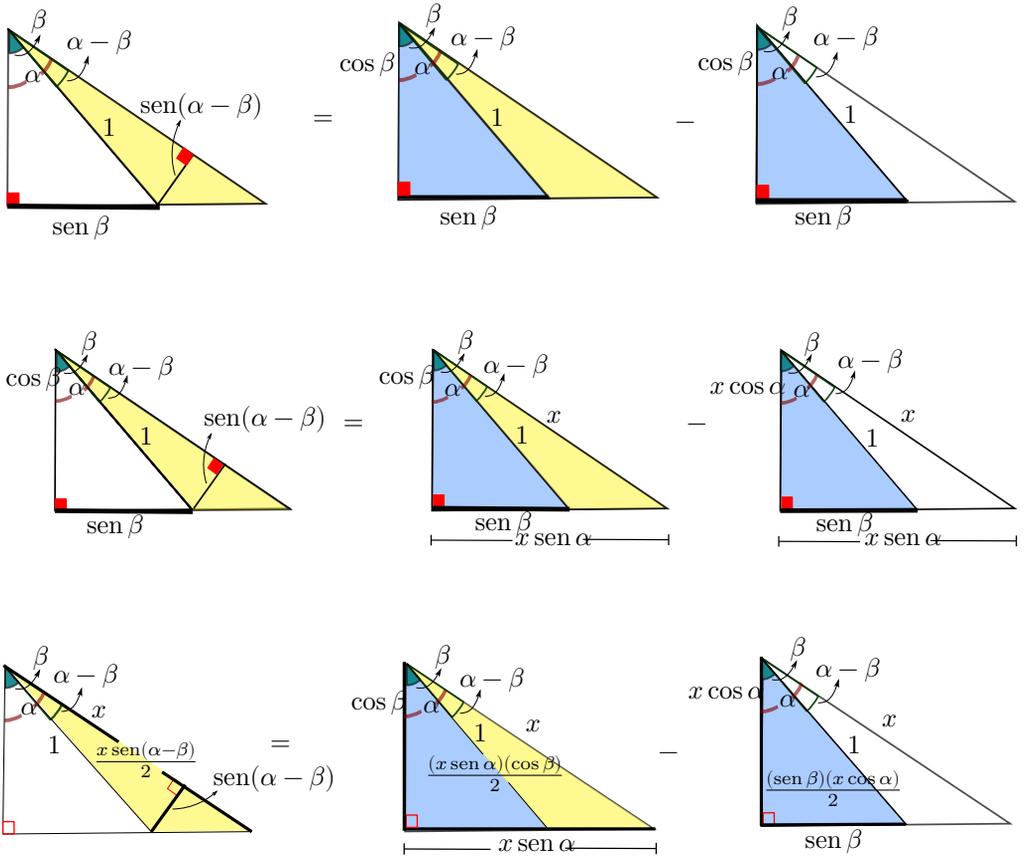
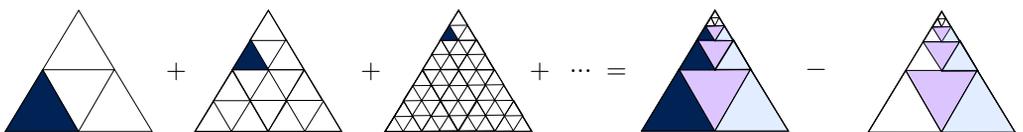


Figura 5: Resolução visual para o seno da diferença de dois ângulos
 Fonte: Autoria própria

Uma interessante série geométrica é dada por

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}.$$

Usando figuras triangulares, exibimos uma resolução visual para esse problema, ver Figura 6.



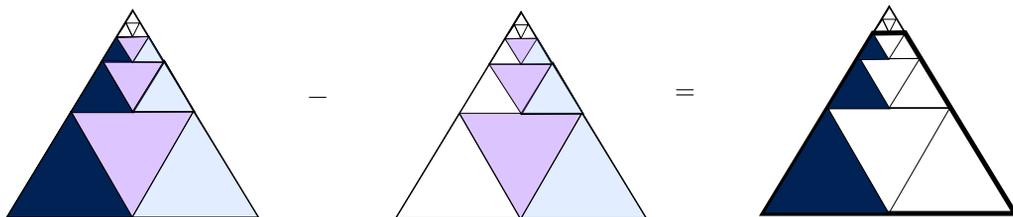
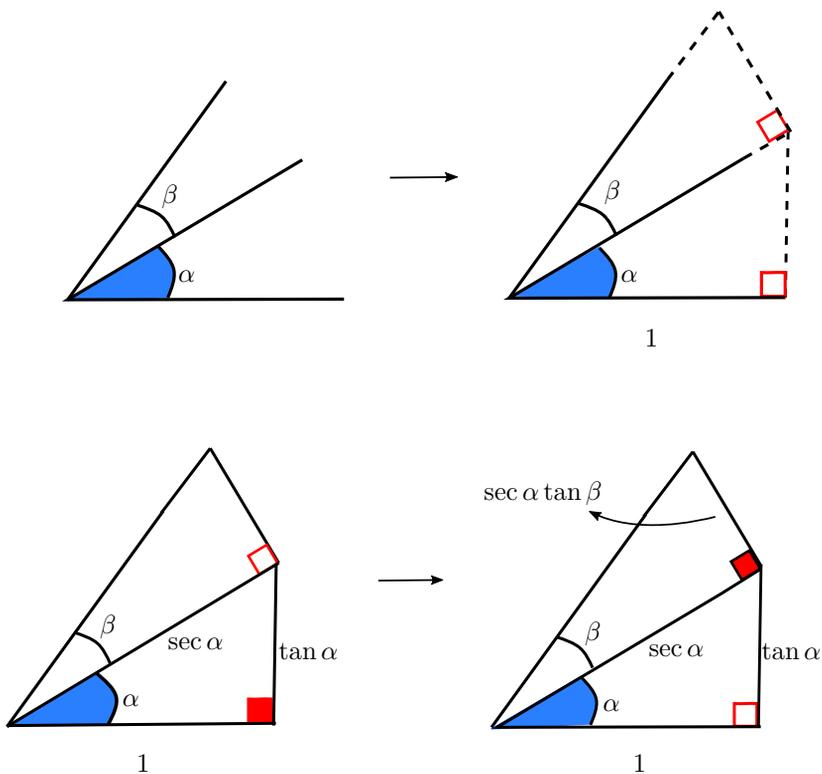


Figura 6: Resolução visual para a série geométrica
 Fonte: Autoria própria

Sejam α e β dois ângulos tais que $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. Apresentamos na Figura 7 a resolução visual para a tangente da soma de dois ângulos, isto é,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$



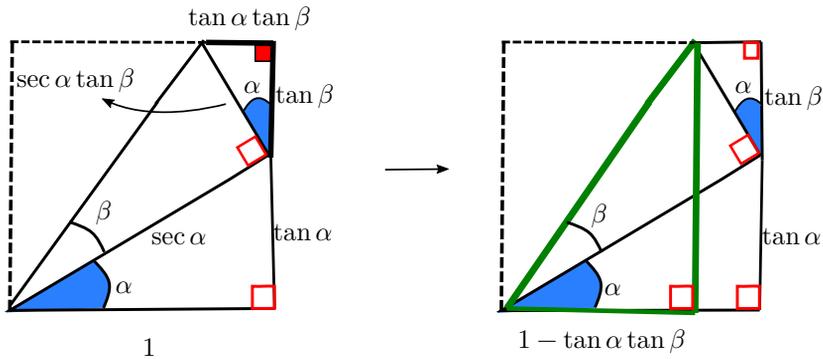
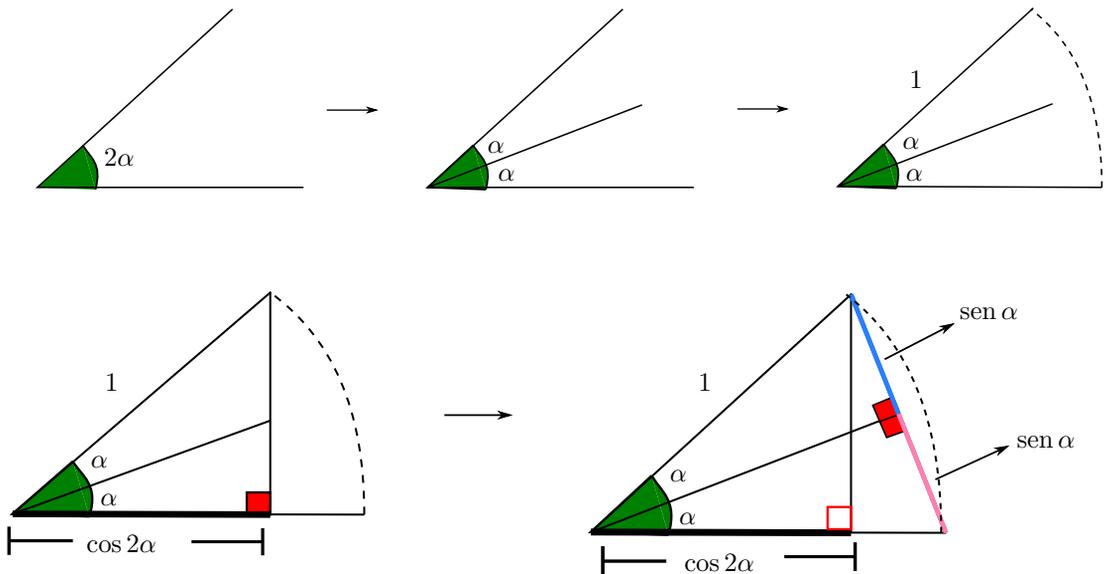


Figura 7: Resolução visual para a tangente da soma de dois ângulos
 Fonte: Autoria própria

Considerando um ângulo α tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, mostramos uma resolução visual, ver Figura 8, para o cosseno do arco duplo, isto é,

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$



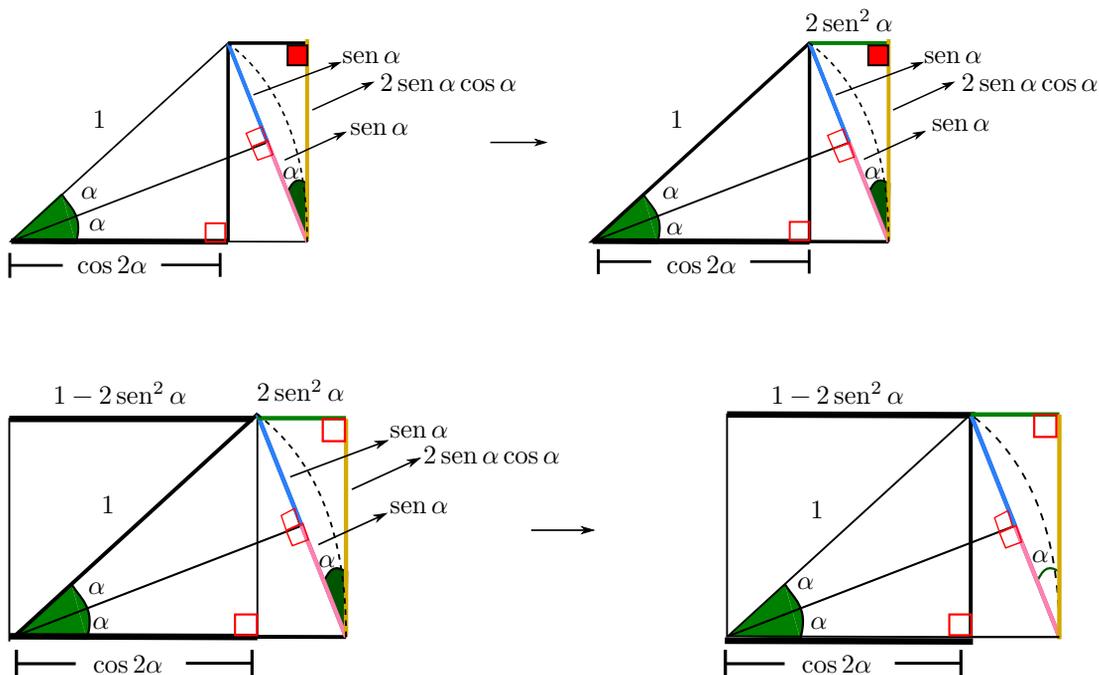
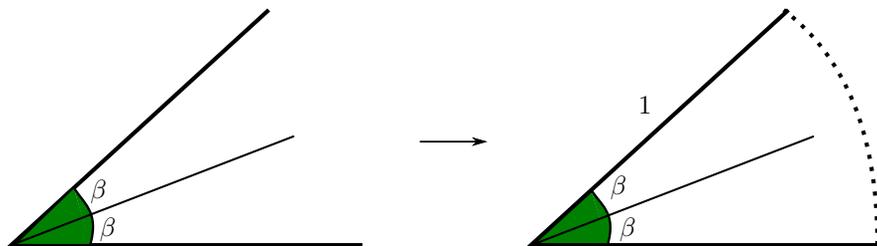


Figura 8: Resolução visual para o cosseno do arco duplo
 Fonte: Autoria própria

Dado um ângulo β tal que $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, expomos na Figura 9 uma resolução visual para o seno do arco duplo, isto é,

$$\text{sen } 2\beta = 2 \text{ sen } \beta \cos \beta.$$



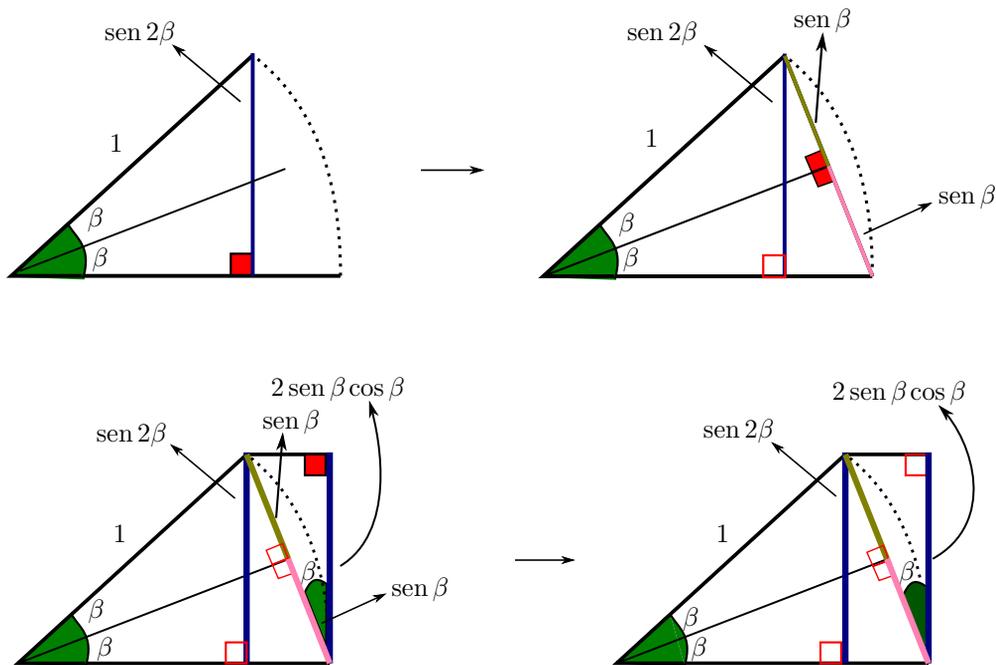


Figura 9: Resolução visual para o seno do arco duplo

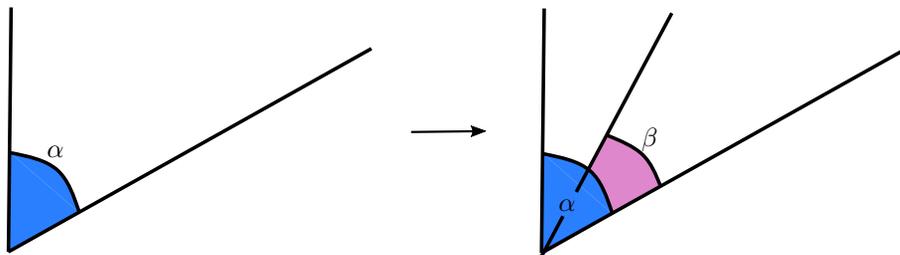
Fonte: Autoria própria

O décimo problema proposto refere-se à tangente da diferença entre dois ângulos, ou seja,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta},$$

onde $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.

Apresentamos a resolução visual deste problema mediante a Figura 10.



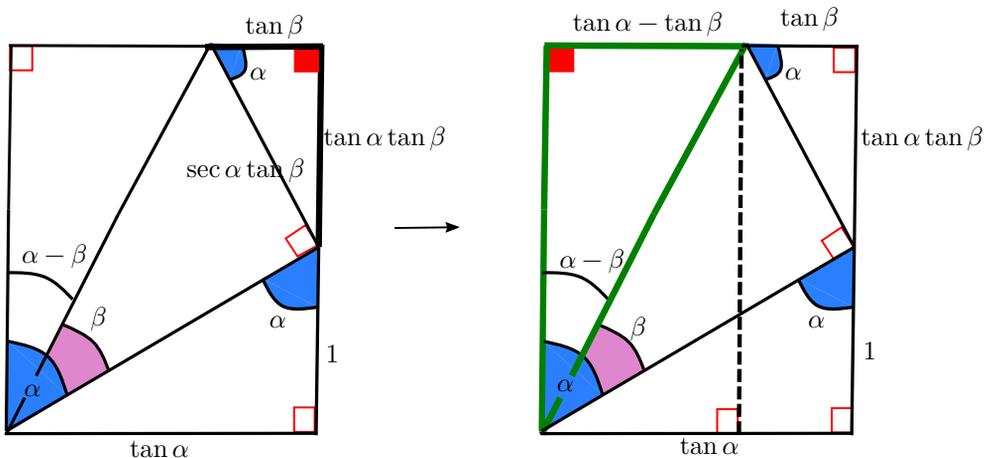
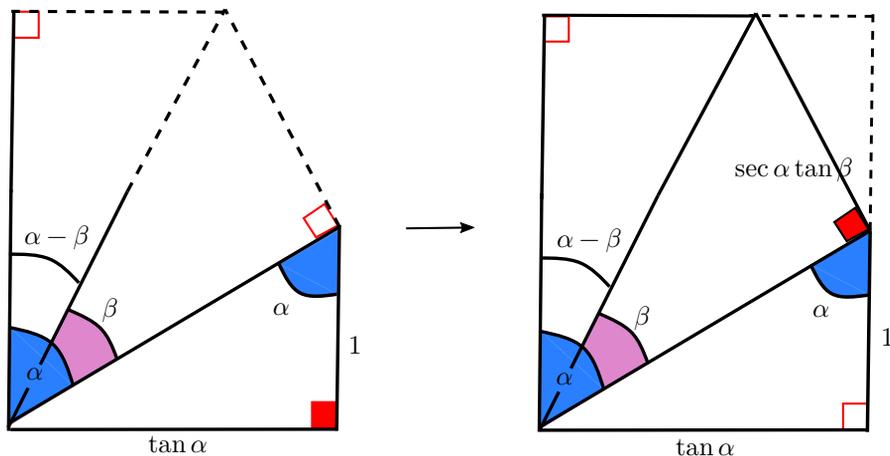
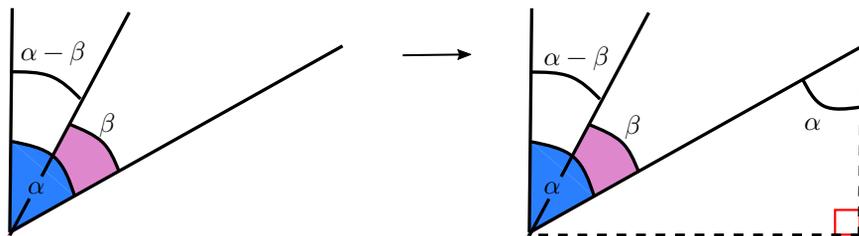
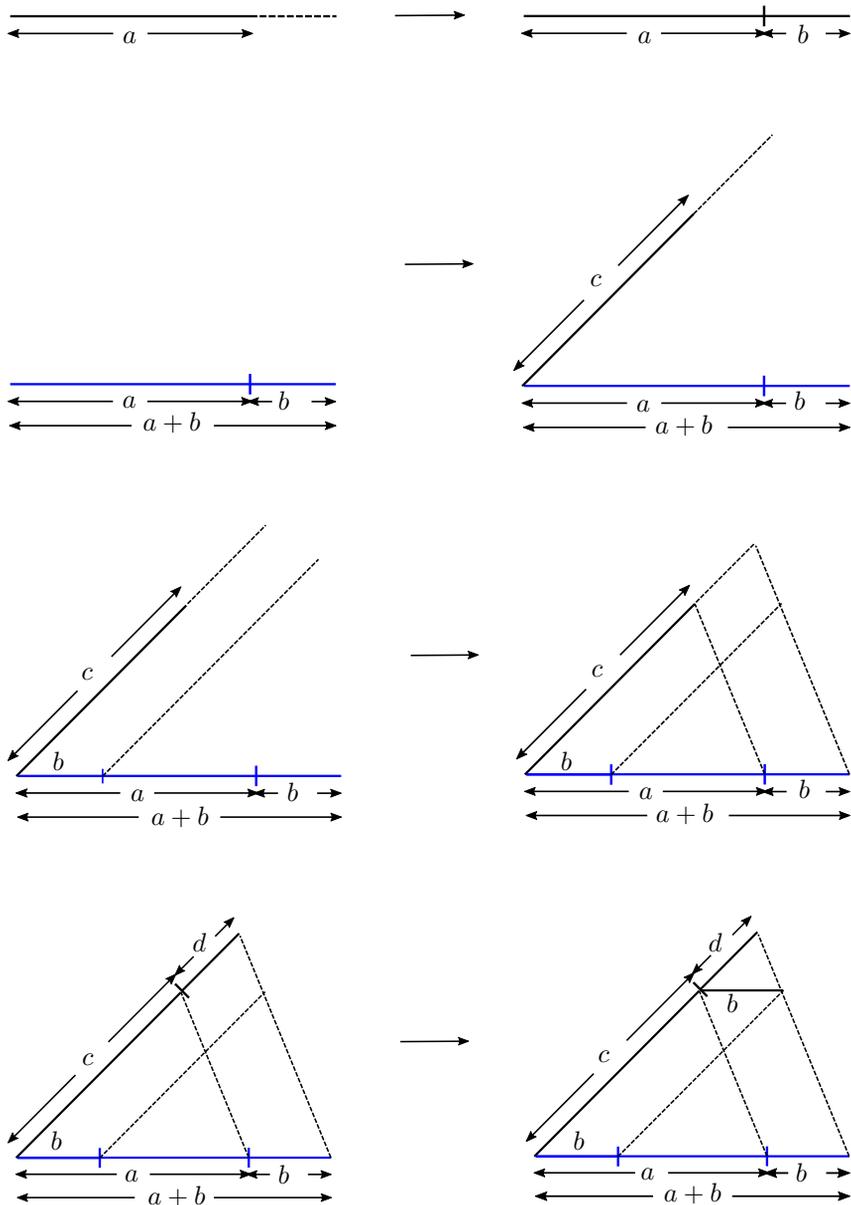


Figura 10: Resolução visual para a tangente da diferença entre dois ângulos
 Fonte: Autoria própria

A partir de um segmento que possui medida a , ilustramos na Figura 11 uma resolução visual de uma propriedade das proporções, ou seja,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d},$$

onde $b > 0, c > 0, d > 0$ e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1$.



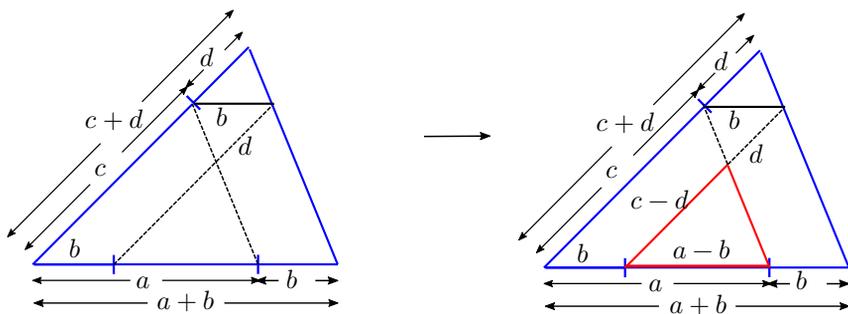
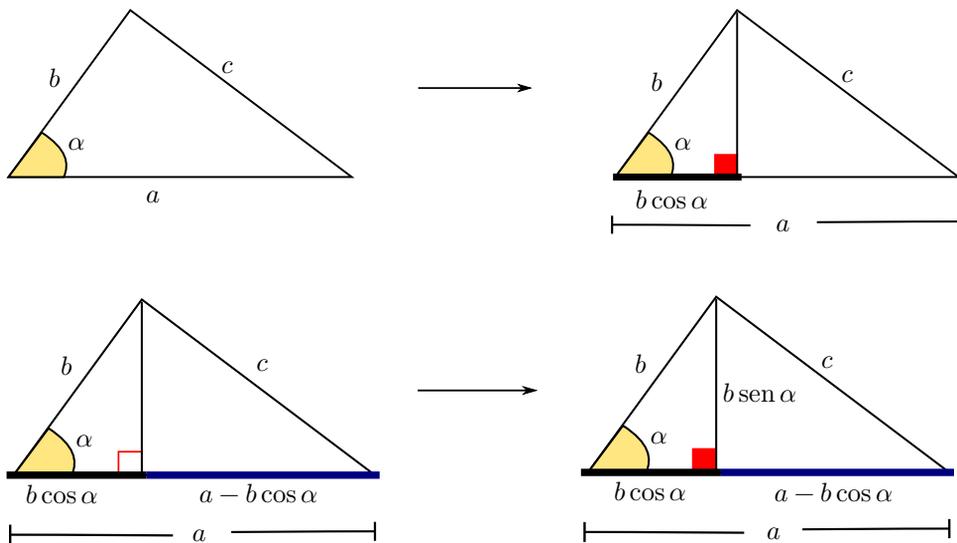


Figura 11: Resolução visual para uma propriedade das proporções
 Fonte: Autoria própria

A última resolução visual refere-se à lei dos cossenos, isto é,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

onde a , b e c são positivos. Nesse caso, consideramos um triângulo de lados a , b e c , que possui um ângulo α tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Assim, na Figura 12 exibimos uma sequência de passos necessários para a resolução desse problema.



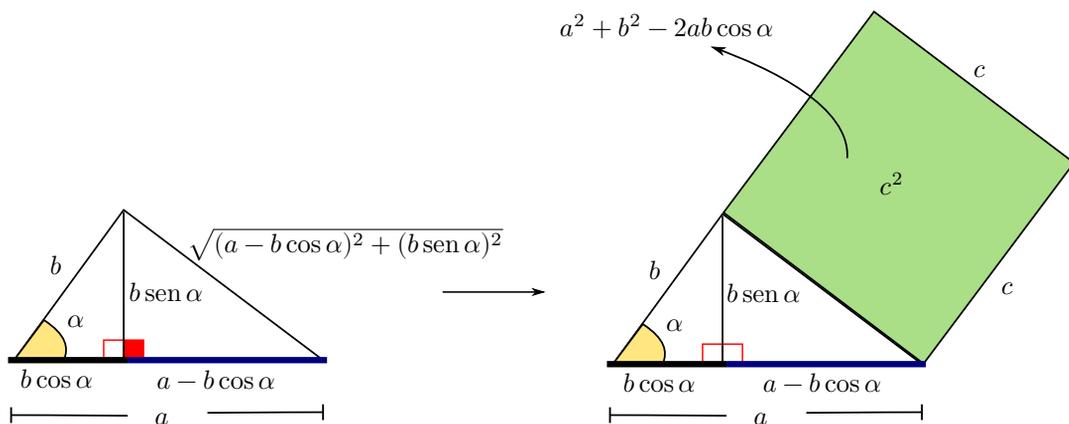


Figura 12: Resolução visual para a lei dos cossenos

Fonte: Autoria própria

Conclusão

O uso das estratégias listadas por Larson, ver [6], notadamente “trace uma figura”, “explore as simetrias” e “divida em casos”, mostra fortemente a importância da visualização de cada problema, e, conseqüente, obtém-se uma maior clareza na busca de sua resolução. De fato, a atitude de visualizar um problema provoca um olhar desafiador de imaginação geométrica, o qual direciona a criatividade para outra forma importante e cristalina de encontrar resoluções de problemas. Destacamos que os problemas apresentados e resolvidos neste artigo são alguns exemplos de problemas de Matemática da Educação Básica. Provavelmente, o professor em sua prática diária, pode tomar esses exemplos como ponto inicial e ampliar o leque de atividades realizadas em sala de aula, criando novas possibilidades de investigação.

Agradecimentos

Os autores são gratos a Carmen Vieira Mathias e Letícia Rangel pelos comentários e sugestões.

Referências

- [1] Alsina, C; Nelsen, R. B. *Math Made Visual*. MAA, p. 4, 2006.
- [2] Descartes, R. *Oeuvres de Descartes*. Ch. Adam & P. Tannery, Paris: Vrin/CNRS, 1964.
- [3] Gallant, C. D. *Completing the square*. Mathematics Magazine, v. 56, n. 2 ,p. 110, 1983.
- [4] Kobayashi, Y. *Proof Without Words: Componendo et Dividendo, a Theorem on Proportions*. The College Mathematics Journal, v. 45, n. 2, p. 115, 2014.
- [5] Kung, S. H. *Area and difference formulas*. Mathematics Magazine, v. 62, n. 5, p. 317, 1989.
- [6] Larson, L. C. *Problem-Solving Through Problems*. Springer, New York, 1983.

- [7] Mabry, R. *Proof Without Words: $\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots = \frac{1}{3}$* . Mathematics Magazine, v. 72, n. 1, p. 63, 1999.
- [8] Nelsen, R. B. *One figure, six identities*. The College Math. Journal, v. 31, n. 2, p. 145-146, 2000.
- [9] Polya, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Interciência, Rio de Janeiro, 1995.
- [10] Polya, G. *Mathematics and Plausible Reasoning: Patterns of Plausible Inference*. Princeton University Press, v. 2, Princeton, 1968.
- [11] Polya, G. *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press, v. 1, Princeton, 1990.
- [12] Schoenfeld, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, New York, 1985.
- [13] Schoenfeld, A. H. *Pólya, Problem Solving, and Education*. Mathematics Magazine, v. 60, p. 283-291, 1987.
- [14] Sipka, T. A. *The law of cosines*. Mathematics Magazine, v. 61, n. 4, p. 259, 1988.
- [15] Unal, H. *Double sum for sine and cosine*. The College Math. Journal, v. 41, n. 5, p. 392, 2010.

Hilário Alencar
Universidade Federal de Alagoas
<hilario@mat.ufal.br>

Larissa Cândido
Universidade Federal de Alagoas
<larikarollynne95@gmail.com>

Milena Farias
Escola Estadual Dra. Eunice de Lemos Campos
<milagleice7@gmail.com>

Recebido: 19/02/2019

Cadeia de Markov aplicada à tendência para a formação acadêmica ou técnica, e comparação com a oferta de mercado

George Mamede

Vânia Santos

Resumo

De acordo com os estudos realizados por alguns estudiosos e economistas, há uma preocupação em atender às expectativas de mercado, com relação às demandas de novos profissionais que fazem suas escolhas, baseados em diversas motivações. Este trabalho está fundamentado em um Processo Estocástico – a Cadeia de Markov – onde os dados utilizados foram coletados através de um procedimento de pesquisa, sobre algumas escolas das redes pública e privada da cidade de Salvador e região metropolitana, na qual questiona-se aos alunos do terceiro ano do ensino médio quais áreas do conhecimento, em curso técnico ou superior, os mesmos tinham interesse em cursar: Exatas, Biológicas ou Humanas. Para atender à dinâmica da Cadeia de Markov, o espaço amostral foi reorganizado em uma mecânica matricial de porcentagens de escolhas e operados por sistema linear de equações, para serem expressos em vetores de probabilidades. Ainda sobre os resultados de fidelização em permanência na área escolhida, foi também realizada uma comparação com dados de oferta de vagas de trabalho nas áreas citadas, entre os anos de 2017 a 2018. Os resultados foram distribuídos em Momento 1 (M_1) e Momento 2 (M_2), sobre os quais foram feitas a discussão e análise.

Palavras-chave: Processos Estocásticos. Cadeia de Markov. Sistemas linear de Equações.

Abstract

According to studies carried out by some scholars and economists, there is a concern to meet market expectations, regarding the demands of new professionals who make their choices, based on different motivations. This work is based on a Stochastic Process – the Markov Chain – where the data used were collected through a research procedure, on some schools of the public and private networks of the city of Salvador and metropolitan region, in which the students are questioned of the third year of high school which areas of knowledge, undergoing technical or superior, they were interested in attending: Exact, Biological or Human. To meet the Markov Chain dynamics, the sample space was reorganized into a matrix mechanics of percentages of choices and operated by linear system of equations, to be expressed in probability vectors. Still on the results of loyalty in permanence in the chosen area, a comparison was also made with data on job vacancies in the mentioned areas, between the years 2017 to 2018. The results were distributed in moment 1 and moment 2, on the which the discussion and analysis were made.

Keywords: Stochastic Processes. Markov Chain. Linear Systems of Equations.

1. Introdução

No decorrer do período acadêmico, na Universidade Católica do Salvador, durante a formação de Licenciatura em Matemática Plena, foi despertado o quão interessante e abrasador são as disciplinas de álgebra Linear 1 e 2. As diversas aplicações em resolução de sistemas de equações lineares, estudos de probabilidade, operadores ortogonais, teorema espectral para operadores simétricos, entre outras. Também a disciplina Matemática para Educação Básica 3 teve grande importância, onde são vistos, inicialmente, análise combinatória, probabilidades, com suas deduções em um determinado espaço amostral, eventos simples, espaços equiprováveis, probabilidade condicional, e por fim, o estudo das matrizes. Dois conteúdos que serviram de base para a pesquisa realizada nesse trabalho. No entanto, por questão de conveniência, foi utilizado o método básico da substituição para a resolução de sistemas de equações, o que deve facilitar a leitura.

O desafio e objetivo principal desse trabalho foi demonstrar que por intermédio de um processo de Cadeia de Markov seria possível avaliar a tendência para formação ou demanda profissional de mercado, através do produto de uma pesquisa fomentada por questionamentos constantes dos estudantes do ensino fundamental II e médio, que ficavam exaltados depois de algumas elucidações de questões, sejam elas em relação ao nível de conhecimento ou até mesmo de revisão para os exames, dentre as quais cito aqui algumas: “Para que serve a matemática, estatística, partes da biologia, engenharias e afins (Exatas)?”; “Pretendo estudar direito, economia, administração (Humanas)?”. “Pretendo ser médico, enfermagem, professor de educação física (Biológicas)?”, entre outros questionamentos.

Essa situação problema já havia sido despertada em tempos pregressos, pois esse trabalho havia sido iniciado na disciplina Iniciação à Vida Universitária, em 2016, cujo tema era: “As ciências exatas e as escolhas dos alunos para o mercado de trabalho”. Ao ser retomada posteriormente, tal questão trouxe uma metodologia em grau superior e depois com o propósito probabilístico de avaliar como os estudantes do terceiro ano do ensino médio estão avançando em suas escolhas sejam elas nas áreas de Exatas, Biológicas e/ou Humanas.

Pelo recurso de Processo Estocástico utilizado, foi possível obter um resultado relevante, visto que o Processo Markoviano estuda a probabilidade de qualquer comportamento futuro do encadeamento, quando se conhece exatamente o seu estado atual. quando o seu estado atual é conhecido exatamente. Nesses casos, a escolha inicial dos alunos não é alterada pelo conhecimento complementar sobre seu procedimento passado.

Os momentos de escolha dos alunos foram apurados em dois períodos determinados como momento M_1 e momento M_2 , para uma facilitação de informação. São determinados nos cálculos dos sistemas de equações através do resultado do momento M_1 , a fidelização das preferências dos alunos nas áreas questionadas. Com essa primeira solução é feita uma operação de Procedimento Markoviano; com isso, subsequentemente se encontram o momento M_2 , onde encontra-se as possíveis tendências de escolhas dos estudantes do ensino médio. Esse processo poderia estender-se por n -ésimos momentos, conseqüentemente, entraríamos na Teoria Ergódica, que é um ramo da Matemática que estuda Sistemas Dinâmicos, sendo esse um dos objetivos para uma futura pesquisa.

2. Fundamentos teóricos

2.1. Processos Aleatórios: Cadeia de Markov

Muitos dos processos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados (pelo menos em primeira aproximação) como se o fenômeno passasse, a partir de um estado inicial, por uma sequência de estados, onde a transição de um determinado estado para o seguinte ocorreria segundo uma certa probabilidade. Pois a probabilidade de transição depende apenas do estado a seguir, sendo assim, o momento anterior é esquecido. Esse Processo Estocástico será chamado processo de Markov, e a sequência de estados seguindo este processo será denominada uma cadeia de Markov. É óbvio que provavelmente em demasia, iremos simplificar ao máximo, uma vez que as probabilidades podem se modificar com o tempo.

Um **Processo Estocástico** é definido como uma coleção de variáveis randômicas (aleatórias) $(X(t))$ indexadas por um parâmetro t pertencente a um conjunto T . Frequentemente T é tomado para ser o conjunto dos inteiros não negativos (porém, outros conjuntos são perfeitamente possíveis) e $X(t)$ representa uma característica mensurável de interesse no tempo t . Considere um sistema que, em cada instante, está em apenas um entre um número finito de estados.

Exemplificando, $X(t)$ pode representar o nível de estoque de um produto no fim da semana t ; o tempo em determinada região pode estar chuvoso ou seco, uma pessoa pode ser fumante ou não fumante; podemos frequentar ou não uma universidade; vivemos em uma área urbana ou rural; pertencemos à classe baixa, média ou alta; compramos um carro de marca C, F ou outra marca qualquer. Ao longo do tempo, o sistema pode mudar de um estado para o outro; supondo que o estado do sistema é observado em períodos fixos de tempo (por exemplo, uma vez por dia, em cada hora, e assim por diante). Em muitas aplicações conhecemos o estado atual do sistema e queremos prever o estado no próximo período de observação ou em algum período futuro. Pode-se prever, muitas vezes, a probabilidade de o sistema estar em determinado estado em um período futuro de observação a partir de sua história pregressa.

Os Processos Estocásticos são ferramentas matemáticas que podem ser úteis para descrever o procedimento de um sistema operando sobre algum período de tempo. Com isso, em termos formais, a variável randômica $X(t)$ representa o estado do sistema no parâmetro (geralmente tempo) t . Portanto pode-se afirmar que $X(t)$ é definido em um espaço denominado Espaço de Estados.

Os processos estocásticos podem ser classificados como:

1. Em relação ao estado

- Estado Discreto (cadeia): $X(t)$ é definido sobre um conjunto enumerável ou finito.
- Estado Contínuo (sequência): $X(t)$ caso contrário.

2. Em relação ao tempo (Parâmetro)

- Tempo Discreto: t é finito ou enumerável.
- Tempo Contínuo: t caso contrário.

Exemplos:

1. Número de usuários em uma fila de banco em um determinado instante: Estado Discreto e Tempo Contínuo.
2. índice pluviométrico diário: Estado Contínuo e Tempo Discreto.
3. Número de dias chuvosos: Estado Discreto e Tempo Discreto.

Nossa intenção, nesta publicação, é trabalharmos nos Estados e Tempos Discretos.

Existem vários “tipos” de Processos Estocásticos, porém, neste trabalho apenas abordaremos um tipo de Processo Estocástico denominado **Processo Markoviano**.

2.2. Processos Markovianos

Uma **cadeia de Markov** ou **processo de Markov** é um **Processo Estocástico** no qual a probabilidade de um sistema estar em determinado estado em um dado período de observação depende apenas do estado no período de observação imediatamente anterior. Um Processo Estocástico é dito ser um Processo Markoviano se:

$$P\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots, X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0\} = P\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k\} \quad (1)$$

para $t_0 \leq t_1 \leq t_k \leq t_{k+1} = 0, 1, \dots$ e toda sequência $k_0, k_1, \dots, k_{t-1}, k_t, k_{t+1}$.

A expressão (1) pode ser “traduzida”por: a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente $X(t_k) = x_k$ é independente do evento passado e depende somente do estado presente. Em termos mais simples: um Processo Estocástico é dito ser um Processo Markoviano se o estado futuro depende apenas do estado presente e não dos estados passados. Esse tipo de Processo Estocástico é também denominado de “memoryless process”(processo sem memória), uma vez que o passado é “esquecido”ou desprezado.

As probabilidades condicionais $P\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k\}$ são denominadas Probabilidades de Transição e representam, portanto, a probabilidade de o estado $X(t_{k+1})$ ser x_{k+1} no instante t_{k+1} dado que o estado $X(t_k)$ é x_k no instante t_k .

O processo aleatório de Markov pode assumir os estados a_1, a_2, \dots, a_r de tal modo que a probabilidade de transição de um estado a_j para um estado a_i seja P_{ij} (um número que só depende de j e i).

A matriz das probabilidades de transição (matriz estocástica) é dada por:

$$T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1r} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{r1} & P_{r2} & \dots & P_{rr} \end{bmatrix}$$

(Observe que $P_{ij} \geq 0$ e que a soma de cada coluna deve ser 1.) O vetor de probabilidades é aquele cuja i -ésima linha dá a probabilidade de ocorrência do estado a_i após n iterações:

$$\begin{bmatrix} P_1^n \\ \vdots \\ P_r^n \end{bmatrix}$$

Seguindo o raciocínio do exemplo anterior vemos que, após n passos,

$$\begin{bmatrix} P_1^n \\ \vdots \\ P_r^n \end{bmatrix} = T^{(n)} \cdot \begin{bmatrix} P_1^1 \\ \vdots \\ P_r^1 \end{bmatrix}$$

2.3. Previsões em longo prazo

Para podermos fazer previsões a longo prazo, a matriz T deve cumprir certas condições. Desse modo, introduzimos a definição a seguir.

Definição 1. Uma matriz das probabilidades de transição é regular se alguma de suas potências tem todos os elementos não nulos.

A importância da matriz regular para as previsões em longo prazo é dada pelo teorema abaixo:

Teorema 2.2.2 Se a matriz $T_{r \times r}$ das probabilidades de transição é regular, então:

- i) As potências $T^{(n)}$ aproximam-se de uma matriz P , no sentido de que cada elemento de $T^{(n)}$ aproxima-se do elemento correspondente P .
- ii) Todas as colunas de P são iguais, sendo dadas por um vetor-coluna

$$V = \begin{bmatrix} P_1^1 \\ \vdots \\ P_r^1 \end{bmatrix}$$

com $P_1 > 0, P_2 > 0, \dots, P_r > 0$.

- iii) Para qualquer vetor de probabilidades inicial

$$V_1 = \begin{bmatrix} p_1^1 \\ \vdots \\ p_r^1 \end{bmatrix}$$

o vetor de probabilidades $T^{(n)} \cdot V_1$ aproxima-se de V (dado no item anterior).

- iv) O vetor V é o único vetor que satisfaz $V = T \cdot V$.

O que esse teorema nos informa é que se a matriz das probabilidades de transição é regular, então é possível fazer previsões em longo prazo, e essa não depende das probabilidades iniciais V_1 . Além disso, o item iv) indicará como achar as probabilidades depois de um longo prazo. O processo

$$\begin{array}{cc}
 C & S \\
 C & \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \\
 S & \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2}
 \end{array}
 \quad T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Onde o vetor de probabilidades é a matriz

$$\begin{bmatrix} p_c^n \\ \vdots \\ p_s^n \end{bmatrix}$$

Cuja primeira linha dá a probabilidade de que haja chuva no n-ésimo ano e a segunda linha dá a probabilidade de que haja seca no n-ésimo ano.

Analisando a árvore de probabilidades obtém-se

$$\begin{aligned}
 P_C^{(2)} &= \frac{1}{4}P_C^{(1)}\frac{1}{2}P_S^{(1)} \\
 P_S^{(2)} &= \frac{3}{4}P_C^{(1)}\frac{1}{2}P_S^{(1)}
 \end{aligned}$$

Observa-se que

$$T \cdot \begin{bmatrix} P_c^1 \\ P_s^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_c^1 \\ P_s^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}P_c^{(1)} & \frac{1}{2}P_s^{(1)} \\ \frac{3}{4}P_c^{(1)} & \frac{1}{2}P_s^{(1)} \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} P_c^2 \\ P_s^2 \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} P_c^1 \\ P_s^1 \end{bmatrix}$$

O mesmo ocorre do segundo para o terceiro ano, deste para o quarto etc. Temos então a seqüência:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1^\circ \text{ ano} & & 2^\circ \text{ ano} & & 3^\circ \text{ ano} & & \\
 \left[\begin{array}{c} P_c^1 \\ P_s^1 \end{array} \right] & \rightarrow & \left[\begin{array}{c} P_c^2 \\ P_s^2 \end{array} \right] & = T \cdot & \left[\begin{array}{c} P_c^1 \\ P_s^1 \end{array} \right] & \rightarrow & \left[\begin{array}{c} P_c^3 \\ P_s^3 \end{array} \right] = T \cdot \left[\begin{array}{c} P_c^2 \\ P_s^2 \end{array} \right] = T^2 \cdot \left[\begin{array}{c} P_c^1 \\ P_s^1 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow
 \end{array}$$

n-ésimo ano

$$\begin{bmatrix} P_c^n \\ P_s^n \end{bmatrix} = T^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} P_c^1 \\ P_s^1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o comportamento do clima dessa região em longo prazo (i.e., quando n aumenta) poderá ser previsto se soubermos que os elementos das matrizes T^n , $n = 1, 2, \dots$ aproximam-se dos

elementos de uma matriz fixa P pois, neste caso, $P_c^n \rightarrow P_1$ e $P_s^n \rightarrow P_2$ quando $n \rightarrow \infty$.

Assim:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} P_c^1 \\ P_s^1 \end{bmatrix}$$

Tal previsão é importante, pois se chegarmos, por exemplo, à conclusão que $P_s^n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$ (Comportamento Limite de Vetores-estado: os vetores-estado convergem a um vetor fixo à medida que o número de observações cresce), assim, longo prazo, a região tenderá a se tornar um deserto.

Se T^n não se aproxima de uma matriz P , então não poderemos fazer nenhuma previsão em longo prazo, pois o processo acabará por se modificar bastante a cada passo. Assim, um dos problemas que devemos resolver é que são as condições sobre a matriz T das probabilidades de transição, para que suas potências se aproximem de uma determinada matriz.

Continuando a resolução sobre previsão do clima que estávamos estudando:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

é regular, pois sua primeira potência, isto é, ela mesma, já tem todos os elementos estritamente positivos, e assim podemos concluir, usando o item (iv), que quaisquer que sejam as probabilidades iniciais, as probabilidades a longo prazo são dadas por:

$$\begin{bmatrix} P_c \\ P_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_c \\ P_s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} P_c = \frac{1}{4} \cdot P_c + \frac{1}{2} \cdot P_s \\ P_s = \frac{3}{4} \cdot P_c + \frac{1}{2} \cdot P_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2P_s = 3P_c \\ 2P_s = 3P_c \end{cases} \Rightarrow$$

$$P_s = \frac{3}{2}P_c$$

Como devemos ter $P_c + P_s = 1$ (que é a probabilidade total), temos $P_c + \frac{3}{2}P_c = 1$ ou $P_c = \frac{2}{5}$ e, portanto, $P_s = \frac{3}{5}$. Assim, em longo prazo a probabilidade de um ano de chuva é $\frac{2}{5}$, enquanto que a probabilidade de um ano de seca é $\frac{3}{5}$ (dentro das hipóteses simplificadoras), e portanto, a região tenderá a uma ligeira aridez.

3. Procedimentos metodológicos

Este trabalho baseia-se numa pesquisa de campo, com dados obtidos num estudo realizado em algumas escolas públicas e privadas (Escola Alfredo Agostinho de Deus, da rede pública estadual, Colégio Ramo da Videira, rede particular, Escola Francisco Pereira Franco, da rede pública estadual, e no Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães) localizadas na cidade de Salvador e região metropolitana. A pesquisa foi realizada presencialmente em quatro momentos diferentes. Em cada escola uma turma, no mês de maio de 2016, três escolas, e, em fevereiro de 2017, uma escola. Isso, em acordo com a coordenação de cada escola e com o(a) professor(a) plantonista que cedia

um horário para que pudéssemos explicar para os estudantes presentes o que estava envolvido em escolher uma formação técnica ou graduação.

Foram passadas, em aula anterior ao preenchimento do questionário, informações sobre as áreas a serem escolhidas, por exemplo, a área de Exatas envolvia profissões que trabalham com cálculos e números, sendo algumas citadas: computação, matemática, química, engenharia e afins. Na área de Humanas: administração, direito, economia, pedagogia, dentre outras, e por fim Biológicas: medicina, biologia, fisioterapia, educação física, farmácia e as demais. Foi um questionário com quatro perguntas objetivas, no qual os estudantes do terceiro ano do ensino médio assinalavam em quais áreas (Humanas, Biológicas ou Exatas, de nível técnico e/ou superior) os mesmos tinham interesse em adquirir formação de graduação. As perguntas foram:

1. Ao concluir o ensino médio, você pretende cursar, seja um curso de nível superior e/ou técnico, em que área?
2. O que te levou a escolher, em termos de estudos, essa área?
3. Como você acredita que está o mercado de trabalho para a área que você demonstra interesse?
4. Se fosse migrar para outra área, qual seria sua escolha?

Não havia questão discursiva, porém alguns expressaram, por escrito, o porquê de sua migração. Esses resultados foram aplicados para obtermos uma sequência de probabilidades coerentes para aplicação num processo de Cadeia de Markov, avaliando assim a tendência de escolha de cursos para formação acadêmica ou técnica, e comparando essa tendência com a oferta de mercado pelo Sistema Nacional de Emprego da Bahia (SineBahia), órgão público que disponibiliza uma equipe de profissionais da área de Recursos Humanos para atender o empregador parceiro, possibilitando encontrar mais rapidamente um profissional com o perfil desejado para preenchimento das vagas disponíveis.

Essa pesquisa foi realizada entre os períodos de 2016 e 2017, com início na disciplina *Iniciação à Vida Universitária*, com colegas de disciplinas variadas e retomada para a disciplina de TCC. Com a última pesquisa realizada, na escola pública no bairro da avenida San Martins, obteve-se um espaço amostral de 120 alunos. As respostas aos questionários, depois de colhidas, foram alocadas em suas respectivas áreas. As informações estão expressas sob a forma de gráfico de barras e o categórico da pesquisa: Matrizes, Sistemas de Equações, Vetores de Probabilidades (grafos) e Cálculos de Porcentagens, com pesquisas em livros de álgebra Linear 2. Os gráficos de barras foram gerados no Excel, o grafo e gráfico de autovalores foram gerados no Matlab.

A partir dessa etapa, buscou-se representar os modelos no Processo Estocástico, relacionado à Cadeia de Markov, por um conjunto de valores de probabilidades, calculados por um sistema de equações. Tais valores representam em percentual a fidelidade das escolhas dos estudantes do terceiro ano do ensino médio, nas áreas por eles almejadas. Com isso, estimam-se as probabilidades da Cadeia iniciando com os dados observados, gerando um sistema percentual recorrente para obter valores de probabilidades futuras, conforme procedimento característico da Cadeia de Markov. Os gráficos de probabilidades de transição (Figura 2) e de autovalores da matriz de probabilidades (Figura 3) foram gerados no Matlab, versão 2017b. Já os gráficos das Figuras 4 e 5 foram gerados no Excel.

4. Resultados da tendência para a formação acadêmica ou técnica obtidos pela cadeia

De acordo com pesquisa realizada entre os anos de 2016 a 2017, para o teste vocacional em quatro escolas, sendo três públicas e uma privada, situadas nas cidades de Salvador e região metropolitana. Contatamos num total de 120 alunos. A questão frisava o seguinte:

— Em qual área: Exatas (E), Humanas (H) ou Biológicas, os alunos têm interesse em cursar, seja a nível técnico e/ou superior. Os resultados coletados foram que 26% escolheram a área de Exatas, 29% escolheram a área de Biológicas e 45% escolheram a área de Humanas. No entanto, dos alunos que escolheram área de Exatas, 24% migraram para Humanas e 50% para a área de Biológicas. Dos estudantes que escolheram a área de Biológicas, 22% migraram para Humanas e 49% para a área de Exatas, e por fim, dos estudantes que escolheram a área de Humanas, 43% migraram para Exatas e 12% para Biológicas. Com base nesses dados, determina-se o estado de Equilíbrio (Probabilidade de Estado Limite) das probabilidades de escolha no Momento 2 (M_2) averiguando quais seriam as tendências de migração, ou seja, mudança para outras áreas.

Procedimentos:

Foram feitos cálculos, por meio das matrizes das probabilidades de transição, e verificando os vetores (Grafos Dirigidos ¹) de transição. Sendo que na matriz T das probabilidades de transição obtém-se na i -ésima linha e j -ésima coluna a probabilidade de transição do j -ésimo para o i -ésimo estado, respectivamente.

Todavia, calcula-se no tempo discreto, ou seja: T é finito ou enumerável.

Seguem-se os cálculos:

O vetor de Probabilidades é a matriz

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} P_E^{(n)} \\ P_B^{(n)} \\ P_H^{(n)} \end{bmatrix}$$

A Matriz T das Probabilidades de Transição é:

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & B & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,26 & 0,5 & 0,24 \\ 0,49 & 0,29 & 0,22 \\ 0,43 & 0,12 & 0,45 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observa-se que:

$$T \cdot \begin{bmatrix} P_E^{(n)} \\ P_B^{(n)} \\ P_H^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_E^{(n+1)} \\ P_B^{(n+1)} \\ P_H^{(n+1)} \end{bmatrix}$$

Realizando a operação de multiplicação de matrizes:

¹Grafo Dirigido é um conjunto finito de elementos P_1, P_2, \dots, P_n junto com uma coleção finita de pares ordenados (P_i, P_j) de elementos distintos desse conjunto, sem repetição de pares ordenados, onde os elementos do conjunto são chamados vértices e os pares ordenados arestas dirigidas do grafo dirigido [4]

$$\begin{bmatrix} 0,26 & 0,5 & 0,24 \\ 0,49 & 0,29 & 0,22 \\ 0,43 & 0,12 & 0,45 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_E \\ P_B \\ P_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_E \\ P_B \\ P_H \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0,26P_E + 0,5P_B + 0,24P_H \\ 0,49P_E + 0,29P_B + 0,22P_H \\ 0,43P_E + 0,12P_B + 0,45P_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_E \\ P_B \\ P_H \end{bmatrix}$$

Observação 1. Podemos adotar como verdade que $P_E + P_B + P_H = 1$, porque a probabilidade de escolha de Exatas (E), Biológicas (B) ou Humanas (H) tem que ter como resultado 1 (o que também é chamado de probabilidade total ²).

Retomando aos cálculos:

$$\begin{cases} 0,26P_E + 0,5P_B + 0,24P_H = P_E(I) \\ 0,49P_E + 0,29P_B + 0,22P_H = P_B(II) \\ 0,43P_E + 0,12P_B + 0,45P_H = P_H(III) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,26P_E + 0,5P_B + 0,24P_H = 1(I) \\ 0,49P_E + 0,29P_B + 0,22P_H = 1(II) \\ 0,43P_E + 0,12P_B + 0,45P_H = 1(III) \end{cases}$$

Por conveniência, foi utilizando método da substituição para um procedimento mais prático. Calculando na equação I :

$$\begin{aligned} 0,26P_E + 0,5P_B + 0,24P_H &= 1 \\ P_B &= 2 - 0,52P_E + 0,48P_H(I) \end{aligned}$$

Substituindo na equação II :

$$\begin{aligned} 0,49P_E + 0,29P_B + 0,22P_H &= P_B \\ 0,49P_E + 0,29(2 - 0,52P_E + 0,48P_H) + 0,22P_H &= 2 - 0,52P_E + 0,48P_H \\ 0,86P_E + 0,56P_H &= 1,42(II) \end{aligned}$$

Substituindo a equação I na equação III :

$$\begin{aligned} 0,43P_E + 0,12(2 - 0,52P_E + 0,48P_H) + 0,45P_H &= P_H \\ 0,37P_E - 0,61P_H &= -0,24(III) \end{aligned}$$

Realizando as substituições nas equações II e III :

$$-0,357P_E = -1,79 \Rightarrow P_E = \frac{1,79}{0,57} = 3,14$$

Substituindo na equação II :

$$0,86P_E + 0,56P_H = 1,42$$

²Tal previsão é importante, pois se chegarmos, por exemplo, à conclusão de que $P_S^{(n)} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$ (Comportamento Limite de Vetores-Estado: os vetores-estado convergem a um vetor fixo à medida que o número de observações cresce) - [4]

$$0,86(3,14) + 0,56P_H = 1,42 \Rightarrow P_H = \frac{-1,28}{0,56} = -2,29$$

Substituindo os valores de $P_H = -2,29$ e $P_E = 3,14$ na equação I obtemos:

$$P_B = 2 - 0,52P_E + 0,48P_H \Rightarrow P_B = 2 - 0,52(3,14) + 0,48(-2,29) \Rightarrow P_B = 1,5$$

Podemos então calcular os valores de probabilidades no Momento 2 (M_2):

$$T \cdot \begin{bmatrix} P_E^1 \\ P_B^1 \\ P_H^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_E^2 \\ P_B^2 \\ P_H^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,26 & 0,5 & 0,24 \\ 0,49 & 0,29 & 0,22 \\ 0,43 & 0,12 & 0,45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3,14 \\ -2,29 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_E^2 \\ P_B^2 \\ P_H^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,26.(3,14) + 0,5.(-2,29) + 0,24.(1,5) \\ 0,49.(3,14) + 0,29.(-2,29) + 0,22.(1,5) \\ 0,43.(3,14) + 0,12.(-2,29) + 0,45.(1,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_E^2 \\ P_B^2 \\ P_H^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,03 \\ 1,21 \\ 1,76 \end{bmatrix}$$

Retirando os valores inteiros e multiplicando por 100, encontra-se a probabilidade dos alunos que escolheram Exatas (P_E), Biológicas (P_B) e/ou Humanas (P_H) mudarem a sua escolha:

$$\begin{aligned} \text{Exatas } P_E^{(2)} &= 3\% \\ \text{Biológicas } P_B^{(2)} &= 21\% \\ \text{Humanas } P_H^{(2)} &= 76\% \end{aligned}$$

Ou seja, a fidelização dos estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, em longo prazo, se não houver modificações nas tendências de migração, teremos que apenas 3% dos alunos que escolheram a área de Ciências Exatas pensariam em migrar para outra área e **97% permanecem em Exatas**. Os 21% de alunos que escolheram a área de Ciências Biológicas migrariam para outras áreas e **79% permaneceriam**. E 76% dos estudantes que escolheram a área de Ciências Humanas migrariam, enquanto **24% permaneceriam**.

Tomando como base os mesmos percentuais de migração do momento M_1 para cada área, acrescentando sobre os percentuais dos que permaneceram em M_2 , obtemos que: **em Exatas totalizam 41,09%, em Biológicas 36,82% e em Humanas 21,89%**, ou seja, de fato a área de Exatas ainda sai na frente em relação às outras áreas.

Fazendo uma análise via grafos, ou diagramas de transição de estado (ou momentos), sobre os dados obtidos via cadeia de Markov, ainda se confirmam os resultados obtidos. Com uma cadeia de Markov por produtos consecutivos de T para obter os momentos M_1 , M_2 e M_3 , pode-se modelar a probabilidade de transição entre esses momentos. O gráfico a seguir (Figura 2) evidencia que é justamente mais provável ocorrer uma transição do momento M_1 para o momento M_2 , cujo valor é aproximadamente 55%.

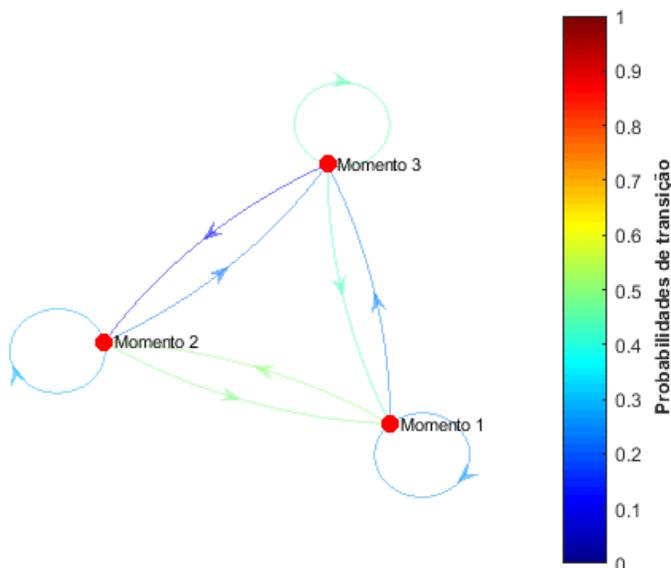


Figura 2: Probabilidades de transição da Cadeia de Markov da matriz T (Fonte própria)

Além disso, essa matriz T tem um comportamento ergódico nesse Processo Markoviano. Isso nos garante ser um processo recorrente não periódico [3]. Os autovalores de T indicam isso, pela espessura ou intervalo de afastamento entre seus valores, que foram: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0,2274$ e $\lambda_3 = -0,2274$, como pode-se observar na Figura 3.

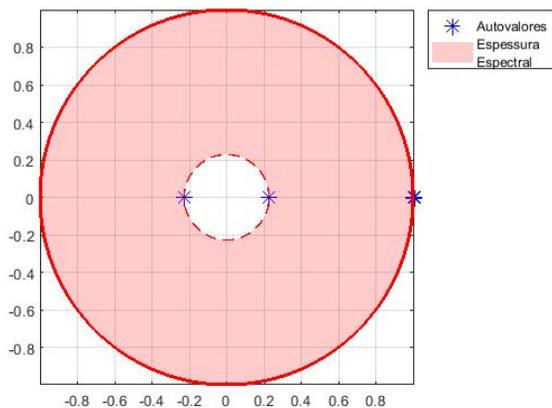


Figura 3: Autovalores da matriz de probabilidades T (Fonte própria)

4.1. Comparação entre oferta do mercado de trabalho e a tendência de formação

Esse trabalho baseou-se numa pesquisa realizada nas escolas Alfredo Agostinho de Deus, da rede pública estadual, Ramo da Videira, rede particular, Francisco Pereira Franco, da rede pública estadual, e no Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães. Em um total de 120 alunos observa-se que no momento M_1 os estudantes estão mais voltados às Ciências Humanas, como demonstra a Figura 4.

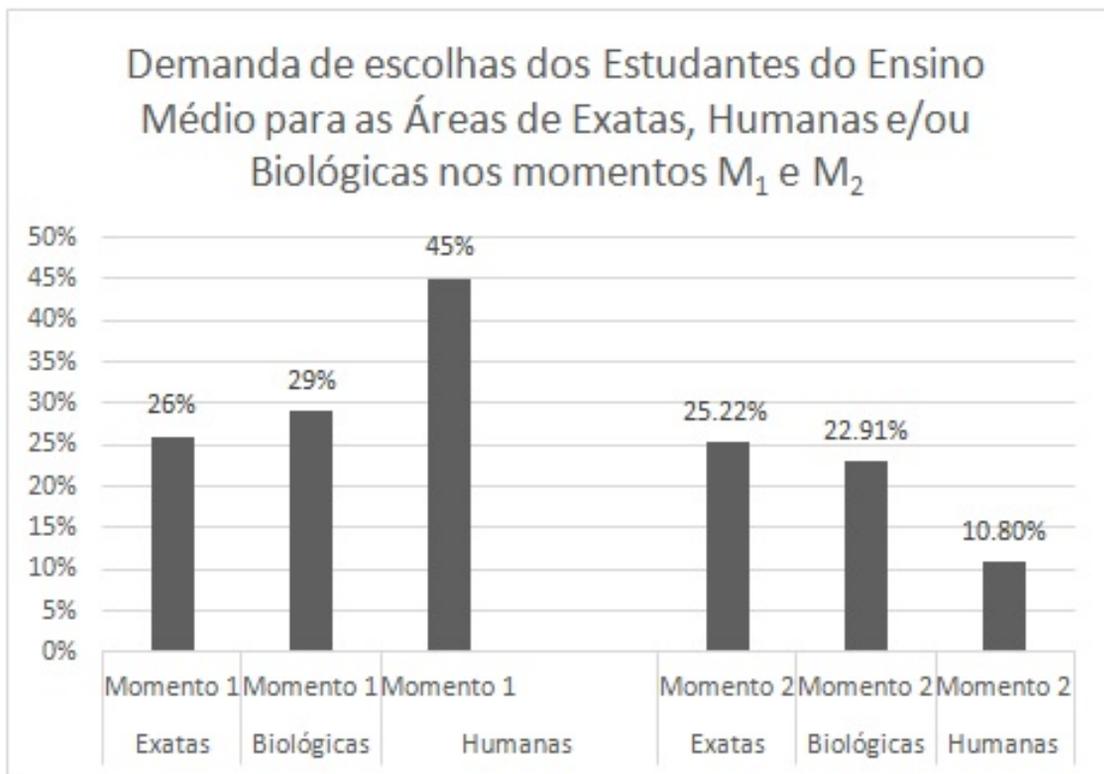


Figura 4: Percentuais por área escolhida nos momentos 1 e 2 (Fonte própria)

Ainda pela Figura 4 percebe-se pelos percentuais do momento M_2 que os estudantes que escolhem área de Exatas ou Biológicas permanecem praticamente fidedignos às suas respectivas escolhas. No que tange a área de Humanas, um relevante percentual tem perspectiva de mudar para outra área, o que se pode se tornar ainda maior se fosse levado adiante o Processo Estocástico, visto que o total das probabilidades $P_E + P_B + P_H = 1$ quando de $n \rightarrow \infty$.

Isso, segundo dados coletados na Unidade Central do SineBahia, com informações cedidas do número de vagas para trabalho divulgadas (por ocupação) entre os meses de Setembro/2017, Outubro/2017, Novembro/2017, Dezembro/2017, Janeiro/2018 e Fevereiro de 2018, sendo que no

interim de 2017 foram 5.923 vagas e no período de 2018 2.395 vagas, totalizando 8.318 vagas. Dessas, foram extraídas as ocupações que necessitavam de algum curso voltado à área de pesquisa desse trabalho: Exatas, Biológicas ou Humanas. Do total dessas 8.318 vagas foram retiradas 548, sendo 235 da área de Exatas, 185 da área de Humanas e 128 da área de Biológicas, o que equivale em respectivos percentuais (E) = 43%, (H) = 34% e (B) = 23%, ou seja, a maior oferta tem sido na área de Exatas (E) com 43% das vagas. Se colocarmos em evidência o resultado da Cadeia de Markov, verificado no momento M_2 , pode-se contrastar com as ocupações disponíveis no mercado de trabalho, de acordo informações cedidas pelo SineBahia, conforme a Figura 5:

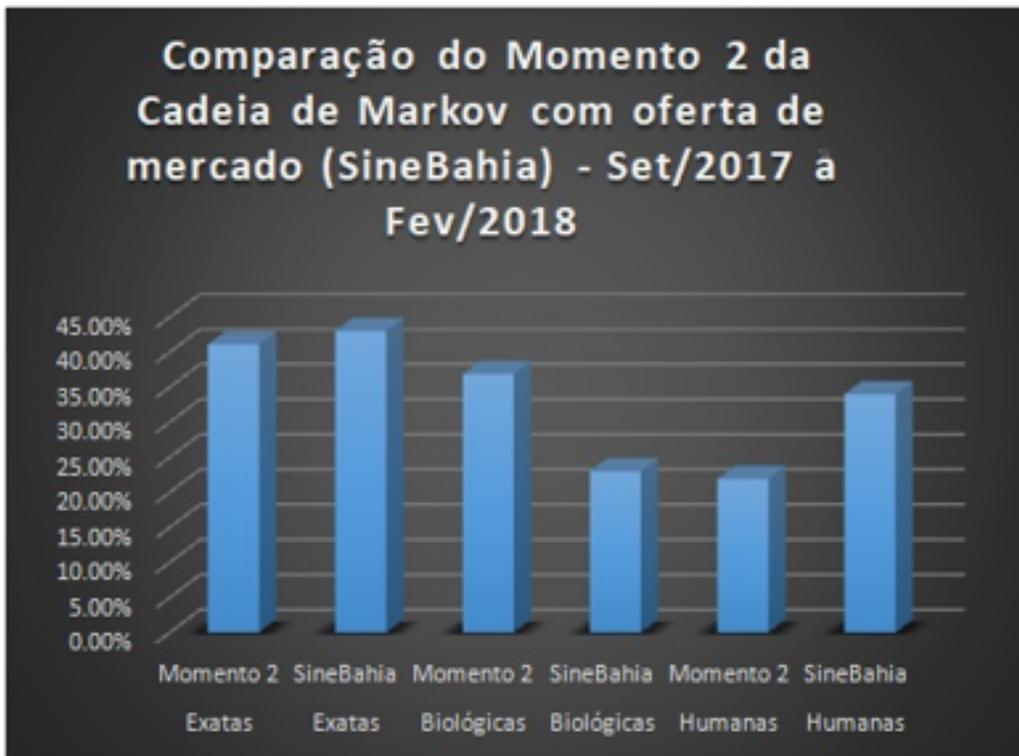


Figura 5: Percentuais de escolha no momento $M_2 \times$ oferta de vagas/SineBahia - (Fonte própria)

Diante dos dados coletados, pode-se observar que os estudantes que optam pela área de Exatas estão propensos a manter o caminho escolhido. E, com isso, estão inclinados a garantir o sucesso para angariar um emprego, devido ao número de oportunidades ofertadas pelo mercado. O resultado apresentado na matriz de transição de probabilidades 1, do momento M_1 , isto é, momento em que a maioria dos estudantes tinham decidido pela área de Humanas, percebeu-se que isso provavelmente se deu por estar relacionado a aspectos sociais, políticos ou até mesmo religiosos. Ao questionar a motivação sobre suas escolhas, os estudantes responderam que tiveram influência dos pais ou por conta de princípios religiosos adquiridos. Isso ocorreu principalmente entre os entrevistados que optaram pelos cursos de Filosofia, Serviço Social e Teologia.

5. Conclusão

Hoje, ao observarmos as escolhas de cursos para uma formação acadêmica ou técnica, pretendidos pelos estudantes do ensino fundamental II e médio, percebe-se que a vocação deixou de ser a única influência na decisão desses jovens que fluirão para o mercado de trabalho. Muitos se deixam seduzir pelo poder salarial que algumas profissões oferecem, alguns outros ainda são influenciados por tradição ou tendência familiar e outros por aspectos religiosos e sociais. Assim, buscou-se analisar quais são as atuais tendências ao mercado de trabalho, levantando dados sobre possibilidades de escolhas de áreas para uma formação acadêmica ou técnica, de alunos do ensino médio.

Para tal análise de dados estatísticos foi utilizado o processo de Markov, o qual nem sempre é um processo periódico cíclico, podendo ser não periódico. No caso do presente trabalho, o processo é recorrente, ou seja, uma vez que se entrou no estado M_i do processo estocástico da Cadeia de Markov, gerado pelas matrizes de transição de probabilidades T , um retorno a algum momento M_i é assegurado dentro de um número finito de passos, porém ele não é periódico e pode voltar antes de qualquer passo n . Essa característica o identifica como um estado ergódico.

Analisando os resultados obtidos, percebe-se que as preferências dos alunos do ensino médio no terceiro ano, quando tomadas em virtude das áreas por eles escolhidas, contribuem para um caminho que se harmoniza com o número de vagas disponíveis no mercado de trabalho, na área de Exatas, que segundo os dados do SineBahia, estava em alta nos períodos de setembro de 2017 a fevereiro de 2018, pois no momento M_2 a permanência total em Exatas foi de 41,09% com 43% de vagas ofertadas nessa área. De fato, os estudantes que têm preferência pela área de Exatas dificilmente costumam ter aptidão para Biológicas e tendem ainda menos para Humanas.

Para o estudo aqui desenvolvido, foi utilizada a teoria de processos estocásticos aplicados de modo probabilístico estatístico, e pretende-se ampliar esse estudo, futuramente, através da Teoria Ergódica, numa linha de pesquisa de Sistemas Dinâmicos.

Referências

- [1] Boldrini, José L.; Costa, Suely I. R.; Figueiredo, Vera Lúcia e Wetzler, Henry G. Álgebra Linear. 3ª Edição, São Paulo: Harbra, (1980).
- [2] Kolman, Bernard. Introdução à álgebra Linear com Aplicações, 6ª Edição, Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos Editora, (1999).
- [3] Nogueira, Fernando. Modelagem e Simulação – Cadeias de Markov. Notas de aula. UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora, (2009).
- [4] Rorres, Anton. A álgebra Linear com Aplicações, 8ª Edição, Porto Alegre: Bookman, (2004).

George Mamede
Universidade Católica do Salvador – UCSAL
<georgemamede@gmail.com>

Vânia Santos
Universidade Católica do Salvador – UCSAL
Universidade do Estado da Bahia – UNEB
<vania.santos@pro.ucsal.br>

Recebido: 03/07/2018

Progressões geométrico-aritméticas e aritmético-geométricas generalizadas

Rogério Rocha

Resumo

Este artigo apresenta duas novas classes de progressões, a saber, as progressões Geométrico-Aritméticas de ordem k e (Aritmético de ordem k)-Geométricas. Em determinados casos, exibimos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos, cujas manipulações algébricas envolvidas nas demonstrações são acessíveis ao público do ensino médio.

Palavras-chave: PGA e PAG Generalizadas. Progressão Aritmética de Ordem Superior. Soma dos n Primeiros Termos.

Abstract

This article presents two new classes of progressions, namely the Geometrical- (Arithmetic of order k) and (Arithmetic of order k)-Geometric progressions. In certain cases, we display a formula for the sum of n first terms, whose algebraic manipulations involved in the demonstrations are accessible to the high school public.

Keywords: Generalized GAP and AGP. Arithmetic progression of higher order. Sum of n first Terms.

1. Introdução

Combinações das clássicas Progressões Geométricas (PGs) e Progressões Aritméticas (PAs) dão origem às progressões Geométrico-Aritméticas (PGA) e às Progressões Aritmético-Geométricas (PAG); mais especificamente, o termo geral de uma PGA é a soma do termo geral de uma PG com o termo geral de uma PA; e o termo geral de uma PAG é o produto do termo geral de uma PA com o termo geral de uma PG. Em [4] e na Seção “Preliminares”, podem-se conferir as definições formais e as fórmulas que representam a soma dos n primeiros termos dessas progressões.

As PAs foram generalizadas pelas Progressões Aritméticas de ordem superior, denotadas por PAs de ordem k , $k \in \mathbb{N}$. Quando $k = 1$, as PAs de ordem k coincidem com as PAs clássicas (conferir Seção “Preliminares” e [3]). Nesse sentido, naturalmente, surgem os seguintes questionamentos:

- é possível generalizar as definições de PGA e PAG, substituindo as PAs por PAs de ordem k ?
- caso a resposta à pergunta anterior seja afirmativa, é possível deduzir fórmulas que representem as somas dos n primeiros termos de ambas as progressões generalizadas?

Neste artigo, respondemos a ambos os questionamentos de forma satisfatória:

(i) generalizamos as definições de PGA e PAG, mais precisamente, apresentamos as definições das Progressões Geométrico-(Aritméticas de ordem k) e (Aritmético de ordem k)-Geométricas, que denotamos por PGA^k e PA^kG , respectivamente;

(ii) em relação a fórmulas que representam a soma dos n primeiros termos da PGA^k e da PA^kG : deduzimos a fórmula de uma PGA^k , para todo $k \in \mathbb{N}$, e deduzimos a fórmula de uma PA^kG , para $k = 2$ e $k = 3$.

Até onde sabemos, este é o primeiro trabalho que aborda as progressões PA^kG e PGA^k .

2. Preliminares

Nesta seção, apresentamos os conceitos e resultados que serão fundamentais para as definições das seqüências PGA^k e PA^kG . Mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [1], [3] e [4].

Como primeiro passo, definiremos as progressões que generalizaremos.

Definição 1. a) Uma **Progressão Geométrico-Aritmética (PGA)** é toda progressão onde o seu termo geral é da forma $b_n = aq^{n-1} + (n-1)r$, sendo a , r e q constantes não nulas e $q \neq 1$.

b) Uma **Progressão Aritmético-Geométrica (PAG)** é toda progressão onde o seu termo geral é da forma $a_n = [a + (n-1)r]q^{n-1}$, sendo a , r e q constantes não nulas e $q \neq 1$.

Observação 1. a) A PGA e a PAG são combinações de PAs e PGs: O termo geral de uma PGA é a soma do termo geral de uma PG com o termo geral de uma PA cujo primeiro termo é nulo; e o termo geral de uma PAG é o produto do termo geral de uma PA com o termo geral de uma PG cujo primeiro termo é 1. b) Apesar de ser considerado $q \neq 1$ e $r \neq 0$, temos: Se $q = 1$, então a PGA (ou a PAG) seria uma PA; se $r = 0$, então a PGA (ou a PAG) seria uma PG.

Exemplo 1. a) A seqüência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 11, 22, 41, 76, \dots)$, onde $b_n = 4 \times 2^{n-1} + (n-1)3$, é uma PGA para $a = 4$, $r = 3$ e $q = 2$;

b) A seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \dots)$, onde $a_n = (1 + (n-1)2)(\frac{1}{2})^{n-1}$, é uma PAG para $a = 1$, $r = 2$ e $q = \frac{1}{2}$.

A seguinte proposição fornece-nos as fórmulas que representam a soma dos n primeiros termos das PGA e PAG. Suas demonstrações podem ser encontradas em Paiva (2010).

Proposição 1. Considere a PGA e a PAG dadas pela Definição 1. Temos:

a) a soma S_n dos n primeiros termos de uma PGA é dada por

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2};$$

b) a soma S_n dos n primeiros termos de uma PAG é dada por

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1-nq^{n-1} + (n-1)q^n]}{(1-q)^2}.$$

Exemplo 2. a) A soma dos n primeiros termos da PGA do Exemplo 1 é dada por

$$S_n = \frac{4(1-2^n)}{1-2} + \frac{(n-1)3n}{2} = \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 2^{n+2} - 4.$$

Observe que $S_1 = 4$, $S_2 = 15 = 4 + 11$, $S_3 = 37 = 4 + 11 + 22$ etc.

b) A soma dos n primeiros termos da PAG do Exemplo 1 é dada por

$$S_n = \frac{1(1-(1/2)^n)}{1-1/2} + \frac{2(1/2)[1-n(1/2)^{n-1}+(n-1)(1/2)^n]}{(1-1/2)^2} = 6-2^{1-n}(2n+3).$$

Observe que $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{5}{2} = 1 + \frac{3}{2}$, $S_3 = \frac{15}{4} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}$ etc.

As definições das novas progressões envolvem as PAs de ordem k , $k \in \mathbb{N}$. Em seguida, apresentamos as definições de tais PAs. Para tanto, precisamos do conceito de operador diferença.

Definição 2. a) Para uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, define-se o chamado **Operador Diferença** $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que constitui uma nova seqüência, definida por $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma nova seqüência, podemos novamente obter o operador diferença, isto é, $(\Delta^1[\Delta^1 a_n])_{n \in \mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e assim por diante, $(\Delta^3 a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\Delta^4 a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (\Delta^k a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ etc.

b) Uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uma **PA de ordem k** se for necessário aplicar o operador diferença k vezes para se chegar a uma seqüência constante.

Observação 2. a) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma PA clássica de razão r , então, $\forall n \in \mathbb{N} : \Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = r$. Desse modo, as PAs clássicas são PAs de ordem 1;

b) Uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2 se $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 1 não estacionária (razão não nula); é uma PA de ordem 3 se $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 1 não estacionária, e assim por diante.

Exemplo 3. a) A seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-2, 4, 14, 28, 46, \dots)$, onde $a_1 = -2$ e $a_{n+1} = a_n + 4n + 2$, para $n \geq 1$, é uma PA de ordem 2, pois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = 4n + 2$, $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 4$, e assim, $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 10, 14, 18, 22, \dots)$ e $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 4, 4, 4, \dots)$;

b) A seqüência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-3, -2, 6, 33, 97, \dots)$, onde $b_1 = -3$ e $b_{n+1} = b_n + n^3$, para $n \geq 1$, é uma PA de ordem 4, pois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 b_n = b_{n+1} - b_n = n^3$, $\Delta^2 b_n = \Delta^1 b_{n+1} - \Delta^1 b_n = 3n^2 + 3n + 1$, $\Delta^3 b_n = \Delta^2 b_{n+1} - \Delta^2 b_n = 6n + 6$, $\Delta^4 b_n = \Delta^3 b_{n+1} - \Delta^3 b_n = 6$, e assim, $(\Delta^1 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 8, 27, 64, 125, \dots)$, $(\Delta^2 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (7, 19, 37, 61, 91, \dots)$, $(\Delta^3 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (12, 18, 24, 30, 36, \dots)$ e $(\Delta^4 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 6, 6, \dots)$.

A seguinte proposição proporciona-nos importantes relações entre as PAs de ordem superior e suas respectivas seqüências das somas parciais com as funções polinomiais. Para demonstração, conferir, por exemplo, [2].

Proposição 2. a) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem k , então seu termo geral a_n é um polinômio de grau k na variável n . Reciprocamente, Se $P(n)$ é um polinômio de grau k , então a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P(1), P(2), P(3), \dots, P(n), \dots)$ é uma PA de ordem k .

b) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem k , então a seqüência das somas parciais de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada por $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, é uma PA de ordem $k + 1$.

Os próximos dois exemplos ilustram a Proposição 2.

Exemplo 4. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 6, 15, 28, 45, \dots)$, onde $a_n = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3)$ e considere $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, a sequência das somas parciais de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a) Verifique que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2 e obtenha o polinômio de grau 2 que representa a_n ;
 b) Verifique que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 3 e obtenha o polinômio de grau 3 que representa S_n ;
 c) Calcule a soma dos 100 primeiros termos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solução:

a) Observe que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 a_n = 4n + 1$ e $\Delta^2 a_n = 4$. Assim, $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (5, 9, 13, 17, 21, \dots)$ e $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 4, 4, 4, \dots)$. Logo, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2. Então, pela Proposição 2, item a), devemos ter $a_n = P(n) = an^2 + bn + c$ ($a \neq 0$). Assim, $P(1) = 1, P(2) = 6$ e $P(3) = 15$ ou, ainda,

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 15. \end{cases}$$

A única solução desse sistema é $a = 2, b = -1$ e $c = 0$. Assim, $a_n = 2n^2 - n$.

b) Temos: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 S_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$, $\Delta^2 S_n = \Delta^1 S_{n+1} - \Delta^1 S_n = 4n + 5$ e $\Delta^3 S_n = \Delta^2 S_{n+1} - \Delta^2 S_n = 4$, isto é, $(\Delta^1 S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 15, 28, 45, 66, \dots)$, $(\Delta^2 S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (9, 13, 17, 21, 25, \dots)$, $(\Delta^3 S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 4, 4, 4, \dots)$. Logo, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 3. Então, pela Proposição 2, item a), devemos ter $S_n = P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ ($a \neq 0$). Então, como $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 7, 22, 50, 95, \dots)$, devemos ter $P(1) = 1, P(2) = 7, P(3) = 22$ e $P(4) = 50$ ou ainda,

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 7 \\ 27a + 9b + 3c + d = 22 \\ 64a + 16b + 4c + d = 50. \end{cases}$$

A única solução desse sistema é $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{2}$ e $c = -\frac{1}{6}$ e $d = 0$. Assim, $S_n = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$.

c) Desejamos obter o valor de S_{100} . Pelo item b), $S_{100} = \frac{2}{3}100^3 + \frac{1}{2}100^2 - \frac{1}{6}100 = 671650$.

Exemplo 5. Dado o polinômio $P(n) = n^3 - n$, verifique que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P(1), \dots, P(n), \dots)$ é uma PA de ordem 3.

Solução:

b) Desde que $a_n = P(n) = n^3 - n$, temos: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 a_n = P(n+1) - P(n) = 3n^2 + 3n$, $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 6n + 6$ e $\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = 6$. Logo, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 6, 24, 60, 120, \dots)$, $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 18, 36, 60, 90, \dots)$, $(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (12, 18, 24, 30, 36, \dots)$ e $(\Delta^3 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 6, 6, \dots)$. Portanto, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 3.

3. PGA e PAG generalizadas

Nesta seção, apresentamos as definições das novas seqüências $(PGA^k$ e $PA^kG)$, deduzimos a fórmula que representa a soma dos n primeiros termos das PGA^k s, para um k qualquer, e das PA^kG s, para $k = 2$ e $k = 3$. A seguinte observação será útil para as definições da PGA^k e da PA^kG .

Observação 3. Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PA de ordem k . Desde que a classe das PAs de ordem k é identificada com a classe das progressões em que seus termos gerais são polinômios de grau k na variável n (Proposição 2, item a)), podemos considerar $b_n = d_k n^k + d_{k-1} n^{k-1} + \dots + d_1 n + d_0$, onde d_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, são constantes com $d_k \neq 0$.

Definição 3. a) [PGA^k] Considere $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PA de ordem k e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PG onde, $c_n = dq^{n-1}$, sendo $d \neq 0$ e $q \neq 1$. A progressão **Geométrico-(Aritmética de ordem k)**, denotada por PGA^k , e associada à $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e à $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é a progressão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n + c_n = b_n + dq^{n-1}$. Pela Observação 3, podemos considerar $a_n = b_n + c_n = (d_k n^k + d_{k-1} n^{k-1} + \dots + d_1 n + d_0) + dq^{n-1}$, onde d_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, são constantes com $d_k \neq 0$.

b) [PA^kG] Considere $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PA de ordem k e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PG, onde $c_n = q^{n-1}$, sendo $q \neq 1$. A progressão **(Aritmético de ordem k)-Geométrica**, denotada por PA^kG , e associada à $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e à $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é a progressão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n c_n = b_n q^{n-1}$. Pela Observação 3, podemos considerar $a_n = b_n c_n = (d_k n^k + d_{k-1} n^{k-1} + \dots + d_1 n + d_0) q^{n-1}$, onde d_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, são constantes com $d_k \neq 0$.

Observação 4. Quando $k = 1$, a PGA^k e a PA^kG coincidem, naturalmente, com a PGA e a PAG, respectivamente.

Exemplo 6. a) A progressão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 7, 14, 25, 42, \dots)$, onde $a_n = (n^2 + 1) + 2^{n-1}$, é uma PGA^2 ;

b) A progressão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 8, 36, 128, 400, \dots)$, onde $a_n = n^2 2^{n-1}$, é uma PA^2G ;

c) A progressão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 102, 882, 5562, 29970, \dots)$, onde $a_n = (2n^3 + 4n^2 + 6n - 10)3^{n-1}$, é uma PA^3G .

As proposições a seguir fornecem os principais resultados deste trabalho. Inicialmente, enunciamos e provamos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PGA^k , para um k qualquer e, posteriormente, em duas outras proposições, de uma PA^kG , para $k = 2$ e $k = 3$. Após cada proposição, aplicamos essas fórmulas em alguns exemplos.

Proposição 3. *Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PA de ordem k , $k \in \mathbb{N}$, e considere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n + dq^{n-1}$, uma PGA^k , sendo $d \neq 0$ e $q \neq 1$. Então a soma \hat{S}_n^k dos n primeiros termos dessa PGA^k é dada por*

$$\hat{S}_n^k = \frac{d(1 - q^n)}{1 - q} + P(n), \quad (1)$$

onde $P(n)$ é o polinômio de grau $k+1$, que representa a soma dos n primeiros termos da progressão $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, isto é, da PA de ordem k , conforme Proposição 2, item b).

Demonstração. Observe que

$$\hat{S}_n^k = b_1 + d + b_2 + dq + b_3 + dq^2 + \dots + b_n + dq^{n-1}.$$

Logo,

$$q\hat{S}_n^k = qb_1 + dq + qb_2 + dq^2 + qb_3 + dq^3 + \dots + qb_n + dq^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{S}_n^k(1 - q) &= d - dq^n + b_1(1 - q) + b_2(1 - q) + \dots + b_n(1 - q) \\ &= d(1 - q^n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)(1 - q). \end{aligned}$$

Então, dado que $q \neq 1$,

$$\hat{S}_n^k = \frac{d(1 - q^n)}{1 - q} + (b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

Consideremos $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Como, por hipótese, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem k , pela Proposição 2, item b), $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem $k + 1$. Logo, pela Proposição 2, item a), S_n é um polinômio, em n , de grau $k + 1$. Isto é, existe um polinômio $P(n)$ de grau $k + 1$ tal que $S_n = P(n)$. Portanto, $\hat{S}_n^k = \frac{d(1 - q^n)}{1 - q} + P(n)$. \square

Exemplo 7. Considere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 7, 14, 25, 42 \dots)$, onde $a_n = n^2 + 1 + 2^{n-1}$, a PGA^2 do Exemplo 6. **a)** Calcule a soma dos n primeiros termos dessa PGA^2 , isto é, \hat{S}_n^2 ; **b)** Aplique a fórmula obtida no item a), para $n = 1, 2$ e 3 .

Solução: a) Considere $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 5, 10, 17, 26, \dots)$, tal que $b_n = n^2 + 1$ e considere a sequência das somas parciais de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, isto é, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Logo, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 7, 17, 34, 60, \dots)$. Como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2, pela Proposição 2, item b), $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 3, e, portanto, pela Proposição 2, item a), S_n é um polinômio de grau 3 em n . Assim, $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Então devemos ter

$$\begin{cases} a + b + c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 7 \\ 27a + 9b + 3c + d = 17 \\ 64a + 16b + 4c + d = 34. \end{cases}$$

A única solução desse sistema é: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{7}{6}$ e $d = 0$. Logo, $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n$. Portanto, pela Proposição 3, a soma dos n primeiros termos da PGA^2 é dada por

$$\hat{S}_n = \frac{(1 - 2^n)}{1 - 2} + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n = 2^n - 1 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n.$$

b) Temos: $\hat{S}_1^2 = 2 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6} = 3$, $\hat{S}_2^2 = 2^2 - 1 + \frac{1}{3} \times 2^3 + \frac{1}{2} \times 2^2 + \frac{7}{6} \times 2 = 10 = 3 + 7$ e $\hat{S}_3^2 = 2^3 - 1 + \frac{1}{3} \times 3^3 + \frac{1}{2} \times 3^2 + \frac{7}{6} \times 3 = 24 = 3 + 7 + 14$. \square O seguinte

lema apresenta resultados básicos (o primeiro dos quais é conhecido na literatura matemática do Ensino Médio) que serão fundamentais para as provas das fórmulas que representam as somas dos n primeiros termos de uma PA^kG , para $k = 2$ e $k = 3$.

Lema 1. Considere $q \in \mathbb{R}$ tal que $q \neq 1$. Então

a) $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$;

b) $1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + \dots + (2n - 1)q^{n-1} = \frac{1}{1 - q} \left(1 - (2n - 1)q^n + \frac{2(q - q^n)}{1 - q} \right)$;

c) $1 + 7q + 19q^2 + 37q^3 + \dots + (3n^2 - 3n + 1)q^{n-1} = \frac{1}{1 - q} \left(1 - (3n^2 - 3n + 1)q^n + \frac{6}{1 - q} \left((1 - n)q^n + \frac{q - q^n}{1 - q} \right) \right)$.

A seguinte proposição fornece-nos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PA^kG , quando $k = 2$.

Proposição 4. Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PA de ordem 2, onde $b_n = P(n) = an^2 + bn + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, e considere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n q^{n-1}$, uma PA^2G , sendo $q \neq 1$. Então a soma \hat{S}_n^2 dos n primeiros termos dessa PA^2G , é dada por

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{1 - q} \left[c - P(n)q^n + \frac{a}{1 - q} \left(1 - (2n - 1)q^n + \frac{2(q - q^n)}{(1 - q)} \right) + \frac{b(1 - q^n)}{1 - q} \right]. \quad (2)$$

Demonstração. Observe que

$$\tilde{S}_n^2 = (a + b + c) + (4a + 2b + c)q + (9a + 3b + c)q^2 + (16a + 4b + c)q^3 + \dots + (an^2 + bn + c)q^{n-1}.$$

Logo,

$$q\tilde{S}_n^2 = (a + b + c)q + (4a + 2b + c)q^2 + (9a + 3b + c)q^3 + (16a + 4b + c)q^4 + \dots + (an^2 + bn + c)q^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n^2(1 - q) &= (a + b + c) - (an^2 + bn + c)q^n + (3a + b)q + (5a + b)q^2 + (7a + b)q^3 \\ &\quad + \dots + ((2n - 1)a + b)q^{n-1}. \end{aligned}$$

Ou, ainda,

$$\tilde{S}_n^2(1 - q) = c - (an^2 + bn + c)q^n + a(1 + 3q + 5q^2 + \dots + (2n - 1)q^{n-1}) + b(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}).$$

Uma vez que $P(n) = an^2 + bn + c$, portanto, pelo Lema 1,

$$\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{1 - q} \left[c - P(n)q^n + \frac{a}{1 - q} \left(1 - (2n - 1)q^n + \frac{2(q - q^n)}{(1 - q)} \right) + \frac{b(1 - q^n)}{1 - q} \right].$$

□

Exemplo 8. Considere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 8, 36, 128, 400, \dots)$, onde $a_n = n^2 2^{n-1}$, a PA^2G do Exemplo 6.

a) Obtenha a soma dos n primeiros termos dessa PA^2G , isto é, \tilde{S}_n^2 ;

b) Aplique a fórmula obtida no item a), para $n = 1, 2$ e 3 .

Solução: a) Observe que $a_n = b_n q^{n-1}$, onde $b_n = P(n) = n^2$ e $q = 2$. Portanto, pela Proposição 4,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n &= \frac{1}{1 - 2} \left[0 - n^2 2^n + \frac{1}{1 - 2} \left(1 - (2n - 1)2^n + \frac{2(2 - 2^n)}{(1 - 2)} \right) + \frac{0(1 - 2^n)}{1 - 2} \right] \\ &= 2^n n^2 - 2^{n+1} n + 3 \times 2^n - 3. \end{aligned}$$

b) Temos: $\tilde{S}_1^2 = 2 - 2^2 + 3 \times 2 - 3 = 1$, $\tilde{S}_2^2 = 2^2 \times 2^2 - 2^3 \times 2 + 3 \times 2^2 - 3 = 9 = 1 + 8$ e $\tilde{S}_3^2 = 2^3 \times 3^2 - 2^4 \times 3 + 3 \times 2^3 - 3 = 45 = 1 + 8 + 36$. □

A última proposição fornece-nos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PA^kG , quando $k = 3$.

Proposição 5. Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PA de ordem 3, onde $b_n = P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, e considere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n q^{n-1}$, uma PA^3G , sendo $q \neq 1$. Então a soma \tilde{S}_n^3 dos n primeiros termos dessa PA^3G , é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n^3 &= \frac{1}{1 - q} \left[d - P(n)q^n + \frac{a}{1 - q} \left(1 - (3n^2 - 3n + 1)q^n + \frac{6}{1 - q} \left((1 - n)q^n + \frac{q - q^n}{1 - q} \right) \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{1 - q} \left[\frac{b}{1 - q} \left(1 - (2n - 1)q^n + \frac{2(q - q^n)}{1 - q} \right) + \frac{c(1 - q^n)}{1 - q} \right]. \end{aligned}$$

Demonstração. Observe que

$$\tilde{S}_n^3 = (a + b + c + d) + (8a + 4b + 2c + d)q + (27a + 9b + 3c + d)q^2 + (64a + 16b + 4c + d)q^3 + \dots + (an^3 + bn^2 + cn + d)q^{n-1}.$$

Logo,

$$q\tilde{S}_n^3 = (a + b + c + d)q + (8a + 4b + 2c + d)q^2 + (27a + 9b + 3c + d)q^3 + (64a + 16b + 4c + d)q^4 + \dots + (a(n-1)^3 + b(n-1)^2 + c(n-1) + d)q^{n-1} + (an^3 + bn^2 + cn + d)q^n.$$

Assim,

$$\tilde{S}_n^3(1-q) = (a + b + c + d) - (an^3 + bn^2 + cn + d)q^n + (7a + 3b + c)q + (19a + 5b + c)q^2 + (37a + 7b + c)q^3 + \dots + (a(3n^2 - 3n + 1) + b(2n - 1) + c)q^{n-1}.$$

Ou, ainda,

$$\tilde{S}_n^3(1-q) = d - (an^3 + bn^2 + cn + d)q^n + a(1 + 7q + 19q^2 + 37q^3 + \dots + (3n^2 - 3n + 1)q^{n-1}) + b(1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + \dots + (2n - 1)q^{n-1}) + c(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}).$$

Uma vez que $P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$, portanto, pelo Lema 1,

$$\tilde{S}_n^3 = \frac{1}{1-q} \left[d - P(n)q^n + \frac{a}{1-q} \left(1 - (3n^2 - 3n + 1)q^n + \frac{6}{1-q} \left((1-n)q^n + \frac{q-q^n}{1-q} \right) \right) \right] + \frac{1}{1-q} \left[\frac{b}{1-q} \left(1 - (2n-1)q^n + \frac{2(q-q^n)}{1-q} \right) + \frac{c(1-q^n)}{1-q} \right].$$

□

Exemplo 9. Considere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 102, 882, 5562, 29970, \dots)$, onde $a_n = (2n^3 + 4n^2 + 6n - 10)3^{n-1}$, a PA³G do Exemplo 6.

a) Obtenha a soma dos n primeiros termos dessa PA³G, isto é, \tilde{S}_n^3 ;

b) Aplique a fórmula obtida no item a), para $n = 1, 2$ e 3 .

Solução: a) Observe que $a_n = b_n q^{n-1}$, onde $b_n = P(n) = 2n^3 + 4n^2 + 6n - 10$ e $q = 3$. Portanto, pela Proposição 5,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n^3 &= \frac{1}{1-3} \left[-10 - P(n)q^n + \frac{2}{1-3} \left(1 - (3n^2 - 3n + 1)3^n + \frac{6}{1-3} \left((1-n)3^n + \frac{3-3^n}{1-3} \right) \right) \right] \\ &+ \frac{1}{1-3} \left[\frac{4}{1-3} \left(1 - (2n-1)3^n + \frac{2(3-3^n)}{1-3} \right) + \frac{6(1-3^n)}{1-3} \right] \\ &= 3^n \left(n^3 + \frac{n^2}{2} - 2n - \frac{29}{4} \right) + 2 \times 3^{n+1}n + \frac{29}{4}. \end{aligned}$$

b) Temos: $\tilde{S}_1^3 = 3(1 + \frac{1}{2} - 2 - \frac{29}{4}) + 2 \times 3^2 + \frac{29}{4} = 2$;

$\tilde{S}_2^3 = 3^2(2^3 + \frac{2^2}{2} - 2 \times 2 - \frac{29}{4}) + 2 \times 3^{2+1} \times 2 + \frac{29}{4} = 104 = 2 + 102$ e,

$\tilde{S}_3^3 = 3^3(3^3 + \frac{3^2}{2} - 2 \times 3 - \frac{29}{4}) + 2 \times 3^{3+1} \times 3 + \frac{29}{4} = 986 = 2 + 102 + 882$.

□

Em seguida, propomos para o leitor o desafio de deduzir a fórmula que representa a soma dos n primeiros termos de uma PA^kG , para $k = 4$ e $k = 5$. Um desafio ainda maior é perceber o padrão das fórmulas e, assim, deduzir o caso geral.

Desafio

- Obtenha a fórmula que representa a soma \tilde{S}_n^4 dos n primeiros termos de uma PA^kG , para $k = 4$;
- Obtenha a fórmula que representa a soma \tilde{S}_n^5 dos n primeiros termos de uma PA^kG , para $k = 5$.
- Motivado pelos resultados obtidos nos itens anteriores, obtenha a fórmula que represente a soma \tilde{S}_n^k dos n primeiros termos de uma PA^kG , para $k \in \mathbb{N}$ qualquer.

4. Considerações finais

Apresentamos as progressões Geométrico-(Aritméticas de ordem k) [PGA^k] e (Aritmético de ordem k)-Geométricas [PA^kG]. Essas progressões, em conjunto com as progressões Geométrico-Aritméticas (PGA), Aritmético-Geométricas (PAG) e as clássicas progressões Geométrica (PG) e Aritmética (PA), constituem importantes ferramentas para a resolução de determinados problemas relacionados com a matemática e, em particular, com problemas relacionados com olimpíadas de matemática. Como trabalhos futuros, pretendemos: **a)** Identificar/propor problemas em diversas áreas do conhecimento que são modelados por PGA^k e PA^kG e, **b)** Generalizar o conceito de outras progressões que são combinações de PAs e PGs, como a sequência Geométrico-Aritmética alternada [5].

Referências

- [1] Carneiro, J.P., Moreira, C.G. *Sequências aritmético-geométricas*. EUREKA!, v. 14, 2007.
- [2] Morgado, A. C. O., Carvalho, P. C. P. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [3] Nobre, J. F. F., Rocha, R.A. *Progressões Aritméticas de Ordem Superior*. Professor de Matemática Online, v. 5, pp35–48, 2018.
- [4] Paiva, R.E.B. *Progressões Aritmético-Geométricas e Geométrico-Aritméticas*. Revista do Professor de Matemática, v. 73, pp47–49, 2010.
- [5] Rabago, J. F. T. *Arithmetic-geometric alternate sequence*. Scientia Magna, v. 8 (2), pp80–82, 2012.

Rogério Rocha
Universidade Federal do Tocantins - Palmas - TO
<azevedo@uft.edu.br>

Recebido: 30/11/2018

Imposto de renda: matemática no cotidiano

Rubia Santos

Maiara Marques

Resumo

Este trabalho tem por objetivo mostrar que o cálculo do imposto de renda mensal de uma pessoa física pode ser modelado através de uma **função afim** definida por partes.

Palavras-chave: Imposto de Renda; Função Afim; Alíquota; Parcela a Deduzir.

Abstract

This paper aims to show that the calculation of the monthly income tax of an individual can be modeled through an affine function defined by parts.

Keywords: Income Tax; Affine Function; Aliquot; Deduction.

1. Introdução

A matemática encontra-se cada dia mais presente no cotidiano. O uso de problemas em sala de aula proporciona ao aluno uma aproximação dos conteúdos abordados com a prática. O presente artigo é parte de uma dissertação de mestrado desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (Profmat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Na RPM *revista do professor de matemática* encontra-se uma outra abordagem sobre imposto de renda proposta por [2].

O **imposto de renda** é um tributo cobrado anualmente sobre os rendimentos de uma pessoa física ou jurídica. Para calcular o valor do imposto a ser pago por uma pessoa física, desconta-se do total de vencimentos a contribuição previdenciária e as deduções legais; por exemplo: dependentes declarados. Ao valor obtido após as deduções, chamado de **base de cálculo** para o imposto de renda, aplica-se a **alíquota**, que é a taxa percentual incidente sobre a base de cálculo.

A alíquota que deve ser aplicada a cada faixa salarial é determinada de acordo com a tabela de incidência mensal do IRPF determinada pela Receita Federal, de modo que o imposto a ser pago varie continuamente com a renda. Desde o ano de 2015, a tabela de incidência mensal [3] para cálculo do imposto sobre a renda das pessoas físicas permanece a mesma, veja Tabela 1.

Tabela 1: Incidência mensal para cálculo do imposto sobre a renda das pessoas físicas

Base de cálculo (R\$)	Alíquota (%)
Até 1903,98	-
De 1903,99 até 2826,65	7,5
De 2826,66 até 3751,05	15
De 3751,06 até 4664,68	22,5
Acima de 4664,68	27,5

Fonte: Receita Federal do Brasil

1.1. Construindo a função

Como o imposto mensal devido deve variar continuamente com a renda, o seu cálculo deve ser feito separando-se a base de cálculo nas faixas determinadas na Tabela 1 e aplicando a alíquota referente a cada faixa [1]. Assim, considerando x a base de cálculo para o imposto de renda e a a alíquota a ser aplicada, o imposto mensal I a ser pago pode ser calculado da seguinte forma:

1. Para um salário com base de cálculo x de R\$ 1903,99 a R\$ 2826,65, desconta-se a parcela isenta de R\$ 1903,98 e, ao resultado, aplica-se a alíquota de 7,5 %. Logo:

$$I(x) = 0,075 \cdot (x - 1903,99) = 0,075x - 142,80$$

2. Considerando $2826,66 \leq x \leq 3751,05$, deve-se aplicar a alíquota de 7,5 % à R\$ 922,66 referente à parte da base de cálculo que se encontra na faixa de R\$ 1903,99 a R\$ 2826,65, subtrair de x a parcela isenta de R\$ 1903,98 e a parcela de R\$ 922,66 e, à diferença, empregar a alíquota de 15% adicionando os resultados encontrados. Portanto:

$$I(x) = 0,075 \cdot 922,66 + 0,15 \cdot (x - 1903,98 - 922,66) = 0,15x - 354,80$$

3. Analogamente, se $3751,06 \leq x \leq 4664,68$, tem-se que:

$$I(x) = 0,075 \cdot 922,66 + 0,15 \cdot 924,39 + 0,225 \cdot (x - 1903,98 - 922,66 - 924,39) = 0,225x - 636,13$$

4. E, por fim, se $x > 4664,68$ então:

$$\begin{aligned} I(x) &= 0,075 \cdot 922,66 + 0,15 \cdot 924,39 + 0,225 \cdot 913,62 + \\ &\quad 0,275 \cdot (x - 1903,98 - 922,66 - 924,39 - 913,62) \\ I(x) &= 0,275x - 869,36 \end{aligned}$$

Portanto, o **imposto de renda mensal** a ser pago para uma base de cálculo qualquer pode ser definido através da função $I : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1903,99, \\ 0,075x - 142,8, & \text{se } 1903,99 \leq x < 2826,65, \\ 0,15x - 354,8, & \text{se } 2826,65 \leq x < 3751,05, \\ 0,225x - 636,13, & \text{se } 3751,05 \leq x \leq 4664,68, \\ 0,275x - 869,36, & \text{se } x > 4664,68. \end{cases}$$

Os valores fixos que são subtraídos em cada intervalo são chamados de **parcela a deduzir** do imposto. Esses valores já ficam predeterminados na tabela de incidência mensal para cálculo do imposto sobre a renda das pessoas físicas fornecida pela Receita Federal do Brasil.

Em cada intervalo de x o gráfico de $I(x)$ é **uma reta**, com uma inclinação específica. Os extremos x de cada intervalo satisfazem a igualdade da faixa anterior e da faixa a que pertencem, por isso essas retas ficam ligadas umas às outras. Na Figura 1 é possível observar uma representação gráfica da função $I(x)$.

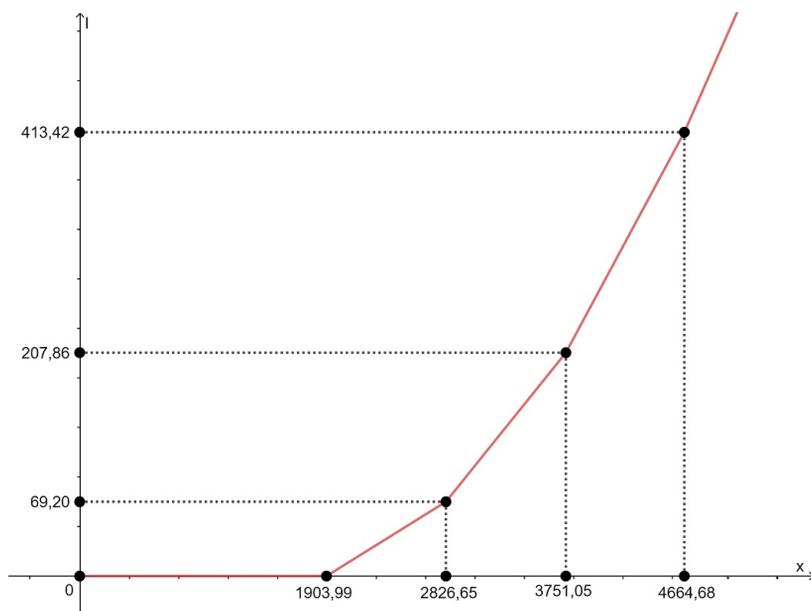


Figura 1: Gráfico da função I .

Pode-se concluir que o imposto de renda mensal devido por uma pessoa física pode ser calculado através de uma **função definida em partes**, onde em cada intervalo o valor de I é determinado através de uma **função afim**.

1.2. Exemplos

1. Um professor de Matemática efetivo da Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS com carga horária de 20h semanais cujo vencimento base é de R\$ 3595,90. Sabendo que a contribuição previdenciária mensal desse indivíduo é de R\$ 368,98 e que não possui dependentes legais, a base de cálculo para o imposto de renda desse professor é de R\$ 3595,90 – R\$ 368,98 = R\$ 3226,92. Conforme a Tabela 1, nota-se que a essa base de cálculo de R\$ 3226,92 corresponde a **alíquota de 15%** e de acordo com a função $I(x)$ encontra-se no intervalo $2826,66 \leq x \leq 3751,05$. Assim, o imposto de renda mensal devido por esse professor é dado por:

$$I(x) = 0,15x - 354,8 = 0,15 \cdot 3226,92 - 354,8 = 129,24$$

2. Seja R\$ 5288,05 o vencimento base de um professor de Matemática efetivo do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul com carga horária de 40h semanais em regime de dedicação exclusiva. Sendo R\$ 581,68 a contribuição previdenciária mensal desse professor e sabendo que o mesmo não possui dependentes legais, então a base de cálculo para o imposto de renda é de R\$ 5288,05—R\$ 581,68=R\$ 4706,37. De acordo com a Tabela 1, a essa base de cálculo corresponde a **alíquota de 27,5%** e, observando a função $I(x)$, vê-se que R\$ 4706,37 encontra-se no intervalo $x > 4664,68$. Logo, o imposto de renda mensal a ser pago por esse indivíduo pode ser assim obtido:

$$I(x) = 0,275x - 869,36 = 0,275 \cdot 4706,37 - 869,36 = 424,89$$

Referências

- [1] Marques, M. N. B. *Funções Reais e Funções Convexas*. Dissertação de Mestrado Profmat, 2018.
- [2] Colli, E. Imposto Progressivo. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, Volume 54, p. 11-12, 2004.
- [3] *RECEITA FEDERAL DO BRASIL*. IRPF (Imposto sobre a renda das pessoas físicas). Disponível em: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica#calculo_mensal_IRPF> Acesso em: 10 set. 2018

Rubia Santos
Instituto de Matemática Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
<rubia.oliveira@ufms.br>

Maiara Marques
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
<maiara.nborges@gmail.com>

Recebido: 11/02/2019

Sistema de números reais: intuição ou rigor?

José C. Magossi

Resumo

É clássico que algumas ideias presentes em *cursos de Cálculo* remontam à Antiguidade, desde Arquimedes, que, entre outros cientistas, debatia também a existência do *continuum* . Esse problema foi abordado por I. Newton e G. W. Leibniz, os quais, no século XVII, desenvolveram o Cálculo. Mas a intuição geométrica, já no século XVIII, não dava conta de resolver problemas de “continuidade” que se apresentavam aos matemáticos. B. Bolzano, A. L. Cauchy, K. Weierstrass e R. Dedekind questionavam os fundamentos e iniciaram a era do rigor em matemática, cujo Norte acaba por ser o sistema dos números reais: *um corpo ordenado completo* . Um diagnóstico em livros atuais de Cálculo mostra-nos que intuição e rigor mesclam-se, seja em definições ou em demonstrações. Isso pode gerar dúvidas ao leitor menos atento. Objetiva-se expor um cenário em que a intuição geométrica revele estratégias pedagógicas e o rigor indique a necessidade da precisão matemática¹.

Palavras-chave: Intuição; Rigor; Sistema de Números Reais; Teorema do Valor Médio; Teorema do Valor Intermediário.

Abstract

It is classic that some ideas present in courses of Calculus go back to Antiquity, since Archimedes, who, among other scientists, also debated the existence of the continuum. This problem was addressed by I. Newton and G. W. Leibniz, who, in the seventeenth century, developed the Calculus. But geometric intuition, as early as the eighteenth century, did not solve problems of “continuity” that presented themselves to mathematicians. B. Bolzano, A. L. Cauchy, K. Weierstrass, and R. Dedekind questioned the foundations and began the era of rigor in mathematics, whose North turns out to be the system of real numbers: a complete ordered body. A diagnosis in current books of Calculus shows us that intuition and rigor merge, whether in definitions or in demonstrations. This may create doubts for the less attentive reader. The objective is to present a scenario in which geometric intuition reveals pedagogical strategies and rigor indicates the need for mathematical precision.

Keywords: Intuition; Rigor; Real Number System; Mean Value Theorem; Intermediate Value Theorem.

¹Uma pequena parte deste artigo foi apresentada no *V Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste* , ocorrido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, na cidade de Goiânia, de 26 a 30 de novembro de 2018, com auxílio financeiro do Faepex-Unicamp, projeto 3082/18.

1. Introdução

Na Grécia antiga, ao escrever *Os Elementos* [4], Euclides magistralmente expõe uma das mais potentes ferramentas da matemática, o sistema axiomático. Ele volta-se apenas para a geometria e exhibe a ideia de que um teorema é uma asserção matemática obtida por dedução, com base em axiomas e regras lógicas de inferência. *Os Elementos*, de Euclides, impacta em vários setores da ciência e torna-se referência básica em matemática. Além disso a matemática grega deixa também como herança a discussão sobre as *quantidades infinitamente pequenas* [1], as quais, para I. Newton e G. Leibniz, revelam o Cálculo. No período do surgimento do Cálculo, a intuição geométrica torna-se o patamar sob o qual as discussões matemáticas são estabelecidas. As demonstrações pautadas na intuição geométrica dão-se, com muita força, no século XVIII e início do XIX. Problemas com o *continuum*, convergência, séries e funções colocavam os matemáticos em um terreno desconfortável, no qual a intuição geométrica, com belas justificativas, falhava no quesito rigor matemático. Foi em meados do século XIX e início do XX que a intuição geométrica deu lugar ao sistema axiomático lógico-dedutivo, isto é, ao rigor e à análise. Com isso, teoremas que outrora eram justificados com base na intuição e geometria, doravante seriam demonstrados por um sistema axiomático cujos teoremas nada mais seriam do que aqueles obtidos por dedução lógica no sistema de números reais, isto é, num *corpo ordenado completo*. O Teorema do Valor Intermediário-TVI e o Teorema do Valor Médio-TVM são exemplos típicos, pois são teoremas de fácil entendimento no sentido intuitivo e geométrico, mas que precisam do sistema de números reais para serem demonstrados com rigor. Um diagnóstico em livros de Cálculo revela que axiomas de completude, importante componente do sistema de números reais, raramente são exibidos e tampouco comentários sobre o sistema axiomático são mostrados. Nos teoremas TVI e TVM, nos referidos livros, há exposições sobre as facilidades de interpretação geométrica e aplicações, mas dificilmente se diz algo sobre a dificuldade em se obter uma demonstração rigorosa, tal como sucedeu no processo histórico. Fica a impressão, para o leitor menos atento, de que o objetivo é mostrar que esses teoremas são geometricamente evidentes, o que, de certa forma, não deixa de ser um equívoco histórico. É importante, segundo O. Toeplitz [23], que se indiquem as condições nas quais um conceito surgiu, devendo-se também ser preciso com a gênese de seu surgimento. Essa precisão é importante estar presente na explicação dos TVI e TVM.

Toeplitz seeks to present the great discoveries in all their drama, to let him witness the origins of the problems, concepts, and facts. But he does not want to have his method labeled "historical." The historian—the mathematical historian as well— must record all that has been, whether good or bad. I, on the contrary, want to select and utilize from mathematical history only the origins of those ideas which came to prove their value ([23], pxi², Prefácio de G. Köthe, Mainz, Easter, 1949).

A insistência na intuição e geometria, no que concerne aos teoremas TVI e TVM, caracteriza uma matemática fragmentada e desconexa, em que o sistema de números reais, por um lado, é dito ser a base do Cálculo e apresentado aos alunos já nos cursos anteriores à Universidade³, e por outro

²Toeplitz busca apresentar as grandes descobertas em todo o seu drama, para que se testemunhem as origens dos problemas, conceitos e fatos. Mas ele não quer que seu método seja rotulado de "histórico". O historiador – o historiador matemático também – deve investigar todos os fatos que ocorreram, sejam eles bons ou ruins. Eu, ao contrário, quero selecionar e utilizar da história matemática apenas as origens daquelas ideias que vieram provar o seu valor (Tradução do autor).

³Os alunos do ensino médio tomam contato com várias propriedades dos números reais, tais como *ordem*, *estruturas algébricas* etc., mas não lhes é dito sobre a construção de um número real ou sobre sua existência.

permanece ausente quando da demonstração e explicação de teoremas. Por exemplo, o teorema do valor intermediário, em muitos livros de Cálculo, é exposto como se fosse um teorema cuja demonstração é autoevidente e não o oposto, uma demonstração revelada apenas por meio de uma demonstração rigorosa. Nas palavras de Jean Mawhin,

C'est Bernard BOLZANO qui le premier, en 1817, sentit la nécessité de donner une démonstration analytique de ce résultat, considéré jusqu'alors comme "géométriquement" évident ([17], p123)⁴.

Com muita propriedade Felix Klein cunha uma frase para indicar a drástica mudança na forma de operar a matemática nessa época; ele diz da *aritmética da matemática* [12]. A aritmética deixa de ser aplicada apenas a quantidades finitas, mas também a quantidades infinitamente pequenas (ou quantidades infinitamente grandes). É a fase da mudança da intuição e geometria para o rigor [19]. Ainda na vertente da discussão sobre intuição e geometria, sobre a inserção pedagógica de métodos intuitivos e processos de rigor, Raymond L. Wilder faz um comentário que sintetiza o seguinte questionamento: *Qual é o divisor de águas entre intuição e rigor?*

*Early in the nineteenth century Cauchy placed the calculus on an essentially modern basis; Abel, Gauss, and Cauchy developed a rigorous treatment of infinite series; and later in the century Weierstrass worked at the "arithmetization" of analysis. A characteristic of the latter was the freeing of analysis from the intuitive geometric type of proof so prevalent at that time. (...) We must here keep in mind, however, that to "free" a theory of certain notions does not necessarily imply that those notions forever thereafter cease to be of use. (...) We might recall here that we make similar concessions to pedagogy in the teaching of high school geometry, not striving to place it on a truly axiomatic basis but allowing the student to use "preconceived notions" such as "straight," "distance," "measure." (...) Such pedagogic devices are entirely justifiable, of course, except that it is questionable just how long the student should be kept insulated from the underlying "concessions." Certainly he should not be allowed to believe that he is receiving **dogma** ([24], pp200-201)⁵.*

O objetivo deste artigo não é indicar que se devam substituir cursos de Cálculo por cursos de Análise Matemática, mas sim caracterizar que cenários matemáticos devam ser elaborados de modo que o aluno visualize o desenvolvimento da matemática e que tenha clareza dos períodos de transformação matemática. No caso deste artigo, o objetivo é indicar a relevância da passagem

⁴Foi Bolzano quem primeiro, em 1817, sentiu a necessidade de fornecer uma demonstração analítica desse resultado, considerado até então como "geométricamente" evidente (Tradução do autor).

⁵No início do século XIX Cauchy colocou o cálculo numa base essencialmente moderna; Abel, Gauss e Cauchy desenvolveram um rigoroso tratamento de séries infinitas; e, no fim do século, Weierstrass trabalhou na "aritmética da análise". Uma característica desse último foi a libertação da análise do tipo de prova por intuição geométrica tão predominante naquela época. (...) Aqui temos que ter em mente, contudo, que a "libertação" numa teoria de certas noções não implica necessariamente que essas noções deixam de ser usadas para sempre depois disso. (...) Lembramos aqui que fazemos concessões pedagógicas semelhantes no ensino de geometria nas escolas do ensino médio, sem grandes esforços para colocá-la em uma verdadeira base axiomática, mas permitindo que o aluno utilize de "noções preconcebidas" tais como "reta," "distância," "medida." (...) Tais dispositivos pedagógicos são inteiramente justificáveis, é claro, mas é questionável quanto tempo o estudante deve ser mantido isolado dessas subjacentes concessões. Certamente, ele não deve ser levado a acreditar que está recebendo um **dogma**. (Tradução do autor).

do período em que a intuição geométrica era imperiosa para o período em que o rigor entra em cena para resolver problemas matemáticos relacionados a uma aritmética do *continuum*. O fazer matemática não é simplesmente debruçar-se na elaboração de processos de dedução de teoremas com base em premissas, mas também pensar, refletir sobre questões muitas vezes tangentes aos problemas em foco, os quais podem indicar intuições que farão a diferença quando se está diante de um processo dedutivo. O fazer matemática oscila entre o pensar de forma reducionista, quando, *grosso modo*, o conhecimento das partes implica o conhecimento do todo, e o pensar holístico, quando o todo é mais do que o conhecimento das partes. Assim, indução, dedução e heurísticas são possíveis formas de abordar a matemática com sucesso. Uma discussão semelhante é indicada por Felix Klein ([13], p208). O estudioso, interessado ou leitor de matemática, ao tomar conhecimento dessas transformações matemáticas, pode muito bem querer se aventurar na descoberta matemática [16] e em sua investigação, seja ela heurística, indutiva ou dedutiva.

Este artigo inicia-se com uma breve exposição dos axiomas de completude, sistema de números reais, TVI e TVM. Segue-se um diagnóstico da presença ou não desses tópicos em cursos de Cálculo, corroborando a ideia de que a intuição geométrica, útil para fins pedagógicos, não deve ser confundida com rigor, essencial em processos lógicos dedutivos. Após isso, mostra-se um cenário de apresentação do Teorema do Valor Intermediário e Médio, incentivando, assim, uma matemática contextualizada e não fragmentada. Mais ainda, não há como deixar de lado a “revolução científica”, no sentido de Thomas Kuhn [15], que o conceito de limites caracteriza na matemática ([9], p2) com o surgimento da era do rigor.

2. Axiomas de Completude, Teorema do Valor Intermediário e Médio

Em matemática há também *best-sellers*. É o caso do livro *Foundations of Geometry*, de D. Hilbert, publicado no final do século XIX [11]. Nesse livro, tal como nos *Elementos* de Euclides, Hilbert descreve um método axiomático moderno, que, segundo ele, deveria estabelecer um sistema de axiomas para a geometria que fosse tão simples quanto possível, e *completo*. Hilbert explica que a palavra “completo” indica que todos os teoremas da geometria de Euclides deveriam ser dedutíveis do conjunto de axiomas exposto no livro. À parte das discussões acerca dos fundamentos da matemática, presentes entre os interlocutores de Hilbert, o termo *axioma de completude* aparece a partir da segunda edição de seu livro, modificado na sétima edição, e também na versão traduzida para o francês, em 1902, para indicar a ideia de que cada intervalo na reta contém um ponto limite ([18], pp110-111, e [24], pp36-38). Assim, torna-se então possível caracterizar a *reta real* como sendo uma reta composta de números reais em correspondência um-a-um, ou seja, cada ponto geométrico corresponde a um número real. Segundo Hilbert, axiomas de completude auxiliam, por exemplo, na demonstração do teorema de Bolzano [21] (ou Teorema do Valor Intermediário, ([2], p138)) e do Teorema do Valor Médio, os quais, segundo H. Teismann, estão entre os quatro pilares do Cálculo (os outros dois pilares são os Teoremas do Valor Extremo e o Teorema de Darboux) ([22], p101).

Essa trajetória, desde Euclides até Hilbert, mostra a importância dos sistemas axiomáticos para o desenvolvimento da matemática, que culmina, na era do rigor, em um sistema axiomático denominado *sistema de números reais*, o qual é um corpo ordenado completo. Nele há propriedades de corpo, álgebra abstrata e propriedades de ordem do conjunto \mathbb{R} , em conexão com a propriedade de

completude. Os axiomas de completude⁶, importantes para o tratamento de limites e continuidade, compreendidos apenas no final do século XIX, são condições *sine qua non* para o estabelecimento do rigor na Análise Matemática [2] e, conseqüentemente, no Cálculo⁷.

Na seqüência, expõem-se o axioma de completude, o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema do Valor Médio, que são, como meta deste artigo, objeto de investigação e diagnóstico em livros de Cálculo utilizados em cursos de graduação. As demonstrações, clássicas, seguem, para fins didáticos e de unificação de notação, as apresentadas em R. G. Bartle e D. R. Sherbert [2]. Assumem-se também como conhecidas as definições de continuidade, funções, gráficos, supremo, ínfimo etc., clássicas em livros de Cálculo e Análise.

Axioma do Supremo - AS. [*Axioma de completude de números reais*]. Cada conjunto não vazio de números reais que é limitado superiormente possui um supremo em \mathbb{R} ([2], p39).

Teorema do Valor Intermediário de Bolzano - TVI. Seja I um intervalo e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I . Se $a, b \in I$ e se $k \in \mathbb{R}$ satisfaz que $f(a) < k < f(b)$, então existe um ponto $c \in I$ entre a e b tal que $f(c) = k$ ([2], p138).

Teorema do Valor Médio - TVM. Supõe-se que f seja uma função contínua em um intervalo fechado $I = [a, b]$, e que f seja derivável no intervalo aberto (a, b) . Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

([2], p173).

3. Diagnóstico

Intuição ou rigor não são termos excludentes no que concerne a estratégias de ensino de Cálculo. É bem possível lançar mão da intuição geométrica com fins pedagógicos e utilizar, em momentos apropriados, o rigor matemático. Exibir um contexto claro, seja com intuição, seja com rigor, é essencial em termos didáticos. O diagnóstico que se faz em livros de Cálculo é o de que justificativas geométricas e intuitivas do TVI e TVM acabam por não indicar o real significado desses teoremas. Entende-se que se faz necessário dizer sobre axiomas de completude e sobre o método dedutivo, para que os desenvolvimentos do século XIX e início do XX possam ser compreendidos e que, conseqüentemente, se entenda o porquê das demonstrações. Mais ainda, a ausência de axiomas de completude em livros de Cálculo faz com que alguns conceitos matemáticos fiquem velados, por conta, principalmente, da ausência de caminhos claros nas demonstrações de teoremas no sistema de números reais.

Richard Dedekind (1831-1916) observa, em seu livro *Essays on the theory of numbers - Continuity and Irrational Numbers - The Nature and Meaning of Numbers*:

⁶No Capítulo 11 do livro *Contradictions, from Consistency to Inconsistency*, os autores indicam novos axiomas de completude para o sistema de números reais [20].

⁷Há também o *Axioma da Escolha*, pertencente ao domínio da Lógica, conforme citado por Jean Dieudonné ([7], p6).

In discussing the notion of the approach of a variable magnitude to a fixed limiting value, and especially in proving the theorem that every magnitude which grows continually, but not beyond all limits, must certainly approach a limiting value, I had recourse to geometric evidences (...). For myself this feeling of dissatisfaction (...). I should find a purely arithmetic and perfectly rigorous foundation for the principles of infinitesimal analysis ([6], pp1-2)⁸.

Fica clara a insatisfação de Dedekind com a aceitação de fatos óbvios na matemática sem que sejam precedidos de uma demonstração rigorosa. Essa insatisfação levou-o a elaborar um método para construir o conjunto dos números reais, hoje em dia conhecido como *cortes de Dedekind* ([10], p177).

Não só Dedekind, mas outros matemáticos também buscaram o rigor na matemática. B. Bolzano, em 1817, foi um dos precursores na identificação da importância dos números reais na matemática. Para ele, o TVM, geometricamente evidente, carecia de uma demonstração rigorosa ([17], p123). Mas não somente o TVM, o Teorema do Valor Intermediário também ocorre em livros de Cálculo com justificativas intuitivas, sem comentários sobre sua importância no desenvolvimento da era do rigor em matemática. No livro *Analysis by Its History*, E. Hairer e G. Wanner comentam sobre o Teorema do Valor Intermediário:

This theorem appears geometrically evident and was used by Euler and Gauss without scruples (...) Only Bolzano found that “rein analytischer Beweis” was necessary to establish more rigor in Analysis and Algebra ([10], p206)⁹.

O Teorema do Valor Intermediário ocorre, em muitos livros, sob a forma geométrica delineando apenas suas características intuitivas. É comum observar, sobre o TVI, a seguinte frase: “... é um teorema que nos diz que é possível *desenhar uma função sem tirar o lápis do papel*.” Ou seja, fatos óbvios são elencados sem, em contrapartida, a exposição de que são teoremas que induziram a transformações na história da matemática. Como já citado, B. Bolzano foi um dos primeiros cientistas a perceber que essa intuição necessita de um tratamento mais rigoroso.

Neste artigo, escolheram-se esses dois teoremas, TVI e TVM, haja vista que, em suas definições, há um forte entendimento intuitivo e, de certa forma, sob a ótica do leitor iniciante em matemática, dispensam demonstração, pois são autoevidentes. H. Teismann [22], num artigo sobre axiomas de completude, denomina os teoremas que podem ser considerados os quatro pilares do Cálculo, a saber, *Teorema do Valor Intermediário*, *Teorema do Valor Médio*, *Teorema do Valor Extremo* e *Teorema de Darboux*.

In fact, one first-year student recently told me that her high school teacher had called these statements² “silly theorems”, presumably because they are so obvious/self-

⁸Ao discutir a noção de aproximação de uma magnitude variável para um valor de limite fixo, e especialmente ao provar o teorema de que cada magnitude que cresce continuamente, mas não além de todos os limites, deve certamente aproximar-se de um valor fixo, eu tive que recorrer a evidências geométricas (...). Para mim esse sentimento de insatisfação (...). Eu deveria achar uma base puramente aritmética e perfeitamente rigorosa dos princípios de análise infinitesimal (Tradução do autor)

⁹Esse teorema aparenta ser geometricamente evidente e foi utilizado por Euler e Gauss sem escrúpulos (...) Somente Bolzano entendeu que “uma Prova puramente analítica” era necessária para estabelecer mais rigor na Análise e álgebra (Tradução do autor).

evident that only “silly” mathematicians would make any fuss about them ([22], p103)¹⁰.

A nota de rodapé “ 2 ” nessa citação é a seguinte:

Most likely, referring only to the first three, as Darboux’s Theorem is almost never mentioned in high school¹¹.

No entanto, essa característica de autoevidência é exatamente o que motivou os desenvolvimentos nos fundamentos da matemática [14] de forma a se ter hoje em dia o sistema de números reais. H. Teismann completa:

The fact that these “silly theorems” turn out to be equivalent to the completeness of the real numbers may offer a philosophical “explanation” as to why they almost seem to be too obvious. After all, the completeness of the reals itself appears completely self-evident and only becomes “a problem” when somebody (like B. Bolzano [4]) sets out to prove self-evident facts such as the Intermediate Value Theorem. In fact, Bolzano appears to have been the first to recognize the connection between the Intermediate Value Theorem and completeness. He also regarded the Intermediate Value Theorem as so self-evident that its mere confirmation would not have warranted a proof [4], ([22], p103)¹².

A referência [4] nessa citação refere-se ao texto de B. Bolzano, traduzido em [21]¹³.

Não é somente o Teorema do Valor Intermediário que gera problemas com intuição e geometria; há outros, entre eles cita-se o *Teorema do Valor Médio*, que é também muito forte na intuição geométrica. Sobre isso, Felix Klein escreve:

¹⁰Na verdade, um estudante do primeiro ano me disse recentemente que seu professor de escola secundária tinha chamado estas afirmações² de “*teoremas bobos*”, presumivelmente porque eles são tão óbvios/autoevidentes que somente matemáticos “bobos” fariam qualquer alvoroço sobre eles (Tradução do autor).

¹¹Muito provavelmente, referindo-se aos três primeiros, já que o Teorema de Darboux quase nunca é mencionado no ensino médio (Tradução do autor).

¹²O fato de esses “teoremas bobos” virem a ser equivalentes à completude de números reais pode oferecer uma “explicação” filosófica a respeito do porquê de parecerem tão óbvios. Afinal de contas, a completude dos reais parece totalmente autoevidente e só se torna “um problema” quando alguém (como B. Bolzano [4]) resolve provar fatos autoevidentes, tais como o Teorema do Valor Intermediário. Na verdade, Bolzano parece ter sido o primeiro a reconhecer a conexão entre o Teorema do Valor Intermediário e completude. Ele também considerava o Teorema do Valor Intermediário como tão autoevidente que sua mera *confirmação* não teria garantido uma prova [4] (Tradução do autor).

¹³[...] while the geometrical truth to which we refer here is [...] extremely evident, and therefore needs no proof in the sense of confirmation, it nonetheless needs justification. For its component concepts are obviously so combined that one cannot hesitate for a moment to say that it is not one of those simple truths which are called basic propositions, or basic truths [...]. It is a theorem or consequent-truth [...] and, therefore, [...] it must be proved by derivation from these other truths ([22], p103) (Tradução do autor: [...] enquanto a verdade geométrica à qual nos referimos aqui é [...] extremamente evidente, e portanto, não necessita de prova no sentido de confirmação, não obstante, ela necessita de justificação. Pois seus conceitos componentes são obviamente tão combinados, que não podemos hesitar por um momento em dizer que não se trata de uma daquelas verdades simples, chamadas de proposições básicas, ou verdades básicas [...]. é um teorema ou uma verdade consequente [...] e, portanto, [...] deve ser provado por derivação, de acordo com outras verdades básicas [...].)

How can I give an exact proof of the mean value theorem, without appealing to geometric intuition? (...) For this reason such rigorous proof had to wait for Weierstrass and his followers, to whom, also, we owe the spread of the modern arithmetic concept of the number continuum ([13], p213)¹⁴.

Esse teorema, por sua vez, como descrito em [2] é um “lobo na pele de cordeiro”:

In fact, the Mean Value Theorem is a wolf in sheep's clothing and is the Fundamental Theorem of Differential Calculus ([2], p174)¹⁵.

Não se pretende, neste texto, defender ou criticar o teorema do valor médio¹⁶, mas sim indicar a pluralidade de estratégias matemáticas, pedagógicas que sejam, viáveis a uma exposição coesa. São teoremas que ocorrem em livros de Cálculo e cuja “demonstração”, quando exibida, segue a intuição geométrica na maioria das vezes, ou seguem métodos dedutivos via axiomas de completude em raras ocasiões. Mais ainda, em alguns livros, “nas entrelinhas”, fica subentendido que a importância desse teorema está somente em sua interpretação geométrica. Esses dizeres, que justificam a intuição e geometria, ao serem ditos aos alunos, podem não lhes mostrar a trajetória importante, de Bolzano e seus contemporâneos, por exemplo, em buscar precisão em matemática.

Da forma como intuição e geometria são apresentadas nos livros de Cálculo, diga-se de passagem, como motores propulsores, um cuidado mais intenso deve-se ter para que não se confundam a essência dos conceitos matemáticos com a facilidade que se pode ter em transmiti-los. Às vezes pode ser mais apropriado seguir o rigor do que a intuição, pois o aluno precisa saber do século XVIII, do período de descobertas, do período de inúmeras interrogações acerca de transformações matemáticas [14]. O aluno pode muito bem conhecer as trajetórias históricas que fizeram com que essa intuição “generosa”, salvo olhares atentos, indicasse credibilidade nos teoremas sem questionamentos sobre rigor.

O diagnóstico¹⁷ nos livros pautou-se apenas pela presença de axiomas de completude e demonstrações dos TVI e TVM, observando a existência, ou não, da caracterização do sistema de números reais como sendo um corpo ordenado completo. Há outros pontos a serem observados que decorrem dessas mesmas observações, tais como o conceito de integrais, o conceito de funções etc., mas que não foram tratados neste texto. Além disso, o diagnóstico foi feito no momento da escrita deste artigo, não se sabe se em outros momentos esse cenário e diagnóstico poderão se alterar.

¹⁴Como podemos fornecer uma prova exata do teorema do valor médio, sem apelar para a intuição geométrica? (...) Por essa razão, essa prova tão rigorosa teve que esperar por Weierstrass e seus seguidores, aos quais, também, nós devemos a disseminação do conceito da aritmética moderna de número contínuo. (Tradução do autor).

¹⁵ De fato, o Teorema do Valor Médio é um lobo na pele de cordeiro e é o Teorema Fundamental do Cálculo Diferencial (Tradução do autor)

¹⁶Os artigos de L. Bers e L. W. Cohen, por exemplo, indicam caminhos que, segundo eles, podem ser trilhados sem um foco excessivo no teorema do valor médio [3] e [5].

¹⁷Nesse diagnóstico foram analisados livros de Cálculo (vários deles) que comumente ocorrem nas referências bibliográficas dos cursos de Cálculo no Brasil. Deve-se notar que não foi feita uma análise estatística baseada numa grande amostra de dados. Abre-se espaço, desse modo, como parte de trabalhos futuros, que uma análise estatística detalhada seja elaborada fundamentada em “todos” os livros de Cálculo publicados no Brasil e, quiçá, no exterior.

4. Cenário para uma matemática não fragmentada

O objetivo nesta seção é expor um cenário que facilite a visualização do Cálculo (e extensivamente, a Análise Matemática) como um sistema lógico-dedutivo. O ganho dessa exposição é o de tornar-se possível analisar com mais profundidade seus teoremas e obter ferramentas matemáticas necessárias para avançar em cursos nos quais esse ferramental é pré-requisito. Além disso, abre-se espaço para que o aluno possa se aventurar na busca por novas demonstrações e novos caminhos para a obtenção da demonstração desses teoremas (e possivelmente de outros). Com isso, estima-se que seja possível uniformizar a relação intuição-rigor. Há condições, desse modo, para que estratégias pedagógicas sejam elaboradas com vistas ao rigor e à intuição. Na sequência, expõe-se um cenário que identifica o sistema de números reais como sendo um corpo ordenado completo, no qual os axiomas de completude exercem um papel importante na caracterização dos processos lógico-dedutivos. Nesta seção escolhem-se dois teoremas para fazer parte desse cenário: o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema do Valor Médio. Esses são dois teoremas que, segundo o diagnóstico na seção anterior, são expostos nos livros levando em conta, na maioria das vezes, apenas a intuição geométrica. Ou seja, leva-se em conta o óbvio, conforme relatos obtidos em estudos com foco na gênese da descoberta desses conceitos. O que se expõe nos livros, com fins didáticos, acredita-se, é de certa forma apenas uma pequena parte dos problemas e “angústias” matemáticas que marcaram determinadas épocas. A exposição *ipsis litteris* desses conceitos e descobertas matemáticas pode ser útil sob a ótica de estudos da História da Matemática (ou História da Ciência) e também da Epistemologia, mas não sob a ótica da busca de ferramental matemático necessário ao fazer matemática e aos aspectos pedagógicos. Ou seja, é preciso refletir sobre o melhor cenário de exposição, se o objetivo é pedagógico, ou se é fazer matemática.

O cenário ora exposto leva em conta os axiomas de corpo e de ordem, bem como o axioma de completude, clássico em textos de Análise, popularmente conhecido como axioma do supremo. A demonstração de apenas alguns teoremas é feita, principalmente, daqueles teoremas que compõem a demonstração do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema do Valor Médio.

4.1. Teoremas relacionados ao TVI e ao TVM

Nesta seção, exibem-se os teoremas que serão utilizados nas demonstrações do TVI e do TVM. Por serem clássicos, apenas para alguns deles as demonstrações serão feitas (uma adaptação, em alguns casos, daquelas expostas em [2]). Para os outros teoremas seguem as demonstrações contidas no excelente livro *Introduction to Real Analysis* de Robert G. Bartle e Donald R. Sherbert. Assume-se, como hipótese, o sistema de números reais, tal como exposto em [2]. O objetivo principal é mostrar a dependência de teoremas, mostrar o processo dedutivo que é utilizado para compor as demonstrações dos TVI e TVM. Não é objetivo expor, tal como está escrito, a sequência completa de formação dos Teoremas do Valor Intermediário e Valor Médio, mas sim alguns teoremas, os mais significativos para a composição do TVI e do TVM.

Axioma 1. Axioma do Supremo - AS [Axioma de completude de números reais]. *Cada conjunto não vazio de números reais que é limitado superiormente possui um supremo em \mathbb{R} ([2], p39).*

Teorema 1 (Propriedade de Arquimedes). ([2], p42). *Se $x \in \mathbb{R}$, então existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$.*

Teorema 2 (Propriedade dos Intervalos Encaixantes - IE). ([2], p48). Se $I_n = [a_n, b_n]$ para $n \in \mathbb{N}$ é uma seqüência encaixante de intervalos fechados e limitados, então existe um número $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Desde que os intervalos são encaixantes, tem-se que $I_n \subseteq I_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e também que $a_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, o conjunto de números reais não vazio $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente, e assim existe, pelo axioma de completude (**axioma do supremo**), um número real $\xi = \sup(A)$. É óbvio que $a_n \leq \xi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostra-se que $\xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O objetivo é mostrar que para qualquer n em particular, o número b_n é um limitante superior para o conjunto $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Para isso consideram-se os casos:

i) Se $n \leq k$, então desde que $I_k \subseteq I_n$, tem-se que $a_k \leq b_k \leq b_n$.

ii) Se $k < n$, então desde $I_n \subseteq I_k$, tem-se que $a_k \leq a_n \leq b_n$.

Assim, conclui-se que $a_k \leq b_n$ para todo k , assim como b_n é um limitante superior do conjunto $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Portanto, $\xi \leq b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Desde que $a_n \leq \xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\xi \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 3. ([2], p63). Uma seqüência convergente de números reais é limitada.

Teorema 4. ([2], p64). (a) Sejam $X = (x_n)$ e $Y = (y_n)$ seqüências de números reais que convergem para x e y , respectivamente, e seja $c \in \mathbb{R}$. Então, as seqüências $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$ e cX convergem para $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ e cx , respectivamente. (b) Se $X = (x_n)$ converge para x e $Z = (z_n)$, é uma seqüência não nula de números reais que converge para z e se $z \neq 0$, então a seqüência quociente $\frac{X}{Z}$ converge para $\frac{x}{z}$.

Teorema 5. ([2], p65). Se $X = (x_n)$ é uma seqüência convergente de números reais e se $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x = \lim(x_n) \geq 0$.

Teorema 6. ([2], p65). Se $X = (x_n)$ e $Y = (y_n)$ são seqüências convergentes de números reais e se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.

Teorema 7. ([2], p66). Se $X = (x_n)$ é uma seqüência convergente de números reais e se $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a \leq \lim(x_n) \leq b$.

Teorema 8. ([2], p66). Sejam $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ e $Z = (z_n)$ seqüências de números reais tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. Então $Y = (y_n)$ é convergente e $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$.

Teorema 9 (Teorema da Convergência Monótona). ([2], pp71-72). Uma seqüência monótona de números reais é convergente se e somente se ela é limitada. Além disso:

a) Se $X = (x_n)$ é uma seqüência limitada crescente então $\lim(x_n) = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

b) Se $Y = (y_n)$ é uma seqüência limitada decrescente então $\lim(y_n) = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 10 (Teorema da Subseqüência Monótona). ([2], p80). Se $X = (x_n)$ é um seqüência de números reais, então existe uma subseqüência de X que é monótona.

Teorema 11 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). ([2], p81). *Uma sequência limitada de números reais tem uma subsequência convergente.*

Teorema 12. ([2], p115). *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $c \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A . Se*

$$\lim_{x \rightarrow c} f > 0 \quad [\text{respectivamente, } \lim_{x \rightarrow c} f < 0],$$

então existe uma vizinhança $V_\delta(c)$ de c tal que $f(x) > 0$ [respectivamente, $f(x) < 0$] para todo $x \in A \cap V_\delta(c)$ com $x \neq c$.

Teorema 13 (Teorema do limitante). ([2], p135). *Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I . Então f é limitada em I .*

Teorema 14 (Teorema do máximo e mínimo). ([2], p136). *Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I . Então f tem um máximo absoluto e um mínimo absoluto em I .*

Teorema 15 (Teorema de Localização de Raízes - LR). ([2], p137). *Seja $I = [a, b]$ e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I . Se $f(a) < 0 < f(b)$, ou se $f(a) > 0 > f(b)$, então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demonstração. Assume-se que $f(a) < 0 < f(b)$. Gera-se uma sequência de intervalos por meio de sucessivas bissecções. Seja $I_1 = [a_1, b_1]$, onde $a_1 = a$ e $b_1 = b$ com $p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ o ponto médio de I_1 . Se $f(p_1) = 0$ então toma-se $c = p_1$ e o teorema está provado. Se $f(p_1) \neq 0$, então ou $f(p_1) > 0$ ou $f(p_1) < 0$. Se $f(p_1) > 0$, então faz-se $a_2 = a_1$, $b_2 = p_1$, enquanto se $f(p_1) < 0$, então faz-se $a_2 = p_1$ e $b_2 = b_1$. Em quaisquer casos, faz-se $I_2 = [a_2, b_2]$, e tem-se $I_2 \subset I_1$ e $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$. Continua-se esse processo de bissecção. Supõe-se que os intervalos I_1, I_2, \dots, I_k tenham sido obtidos de modo análogo, por sucessivas bissecções. Então, tem-se que $f(a_k) < 0$ e $f(b_k) > 0$, e fazemos $p_k = \frac{a_k+b_k}{2}$. Se $f(p_k) = 0$, toma-se $c = p_k$ e o processo termina. Se $f(p_k) > 0$, então seja $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = p_k$, enquanto se $f(p_k) < 0$, seja $a_{k+1} = p_k$ e $b_{k+1} = b_k$. Em quaisquer casos, faz-se $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$; então $I_{k+1} \subset I_k$ e $f(a_{k+1}) < 0$ e $f(b_{k+1}) > 0$.

Se o processo terminar com um ponto p_n tal que $f(p_n) = 0$, então o processo termina. Se o processo não terminar, então obtém-se uma sequência de intervalos encaixantes limitada e fechada $I_n = [a_n, b_n]$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$f(a_n) < 0 \text{ e } f(b_n) > 0.$$

Além disso, desde que os intervalos são obtidos por repetidas bissecções, o comprimento de I_n é igual a $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$. Isso segue da Propriedade de Intervalos Encaixantes - IE que existe um ponto $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que $a_n \leq c \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Desde que f é uma função contínua em $x = c$, tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

O fato de que $f(a_n) < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica que

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n)) \leq 0.$$

Também, o fato de que $f(b_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica que

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(b_n)) \geq 0.$$

Portanto, conclui-se que $f(c) = 0$. Consequentemente, c é uma raiz de f . □

Teorema 16 (Teorema do Valor Intermediário de Bolzano - TVI). ([2], p138). *Seja I um intervalo e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I . Se $a, b \in I$ e se $k \in \mathbb{R}$ satisfaz que $f(a) < k < f(b)$, então existe um ponto $c \in I$ entre a e b tal que $f(c) = k$.*

Demonstração. Suponha que $a < b$ e que $g(x) = f(x) - k$. Assim, $g(a) < 0 < g(b)$. Pelo teorema de Localização de Raízes - LR, existe um ponto c com $a < c < b$ tal que $0 = g(c) = f(c) - k$. Portanto $f(c) = k$. Se $b < a$, então seja $h(x) = k - f(x)$ tal que $h(b) < 0 < h(a)$. Portanto existe um ponto c com $b < c < a$ tal que $0 = h(c) = k - f(c)$, logo $f(c) = k$. □

Teorema 17 (Teorema do interior extremo). ([2], p172). *Seja c um ponto interior de um intervalo $I = [a, b]$ no qual $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tem um extremo relativo. Se a derivada de f em c existe, então $f'(c) = 0$.*

Teorema 18 (Teorema de Rolle). ([2], p172). *Suponha que f é uma função contínua em um intervalo fechado $I = [a, b]$, que a derivada f' existe em cada ponto do intervalo aberto (a, b) e que $f(a) = f(b) = 0$. Então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 19 (Teorema do Valor Médio). ([2], p173). *Suponha que f seja uma função contínua em um intervalo fechado $I = [a, b]$, e que f seja derivável no intervalo aberto (a, b) . Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Considera-se a função ϕ definida em I da seguinte forma:

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

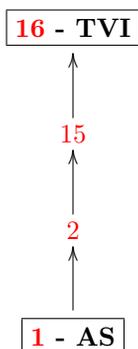
A hipótese do teorema de Rolle é satisfeita por ϕ , uma vez que ϕ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Portanto, existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$0 = \phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

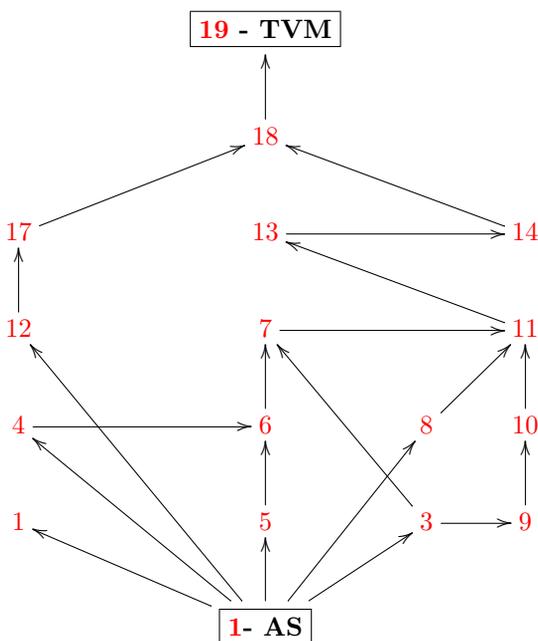
Portanto, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

O objetivo principal nesta seção é expor um cenário, associado ao TVI e ao TVM, para mostrar que o Cálculo pode ser visto também como um sistema lógico-dedutivo, sem se perder em excessos de rigor. Abre-se espaço, desse modo, para que estratégias pedagógicas sejam elaboradas com vistas ao rigor e à intuição. As seguintes árvores de dependência ($A \rightarrow B$ significa que na demonstração de B utiliza-se de A) expõem a complexidade de teoremas, vistos como evidentes, mas cuja demonstração exige o conhecimento do sistema de números reais.

Cenário para o TVI. Uma árvore de formação para o Teorema do Valor Intermediário.



Cenário para o TVM. Uma árvore de formação para o teorema do valor médio.



A árvore de formação do TVM é uma das inúmeras possibilidades de dedução desse teorema, que segue, neste texto, com numeração própria, os teoremas apresentados em [2]. Ao se alterarem os axiomas de completude, alteram-se as dependências dos teoremas que funcionam como nós na árvore. Qual é a árvore mais “econômica” com que se pode atingir o TVI, ou o TVM? Inúmeras perguntas podem ser elaboradas pelos alunos, e todas elas acabam por se relacionar ao real processo histórico em que se tornam claros a gênese do surgimento do conceito e seu processo de desenvolvimento histórico. É importante notar que cabe ao docente a escolha da estratégia pedagógica a ser adotada em cursos de Cálculo. A exposição de cenários em que leva em conta a essência da construção de conceitos (e das demonstrações de teoremas) não implica que o aluno

está diante de um curso de Análise Matemática. O que se propõe com as discussões acima é simplesmente exibir cenários, contextos, em que esteja claro o porquê do surgimento de um conceito matemático, o porquê das demonstrações de teoremas, e, por conseguinte, o porquê dos processos de transformação. A escolha entre “exibir”, “indicar” ou “demonstrar” faz parte do cenário, diga-se contexto, escolhido para compor uma aula de Cálculo.

5. Conclusão

Exibiu-se uma discussão acerca do sistema de números reais utilizados nos cursos de Cálculo. Defende-se a importância da intuição geométrica, seja como meio de desenvolvimento matemático, seja como estratégia pedagógica. No entanto, deve-se ter clareza na distinção entre a *intuição e geometria* como parte de interrogações históricas, e intuição e geometria como parte de *estratégias pedagógicas*. Isso é tão importante quanto diferenciar uma demonstração matemática (uma dedução num sistema axiomático) de sua contraparte intuitiva, sem rigor matemático. Falta de clareza implica possíveis erros de compreensão de conceitos e possíveis olhares para o Cálculo (e Análise Matemática) como um **amontoado** de teoremas sem conexão. O exemplo da árvore de formação do TVI e do TVM mostra essa perspectiva. *Intuição ou rigor?* Essa é a questão deste artigo.

Para levantar questionamentos, invocam-se os Teoremas do Valor Intermediário e do Valor Médio, ambos com forte apelo intuitivo, os quais facilmente percorrem o caminho de justificativas óbvias em detrimento de demonstrações. Propõe-se que o sistema de números reais seja exposto nos livros de Cálculo, não com o objetivo de se trabalhar num sistema preciso de demonstrações tal como a Análise Matemática, mas sim com o objetivo de indicar os problemas que levaram anos para ser resolvidos, os quais, se encarados apenas com intuição e geometria, perdem a razão da existência. Dois cenários são expostos relacionados aos dois teoremas TVI e TVM para mostrar que ambos advêm de outros teoremas por meio de um sistema dedutivo, inseridos no sistema de números reais. Com isso, estima-se que os leitores possam absorver com mais facilidade a ideia de que os axiomas de completude servem para caracterizar a existência do sistema de números reais.

É claro que essa existência parte do pressuposto da aceitação, de alguma forma, da ideia de infinitésimos, da ideia de uma *nova aritmética*, tal como indicado por Felix Klein [12]. Sobre infinitésimos, talvez seja interessante refletir sobre os dizeres de Felix Klein [13] a respeito do livro *Lehrbuch der Experimentalphysik*,¹⁸ do autor Adolph Wüllner (1907).

*I urge you to read this introduction with the eye of the mathematician and to reflect upon the absurdity of suppressing infinitesimal calculus in the schools because it is too difficult (...)([13], p217).*¹⁹

Cabe a cada professor fazer a escolha pedagógica apropriada. Não se defende neste texto que os cursos de Cálculo transformem-se em cursos de Análise Matemática, mas que sejam indicados aos alunos os processos transformadores da matemática, os quais acarretam desenvolvimentos matemáticos e tecnológicos.

What is the calculus? (...). The calculus can be fruitfully viewed and effectively taught as a set of intuitively understood problem-solving techniques, widely appli-

¹⁸Manual de Física Experimental (Tradução do autor).

¹⁹Eu insisto que vocês leiam esta introdução com o olhar do matemático e reflitam sobre o absurdo de suprimir o cálculo infinitesimal nas escolas porque ele é muito difícil (...)(Tradução do autor).

cable to geometry and to physical systems. (...)The calculus is something else as well, however: a set of theorems, based on precise definitions, about limits, continuity, séries, derivatives, and integrals. (...) These two different aspects-use and justification- of the calculus, simultaneously coexisting in the modern subject, are in fact the legacies of two different historical periods: the eighteenth and the nineteenth centuries ([9], p1).²⁰

Neste texto, indicou-se apenas um cenário entre os muitos possíveis acerca da discussão sobre sistema dedutivo. O objetivo é exatamente o incentivo aos processos de dedução que de certa forma *constroem* a análise matemática. Há outros exemplos de processos de transformação semelhantes ao exposto neste texto. Pode-se citar o caso do desenvolvimento das integrais de Henstock-Kurzweil, em que, a partir de “simples” alterações na definição das partições em *somas de Riemann*, obtém-se uma nova definição de integrais, generalizadas, que englobam uma classe muito maior de funções integráveis [8].

Referências

- [1] Alexander, Amir. *Infinitesimal - A teoria matemática que mudou o mundo*. Jorge Zahar Editor Ltda, Rio de Janeiro, 2014.
- [2] Bartle, Robert. G.; Sherbert, Donald R. *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition, Wiley India Edition, New Delhi, 2011.
- [3] Bers, L. *On Avoiding the Mean Value Theorem*. American Mathematical Monthly **74**, 5, 583, 1967.
- [4] Bicudo, Irineu. *Os Elementos - Euclides*. Tradução de Irineu Bicudo. Editora Unesp, Rio Claro, 2009.
- [5] Cohen, L.W. *On being mean to the Mean Value Theorem*. American Mathematical Monthly, **74** (5), 581-582, 1967.
- [6] Dedekind, Richard. *Essays on the theory of numbers-Continuity and Irrational Numbers-The Nature and Meaning of Numbers*, The Open Court Publishing Company, 1901 (first publication). Dover Publications, 1963, 2010.
- [7] Dieudonné, Jean. *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, 1960, 1969.
- [8] Gordon, Russell A. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. No. 4. American Mathematical Society, 1994.
- [9] Grabiner, Judith V. *The Origin of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover Publications, Inc., New York, 1981.
- [10] Hairer, E.; Wanner, G. *Analysis by Its History*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [11] Hilbert, David. *Grundlagen der Geometrie*. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen, Teubner, Leipzig, 1899. Tradução para o inglês por E. J. Townsend, PH.D.: *The Foundations of Geometry*, Open Court, Chicago, 1902.

²⁰O que é o cálculo? (...). O cálculo pode ser proveitosamente visto e efetivamente ensinado como um conjunto de técnicas para resolver problemas intuitivamente compreensíveis, amplamente aplicáveis à geometria e a sistemas físicos. (...) O cálculo é também, no entanto, alguma coisa diferente: um conjunto de teoremas, baseado em definições precisas, sobre limites, continuidade, séries, derivadas e integrais. (...) Esses dois aspectos diferentes do cálculo – uso e justificação –, simultaneamente coexistindo nos assuntos modernos, são de fato dois legados de dois diferentes períodos históricos: os séculos XVIII e XIX. (Tradução do autor).

- [12] Klein, Felix. *Ueber Arithmetisirung der Mathematik. Göttinger Nachrichten* (Geschäftliche Mittheilungen), 1895, p82. (Miss Maddison's translation in the Bulletin, 2d series, vol. 2, p241, 1896), 1895.
- [13] Klein, Felix. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry*. Dover Publications, New York, 2004.
- [14] Kline, Morris. *Les fondements des mathématiques. La recherche*, v. 54, pp200-208, 1975.
- [15] Kuhn, Thomas. *A Estrutura das Revoluções Científicas*. Editora Perspectiva, São Paulo, 1994.
- [16] Lakatos, Imre. *Proofs and Refutations — The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press, 1976.
- [17] Mawhin, Jean. *Analyse: fondements, techniques, évolution*. De Boeck Université, Brussels, 1992. Second edition, 1997.
- [18] Moore, G. H. *A house divided against itself: the emergence of first-order logic as the basis for mathematics*. In: *Studies in the History of Mathematics*. Mathematical Association of America, pp98-136, New York, 1987.
- [19] Pierpont, James. *On the arithmetization of mathematics*. Bulletin of the American Mathematical Society, v. 5, n. 8, pp394-406, 1899.
- [20] Rioul, Olivier; Magossi, José Carlos. *A Local-Global Principle for the Real Continuum*. Studia Logica, Vol. 47, Capítulo 11, pp213-240. Special edition of Trends in Logic 47: Contradictions, from Consistency to Inconsistency. Editores: Prof. Walter Carnielli e Prof. Jacek Malinowski, Springer International Publishing, 2018.
- [21] Russ, S. B. *A translation of Bolzano's paper on the Intermediate Value Theorem*. Historia Mathematica, v.7, n.2, pp156-185, 1980.
- [22] Teismann, Holger. *Toward a More Complete List of Completeness Axioms*. Mathematical Association of America, The American Mathematical Monthly, Vol. 120, no. 2, February, pp99-114, 2013.
- [23] Toeplitz, Otto. *The Calculus — A Genetic Approach*. Chicago University Press, Chicago, 2007.
- [24] Wilder, Raymond L. *Introduction to The Foundations of Mathematics*. (First Edition, Wiley, 1952). Dover Publications, Second Edition, New York, 2012.

José C. Magossi
Faculdade de Tecnologia - FT - Unicamp
<magossi@ft.unicamp.br>

Recebido: 18/03/2019

Álgebra e teoria dos números para olimpíadas

Ana P. Chaves

Resumo

No texto a seguir, iremos nos debruçar sobre problemas de várias olimpíadas de Matemática, tanto nacionais como internacionais, com foco nos que abordam temas de álgebra e Teoria dos Números. O objetivo principal é estimular o envolvimento de alunos e professores em tais competições, discutindo soluções e propondo problemas.

Palavras-chave: Olimpíadas de matemática; álgebra; teoria dos números.

1. Olimpíadas: Um pouco de história

As Olimpíadas de Matemática, como conhecemos atualmente, são disputadas desde 1894, quando foram organizadas algumas competições na Hungria. A partir daí, competições similares espalharam-se pelo leste europeu, culminando, em 1959, com a organização da 1^a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), na Romênia, com a participação de apenas 7 países daquela região. Deste então, a competição tem se expandido, e em 2017, pela primeira vez realizada no Brasil, a 58^a IMO contou com a participação de 623 estudantes de 112 países de cinco continentes.

No Brasil, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organiza desde 1979 a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), chegando hoje à sua 41^a edição. Ao longo dos anos, várias olimpíadas regionais surgiram, entre elas, a Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (Omeg), realizada desde 1992 pelo IME-UFG. A ideia central dessas competições é estimular o estudo da Matemática pelos alunos, desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, influenciar na melhoria do ensino, além de descobrir jovens talentos.

Vários ex-medalhistas da IMO, como Artur Ávila, Grigory Margulis, Jean-Christophe Yoccoz, Laurent Lafforgue, Stanislav Smirnov, Terence Tao, Su-charit Sarkar, Grigori Perelman, Ngo Bao Chau e Maryam Mirzakhani, tornaram-se matemáticos excepcionais, sendo premiados com a medalha Fields, prêmio máximo da Matemática mundial.

2. Problemas de álgebra

A álgebra tem um papel fundamental, não apenas na Matemática, mas também em outros vários ramos da ciência. Sem a álgebra, não haveria uma linguagem uniforme para se expressar conceitos como a aritmética ou propriedades dos números. Portanto, é de extrema importância conhecer bem essa linguagem para ser capaz de compreender bem outras áreas da Matemática, tais como Teoria dos Números, Combinatória e até Geometria. Os problemas a seguir discutirão técnicas importantes que também são aplicáveis a outros tantos problemas de Olimpíada.

2.1. Problema 1

(OBM 2010) Sejam a, b e c números reais tais que $a \neq b$ e $a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2010$. Calcule $c^2(a+b)$.

Solução: Primeiro, note que de $a^2(b+c) = b^2(c+a)$, obtemos

$$\begin{aligned} a^2(b+c) &= b^2(c+a) \\ a^2b - b^2a + a^c - b^c &= 0 \\ ab(a-b) + c(a+b)(a-b) &= 0 \\ (a-b)(ab+bc+ca) &= 0. \end{aligned}$$

Como $a \neq b$, a última igualdade dá-nos $ab+bc+ca=0$. Agora, usando que $b^2(c+a)=2010$, tomando o valor desejado $c^2(a+b)=k$ e subtraindo ambos, conseguimos

$$\begin{aligned} 2010 - k &= b^2c - c^2b + b^2a - c^2a \\ &= bc(b-c) + a(b+c)(b-c) \\ &= (b-c)(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Mas como já havíamos conseguido $ab+bc+ca=0$, isso nos dá que o lado esquerdo da última igualdade acima é igual a zero, donde $c^2(a+b)=k=2010$.

2.2. Problema 2

(Romênia 2006) Encontre todos os números reais a e b satisfazendo

$$2(a^2+1)(b^2+1) = (a+1)(b+1)(ab+1).$$

Solução: Usando produtos notáveis, vamos desenvolver a equação dada no problema:

$$\begin{aligned} 2(a^2+1)(b^2+1) &= (a+1)(b+1)(ab+1) \\ 2(a^2b^2+a^2+b^2+1) &= (ab+a+b+1)(ab+1) \\ 2a^2b^2+2a^2+2b^2+2 &= a^2b^2+a^2b+ab^2+2ab \\ &\quad +a+b+1, \end{aligned}$$

e isolando a no lado esquerdo da última igualdade, dá-nos

$$a^2(b^2-b+2) - a(b^2+2b+1) + 2b^2 - b + 1 = 0,$$

que podemos interpretar como uma equação do 2º em a , cujo discriminante (Δ) é:

$$\begin{aligned} \Delta &= (b+1)^4 - 4(b^2-b+2)(2b^2-b+1) \\ &= -7b^4 + 16b^3 - 18b^2 + 16b - 7. \end{aligned}$$

Esse polinômio possui duas características interessantes. A primeira, que nós não vamos utilizar, é que ele é um polinômio recíproco de 4^o grau e 1^a espécie, já que a leitura dos seus coeficientes feita da esquerda para a direita coincide com a leitura feita da direita para a esquerda. A segunda é que $b = 1$ é uma raiz desse polinômio, já que a soma dos seus coeficientes é igual a 0. Isso nos dá

$$\begin{aligned}\Delta &= -7b^4 + 7b^3 + 9b^3 - 9b^2 - 9b^2 + 9b + 7b - 7 \\ &= -7b^3(b-1) + 9b^2(b-1) - 9b(b-1) + 7(b-1) \\ &= (b-1)(-7b^3 + 9b^2 - 9b + 7).\end{aligned}$$

Novamente, o segundo fator desse último produto tem a soma dos seus coeficientes igual a zero, donde $b = 1$ também é raiz do mesmo, e escrevendo $-7b^3 + 9b^2 - 9b + 7 = (b-1)(-7b^2 + 2b - 7)$, obtemos

$$\Delta = (b-1)^2(-7b^2 + 2b - 7).$$

O discriminante de $-7b^2 + 2b - 7$ é negativo e, portanto, $-7b^2 + 2b - 7 < 0, \forall b$. Como $(b-1)^2 \geq 0, \forall b$, segue que $\Delta \leq 0, \forall b$. Para $a \in \mathbb{R}$, devemos então ter $\Delta = 0$ e, portanto, $b = 1$ e $a = 1$, que é a única solução.

2.3. Problema 3

(OMEG 2017) Encontre todos os números naturais x tais que o produto dos seus dígitos (em notação decimal) é igual a $x^2 - 10x - 22$.

Solução: Seja $x \in \mathbb{N}$ escrito como $x = \overline{d_1 d_2 \dots d_k}$ na base 10. Sabemos que os dígitos $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, com $d_1 \neq 0$. Sendo assim, temos que, denotando o produto dos dígitos por $P = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k$, as seguintes desigualdades são válidas:

$$x = \overline{d_1 d_2 \dots d_k} \geq 10^k > d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k = P.$$

Assim, obtemos

$$x > P = x^2 - 10x - 22 \Rightarrow x^2 - 11x - 22 < 0.$$

Agora, observe que as únicas soluções naturais são $\{1, 2, \dots, 12\}$, e como o único desses números que satisfaz $P = x^2 - 10x - 22$, é

$$12^2 - 10 \cdot 12 - 22 = 2 = 1 \cdot 2,$$

donde concluímos que $x = 12$ é a única solução.

2.4. Problema 4

(Bulgária 1997) Encontre todos os naturais a, b, c tais que as raízes das equações

$$\begin{aligned}x^2 - 2ax + b &= 0 \\ x^2 - 2bx + c &= 0 \\ x^2 - 2cx + a &= 0\end{aligned}$$

sejam todas números naturais.

Solução: Sejam (x_1, x_2) , (x_3, x_4) e (x_5, x_6) respectivamente as raízes das três equações dadas. Então, pelas relações de soma e produto, temos que:

$$(I) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2a \\ x_1 x_2 = b \end{array} \quad (II) \quad \begin{array}{l} x_3 + x_4 = 2b \\ x_3 x_4 = c \end{array} \quad (III) \quad \begin{array}{l} x_5 + x_6 = 2c \\ x_5 x_6 = a \end{array} .$$

Suponha que todas essas raízes são pelo menos iguais a 2, i.e., $x_i \geq 2, \forall i$. Então,

$$\begin{array}{l} 2a = x_1 + x_2 \leq x_1 x_2 = b \\ 2b = x_3 + x_4 \leq x_3 x_4 = c \\ 2c = x_5 + x_6 \leq x_5 x_6 = a \end{array} ,$$

donde somando as pontas das três desigualdades, obtemos $2(a+b+c) \leq a+b+c$, o que é impossível já que $a, b, c \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo menos uma das raízes deve ser igual a 1. Supondo, sem perda de generalidade, que $x_1 = 1$, temos por (I):

$$\begin{array}{l} 1 + x_2 = 2a \\ 1 \cdot x_2 = b \end{array} \Rightarrow 2a - b = 1. \quad (IV)$$

Agora, suponha $x_i \geq 2$, para $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Então, de (II) e (III), conseguimos

$$2b + 2c = (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6) \leq x_3 x_4 + x_5 x_6 = c + a \Rightarrow 2(2a - 1) + 2c \leq c + a,$$

donde $c \leq 2 - 3a$, o que é um absurdo para $a, c \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo menos uma das raízes x_3, x_4, x_5 ou x_6 é igual a 1. Novamente, s.p.g., tome $x_3 = 1$. Análogo a (IV), temos $2b - c = 1$ (V). Usando novamente o mesmo argumento, suponha $x_5, x_6 \geq 2$,

$$2c \leq a \Rightarrow 2 \overbrace{(2b - 1)}^{(V)} \leq \overbrace{\frac{b+1}{2}}^{(IV)} \Rightarrow 7b \leq 5. \text{ Absurdo!}$$

Portanto, uma das raízes, x_5 ou x_6 , é igual a 1, donde segue $2c - a = 1$ (VI). Finalmente, por (IV)-(VI), obtemos,

$$(2a - b - 1) + (2b - c - 1) + (2c - a - 1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 3$$

e como a, b e c são naturais, a única solução para a igualdade acima é $a = b = c = 1$.

2.5. Problema 5

[4] (Vietnã 2008) Sejam x, y e z reais distintos não negativos. Mostre que

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right) \geq 4.$$

Quando ocorre a igualdade?

Solução: Sem perda de generalidade, podemos supor que $z > y > x \geq 0$, já que são todos distintos e não negativos. Assim, defina $y = x + a$, $z = x + a + b$, com $a, b > 0$, e substituindo do lado esquerdo da desigualdade, dá-nos

$$M = [3x^2 + 2(2a + b)x + a(a + b)] \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a + b)^2} \right).$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} M &\geq a(a + b) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a + b)^2} \right) \\ &= \frac{a + b}{a} + \frac{a(a + b)}{b^2} + \frac{a}{a + b} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{a(a + b)}{b^2} + 1 - \frac{b}{a + b} \\ &= 2 + \frac{a(a + b)}{b^2} + \frac{b^2}{a(a + b)} \\ &= 2 + \frac{[a(a + b)]^2 + (b^2)^2}{b^2 a(a + b)} \geq 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, temos

$$\begin{cases} 3x^2 + 2(2a + b)x = 0 \\ a(a + b) = b^2, \end{cases}$$

que nos dá $x = 0$ e $a(a + b) = b^2$. Nesse caso, temos $y = a$ e $z = a + b$, donde $b = z - y$. Portanto, para $a(a + b) = b^2$, temos $yz = (z - y)^2$, dando-nos $y^2 - 3yz + z^2 = 0$. Fazendo $t = y/z \in (0, 1)$, a equação anterior se reescreve como $t^2 - 3t + 1$, daí $t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Assim, $x = 0$ e $\frac{y}{z} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

2.6. Problemas Complementares

[3, 5, 6]

1. (OCM) Prove que não existem inteiros positivos a e b tais que $\frac{b^2 + b}{a^2 + a} = 4$.

2. Seja $D = a^2 + b^2 + c^2$, sendo a, b e c inteiros consecutivos e $c = ab$. Mostre que \sqrt{D} é sempre um inteiro ímpar.

3. (IMO) Mostre que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

para todos a, b e c reais positivos.

4. (AIME) Seja $f(x)$ um polinômio com coeficientes reais tal que $f(0) = 1$, $f(2) + f(3) = 125$, e para todo x , $f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x)$. Encontre $f(5)$.

5. (USAMO) Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

6. (INAMO) Determine todos os pares distintos de números reais (x, y) tais que ambas as identidades são verdadeiras:

$$\begin{aligned}x^{100} - y^{100} &= 2^{99}(x - y) \\x^{200} - y^{200} &= 2^{199}(x - y).\end{aligned}$$

7. (JBMO) Sejam x e y reais positivos tais que

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000.$$

Mostre que $x + y = 10$.

8. (CMO) Encontre todos os trios (x, y, z) tais que quando qualquer um desses números é adicionado ao produto dos outros dois, o resultado é igual a 2.

9. (IMTT) Prove que a equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997$$

tem infinitas soluções inteiras (x, y, z) .

10. (USAMO) Encontre todas as soluções naturais da equação

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2.$$

11. (HMO) Sejam x, y, z reais distintos dois a dois, tais que

$$\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0.$$

Prove que

$$\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0.$$

3. Problemas de Teoria dos Números

Teoria dos Números é uma das áreas mais antigas da Matemática. é onde se encontram inúmeras conjecturas, *a priori* simples, mas que estiveram sem solução por séculos, e a Teoria dos Números continua expandindo as fronteiras da pesquisa até hoje. Mesmo com a quantidade de problemas resolvidos aumentando, também aumentam a quantidade de problemas em aberto, que podem demorar anos e muito esforço para serem superados. Nos dias de hoje, a “demanda” dessa área também cresceu em aplicações, tais como na Criptografia e na Ciência da Computação.

Como sugere o nome, *Teoria dos Números* é o estudo dos números e suas propriedades. Uma parte importante dessa vasta área lida com soluções inteiras de equações, ditas *Equações Diofantinas* (em homenagem ao matemático grego Diofantus), com algumas consequências bastante interessantes sobre números primos e aritmética. Devido à sua natureza fundamentalmente algébrica, as técnicas da Teoria dos Números dependem fortemente da “maquinária algébrica”, donde existe uma considerável interseção entre as duas áreas.

Os tópicos de Teoria dos Números tratados nos problemas a seguir são elementares, com foco principalmente nas estratégias fundamentais que aparecem com frequência em problemas de níveis iniciante e intermediário de Olimpíada. Todos o *background* necessário para a solução dos problemas desta seção, pode ser encontrado nas excelentes referências [1, 2, 7, 8].

3.1. Problema 1

(IMO 1975) Seja $S(n)$ a soma dos dígitos de n . Se $N = 4444^{4444}$, $A = S(N)$ e $B = S(A)$. Quanto vale $S(B)$?

Solução: Pelo critério de divisibilidade por 9, sabemos que $N \equiv A \equiv B \pmod{9}$. Primeiro, vamos calcular o resto de N por 9. Como $4444 \equiv 16 \equiv 7 \pmod{9}$, então $4444^{4444} \equiv 7^{4444} \pmod{9}$, donde precisamos encontrar o resto de 7^{4444} . Note que, $7^2 \equiv 49 \equiv 4 \pmod{9} \Rightarrow 7^3 \equiv 28 \equiv 1 \pmod{9}$, donde

$$7^{4444} = 7^{3 \cdot 1481 + 1} = (7^3)^{1481} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{9},$$
$$\Rightarrow 7^{4444} \equiv 7 \pmod{9}.$$

Por outro lado, como $N = 4444^{4444} < 10^{5 \cdot 4444}$, então $S(N) < 5 \cdot 4444 \cdot 9 = 199980$. Além disso, $B = S(A) \leq 1 + 9 \cdot 5 = 46$ e $S(B) \leq 12$. O único inteiro menor ou igual a 12 com resto 7 por 9, é o próprio 7, daí $S(B) = 7$.

3.2. Problema 2

(Estônia 2000) Prove que não é possível dividir qualquer conjunto de 18 inteiros consecutivos em dois conjuntos disjuntos A e B tais que o produto dos elementos de A seja igual ao produto dos elementos de B

Solução: Suponha, por absurdo, que existam tais conjuntos, e que os 18 consecutivos são $n, n+1, \dots, n+17$. Agora, note que, como o produto dos elementos de A é igual ao produto dos elementos de B , se um dos conjuntos contém um múltiplo de 19, o outro também deve conter. Entre 18 inteiros consecutivos, porém, não existem dois múltiplos de 19. Desse modo, nenhum dos dois conjuntos possui elementos divisíveis por 19. Denote por r o resto da divisão do produto de todos os elementos de A , P_A , por 19, que é o mesmo do produto dos elementos de B , P_B , já que supomos que são iguais. Assim,

$$\begin{aligned} r \cdot r = P_A \cdot P_B &\equiv n(n+1)(n+2) \cdots (n+17) \pmod{19} \\ &\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 18 \pmod{19} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &\equiv (19-1)! \pmod{19} \\ &\equiv -1 \pmod{19} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Rightarrow r^2 \equiv -1 \pmod{19},$$

onde (1) vem do fato de o conjunto de 18 elementos consecutivos não possuir múltiplos de 19, e (2) é consequência do Teorema de Wilson. Assim, $r^2 \equiv -1 \pmod{19} \Rightarrow r^{18} \equiv (-1)^9 \equiv -1 \pmod{19}$, mas isso contraria o Pequeno Teorema de Fermat e conseguimos um absurdo. Portanto, tais conjuntos não existem.

3.3. Problema 3

(Russia 2001) Encontre todos os primos p e q tais que $p + q = (p - q)^3$.

Solução: Primeiro, note que $(p - q)^3 = p + q \neq 0$, e com isso p e q são dois primos distintos, donde $\text{mdc}(p, q) = 1$ e também temos $\text{mdc}(p, p + q) = 1$. Agora, note que

$$\begin{aligned} p - q &\equiv (p - q) + (p + q) \pmod{p + q} \Rightarrow p - q \equiv 2p \pmod{p + q} \\ &\Rightarrow (p - q)^3 \equiv 8p^3 \pmod{p + q}. \end{aligned}$$

Por outro lado, o problema forneceu-nos $(p - q)^3 \equiv 0 \pmod{p + q}$, e portanto $8p^3 \equiv 0 \pmod{p + q} \Rightarrow p + q \mid 8$, donde a última implicação é consequência de $\text{mdc}(p, p + q) = 1$. Como o único par de primos ímpares cuja soma divide 8 é 5 e 3, esta é a única solução.

3.4. Problema 4

(HMMT 2004) Zach escolheu cinco números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Se ele contasse à Claudia o produto dos números escolhidos, isso não seria suficiente para que ela descobrisse se a soma dos mesmos é par ou ímpar. Qual o produto dos números escolhidos?

Solução: Note que fornecer o produto dos números escolhidos é equivalente a fornecer o produto dos dois números que não foram escolhidos. Os únicos produtos que são obtidos pelo produto de mais de um par de números são: 12 ($\{3, 4\}$ e $\{2, 6\}$) e 6 ($\{1, 6\}$ e $\{2, 3\}$). No segundo caso, porém, a soma dos dois números não escolhidos é ímpar, donde a soma dos escolhidos também será ímpar.

Portanto, apenas a primeira opção é válida, e assim o produto dos cinco números escolhidos é igual a

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 7}{12} = 420.$$

3.5. Problema 5

(*APMO 2005*) Mostre que para todo número real irracional a , existem números reais e irracionais b e b' tais que $a + b$ e ab' são ambos racionais, enquanto ab e $a + b'$ são ambos irracionais.

Solução: Seja $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Se a^2 é irracional, tome $b = -a$. Então, $a + b = 0$ é racional e $ab = -a^2$ é irracional. Se a^2 é racional, tome $b = a^2 - a$. Daí, $a + b = a^2$ é racional e $ab = a^2(a - 1)$. Assim, $a^2 \in \mathbb{Q}$ e $a - 1 \notin \mathbb{Q}$, donde $ab = a^1(a - 1)$ é irracional.

Agora, tome $b' = \frac{1}{a}$ ou $b' = \frac{2}{a}$. Assim $ab' = 1$ ou 2 , que é racional. Note que

$$a + b' = \frac{a^2 + 1}{a} \quad \text{ou} \quad a + b' = \frac{a^2 + 2}{a},$$

e como,

$$\frac{a^2 + 2}{a} - \frac{a^2 + 1}{a} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},$$

pelo menos um deles é irracional, e escolhemos o b' de acordo com isso.

3.6. Problemas Complementares

[1, 2, 5, 7]

1. (ARML) Encontre o maior divisor de 1001001001 que não excede 10000.

2. (HMTT) Calcule

$$\text{mdc}(2002 + 2, 2002^2 + 2, 2002^3 + 2, \dots).$$

3. (AIME) Calcule a probabilidade de que um divisor positivo de 10^{99} escolhido aleatoriamente seja um múltiplo de 10^{88} .

4. (BW) Seja a um inteiro ímpar. Mostre que $a^{2^n} + 2^{2^n}$ e $a^{2^m} + 2^{2^m}$ são relativamente primos para todos inteiros positivos n e m com $n \neq m$.

5. (RMO) Sejam os números primos $n_1 < n_2 < \dots < n_{31}$. Mostre que se 30 divide $n_1^4 + n_2^4 + \dots + n_{31}^4$, então entre esses números existem três primos consecutivos.

6. (IMO) Considere a sequência a_1, a_2, \dots dada por

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1,$$

para todo n inteiro positivo. Determine todos os inteiros positivos que são coprimos com todos os termos dessa sequência.

7. (AIME) Quantos inteiros positivos múltiplos de 1001 podem ser expressos da forma $10^j - 10^i$, onde i e j são inteiros com $0 \leq i < j \leq 99$?
8. (USAMO) Mostre que para todo inteiro positivo n , existe um número de n dígitos divisível por 5^n com todos os seus dígitos ímpares.
9. (ASHME) Para quantos inteiros N entre 1 e 1990 a fração $\frac{N^2+7}{N+4}$ não é irredutível?
10. (AIME) Os números da sequência

$$101, 104, 109, 116, \dots$$

são da forma $a_n = 100 + n^2$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Para cada n , seja d_n o máximo divisor comum de a_n e a_{n+1} . Encontre o valor máximo de d_n quando n varia sobre todo o conjunto dos inteiros positivos.

11. (OMA) Sejam p_1, p_2, \dots, p_n números primos. Bruno deve escolher $n + 1$ inteiros positivos que utilizem apenas esses primos em sua decomposição. Bernardo deve escolher alguns desses números de modo que o produto deles seja um quadrado perfeito. Determine se é possível, para algum n , que Bruno escolha seus $n + 1$ números de maneira que Bernardo não consiga cumprir seu objetivo.

Abreviações

[AIME] - American Invitational Mathematics Exam (PC-A 4; PC-TN 3, 7, 10)

[APMO] - Asian Pacific Mathematics Olympiad (P-TN 5)

[ARML] - American Regions Mathematics League (PC-TN 1)

[ASHME] - American High School Mathematics Examination (PC-TN 9)

[BW] - Baltic Way (PC-TN 4)

[CMO] - Canadian Mathematical Olympiad (PC-A 8)

[HMMT] - Harvard-MIT Mathematics Tournament (P-TN 4; PC-TN 2)

[HMO] - Hungarian Mathematical Olympiad (PC-A 11)

[IMO] - International Mathematical Olympiad (PC-A 3; P-TN 1; PC-TN 6)

[IMTT] - International Mathematics Tournament of the Towns (PC-A 9)

[INAMO] - Indonesia Mathematical Olympiad (PC-A 6)

[JBMO] - Junior Balkan Mathematical Olympiad (PC-A 7)

[OBM] - Olimpíada Brasileira de Matemática (P-A 1)

[OCM] - Olimpíada Cearense de Matemática (PC-A 1)

[OMA] - Olimpíada Matemática Argentina (PC-TN 11)

[OMEG] - Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (P-A 3)

[RMO] - Romanian Mathematical Olympiad (PC-TN 5)

[USAMO] - United States of America Mathematical Olympiad (PC-A 5,10; PC-TN 8)

[VMO] - Vietnamese Mathematical Olympiad (P-A 5)

P-A: Problema de álgebra

PC-A: Problema Complementar de álgebra

P-TN: Problema de Teoria dos Números

PC-TN: Problema Complementar de Teoria dos Números

Referências

- [1] Andreescu, T., Andrica, D. and Feng Z., *104 Number Theory Problems*, Birkhauser, Boston, MA, 2007.
- [2] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, Projeto Euclides, IMPA, 2010.
- [3] Carneiro, E., Campos, O. e Paiva, F. *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior)*, Ed. Realce, 2005.
- [4] Chau, L. H. and Khoi, L. H. *Selected Problems of the Vietnamese Mathematical Olympiad (1962-2009)*, World Scientific, Danvers MA, 2010.
- [5] Feitosa, S. B. , Holanda, B., Lima, Y. e Magalhães, C. T. *Treinamento Cone Sul 2008*. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.
- [6] Fomin, D. and Kirichenko, A. *Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991*, MathPro Press, Westford, MA, 1994.
- [7] Fomin, D., Genkin, S. and Itenberg, I. *Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7*, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.
- [8] Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. L. *An Introduction to the Theory of Numbers*.

Ana P. Chaves
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Goiânia/GO
<apchaves@ufg.br>

Recebido: 13/03/2019

Introdução aos números transcendententes e aos números de Liouville

Lindauriane Vieira

Luiz Feitoza

Diego Lima

Genilson da Silva

Resumo

A Teoria dos Números Transcendententes é uma área que foi originada por Joseph Liouville em seu ilustre trabalho de 1844 (ver [4]), no qual ele criou uma classe numérica, os *Números de Liouville*, pela qual não só provou a existência dos números transcendententes, como também explicitou seus primeiros exemplos. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo desenvolver um estudo sobre a Teoria dos Números Transcendententes, especificamente dos *Números de Liouville*. Esse estudo foi realizado através de uma pesquisa de teor qualitativo, constituindo-se em um estudo bibliográfico. Dentre os principais resultados, destacam-se a definição e a caracterização do conjunto dos números algébricos e dos números transcendententes, e a apresentação de importantes resultados sobre a classe dos Números de Liouville. Nessa perspectiva, este trabalho apresenta-se como uma pequena “pesquisa” em Teoria Transcendente, cuja importância reside em subsidiar estudos futuros de modo que coadjuve o seu progresso teórico no meio científico, haja vista que é uma área recente e que tem despertado o interesse de muitos pesquisadores.

Palavras-chave: Números Algébricos; Números Transcendententes; Números de Liouville.

Abstract

The Theory of Transcendental Numbers is an area that was originated by Joseph Liouville in his illustrious work of 1844, in which he created a numerical class, the Liouville Numbers, by which he not only proved the existence of transcendental numbers, as well as his first examples. In this sense, this work aims to develop a study on the Theory of Transcendental Numbers, specifically the Liouville Numbers. This study was carried out through a qualitative research, constituting a bibliographic study. Among the main results, we highlight the definition and characterization of the set of algebraic numbers and transcendental numbers, and the presentation of important results on the class of Liouville Numbers. In this perspective, this work presents itself as a small “research” in Transcendental Theory, whose importance lies in subsidizing future studies in a way that supports its theoretical progress in the scientific environment, since it is a recent area that has aroused interest of many researchers.

Keywords: Algebraic Numbers; Transcendental Numbers; Liouville Numbers.

1. Introdução

A Teoria dos Números é um ramo da Matemática que se dedica ao estudo de teorias que circundam os números imersos aos conjuntos numéricos (Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos). Da vasta área abrangida pela teoria dos números, evidenciamos particularmente a Teoria dos Números Transcendentes.

A referida área foi apresentada por Joseph Liouville em seu trabalho de 1844, no qual ele obteve, pela primeira vez, uma classe de números que não satisfazem nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros. A concepção de Liouville para construir os números transcendententes foi desenvolver uma propriedade que seja satisfeita por todos os números reais algébricos irracionais: se $\alpha \in \mathbb{R}$ é algébrico irracional de grau n , então existe uma constante $A > 0$ (constante não universal, pois depende de α), tal que $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{A}{q^n}$ para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Dessa forma, qualquer número real irracional que não satisfaça tal propriedade é transcendente.

Utilizando o fato acima, em 1851 (ver [5]), Liouville provou a transcendência dos, posteriormente assim chamados, números de Liouville: um número real α é chamado número de Liouville se existe uma sequência de racionais distintos $\left\{ \frac{p_j}{q_j} \right\}_{j \geq 1}$, tal que $|\alpha - \frac{p_j}{q_j}| < \frac{1}{q_j^j}$. A partir dessa propriedade,

Liouville exibiu o primeiro número transcendente da história: $l = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$, conhecido como a *Constante de Liouville*.

Matemáticos famosos contribuíram para o desenvolvimento do estudo da classe dos números transcendententes. Dentre eles, Charles Hermite que, em 1873, demonstrou a transcendência de e . Ferdinand von Lindemann, em 1882, ampliou a demonstração de que e é transcendente e mostrou que π é transcendente.

Posteriormente, Alexander Gelfond, em 1934, e Theodor Schneider, em 1935, resolveram independentemente o famoso 7º Problema de Hilbert sobre a transcendência de números da forma α^β , sendo α um número algébrico (diferente de zero e um), e β um número algébrico (não racional), especificamente para o caso particular do número $2^{\sqrt{2}}$. O curioso é que para potências de números transcendententes por transcendententes, ainda não existe nenhum resultado parecido com o de Gelfond e Schneider, mas sabemos que tais potências tanto podem resultar em um número algébrico como em um número transcendente.

Existe no estudo da Teoria Transcendente um forte paradoxo que pode ser encontrado em [8]: se quase todos os números são transcendententes, por que demonstrar a transcendência de um número é, via de regra, algo tão complexo e desafiador? A principal obstrução é que um número transcendente é definido não pelo que ele é, mas, em vez disso, pelo que ele *não* é. Por esse motivo, perdura-se na atualidade uma série de números em que não se conhece nada acerca de sua natureza como, $e + \pi$ e $e\pi$.

À vista disso, este trabalho tem como objetivo desenvolver um estudo sobre a Teoria dos Números Transcendententes, especificamente dos números de Liouville. Esse estudo foi desenvolvido por meio de uma pesquisa qualitativa, caracterizando-se por um estudo bibliográfico.

2. Números algébricos e transcendententes

Iniciaremos esta seção apresentando o conjunto dos números algébricos e, por meio desse, chegaremos a um novo conjunto numérico, o conjunto dos números chamados de *transcendententes*. Além

disso, apresentaremos a caracterização de ambos os conjuntos.

2.1. Definições e Exemplos

Definição 1. Qualquer solução real ou complexa de toda equação polinomial da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $a_n \neq 0$ é chamado de número algébrico. Os algébricos são o fecho algébrico de \mathbb{Q} , isto é, são o conjunto das raízes de todos os polinômios com coeficientes racionais, por isso denotamos os mesmos por $\overline{\mathbb{Q}}$.

Exemplo 1. Todo número racional é algébrico, pois temos que o número da forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ é raiz do polinômio $qx - p$. Entretanto, nem todo número algébrico é racional, já que $\sqrt{2}$ é algébrico (pois é raiz do polinômio $x^2 - 2$) e não é racional.

Observação 1. Posto o exemplo acima, evidenciamos o fato de que o conjunto dos números racionais está contido no conjunto dos números algébricos.

Exemplo 2. $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é um número algébrico pois é solução da equação

$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0.$$

Definição 2. Os números reais (ou complexos) que não são algébricos denominam-se de transcendentos.

A rigor de notação utilizamos \mathbb{T} reais.

A definição de número *transcendente* é do século XVIII e, segundo Leonard Euler, esses números são chamados transcendentos porque “transcendem” o poder das operações algébricas [3]. Todavia, em 1844 Joseph Liouville (1809-1882) exibiu o número: $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$, o primeiro a ter sua transcendência demonstrada.

Observação 2. As definições acima nos dão uma classificação dos reais como a união disjunta dos números algébricos reais e transcendentos reais.

2.2. Caracterização dos Algébricos e Transcendentos

Iniciaremos com o teorema que enuncia algumas propriedades do conjunto dos números algébricos.

Teorema 1. Dados $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$, temos:

- (i) $\alpha \pm \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$;
- (ii) $\alpha \cdot \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$;
- (iii) $\alpha \neq 0$, então $\alpha^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Demonstração. Ver [2].

Usando o teorema anterior verifica-se que o conjunto dos números algébricos forma um corpo.

Ao longo deste trabalho, veremos alguns exemplos de números transcendententes. Entretanto, é possível verificar a existência desses números sem apresentar exemplos explícitos, utilizando o seguinte teorema.

Teorema 2. *O conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Dado um polinômio com coeficientes inteiros

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \neq 0$.

Definimos sua altura como sendo o número natural

$$|P| = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| + n. \quad (2)$$

Isto é, a soma dos valores absolutos dos seus coeficientes inteiros, mais o grau do polinômio.

O Teorema Fundamental da Álgebra diz-nos que $P(x) = 0$, com $P(x)$ dado em (1), tem exatamente n raízes complexas (contando suas multiplicidades). Sendo que todas, algumas ou nenhuma delas podem ser reais. Isso posto, para um n fixado, o número de polinômios do tipo (1) com uma dada altura é apenas um número finito. Para essa afirmação veja que se tem a inclusão da parcela n na definição da altura descrita em (2). Destarte, as raízes de todos os polinômios de todas as alturas formam um conjunto enumerável de conjuntos finitos. Logo, podemos inferir que o conjunto de todos os números algébricos é enumerável. \square

Esse teorema foi demonstrado pela primeira vez em 1874, por Cantor, o que foi surpreendente: a enumerabilidade do conjunto dos números algébricos implicaria a existência de uma quantidade infinitamente maior de transcendententes do que algébricos.

Teorema 3. *Existem números transcendententes e, mais ainda, o conjunto dos números transcendententes não é enumerável.*

Demonstração. Sabemos que o conjunto \mathbb{R} , como apresentado na Observação 2, pode ser considerado como a união disjunta do conjunto dos números algébricos reais com o conjunto dos números transcendententes reais. Dessarte, por meio do Teorema 2 segue-se que o conjunto dos algébricos reais é enumerável. Sabendo, também, que o conjunto \mathbb{R} não é enumerável, então o conjunto dos transcendententes reais não é enumerável, já que, caso contrário, \mathbb{R} seria enumerável como união de dois conjuntos enumeráveis. Dessa forma, existe um conjunto infinito não enumerável de números transcendententes. \square

Observação 3. Esse teorema subsidia o fato de que a cardinalidade do conjunto \mathbb{T} é maior do que a cardinalidade do conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ dos números algébricos. Em outras palavras, isso significa que “existem muito mais números transcendententes do que números algébricos”.

Proposição 1. *O conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ é denso em \mathbb{R} .*

Demonstração. Basta observar, como já apresentado na Observação 1, o fato de que $\overline{\mathbb{Q}}$ contém \mathbb{Q} , e que \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , então segue trivialmente que $\overline{\mathbb{Q}}$ é denso em \mathbb{R} . \square

Proposição 2. *O conjunto \mathbb{T} é denso em \mathbb{R} .*

Demonstração. Seja I um intervalo aberto não degenerado em \mathbb{R} . Se I não contém números transcendentais, então esse seria formado apenas por números algébricos, isto é, seria enumerável. Isso não pode ocorrer, pois todo intervalo não degenerado de números reais não é enumerável. Por conseguinte, o conjunto dos números transcendentais é denso em \mathbb{R} . \square

Agora, vejamos alguns resultados de operações elementares agindo em números algébricos e transcendentais.

Proposição 3. *Sejam $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $\beta \in \mathbb{T}$, então:*

- (i) $\alpha + \beta \in \mathbb{T}$;
- (ii) $\alpha\beta \in \mathbb{T}$ ($\alpha \neq 0$);
- (iii) $\beta^{-1} \in \mathbb{T}$.

Demonstração. (i) Suponha, por contradição, que $\alpha + \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$. Então, pelo Teorema 1, β será algébrico, o que é uma contradição. Dessa forma, $\alpha + \beta \in \mathbb{T}$.

(ii) Suponha que $\alpha\beta = c \in \overline{\mathbb{Q}}$, como $\alpha \neq 0$, então pelo Teorema 1, $\beta = c \cdot \frac{1}{\alpha} \in \overline{\mathbb{Q}}$, o que é um absurdo. Logo, $\alpha\beta \in \mathbb{T}$.

(iii) Supondo $\beta^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$, então pelo Teorema 1, $\frac{1}{\beta^{-1}} \in \overline{\mathbb{Q}}$, mas por outro lado, $\frac{1}{\beta^{-1}} = \beta$. Assim, $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$, o que é um absurdo. Portanto, $\beta^{-1} \in \mathbb{T}$. \square

Ademais, temos um outro resultado interessante, o chamado Teorema de Gelfond-Schneider, que classifica a natureza aritmética de certas potências de algébricos por algébricos. Foi provado independentemente pelos matemáticos Alexander Gelfond (1906-1968) e Theodor Schneider (1911-1988), a partir de um dos 23 problemas propostos por David Hilbert (1862-1943), no Segundo Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris.

Teorema 4. (Gelfond-Schneider) *Sejam α e β dois números algébricos, com $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ e β não sendo um racional. Então α^β é transcendente.*

Demonstração. Ver [6]. \square

Esse teorema traz como caso particular a transcendência dos números $2^{\sqrt{2}}$ e $\log_{10} 2$.

No caso de $2^{\sqrt{2}}$, vale destacar que se tirássemos as hipóteses sobre α , o teorema poderia perder sua validade. Pois, por um lado $2^{\sqrt{2}}$ é transcendente, mas, em contrapartida,

$$(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$$

que é algébrico.

A justificativa para $\log_{10} 2$ é relativamente simples, pois tomando $\alpha = 10$ e $\beta = \log_{10} 2$; e aplicando a definição de logaritmo decimal, temos que:

$$\alpha^\beta = 10^{\log_{10} 2} = 2.$$

Nesse caso, se $\beta = \log_{10} 2$ fosse irracional algébrico, pelo Teorema de Gelfond-Schneider, 2 seria transcendente, o que é absurdo. Logo, $\log_{10} 2$ é transcendente.

Uma outra consequência do referido teorema é a transcendência de e^π , a chamada *Constante de Gelfond*. De fato,

$$e^\pi = (e^{i\pi})^{(-i)} = (-1)^{-i},$$

ou seja,

$$e^\pi = (-1)^{-i},$$

que é transcendente.

O curioso é que para potências de números transcendentais por transcendentais ainda não existe nenhum resultado análogo ao de Gelfond e Schneider, mas sabemos que tais potências tanto podem resultar em um número algébrico como em um número transcendente.

Vejam os abaixo, em ordem cronológica de descoberta, alguns números transcendentais:

1873 HERMITE, ver [1] e [2].

Base dos logaritmos neperianos: $e = 2,718281828459045 \dots$

1882 LINDEMANN, ver [1] e [2].

Razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo: $\pi = 3,1415926535897 \dots$

1929 MAHLER, ver [1] e [9].

Sequência de Prouhet-Thue-Morse: $\tau = 0,0110101001 \dots$

1961 MAHLER, ver [1] e [7].

Constante de Champernowne: $c = 0,12345678910111213 \dots$

Convém destacar que existe ainda uma série de números como, $e + \pi$, $e - \pi$, $e\pi$, $\frac{\pi}{e}$, e^e , π^e , π^π , 2^e , 2^π entre outros, sobre os quais nada se conhece acerca de sua natureza aritmética.

3. Números de Liouville

Nesta seção, apresentaremos importantes resultados da teoria que circunda a classe dos Números de Liouville. As referências aqui utilizadas foram [6], [7], [11] e [9].

Definição 3. Um número algébrico α é dito de grau n se ele for raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros de grau n e não existir nenhum polinômio com coeficientes inteiros, de grau menor que n , que contenha α como uma de suas raízes.

Exemplo 3. Todo número racional $\frac{p}{q}$, ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$), é algébrico de grau 1, pois qualquer número racional $\alpha = \frac{p}{q}$ é raiz da equação $qx - p = 0$. Isso implica que, se α é algébrico de grau ≥ 2 , então, α é irracional.

Definição 4. Um número real α é aproximável na ordem n por racionais se existirem uma constante real $c > 0$ e uma seqüência $\left\{ \frac{p_j}{q_j} \right\}_{j \in \mathbb{N}}$ de racionais distintos, com $q_j > 0$ e $\text{mdc}(p_j, q_j) = 1$, tais que:

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{c}{q_j^n}. \quad (3)$$

É interessante observar que o importante da Definição 4 não é apresentar a existência de uma sucessão de racionais convergindo para α , pois tais sucessões sempre existem qualquer que seja o número real α . O mais importante que a definição nos traz é que uma sucessão particular de racionais converge para α de certo modo, isto é, de acordo com (3). Ainda na Definição 4, é importante que se tomem os racionais todos diferentes, o que implica que podemos tomá-los diferentes de α , mesmo no caso de α ser racional.

O próximo teorema descreve uma importante propriedade de números algébricos. Salientamos que se um certo número não possui uma propriedade que todos os algébricos devem possuir, então ele é transcendente. Isso mostra que o estudo de números algébricos permite também encontrarmos condições para que um número não seja algébrico.

Teorema 5. *Seja α um número algébrico real de grau $n > 1$, então existe $A > 0$, que depende de α tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n} \quad (4)$$

para todo racional $\frac{p}{q}$.

Demonstração. Considere α solução de uma equação polinomial da forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Seja $d > 0$ tal que, no intervalo $[\alpha - d, \alpha + d]$ a única raiz de $f(x) = 0$ é α (isso deve-se ao fato de que a equação polinomial tem no máximo n raízes reais; portanto, d pode ser qualquer número menor que a menor das distâncias de α às demais raízes reais). Em seguida, observemos que a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e, portanto, ela é limitada em intervalos limitados. Para tanto, existe $M > 0$ tal que

$$|f'(x)| \leq M, \text{ para } x \in [\alpha - d, \alpha + d].$$

Para todo racional $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, em $[\alpha - d, \alpha + d]$; aplicando o Teorema do Valor Médio, temos:

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\psi) \left(\alpha - \frac{p}{q}\right), \quad (5)$$

onde $\psi \in (\alpha - d, \alpha + d)$.

Como $f(\alpha) = 0$, (5) pode ser escrito como

$$-f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\psi) \left(\alpha - \frac{p}{q}\right)$$

daí,

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad (6)$$

mas $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, portanto

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n}\right| \geq \frac{1}{q^n},$$

uma vez que o numerador $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$ é inteiro e não nulo, e portanto é maior do que 1.

Isso posto, substituindo em (6), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^n} &\leq \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \\ \Rightarrow \frac{1}{M q^n} &\leq \frac{1}{M} \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \end{aligned}$$

implicando

$$\frac{1}{M q^n} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|,$$

ou seja,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{M q^n}$$

para $\frac{p}{q} \in [\alpha - d, \alpha + d]$. Se $\frac{p}{q}$ não estiver nesse intervalo, então:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > d. \quad (7)$$

Como $q \geq 1$ temos $q^n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{q^n} \leq 1 \Rightarrow \frac{d}{q^n} \leq d$, daí (7) fica

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{d}{q^n}.$$

Tomando, finalmente, A como o menor dos números $\frac{1}{M}$ e d , e notando que

$$\left(\frac{1}{M} \geq A \text{ e } d \geq A\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{M q^n} \geq \frac{A}{q^n} \text{ e } \frac{d}{q^n} \geq \frac{A}{q^n}\right)$$

chegamos à relação (4) para todo racional $\frac{p}{q}$.

□

Sabemos que o conjunto dos números racionais é denso em \mathbb{R} . Logo, é possível aproximar qualquer número real por números racionais. Contudo, o Teorema 5, também conhecido como Teorema de Liouville, afirma que números algébricos (reais) não racionais não podem ser muito “bem aproximados” por racionais, no sentido em que qualquer aproximação tem que respeitar o comportamento descrito pela desigualdade (4).

Por conseguinte, qualquer número que não satisfaça o Teorema 5 não pode ser algébrico, e portanto será transcendente.

Após demonstrar o Teorema 5, Liouville apresentou um conjunto de números que não satisfazem o mesmo. Esses são os números de Liouville e seu conjunto é denotado por \mathbb{L} , dados pela definição abaixo.

Definição 5. Um número real α é chamado um número de Liouville se existir uma sequência $\left\{ \frac{p_j}{q_j} \right\}_{j \in \mathbb{N}}$ de racionais distintos, onde $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$, com $q_j > 0$ e $\text{mdc}(p_j, q_j) = 1$, tais que satisfaçam

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}. \quad (8)$$

Observe que a potência de q_j é j , ou seja, é um valor variável e não fixo como na Definição 4. Além disso, o numerador da fração do lado direito é o valor $c = 1$.

A ideia de Liouville ao elaborar a Definição 5 foi apresentar uma classe de números que são bem aproximados por racionais. Em outras palavras, a definição afirma que os números de Liouville são aproximados por racionais tais que o erro dessa aproximação é menor que $\frac{1}{q_j^j}$. Dessa forma, podemos inferir que os números de Liouville são “muito bem” aproximáveis na ordem n por racionais.

Proposição 4. A sequência $\{q_j\}_{j \geq 1}$ é ilimitada.

Demonstração. Veja que

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j} < 1. \quad (9)$$

Suponha que a sequência $\{q_j\}_{j \geq 1}$ é limitada, isto é, $q_j \leq M$.

Multiplicando a equação (9) por q_j , obtemos:

$$|\alpha q_j - p_j| < q_j \leq M.$$

Aplicando a desigualdade triangular diminuída¹, teremos:

$$|p_j| - |\alpha q_j| \geq M$$

$$|p_j| \geq M + |\alpha| |q_j| \geq (|\alpha| + 1)M$$

¹A desigualdade triangular diminuída afirma que $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Logo, a sequência p_j também é limitada. Absurdo! Pois, existem infinitos $\frac{p_j}{q_j}$'s. Dessa forma, $\{q_j\}$ é ilimitada. \square

Proposição 5. *Todo número de Liouville é irracional.*

Demonstração. Suponha que $\alpha \in \mathbb{L}$, tal que $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Por hipótese, existe uma sequência $\left\{ \frac{p_j}{q_j} \right\}$ de racionais distintos, todos diferentes de $\frac{p}{q}$, tais que

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j},$$

ou seja,

$$\left| \frac{pq_j - p_jq}{qq_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Além disso, como pq_j e p_jq são números inteiros distintos, a diferença em módulo é maior ou igual que 1, e assim obtemos:

$$|pq_j - p_jq| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{qq_j} \leq \left| \frac{pq_j - p_jq}{qq_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Isso nos diz que $|q|q_j > q_j^j$ e, portanto $|q| > q_j^{j-1}$, um absurdo pois $q_j^{j-1} \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. Logo, todo número de Liouville é irracional. \square

Teorema 6. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 5 temos que um número de Liouville não pode ser racional. Suponha que α seja um número de Liouville algébrico não racional, ou seja, de grau $n \geq 2$. Então, pelo Teorema 5 segue-se que a relação (4) será válida para todo número racional. Em particular, para os $\frac{p_j}{q_j}$ da Definição 5. Desse modo, teríamos

$$\frac{A}{q^n} < \left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j},$$

ou melhor,

$$\frac{A}{q^n} < \frac{1}{q_j^j} \Rightarrow \frac{q_j^j}{q^n} < \frac{1}{A} \Rightarrow q^{j-n} < \frac{1}{A}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

O que é uma contradição, pois $q^{j-n} \rightarrow \infty$. Logo, α não pode ser algébrico, o que resulta em $\alpha \in \mathbb{T}$. \square

Desta forma, subsidiado pelos resultados apresentados, Liouville explicitou o primeiro exemplo de número transcendente, a chamada *Constante de Liouville*.

Exemplo 4. Considere o número definido por

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0.11000100000000000000000001 \dots$$

então, α é transcendente.

Conforme evidenciado anteriormente, basta mostrar que α é um número de Liouville. Para tanto, defina $m_j = \sum_{k=1}^j 10^{(j!-k!)}$ e $n_j = 10^{j!} > 0$. Observe que $m_j, n_j \in \mathbb{Z}$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\frac{m_j}{n_j} = \frac{\sum_{k=1}^j 10^{(j!-k!)}}{10^{j!}} = \sum_{k=1}^j 10^{-k!} = \sum_{k=1}^j \frac{1}{10^{k!}}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{m_j}{n_j} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^j \frac{1}{10^{k!}} \right| \\ &= \sum_{k=1+j}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{(1+j)!}} + \frac{1}{10^{(2+j)!}} + \frac{1}{10^{(3+j)!}} + \dots \\ &= \frac{1}{10^{(1+j)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(2+j)!-(1+j)!}} + \frac{1}{10^{(3+j)!-(1+j)!}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Agora veja que

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10^{(1+j)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(2+j)!-(1+j)!}} + \frac{1}{10^{(3+j)!-(1+j)!}} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{10^{(1+j)!}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Observe que

$$\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) = \left(1 + \frac{1}{9} \right) = \frac{10}{9},$$

pois corresponde à soma infinita dos termos de uma progressão geométrica.

Daí, temos que

$$\left| \alpha - \frac{m_j}{n_j} \right| < \frac{1}{10^{(1+j)!}} \cdot \frac{10}{9}.$$

Como $(1+j)! = (1+j)j! = j! + jj!$, temos $\frac{1}{10^{(1+j)!}} = \frac{1}{10^{j!(10^j)}}$.

Logo,

$$\left| \alpha - \frac{m_j}{n_j} \right| < \frac{10}{9 \cdot 10^{(1+j)!}} < \frac{1}{(10^j!)^j}$$

e como $n_j = 10^{j!}$, obtemos

$$\left| \alpha - \frac{m_j}{n_j} \right| < \frac{1}{n_j^j}.$$

O que implica que α é número de Liouville. Logo, pelo Teorema 6, α é um número transcendente.

Com o avanço dos métodos computacionais, constatou-se que, por uma margem de erro extremamente pequena, a constante de Liouville não satisfaz a equação:

$$10x^6 - 76x^3 - 190x + 21 = 0$$

pois, substituindo a indeterminada x pela constante de Liouville, 0.1100010... a equação dará -0.0000000059 muito próximo de ZERO.

Podemos generalizar o Exemplo 4 acima e construir infinitos outros números de Liouville dando-nos uma quantidade não enumerável, exibindo assim infinitos números transcendentos distintos, como pode ser visto no exemplo abaixo.

Exemplo 5. Os números da forma

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} = 0.a_1a_2000a_3000000000000000000a_4 \dots,$$

onde $a_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ são números transcendentos.

Considere os números inteiros $m_j = \sum_{k=1}^j a_k 10^{j!-k!}$ e $n_j = 10^{j!} > 0$ com $k \in \mathbb{N}$. Observe $\frac{m_j}{n_j} = \frac{\sum_{k=1}^j a_k 10^{(j!-k!)}}{10^{j!}} = \sum_{k=1}^j \frac{a_k 10^{j!}}{10^{k!} 10^{j!}} = \sum_{k=1}^j \frac{a_k}{10^{k!}}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{m_j}{n_j} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^j \frac{a_k}{10^{k!}} \right| \\ &= \sum_{k=1+j}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} = \frac{a_{1+j}}{10^{(1+j)!}} + \frac{a_{2+j}}{10^{(2+j)!}} + \frac{a_{3+j}}{10^{(3+j)!}} + \dots \\ &= \frac{1}{10^{(1+j)!}} \left(a_{1+j} + \frac{a_{2+j}}{10^{(2+j)!-(1+j)!}} + \frac{a_{3+j}}{10^{(3+j)!-(1+j)!}} + \dots \right) \\ &\leq \frac{9}{10^{(1+j)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(2+j)!-(1+j)!}} + \frac{1}{10^{(3+j)!-(1+j)!}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos no Exemplo 4, temos

$$\frac{9}{10^{(1+j)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(2+j)!-(1+j)!}} + \frac{1}{10^{(3+j)!-(1+j)!}} + \dots \right) \leq \frac{9}{10^{(1+j)!}} \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{10^{j!}(10^{j!})^j}.$$

Daí,

$$\left| \alpha - \frac{m_j}{n_j} \right| \leq \frac{10}{10^{j!}(10^{j!})^j} < \frac{1}{(10^{j!})^j}$$

no que implica que

$$\left| \alpha - \frac{m_j}{n_j} \right| < \frac{1}{n_j^j}$$

uma vez que $n_j^j = 10^{j!}$.

Como, pelo Teorema 6, todo número de Liouville é transcendente, segue que α é transcendente.

Vale observar que o Exemplo 5 pode ser generalizado para números em qualquer base, ou seja, que qualquer número da forma

$$\sum_{j>1} \frac{a_j}{k^{j!}},$$

com $k \in \mathbb{N} - \{1\}$ e $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, também é número de Liouville.

A priori, agora sabemos mais do que apenas a existência de números transcendentess, podemos, de fato, exibi-los.

Observamos, por fim, que a recíproca do Teorema 6 não é válida. Na verdade, é possível provar que quase nenhum número transcendente é número de Liouville (A demonstração desse fato pode ser encontrada em [11]). Citando um exemplo, provou-se, com a ajuda de resultados merecedores (e ganhadores) da medalha Fields (veja [8]), que a constante de Champernowne dada por $c = 0.1234567891011121314\dots$ é um número transcendente. Apesar disso, c não é um número de Liouville. Os números e e π , apesar de serem transcendentess, também não são números de Liouville.

Um resultado surpreendente, demonstrado por Paul Erdős (1913-1996) em 1962, é o fato de que todo número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville. Para mostrar essa afirmação precisaremos de alguns resultados preliminares que se encontram abaixo.

Lema 1. $\alpha \in \mathbb{L}$ se, e somente, se para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Demonstração. Se α é um número de Liouville, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $p = p_n$ e $q = q_n$. Reciprocamente, dado $n \in \mathbb{N}$, vamos escolher $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ de modo que $q_n > 1$ e

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}$$

Seja

$$A = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}.$$

Se A for finito, então existe $\frac{p}{q} \in A$ tal que $|\alpha - p/q| < q^{-n}$ para $n \in \mathbb{N}'$, com $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito. Assim, $\alpha = \frac{p}{q}$, contradizendo $|\alpha - p/q| > 0$. Portanto, A é infinito. Concluímos que α é um número de Liouville. \square

Lema 2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se existirem $c > 0$ e uma seqüência de racionais $\left\{ \frac{p_j}{q_j} \right\}_{j \geq 1}$ com $q_j \geq 1$ tais que

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{c}{q_j^j},$$

então $\alpha \in \mathbb{L}$.

Demonstração. Se $0 < c \leq 1$ então

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{c}{q_j^j} \leq \frac{1}{q_j^j}$$

e segue o resultado.

Se $c > 1$, observe que a sequência q_j é ilimitada. Dessa forma, existe j_0 tal que para todo $j > j_0$ tem-se que $c < q_j^{j_0}$ donde

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{c}{q_j^j} < \frac{q_j^{j_0}}{q_j^j} = \frac{1}{q_j^{j-j_0}}, \forall j \geq j_0.$$

Para todo $j \geq j_0$, considere a sequência dos números naturais $n = j - j_0$. Desse modo, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\frac{p}{q} = \frac{p_j}{q_j}$ tal que

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q^n}$$

e pelo Lema 1 temos que α é um número de Liouville. □

Lema 3. Se existirem uma sequência ilimitada $\{w_k\}_{k \geq 1}$ de números reais positivos e uma sequência de racionais $\left\{ \frac{p_k}{q_k} \right\}_{k \geq 1}$ tais que

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^{w_k}}, \forall k \in \mathbb{N},$$

então $\alpha \in \mathbb{L}$.

Demonstração. Seja $\{s_k\}_{k \geq 1}$ contida em $\{w_k\}_{k \geq 1}$ uma subsequência ilimitada em que $s_k > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\left\{ \frac{a_k}{b_k} \right\}_{k \geq 1}$ contida em $\left\{ \frac{p_k}{q_k} \right\}_{k \geq 1}$ tais que

$$0 < \left| \alpha - \frac{a_k}{b_k} \right| < \frac{1}{b_k^{s_k}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Agora tome uma sequência de números reais $\{r_k\}_{k \geq 1}$ com $r_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $s_k - r_k = k$, então

$$0 < \left| \alpha - \frac{a_k}{b_k} \right| < \frac{1}{b_k^{s_k}} < \frac{1}{b_k^{s_k - r_k}} = \frac{1}{b_k^k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo, pelo Lema 1, segue o resultado. □

Teorema 7. Se $\alpha \in \mathbb{L}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ com $q \geq 1$, então

(i) $\alpha \frac{p}{q} \in \mathbb{L}$;

$$(ii) \left(\alpha + \frac{p}{q}\right) \in \mathbb{L}.$$

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{L}$, então existe uma sequência de racionais $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j \geq 1}$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

(i) Seja $\alpha_j = \log_q q_j$ donde $q^{\alpha_j} = q_j$. Observe que $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = +\infty$ e ainda

$$\left|\alpha \frac{p}{q} - \frac{p p_j}{q q_j}\right| = \left|\alpha \frac{p}{q} - \frac{p p_j}{q q^{\alpha_j}}\right| = \left|\alpha \frac{p}{q} - \frac{p p_j}{q^{\alpha_j+1}}\right|.$$

Por outro lado, observe que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|p| < q^k$, então

$$\begin{aligned} \left|\alpha \frac{p}{q} - \frac{p p_j}{q q_j}\right| &= \frac{|p|}{q} \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{|p|}{q} \frac{1}{q_j^j} = \\ &= \frac{|p|}{q(q^{\alpha_j})^j} = \frac{|p|}{q^{j\alpha_j+1}} = \frac{|p|}{(q^{\alpha_j+1})^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}}} \\ &< \frac{q^k}{(q^{\alpha_j+1})^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}}} = \frac{1}{(q^{\alpha_j+1})^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}-k}}. \end{aligned}$$

Agora, sabemos pelo Cálculo Diferencial e Integral que se uma função $f(x)$ é ilimitada, então, pelo Teorema de L'hospital, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+f(x)} = 1$, e, assim, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{f(x)}{1+f(x)} = +\infty$. Logo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{j\alpha_j + 1}{\alpha_j + 1} - k\right) = +\infty,$$

e segue pelo Lema 3 que $\alpha \frac{p}{q} \in \mathbb{L}$.

(ii) Como no item anterior

$$\begin{aligned} \left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j}{q_j} + \frac{p}{q}\right)\right| &= \left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j q + q_j p}{q q_j}\right)\right| \\ &= \left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j q + q_j p}{q q^{\alpha_j}}\right)\right| = \left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j q + q_j p}{q^{\alpha_j+1}}\right)\right|. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j}{q_j} + \frac{p}{q}\right)\right| &= \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| \\ &< \frac{1}{q_j^j} = \frac{1}{(q^{\alpha_j})^j} = \frac{1}{q^{j\alpha_j}} = \frac{1}{(q^{\alpha_j+1})^{\frac{j\alpha_j}{\alpha_j+1}}}. \end{aligned}$$

Mas, já sabemos que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{j\alpha_j}{\alpha_j+1} = +\infty$, donde, pelo Lema 3 segue que $\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) \in \mathbb{L}$. □

Para tanto, segue o Teorema de Erdős que nos afirma que qualquer número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville.

Teorema 8. Dado $\beta \in \mathbb{R}$, então existem $l_1, l_2 \in \mathbb{L}$ tais que $\beta = l_1 + l_2$.

Demonstração. De fato, se $\beta \in \mathbb{L}$, então pelo Teorema 7 basta tomar $l_1 = l_2 = \frac{\beta}{2}$.

Se $\beta \in \mathbb{Q}$ tomemos qualquer $\alpha \in \mathbb{L}$ pelo Teorema 7 $(\frac{\beta+\alpha}{2})$ e $(\frac{\beta-\alpha}{2}) \in \mathbb{L}$ com $\beta = \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2}$.

Agora, se $\beta \notin \mathbb{Q}$, então $(\beta - [\beta]) \notin \mathbb{Q}$, onde $[\beta]$ é a parte inteira de β , e assim podemos estudar apenas o caso em que $\beta \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}^c$. Seja

$$\beta = 0.a_1a_2a_3 \dots a_n$$

onde $a_n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ e difina

$$l_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{10^n} \text{ e } l_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{10^n}$$

em que para $n! \leq k \leq (n+1)!$ temos

$$\begin{aligned} \lambda_k &= a_k \text{ e } \delta_k = 0 \text{ se } n = 1, 3, 5, \dots \\ \delta_k &= a_k \text{ e } \lambda_k = 0 \text{ se } n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

Note que $\beta = l_1 + l_2$. Falta mostrar que l_1 e $l_2 \in \mathbb{L}$. Para l_1 , tomemos $p_n = \sum_{k=1}^{(2n)!-1} \lambda_k 10^{(2n)!-(1+k)}$ e $q_n = 10^{(2n)!-1}$, daí

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\sum_{k=1}^{(2n)!-1} \lambda_k 10^{(2n)!-(1+k)}}{10^{(2n)!-1}} = \sum_{k=1}^{(2n)!-1} \frac{\lambda_k 10^{(2n)!-1}}{10^k 10^{(2n)!-1}} = \sum_{k=1}^{(2n)!-1} \frac{\lambda_k}{10^k}.$$

Segue-se que

$$\left| l_1 - \frac{p}{q} \right| = \sum_{k=(2n)!}^{\infty} \frac{\lambda_k}{10^k}.$$

Como $\lambda_k = 0$ para $(2n)! \leq k < (2n+1)!$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \left| l_1 - \frac{p}{q} \right| &= \sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{\lambda_k}{10^k} \leq \sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \\ &= \frac{9}{10^{(2n)!+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \frac{9}{10^{(2n)!+1}} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10^{((2n)!+1)-1}} \\ &< \frac{1}{10^{n((2n)!-1)}} = \frac{1}{(10^{(2n)!-1})^n} = \frac{1}{q_n^n}. \end{aligned}$$

Logo, $l_1 \in \mathbb{L}$. De modo análogo pode-se provar que $l_2 \in \mathbb{L}$. □

Esse resultado é bem curioso, visto que é possível mostrar que o conjunto dos números de Liouville tem medida nula² em \mathbb{R} , isto é, quase nenhum número real é de Liouville. Isso posto, podemos pensar então que, mesmo sendo um conjunto “invisível”, os números de Liouville estão estrategicamente posicionados na reta real [8].

²Ao leitor interessado sobre esse assunto recomendamos a leitura de [11].

4. Considerações finais

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou apresentar um estudo sobre tópicos que compreendem a Teoria dos Números Transcendentes; uma área da Teoria dos Números em que desde o século XVII especulam-se questões relacionadas à natureza transcendental dos números a partir do estudo de equações polinomiais, em específico, suas raízes, a saber, números algébricos. Esta teoria foi originada por Joseph Liouville, ao criar uma classe numérica, os Números de Liouville, pela qual não só provou a existência dos números transcendentos, como também explicitou seus primeiros exemplos.

Ademais, a referida teoria mostra-se viva e convidativa, pois apresenta problemas ainda em aberto e viabiliza investigações relacionadas às suas possíveis aplicabilidades. Nessa perspectiva, o presente trabalho buscou contribuir para seu desenvolvimento teórico ao apresentar a definição e a caracterização do conjunto dos números algébricos e dos números transcendentos. Além disso, elencam-se importantes resultados sobre a classe dos números de Liouville, permitindo, assim, considerarmos que os objetivos propostos foram realmente alcançados.

Nesse sentido, este trabalho apresenta-se como uma pequena pesquisa em Teoria Transcendente, cuja importância reside em subsidiar estudos futuros de modo que coadjuve o seu progresso teórico no meio científico, haja vista tratar-se de área recente e que tem despertado o interesse de muitos pesquisadores.

Referências

- [1] Burger, Edward. Tubbs, Robert. *Making transcendence transparent*. New York: Springer, 2004.
- [2] Figueiredo, D. G. *Números irracionais e transcendentos*. 3^a ed. Coleção de Iniciação Científica. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [3] Latefá, C. A.; Silva, E.; Lelis, J. *Teoria dos Números Transcendentes: do teorema de Liouville à conjectura de Schanuel*. 1.ed. VIII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro/RJ, 2016.
- [4] Liouville, J., *Remarques relatives à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris, 18 (1844), 883–885.
- [5] Liouville, J., *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 16 (1851), n^o 1, 133–142.
- [6] Marques, D. *Alguns resultados que geram números transcendentos*. Dissertação (Mestrado em Matemática). UFC, Fortaleza/CE, 2007.
- [7] Marques, D. *O problema de Land e uma generalização dos teoremas de Stäckel*. Tese (Doutorado em Matemática). UNB, Brasília/DF, 2009.
- [8] Marques, D. *Teoria dos Números Transcendentes*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [9] Mascarenhas, S. P. *A Irracionalidade e Transcendência dos Números*. Dissertação (Mestrado em Matemática). UFC, Fortaleza/CE, 2017.

- [10] Oliveira, D.; Hoyos, M. G. C. *Números Transcendentes: Números de Liouville e a Constante de Chapernowne*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). UFSJ, São João del Rei/MG, 2015.
- [11] Silva, E. C. S. *Alguns resultados relacionados a números de Liouville*. Dissertação (Mestrado em Matemática). UNB, Brasília/DF, 2015.
- [12] Silva, W. D.; CARVALHO, T. O. A Transcendência da Constante de Thue-Morse. *Anais da 31ª Semana da Matemática UEL*, Londrina/PR, 2016.

Lindauriane Vieira
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Ceará
Canindé/CE
<lindaurianevieiramath@gmail.com>

Luiz Feitoza
Universidade Federal do Ceará
Fortaleza/CE
<au-gustavo@hotmail.com>

Diego Lima
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Ceará
Maracanaú/CE
<poncianodiego@gmail.com>

Genilson da Silva
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Ceará
Canindé/CE
<genilsonmath@gmail.com>

Recebido: 04/05/2018

Caracterizações de convexidade para polígonos simples

Luciano André

Rogério de Aguiar

Resumo

Na educação básica são apresentadas algumas definições de polígonos convexos de maneira sucinta, de modo a fornecer caracterizações desse tipo de polígono para, em seguida, desenvolver os tópicos de geometria plana restringindo a esta categoria. Em geral não abordam polígonos simples não convexos nesse nível escolar. Também não é comum discutir sobre a equivalência entre as diversas de suas caracterizações. O objetivo deste artigo é demonstrar resultados sobre convexidade, que ampliam as noções sobre tal assunto na educação básica, estendendo a teoria dos polígonos simples para o caso não convexo. Uma vez feito o desenvolvimento teórico, são sugeridas formas de apresentação da convexidade no ensino básico usando elementos visuais e a intuição. Serão discutidas as diferentes formas de caracterizar os polígonos convexos e as dificuldades que surgem ao tentar abordar os não convexos. Os procedimentos metodológicos utilizados foram a pesquisa qualitativa na forma de pesquisa bibliográfica e documental. Como resultado reúnem-se em um único texto diversas proposições sobre convexidade que se encontravam dispersas na literatura, usando para tal objetivo uma axiomática adequada ao ensino de geometria na educação básica, qual seja, a axiomática da régua graduada e do transferidor.

Palavras-chave: Polígonos Simples; Geometria Dedutiva; Convexidade.

Abstract

In basic education some types of definitions of convex polygons are presented succinctly, in order to provide characterizations of this type of polygon and then to develop the topics of flat geometry restricting to this category. In general, they do not address simple non-convex polygons at this school level. Nor is it common to discuss the equivalence between the various of his characterizations. The purpose of this article is to demonstrate results on convexity, which broaden the notions about such subject in basic education, extending the theory of simple polygons to the nonconvex case. Once the theoretical development is done, we suggest ways of presenting convexity in basic education using visual elements and intuition. We will discuss the different ways of characterizing convex polygons and the difficulties that arise when trying to approach nonconvex polygons. The methodological procedures used were the qualitative research in the form of bibliographic and documentary research. As a result, several propositions about convexity that are scattered in the literature are gathered together in a single text, using for that purpose a framework adequate to the teaching of geometry in basic education, that is, the framework of the graduated ruler and the protractor.

Keywords: Simple Polygons; Deductive Geometry; Convexity.

1. Introdução

A visualização e a intuição em geometria são sem dúvida os maiores aliados do professor do ensino fundamental e médio em suas aulas. Algumas justificativas dos enunciados da geometria nesse nível são obtidas por meio dos desenhos, de um conjunto de definições, ou de resultados que são apresentados sem demonstrações [7]; [8]; [13]; [16]. Uma explicação para tal forma de apresentação é que não é adequado na escola básica focar no formalismo, pois segundo Leivas o ensino da geometria na escola básica deve privilegiar “*outras dimensões consideradas essenciais para o desenvolvimento de um pensamento geométrico, apoiado, por exemplo, no tripé imaginação, intuição e visualização [...]*” [9, p18]. Assim, aconselha-se ao educador fazer demonstrações de teoremas em casos de importância destacada, e, dependendo do nível de complexidade, pode-se deixar de seguir rigorosamente o roteiro formal do método axiomático, para que sejam privilegiados os aspectos visuais. A ideia que permeia o ensino básico é clareza e não o rigor lógico. Abre-se mão desse em detrimento daquele com intuito de aproximar a geometria da realidade e de suas aplicações práticas. Para, porém, que o professor cumpra adequadamente seu papel, suas aulas devem ter por base um modelo de geometria dedutiva adequado a uma transposição didática, do qual o educador tenha conhecimento pleno. Os modelos de geometria à base da régua graduada e do transferidor, resultado de extensas discussões pedagógicas no século passado, são os preferidos entre os pesquisadores em educação matemática no mundo como instrumento de ensino da geometria dedutiva. As definições e resultados obtidos neste artigo tomaram por base o modelo axiomático constante do livro *Geometria euclidiana plana e construções geométricas* dos autores Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz [18], que por sua vez fora baseado na axiomática do School Mathematics Study Groups (SMSG). O SMSG foi um grupo de estudos para modernização do ensino básico de matemática nos Estados Unidos na década de 1960. Maiores informações sobre o trabalho desenvolvido por esse grupo podem ser obtidas no livro *Geometry, Student's Text, Part I, Unit I3*. de Frank B. Allen [1]. O modelo criado pelo SMSG usa axiomas de medida de segmentos e ângulos, substituindo a régua não graduada e o compasso euclidianos pela régua graduada e o transferidor. O desenvolvimento das ideias e as demonstrações dos resultados básicos associados a nossa discussão, dentro do contexto axiomático supracitado, podem ser consultados na dissertação “*Convexidade em figuras geométricas planas*” de Luciano do N. André [2]. A geometria dedutiva no ensino fundamental e médio oportuniza o contato e a identificação completa de seus elementos para as figuras geométricas mais simples: os triângulos, os polígonos simples convexos e o círculo. Portanto, podemos afirmar que a geometria dedutiva elementar, no contexto das figuras geométricas planas limitadas, é uma teoria sobre a convexidade. Nesses casos é cômodo identificar interior e exterior, perímetro, área e ângulos das figuras. No desenvolvimento de um curso introdutório de geometria axiomática, tal como no livro *Geometria euclidiana plana* de João Lucas Marques Barbosa [3], à medida em que as figuras convexas vão sendo obtidas formalmente, os exercícios vão surgindo para os casos não convexas, cuja resolução é feita na maioria dos casos apelando-se para os desenhos e a intuição do leitor. Neste contexto, o aluno interessado questiona-se sobre o interior do polígono, ângulos e outras propriedades para os casos não convexas. As dificuldades teóricas começam a surgir quando consideramos as figuras não convexas limitadas por polígonos simples. Dentre essas dificuldades destacamos duas delas, que iremos discutir nesse artigo:

1. **Inexistência de ângulos reflexos.** Pelo menos um ângulo interno de um polígono simples não convexo tem medida reflexa, i.e., $360^\circ - \alpha$, com $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Portanto, há a necessidade

no contexto dedutivo supracitado de se fazer uma ampliação da noção de ângulo para o seu adequado tratamento. Essa necessidade surge porque a medida de ângulos apresentada no modelo axiomático considerado é a medida padrão, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, que corresponde ao uso do transferidor de meia-lua.

2. Interior do polígono simples não convexo. Neste caso a determinação do interior do polígono simples não convexo não é imediata como no caso convexo, que é uma intersecção de semiplanos.

Para compreendermos melhor os polígonos simples não convexos, iremos estudar várias caracterizações dos polígonos simples convexos. Com isso obteremos condições necessárias e suficientes para que um polígono seja convexo, condições essas que serão designadas como sendo as “*Definições de Polígono Convexo*”. Identificaremos os polígonos não convexos como aqueles que não satisfazem as referidas condições. A inspiração para o estudo com essa abordagem teve início nos artigos da *Revista do Professor de Matemática* (RPM) intitulados “A soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não)” e “Qual é Mesmo a Definição de Polígono Convexo?” de Elon Lages Lima publicados na RPM 19 [10] e RPM 21 [11] colecionados no livro *Matemática e ensino* do mesmo autor [12]. A convexidade para polígonos convexos acaba por ser a chave para os alunos e professores entenderem melhor no contexto dedutivo os polígonos simples em geral. Em uma segunda etapa, pode-se avançar um pouco mais no estudo das figuras convexas e considerar a convexidade de figuras convexas limitadas quaisquer, conforme apresentado no Capítulo 5 da já referenciada dissertação [2].

Apropriando-se de elementos visuais, estimulando a imaginação e a intuição, o professor do ensino fundamental e médio utiliza muitas dessas caracterizações em sala de aula. Justificar que um polígono simples é convexo porque não tem reentrâncias ou porque todas as retas que contêm os lados são retas de apoio são exemplos de algumas atividades comuns entre os professores que ensinam geometria neste nível. Perguntar-se por que essas e outras noções sobre convexidade em polígonos são equivalentes é algo natural. A maioria dos livros de geometria, independentemente do nível, não trata de demonstrar a equivalência de tais caracterizações.

O objetivo deste artigo é apresentar e demonstrar resultados sobre convexidade que ampliam as noções vistas na educação básica, visando estender de forma natural os resultados e definições sobre polígonos convexos que são abordados nesse nível educacional. Embora não sendo inéditos os resultados aqui expostos, são apresentados de maneira concisa e encadeada, de modo a tornar o assunto mais atraente seguindo uma axiomática preestabelecida. Portanto, a novidade não está nos resultados e sim na forma de apresentação, reunindo diversas proposições dispersas na literatura e colocando-as em um encadeamento lógico. Permeia na discussão dos resultados a noção de fecho convexo, que pode ser aproveitada na apropriação do conceito de convexidade por meio da intuição. O significado que damos à palavra intuição é o mesmo discutido em [9] ,

“Considero intuição um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto. O conceito deve ser formado de forma reflexiva, consciente, produzindo sentimento de certeza a partir da autoevidência [9, p21].”

Seguindo esse preceito, apresentamos na última seção deste artigo ideias sobre convexidade para

polígonos simples, com potencial de aplicação nas aulas, usando a noção de fecho convexo e o geoplano. Outras noções intuitivas sobre convexidade também são apresentadas.

2. Polígonos simples: primeiros resultados

Iniciamos esta seção revendo a definição de ângulo, medida de ângulo e suas generalizações.

Definição 1 (Ângulo). Um ângulo é uma união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas na mesma reta.

Os postulados 8 e 9 de [18] ensinam-nos como medir ângulos: A cada ângulo $\angle ABC$ corresponde um número real α entre 0 e 180. Reciprocamente, dada uma semirreta \overrightarrow{BA} e \mathcal{H} um semiplano da reta \overleftrightarrow{BA} , existe uma única semirreta \overrightarrow{BC} com C em \mathcal{H} tal que $m(\angle ABC) = \alpha$. Na Figura 1 temos um exemplo quando $\alpha = 74^\circ$. Chamaremos essa medida, por motivos que ficarão claros na sequência, de medida padrão do ângulo $\angle ABC$.

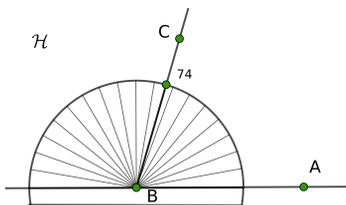


Figura 1: Medida do ângulo $\angle ABC$.

Os ângulos da Definição 1 são chamados *ângulos próprios*. Destacando os raios inicial e final, temos um ângulo orientado. Permitindo que os lados inicial e final possam ser coincidentes ou opostos, obtemos os ângulos de medida 0° e 180° , chamados *ângulo nulo* e *ângulo raso*, respectivamente. Essa é a nossa primeira extensão da noção de medida de ângulo.

Definição 2 (Interior do ângulo). Dizemos que o ponto P está no interior do ângulo próprio $\angle ABC$ ou é ponto interior do ângulo próprio $\angle ABC$ se os pontos P e A estiverem do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BC} e os pontos P e C estiverem do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BA} .

Segue da Definição 2 que o interior do ângulo próprio $\angle ABC$ é uma intersecção de dois semiplanos abertos, a saber: o determinado pela reta \overleftrightarrow{BA} que contém o ponto C e o determinado pela reta \overleftrightarrow{BC} que contém o ponto A . Não se define interior do ângulo nulo e nem do ângulo raso, conforme (LEE, 2013, p95). O exterior do ângulo próprio $\angle ABC$ é o conjunto dos pontos do plano que não pertencem ao ângulo $\angle ABC$ e nem ao seu interior.

A um ângulo próprio podemos associar dois tipos de medida: a *medida padrão* α , tal que $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ e outra dada por $360^\circ - \alpha$, chamada de *medida reflexa* do $\angle ABC$.

Voltaremos a falar sobre a medida reflexa na sequência. Para o que segue precisamos de duas importantes definições.

Definição 3. Sejam A_1, A_2, \dots, A_n , com $n \geq 3$, uma sequência de pontos distintos no plano. Chama-se poligonal o conjunto formado pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Acrescentando o segmento A_nA_1 a poligonal é dita ser fechada. Uma poligonal fechada será um polígono simples se satisfizer as propriedades:

1. Dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta;
2. Nenhum par de lados se intersecta, exceto em seus vértices.

Definição 4 (Subconjunto do plano convexo). Um subconjunto do plano é dito convexo se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está totalmente nele contido.

Notamos que, pela definição de polígono simples, todo ângulo do polígono é próprio¹.

Teorema 1. A intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Demonstração. Com efeito, seja $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ a intersecção de uma família de conjuntos convexos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ com índices em L . Sejam P e Q , pontos quaisquer dessa intersecção. Então P e Q pertencem a A_λ para todo $\lambda \in L$. Logo, PQ está inteiramente contido em cada um dos A_λ , pois cada um deles é convexo. Logo PQ está inteiramente contido em $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ e o resultado está demonstrado. \square

Exemplo 1 (Convexidade ângulo). O interior do ângulo próprio $\angle ABC$ é uma região convexa do plano e o exterior é uma região não convexa.

Associamos ao interior do ângulo próprio $\angle ABC$ a medida padrão α de $\angle ABC$ e ao exterior de $\angle ABC$ a medida reflexa $360^\circ - \alpha$.

A partir de um ângulo próprio $\angle ABC$ podemos construir um quadrilátero, cujo interior está contido no exterior de $\angle ABC$, conforme Figura 2a. Nesse caso, o ângulo $\angle ABC$ interno ao quadrilátero $ABCD$ terá a medida reflexa de $\angle ABC$. Dizemos apenas, para simplificar a linguagem, que o ângulo $\angle ABC$, interno ao quadrilátero $ABCD$, é um ângulo reflexo. De uma forma geral, um ângulo interno de um polígono simples será dito reflexo ou côncavo, quando a medida angular associada ao referido ângulo for a reflexa. Intuitivamente, o interior do polígono está contido, ao menos localmente, no exterior do ângulo. Perceba esse último aspecto no vértice O da Figura 2b. O ângulo do polígono será dito convexo quando a medida associada for a padrão e, novamente pela intuição, o interior do polígono, ao menos localmente, estará contido no interior do ângulo.

Exemplo 2. Um polígono convexo não poder ter um ângulo reflexo. Com efeito, o segmento ligando os vértices do ângulo reflexo não pode estar totalmente contido no interior do polígono (Figura 2).

O Teorema 1 permite que demonstremos a convexidade de várias figuras geométricas planas conhecidas. Dentre elas, teremos a possibilidade de demonstrar a convexidade do disco.

Teorema 2 (Convexidade do disco). *O círculo limita uma figura convexa do plano.*

¹Com ângulo do polígono queremos dizer aqueles ângulos que obtemos estendendo dois lados adjacentes, obtendo dois raios a partir do ponto comum aos lados.

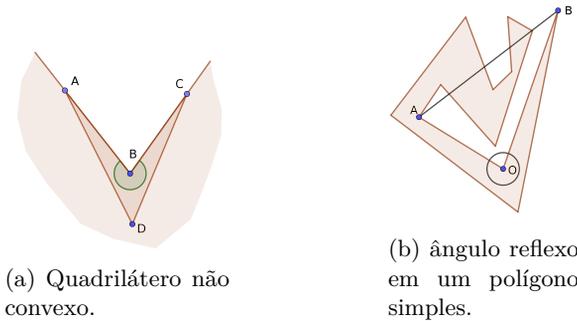


Figura 2: Polígonos com ângulos reflexos.

Demonstração. Primeiro esclarecemos que no nosso contexto o disco é a região limitada pelo seu círculo. Sejam $\Gamma(O, r)$ um círculo de centro O e raio r e $\mathcal{D}(O, r)$ o disco associado. Para cada $M \in \Gamma$, a reta tangente a M define um semiplano \mathcal{H}_M contendo o disco \mathcal{D} . Afirmamos que $\mathcal{D} = \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$. Primeiro notamos que da forma como fora definido, $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_M$ para todo M , portanto $\mathcal{D} \subset \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$. Agora, seja $N \in \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$ e supomos temporariamente que $N \notin \mathcal{D}$. Consideremos o segmento ON ; da forma como definimos N , $\overline{ON} > r$. Pelos axiomas de medida, existe $P \in ON$, entre O e N , tal que $\overline{OP} = r$, portanto $P \in \Gamma$ (Figura 3). A reta tangente a Γ por P deixa N em um semiplano e O em outro, de forma que $N \notin \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$, pois \mathcal{D} está no mesmo semiplano de O da reta tangente por P . Portanto, $N \in \mathcal{D}$.

Isso mostra que $\mathcal{D} \supset \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$ e a igualdade é verificada. Para finalizar, é só notar que $\bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$ é uma intersecção infinita de conjuntos convexos e, pelo Teorema 1, é um conjunto convexo. Isso encerra a demonstração. \square

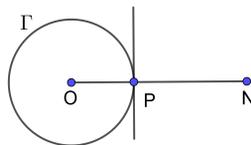


Figura 3: Semiplano determinado pela tangente ao círculo.

Definição 5 (1^a. Definição de Polígono Convexo). Um polígono simples \mathcal{P} é convexo se limita uma figura convexa plana².

A Definição 5 é a mais utilizada na educação básica para definir polígono convexo ou a região que o mesmo limita. Uma breve busca na internet com a palavra-chave “polígono convexo” retorna, em sua maioria, por ela. Por exemplo, no site do Portal Escola³ obtém-se: “Um polígono é convexo

²Perceba que estamos assumindo implicitamente que um polígono simples admite um interior. Esse fato será demonstrado no Teorema 4.

³Brasil Escola. Disponível em <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/poligonos-convexos.htm>>. Acesso em: 27/03/2019.

quando todos os pontos de um segmento de reta que possui as extremidades no interior do polígono também estão dentro dele”. Esta mesma definição pode ser encontrada em livros didáticos como no livro *A conquista da matemática* [8, p148] Outras definições alternativas são apresentadas para polígonos convexos usando retas de apoio (normalmente essa não é a nomenclatura usada no ensino básico) ou a noção de boca (essa também não é uma noção comum no ensino básico). Definiremos “reta de apoio” e “triângulo boca” mais adiante neste artigo. Uma consulta a livros didáticos indica que geralmente apresenta-se apenas uma definição de polígono convexo e não são abordadas outras equivalentes, já que uma é suficiente para caracterizá-lo. Além disso, após apresentada a definição, indica-se nos livros didáticos que dali em diante somente serão considerados os polígonos convexos.

Definição 6 (Reta de apoio). Diz-se que r é uma reta de apoio do polígono \mathcal{P} quando \mathcal{P} tem pelo menos um ponto em comum com r e quando \mathcal{P} está contido inteiramente em um dos semiplanos fechados determinados por r .

Notamos que por um vértice de um polígono podemos obter uma quantidade infinita de retas de apoio (Figura 4a). Por um ponto interno de um lado, porém, a reta de apoio, caso exista, conterá todos os pontos do lado (Figura 4b). A Figura 4c mostra um caso em que t não é uma reta de apoio do polígono.

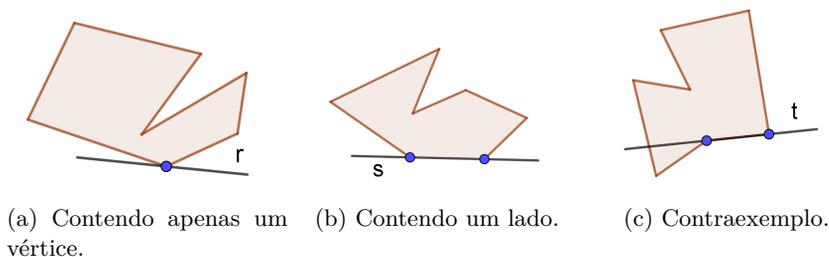


Figura 4: Retas de apoio: Exemplos e contraexemplos.

Teorema 3 (Caracterização da convexidade). Toda figura plana limitada por um polígono convexo é uma intersecção de um número finito de semiplanos.

Demonstração. Seja $\mathcal{P} : A_1A_2 \dots A_n$ um polígono convexo. Mostraremos que a figura Φ , limitada por \mathcal{P} é uma intersecção de um número finito de semiplanos. Para tal, mostraremos que toda reta que contém um dos lados de \mathcal{P} é uma reta de apoio de \mathcal{P} . De fato, vamos supor, sem perda de generalidade, que a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, que contém o lado A_1A_2 , não é uma reta de apoio de \mathcal{P} . Sejam M um ponto entre A_1 e A_2 e \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 os semiplanos determinados pela reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$. Escolhemos um ponto B pertencente a Φ em \mathcal{H}_1 e um ponto C pertencente a Φ em \mathcal{H}_2 (Figura 5). Pela convexidade de Φ todos os pontos da figura limitada pelo triângulo A_1MB pertencem a Φ , analogamente todos os pontos da figura limitada pelo triângulo A_1MC pertencem a Φ . Logo, A_1M está contido no interior de Φ e assim os pontos entre A_1 e M não são pontos de fronteira de Φ , o que é uma contradição, pois $A_1M \subset A_1A_2$ e A_1A_2 é um lado de \mathcal{P} . Quando dizemos que os pontos entre A_1 e M são interiores a Φ vem do seguinte: A_1M é uma diagonal interna do quadrilátero A_1BMC e o interior de A_1BMC é composto pelos interiores dos triângulos A_1BM e A_1CM e pelos pontos

de A_1M , exceto por A_1 e M . Logo, qualquer círculo suficientemente pequeno centrado no ponto P , entre A_1 e M encerrará pontos somente de Φ . Dessa forma $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ é uma reta de apoio de \mathcal{P} e o mesmo resultado vale para todos os lados de \mathcal{P} . Portanto, a figura Φ está contida em cada um dos semiplanos que contém \mathcal{P} , cuja fronteira é uma reta de apoio de \mathcal{P} . A intersecção de todos os semiplanos é a figura Φ . Isso era o queríamos demonstrar. \square

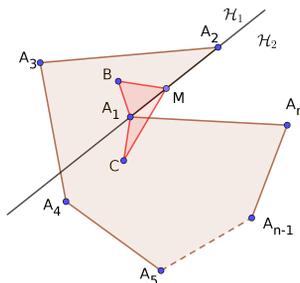


Figura 5: Ideia da demonstração do Teorema 3.

Reciprocamente, uma intersecção de um número finito de semiplanos, se determinar uma figura limitada, essa figura terá um polígono simples como fronteira e será convexa, por ser uma intersecção de figuras convexas.

O Teorema 3 fornece-nos duas conclusões importantes. A primeira é uma nova caracterização de convexidade para polígonos simples expressa na Definição 7. A segunda conclusão é a determinação do interior do polígono simples convexo, conforme Definição 8.

Definição 7 (2^a Definição de Polígono Convexo). Um polígono \mathcal{P} é convexo quando cada reta que contém um de seus lados é uma reta de apoio de \mathcal{P} .

Definição 8 (Interior do polígono convexo). Define-se interior do polígono simples convexo \mathcal{P} a intersecção dos semiplanos abertos cuja fronteira é uma reta de apoio de \mathcal{P} e que contém \mathcal{P} , exceto pelo lado em que se apoia. A região limitada por \mathcal{P} é definida como a união dos pontos de \mathcal{P} com os seus pontos interiores. Essa região será denotada por Φ .

A Definição 7 também é usada para caracterizar polígonos convexas no ensino fundamental e médio. Exemplificando, o livro “*Conexões com a matemática*”, cuja organizadora e editora responsável é Juliane Matsubara Barroso, traz a seguinte definição “Se a reta que passa por qualquer um dos vértices consecutivos mantiver todos os demais vértices no mesmo semiplano, então tal polígono será convexo. Caso contrário tem-se um polígono não convexo.” [13, p118]. Observa-se que nessa definição não é feita alusão à reta de apoio, porém percebe-se que a reta citada é uma reta de apoio do polígono. Nesse mesmo livro o equivalente à nossa Definição 5 é apresentado como sendo uma propriedade de polígonos convexas: “As regiões convexas apresentam uma propriedade: todo segmento com extremidades pertencentes à região está contido nela.” [13, p118]. Portanto, o livro apresenta uma definição e uma propriedade de polígono convexo, sem mencionar que ambas as caracterizações são equivalentes. Nesse artigo tentamos elucidar este ponto provando à equivalência das Definições 5 e 7 por meio do Teorema 3. O livro “*Matemática: Paiva*” de Manoel Paiva também

utiliza a reta de apoio para definir polígono convexo: “Um polígono é convexo se, e somente se, a reta r que contém qualquer um de seus lados deixa o polígono contido em um mesmo semiplano de origem.” [16, p67]. Note que a reta r mencionada é uma reta de apoio do polígono. Nesse livro não é descrita outra propriedade ou definição que caracterize polígonos convexos. Em ambos os livros, após definidos os polígonos convexos, apenas esses serão estudados.

Para os polígonos simples não convexos, as retas que contêm os lados não são necessariamente retas de apoio. Embora seja altamente intuitivo que um polígono simples \mathcal{P} separe os pontos do plano que não pertencem a \mathcal{P} em pontos internos e externos, essa propriedade precisa ser provada. Demonstraremos na sequência que, por mais complicado que seja \mathcal{P} , o seu complementar no plano é decomposto em duas regiões disjuntas, o interior limitado e o exterior ilimitado. Percebe-se que a visualização do interior de \mathcal{P} nem sempre é imediata e pode, em alguns casos, tornar-se uma tarefa difícil. A que região do polígono \mathcal{P} os pontos A, B, C, D e E da Figura 6 pertencem? Demonstraremos também uma forma de decidir se um ponto qualquer do plano, que não esteja em \mathcal{P} , está no interior ou no exterior de \mathcal{P} .

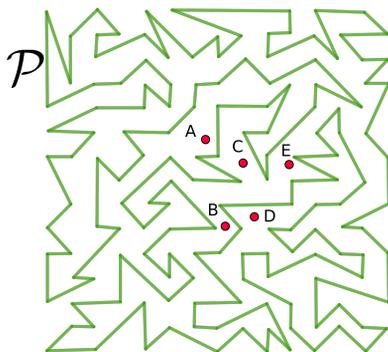


Figura 6: Interior do Polígono Simples. FONTE: Adaptado de [6, p282].

O Teorema 4 é válido para quaisquer curvas fechadas simples no plano. Essa versão generalizada é conhecida como o *Teorema da Curva de Jordan*, em homenagem ao matemático francês Camille Jordan (1838-1922). Esse resultado é um daqueles teoremas intuitivos e fáceis de enunciar, cuja demonstração é altamente não trivial. Para nosso alívio a versão que nos interessa (Teorema 4), em que a curva fechada simples é um polígono simples, não oferece as dificuldades do caso geral.

Teorema 4 (Teorema da Curva de Jordan Poligonal). *Qualquer polígono simples \mathcal{P} divide o plano Π em duas classes disjuntas de pontos, não situadas em \mathcal{P} , dos quais \mathcal{P} é a fronteira comum. As duas classes de Π são o interior de \mathcal{P} , que é limitado e o exterior ilimitado. Qualquer poligonal ligando um ponto do interior a um ponto do exterior de \mathcal{P} , corta \mathcal{P} em pelo menos um ponto. Dois pontos quaisquer da mesma classe podem ser unidos por uma poligonal que não corta \mathcal{P} , contida na mesma classe*⁴.

⁴A propriedade de ligação dos pontos da classe por uma poligonal contida na respectiva classe é chamada de conexidade por caminhos. Quando ambos interior e exterior são conexos por caminhos, diz-se que o interior é simplesmente conexo, isto é, não contém furos e nem ilhas (partes isoladas da figura). Para uma maior compreensão desses aspectos leia [2] e as referências lá sugeridas.

A demonstração que por ora se apresenta do Teorema 4 é uma versão ampliada da que foi apresentada em [6, p306].

Demonstração. Seja uma reta r no plano não paralela a qualquer dos lados de \mathcal{P} . Desde que \mathcal{P} tem uma quantidade finita de lados, isso é sempre possível. Definimos duas classes \mathcal{A} e \mathcal{B} de pontos do plano tais que:

- Um ponto $A \in \mathcal{A}$ se um raio com ponto inicial em A , paralelo a r , corta \mathcal{P} um número par de vezes;
- Um ponto $B \in \mathcal{B}$ se um raio com ponto inicial em B , paralelo a r , corta \mathcal{P} um número ímpar de vezes;

Dois pontos têm a mesma paridade quando pertencem à mesma classe.

Quando o raio passa pelos vértices temos duas situações especiais a considerar:

1. Quando os lados do polígono no vértice que o raio passa estão do mesmo lado do raio, não contamos essa situação como um corte (veja os vértices R_i na Figura 7a);
2. Quando os lados do polígono no vértice que o raio passa estão em lados opostos do raio, contamos essa situação como um corte (veja os vértices S_j na Figura 7b).

Mostraremos inicialmente que todos os pontos de um segmento de reta que não corta \mathcal{P} têm a mesma paridade. Imagine o ponto P deslocando-se de M para N no segmento MN . Conforme o ponto P move-se no segmento MN , os raios que emanam de P na direção escolhida vão varrendo dois conjuntos contidos em uma faixa no plano nos dois semiplanos determinados pela reta MN . Como o segmento MN não corta \mathcal{P} , a quantidade de cortes somente pode mudar quando um raio passar por um vértice. Então vamos analisar essa passagem pelos vértices com cuidado.

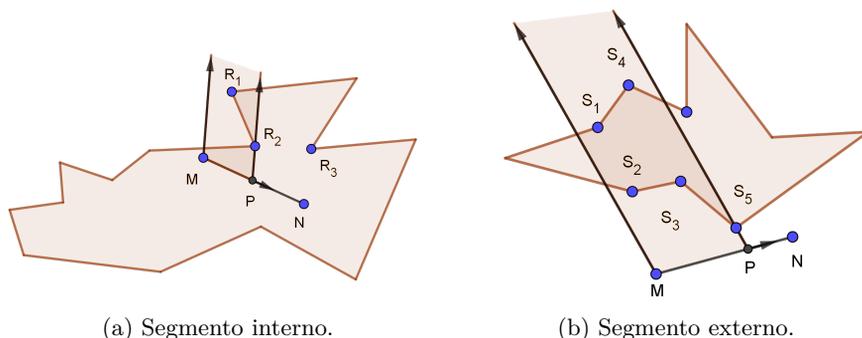


Figura 7: Varredura de vértices.

Quando um raio passa por um vértice do tipo 1, logo após a varredura passar pelo vértice, a quantidade de cortes aumenta ou diminui em dois. Na Figura 7a nos vértices R_1 e R_3 acrescentam-se dois cortes e no vértice R_2 a quantidade de cortes diminui dois. Quando um raio passa por um

vértice do tipo 2 a quantidade de cortes não é alterada (são os vértices S_i da Figura 7b). Isso mostra que a paridade não muda quando a varredura passa pelos vértices. Portanto, se o ponto $M \in \mathcal{A}$ (respectivamente \mathcal{B}), então todos os pontos do segmento também pertencerão a \mathcal{A} (respectivamente \mathcal{B}). Como consequência do que fora demonstrado, qualquer poligonal ligando um ponto $A \in \mathcal{A}$ a um ponto $B \in \mathcal{B}$ deve cortar \mathcal{P} . Porque se assim não fosse a paridade de todos os pontos do caminho e, em particular, de A e B seriam a mesma.

Mostraremos agora que dois pontos quaisquer da mesma classe podem ser unidos por um caminho poligonal que não corta \mathcal{P} . Sejam A e B os dois pontos. Se o segmento AB não corta \mathcal{P} , esse segmento é o caminho que queríamos. De outro modo, sejam A' e B' o primeiro e o último ponto de intersecção de AB com \mathcal{P} , respectivamente. Construimos o caminho começando em A ao longo do segmento AA' , em seguida, desviando um pouco antes de A' e seguindo bem próximo ao longo de \mathcal{P} até que \mathcal{P} retorne a AB em B' . Dessa forma, a poligonal volta ao segmento AB e está bem próxima de B' , conforme Figura 8.

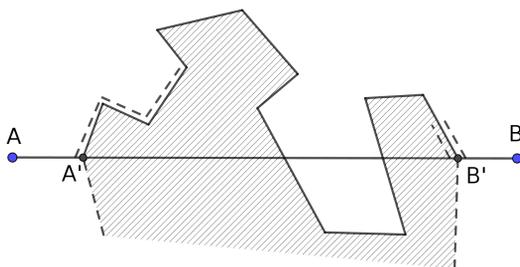


Figura 8: Conexidade.

A poligonal obtida volta a AB entre B' e B . Com efeito, percebemos que para dois pontos R e R' suficientemente próximos um do outro, mas em lados opostos de algum lado de \mathcal{P} têm paridade diferente, porque o raio partindo de R cortará \mathcal{P} em um ponto a mais do que o raio passando por R' (Figura 9).

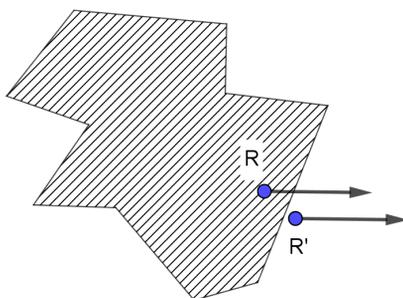


Figura 9: Paridade de pontos próximos a um lado do polígono.

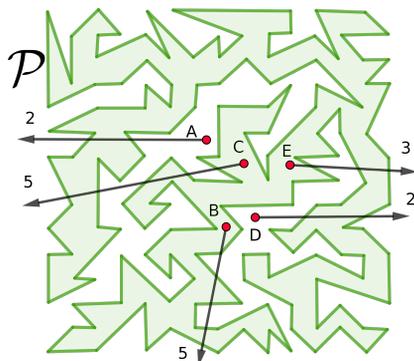


Figura 10: Identificando pontos internos e externos ao polígono \mathcal{P} da Figura 6.

Como a poligonal construída volta ao segmento AB em algum ponto muito próximo de B' sem cortar o polígono \mathcal{P} , para que a paridade seja mantida ela deverá voltar ao segmento AB entre os pontos B' e B . Isso conclui a demonstração do teorema. \square

Identificamos a classe \mathcal{A} como o exterior de \mathcal{P} , uma vez que, se percorrermos uma distância suficiente ao longo de qualquer raio na direção fixada chegaremos em um ponto C , do qual além dele não haverá nenhuma intersecção com \mathcal{P} , de modo que todos os pontos além de C tem paridade zero. O interior de \mathcal{P} é a classe \mathcal{B} . Também denotaremos por Φ , tal como fizemos para os polígonos convexos, o conjunto formado pela união dos pontos internos de \mathcal{P} com os pontos de \mathcal{P} . Usando os resultados do Teorema 4 podemos analisar os pontos da Figura 6 e decidir a quais regiões os pontos A, B, C, D e E pertencem (Figura 10).

Vemos que A e D têm paridade par (dois cortes); E tem paridade ímpar (três cortes); B e C têm paridade ímpar (cinco cortes). Portanto, A e D são pontos externos e B, C e E são internos a \mathcal{P} . Perceba que se tivéssemos escolhido outras semirretas, o número de cortes poderia aumentar ou diminuir, mas conforme demonstramos no Teorema 4 a paridade não mudaria.

Os Teoremas 5, 6 e 7 são versões reinterpretadas apenas para polígonos, daquelas apresentadas em [20] para figuras planas quaisquer limitadas por curvas fechada simples.

Teorema 5. *Toda reta passando por um ponto interior de um polígono convexo \mathcal{P} , corta \mathcal{P} em dois pontos.*

Demonstração. Sejam Φ a região limitada por \mathcal{P} , P um ponto pertencente ao interior de \mathcal{P} e r uma reta qualquer que passa pelo ponto P . A reta r e Φ são conjuntos convexos; portanto sua intersecção também é um conjunto convexo (Teorema 1). As possibilidades para $r \cap \Phi$ ser um conjunto convexo são: toda a reta, uma semirreta, um segmento, ou um ponto. Dado que Φ é uma figura convexa limitada e $r \cap \Phi$ é mais do que um ponto, pois P é um ponto interno de \mathcal{P} , resta apenas uma possibilidade: $r \cap \Phi$ é um segmento. As extremidades A e B , pertencentes a Φ não podem ser pontos internos, logo, são pontos de fronteira, isto é, pertencem a \mathcal{P} (Figura 11). \square

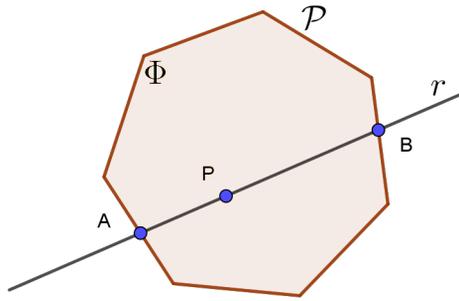


Figura 11: Reta por um ponto interior ao polígono convexo \mathcal{P} .

Teorema 6. *Se toda reta passando por um ponto interior de um polígono simples \mathcal{P} , cortar \mathcal{P} em dois pontos, então \mathcal{P} limita uma figura convexa.*

Demonstração. O Teorema 6 é equivalente à sua versão contrapositiva:

Para toda figura Φ , limitada por um polígono simples não convexo \mathcal{P} , existe uma reta que corta \mathcal{P} em mais do que dois pontos.

Faremos uma demonstração direta da formulação contrapositiva do teorema. Dado que Φ não é uma figura convexa, pode-se encontrar dois pontos A e B de Φ , tal que o segmento AB não esteja inteiramente contido em Φ . Seja C um ponto do segmento AB não pertencente a Φ (Figura 12a).

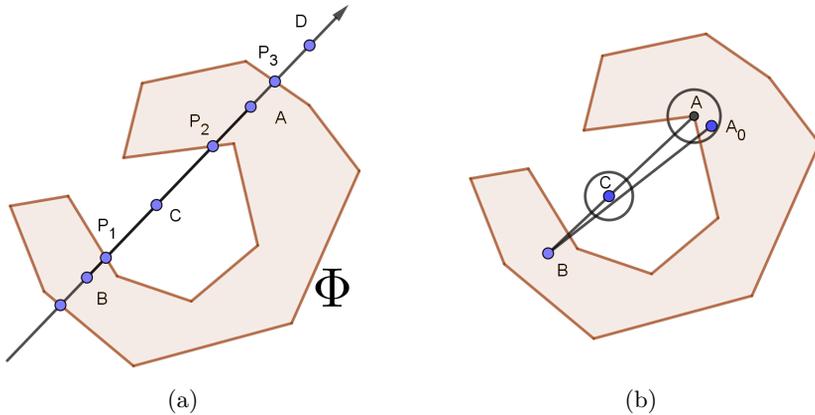


Figura 12: Ponto C externo a Φ e ao segmento AB

Podemos sempre assumir que A é um ponto do interior de \mathcal{P} . De fato, se $A \in \mathcal{P}$, poderíamos encontrar um ponto A_0 interior a \mathcal{P} , suficientemente próximo de A , tal que A_0B também contivesse

pontos exteriores a Φ (Figura 12b). Assim sendo, assumimos que A seja um ponto interior a \mathcal{P} , conforme Figura 12a. Pelo Teorema 4, no segmento BC há um ponto $P_1 \in \mathcal{P}$ (que pode coincidir com B), já que $B \in \Phi$ e $C \notin \Phi$. No segmento AC há, da mesma forma, um ponto $P_2 \in \mathcal{P}$ pois $A \in \Phi$ e $C \notin \Phi$. Finalmente, se prolongarmos o segmento AB além de A , obtemos uma semirreta AD que emana do ponto A do interior de \mathcal{P} . Nessa semirreta há também, pelo menos um ponto $P_3 \in \mathcal{P}$ pois Φ é uma figura limitada e satisfaz as condições do Teorema 4. Então, na reta AB existem pelo menos os três pontos de fronteira P_1, P_2 e P_3 de Φ . Isso era o que desejávamos demonstrar. \square

Dos Teoremas 5 e 6, podemos formular uma nova definição de convexidade para polígonos simples:

Definição 9 (3ª Definição de Polígono Convexo). Um polígono simples é convexo quando toda reta que passa por um ponto interior de \mathcal{P} , cortar \mathcal{P} em apenas dois pontos.

Seguimos nossa discussão por meio do Teorema 7, que formula a convexidade em termos das retas de apoio.

Teorema 7. *Se através de cada ponto de um polígono simples \mathcal{P} passar pelo menos uma reta de apoio, então \mathcal{P} limita uma figura convexa.*

Demonstração. Tal como fora feito no Teorema 6, demonstraremos a versão contrapositiva do Teorema 7. Mostraremos que todo polígono não convexo tem um ponto no qual não pode passar uma reta de apoio. Sejam Φ a figura limitada pelo polígono não convexo \mathcal{P} e dois pontos A e B pertencentes a Φ , tal que AB não esteja inteiramente contido em Φ . Isso quer dizer que existe um ponto C , entre A e B , tal que $C \notin \Phi$ (Figura 12). Assim como justificamos na demonstração do Teorema 6, podemos sempre assumir que A seja um ponto interior a \mathcal{P} . Usando os mesmos passos da demonstração do Teorema 6, obtemos a Figura 12a. Demonstraremos que o ponto P_2 daquela construção é um ponto de \mathcal{P} que não pode passar uma reta de apoio. Com efeito, a reta AB por P_2 não é uma reta de apoio, pois passa pelo ponto interior A . Nenhuma outra reta r por P_2 é uma reta de apoio, uma vez que os pontos A e B de Φ estariam em diferentes lados de r . Isso encerra a demonstração. \square

O Teorema 7 pode ser generalizado para figuras planas quaisquer ⁵. Sua demonstração pode ser consultada em [2, p126].

Definição 10 (4ª Definição de Polígono Convexo). Um polígono simples \mathcal{P} é convexo quando através de cada ponto de \mathcal{P} passar pelo menos uma reta de apoio.

Poderíamos usar o caso generalizado do Teorema 7 para demonstrar o Teorema 2. Concluiríamos que o círculo limita uma curva convexa, porque por cada ponto do círculo existe uma (e somente uma) reta de apoio: a reta tangente no ponto em questão. Para os polígonos convexos, nos vértices existe uma infinidade de retas de apoio e nos outros pontos do polígono somente uma.

⁵Figuras planas no contexto de nossa discussão são subconjuntos do plano limitados por uma curva fechada simples. Para maiores detalhes o leitor pode consultar [2, p41].

3. Fecho convexo e polígonos simples

Dado um subconjunto \mathcal{A} de pontos do plano, em diversas situações da matemática interessa saber determinar a menor figura convexa que contém \mathcal{A} . Essa figura abarcante é chamada de fecho convexo de \mathcal{A} . Se \mathcal{A} for um conjunto discreto de pontos ou uma figura Φ limitada por um polígono simples \mathcal{P} , o fecho será uma figura convexa limitada por um polígono. Estudaremos o fecho quando $\mathcal{A} = \Phi$, isto é, quando \mathcal{A} for uma figura Φ limitada por um polígono simples \mathcal{P} .

Começamos essa seção com a demonstração de um lema que nos será útil nas demonstrações subsequentes.

Lema 1. *Todo polígono simples com mais de três lados tem pelo menos uma diagonal interna* ⁶.

Demonstração. Seja V o vértice verticalmente mais abaixo dentre todos os outros vértices do polígono simples \mathcal{P} . Caso haja mais do que um, considere aquele que está mais à direita. Sejam A e B seus vértices vizinhos. Se AB for uma diagonal interna, terminamos aqui a demonstração. Supondo que AB não seja uma diagonal interna. Dado que $n > 3$, o triângulo AVB contém pelo menos um vértice de \mathcal{P} diferente de A, V e B . Seja Q o vértice de \mathcal{P} mais próximo de V , em que a distância é medida ortogonalmente à reta AB . A reta r paralela à reta AB por Q determina um triângulo formado somente por pontos de Φ (Figura 13). O segmento VQ é uma diagonal interna do polígono \mathcal{P} e o teorema está demonstrado. \square

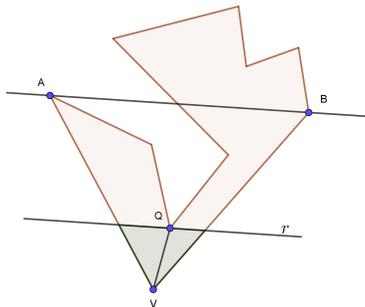


Figura 13: Diagonal interna do polígono \mathcal{P} .

Teorema 8. *Todo polígono simples com mais de três lados pode ser triangularizado em $n - 2$ triângulos. O número de diagonais da decomposição é $n - 3$.*

No presente artigo omitiremos a demonstração do Teorema 8. A demonstração desse Teorema é feita por indução e usa o Lema 1. Para os detalhes veja [2, p70].

O Teorema 8 será usado na demonstração dos resultados subsequentes. Sua demonstração no ensino fundamental e médio, quando é apresentada, geralmente é para o caso convexo, usando um

⁶Diagonal de um polígono é qualquer segmento que une dois vértices não consecutivos. A diagonal é interna quando está totalmente contida na região limitada pelo polígono. O conceito de diagonal não tem relação com o fato de o polígono ser convexo ou não.

argumento combinatório simples que aproveita o fato de todas as diagonais do polígono convexo serem internas. A triangularização ainda pode ser estendida para polígonos contendo furos ou ainda para quaisquer figuras conexas com fronteira formada por segmentos de retas. Para a geometria discreta e computacional, os algoritmos usados para implementação de rotinas computacionais, a triangularização funciona como a fatoração de um número inteiro em primos, porém sem a unicidade na decomposição do caso aritmético proveniente do Teorema Fundamental da Aritmética [15, p1]. Este teorema tem sua utilidade no cálculo de áreas, centro de massa etc, ele destaca que todo polígono simples pode ser triangularizado reduzindo o cálculo de áreas de um polígono ao cálculo de áreas de triângulos. Esse resultado pode ser utilizado na educação básica para o cálculo da área de polígonos simples não regulares, mas o que geralmente se observa nos livros didáticos é que o cálculo de áreas de uma figura qualquer é feito por meio de uma malha quadriculada onde a área da figura é aproximada pelas soma das área dos quadrados da malha que estão no interior da figura.

Para o que segue precisamos caracterizar corretamente os tipos de *reentrância* e *saliência* nos polígonos simples. Faremos isso nas definições que seguirão. As Definições 11, 12 e 13 são as comumente apresentadas em [14], [15] e no restante das publicações dos autores. As Definições 14 e 15 são apresentadas em [12, p5].

Definição 11 (Vértice e diagonal principal). Diz-se que um vértice A_i de um polígono simples \mathcal{P} é um vértice principal quando a diagonal $A_{i-1}A_{i+1}$ intersecta \mathcal{P} somente em seus extremos. A diagonal em questão é chamada de diagonal principal (Figura 14a).

Definição 12 (Ponta e triângulo orelha). O vértice principal B_j do polígono simples \mathcal{P} é chamado de ponta⁷ quando a diagonal $B_{j-1}B_{j+1}$ está inteiramente contida na figura limitada por \mathcal{P} . O triângulo $B_{j-1}B_jB_{j+1}$, contido na região limitada por \mathcal{P} , é chamado de triângulo orelha do polígono \mathcal{P} (Figura 14b).

Definição 13 (Triângulo boca). O vértice principal C_i do polígono simples \mathcal{P} forma uma boca, quando a diagonal $C_{i-1}C_{i+1}$, exceto pelos seus pontos extremos, está inteiramente contida no exterior de \mathcal{P} . O triângulo $C_{i-1}C_iC_{i+1}$ é a referida boca (Figura 14b).

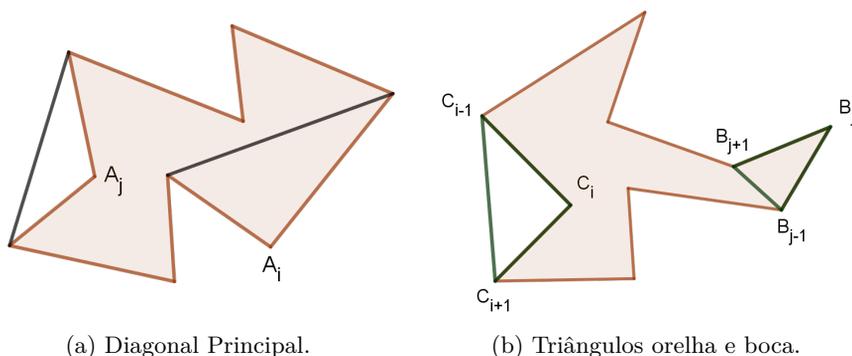


Figura 14: Diagonal principal, triângulos orelha e boca.

⁷ou ponta da orelha, do inglês “tip ear”.

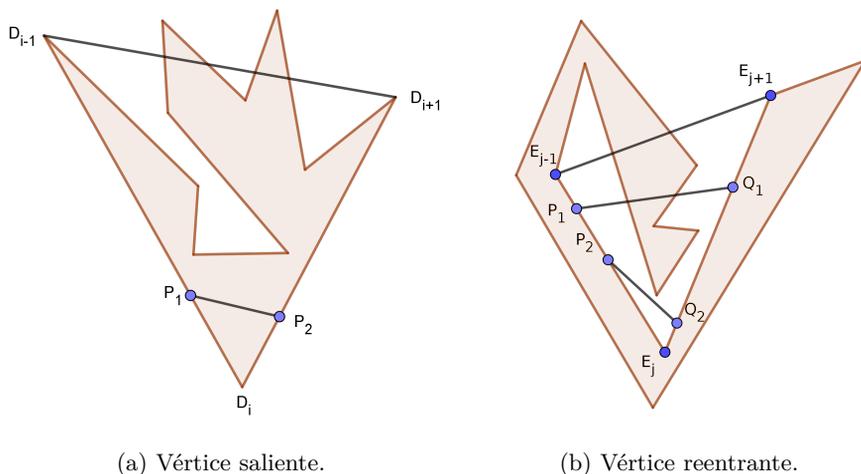


Figura 15: Vértices salientes e reentrantes.

Além desses, existem os vértices que apresentam saliências e reentrâncias mais comuns. Apresentaremos na sequência as definições gerais por uma questão de completitude. As definições 12 e 13 são casos particulares das 14 e 15.

Definição 14 (Vértice saliente). Um vértice D_i de um polígono simples \mathcal{P} diz-se um vértice saliente quando é possível escolher um ponto P_1 no interior do segmento $D_{i-1}D_i$ e outro ponto P_2 no interior do segmento D_iD_{i+1} de modo que o segmento P_1P_2 esteja contido na figura limitada por \mathcal{P} (Figura 15a).

Definição 15 (Vértice reentrante). Um vértice E_j de um polígono simples \mathcal{P} que não é saliente é dito ser um vértice reentrante. Isso significa que para qualquer ponto P no interior de $E_{j-1}E_j$ e qualquer ponto Q no interior de E_jE_{j+1} , o segmento PQ não está inteiramente contido na figura limitada por \mathcal{P} (Figura 15b).

O Teorema seguinte formaliza uma visão bastante intuitiva do polígono simples.

Teorema 9 (Teorema das duas orelhas). *Todo polígono simples tem pelo menos duas orelhas disjuntas.*

Demonstração. Dado um polígono \mathcal{P} de n lados, pelo Teorema 8 existe uma triangularização de \mathcal{P} com $n - 2$ triângulos. Cada um dos n lados de \mathcal{P} pertence a um destes triângulos. Usando o *Princípio das casas dos pombos* interpretando os triângulos “como casas” e os lados “como pombos” há dois triângulos com dois lados de \mathcal{P} cada um. O terceiro lado é, por sua vez, uma diagonal interna. Pela Definição 12, cada um dos triângulos (disjuntos) da triangularização é uma orelha. Os vértices comuns aos lados de \mathcal{P} de cada uma das orelhas são, cada um, uma ponta distinta de \mathcal{P} . \square

Para o que segue continuaremos usando a mesma notação: \mathcal{P} para um polígono simples e Φ para região limitada por \mathcal{P} (a intersecção de \mathcal{P} com o seu interior).

Definição 16 (Fecho convexo. 1ª. Definição). Define-se fecho convexo de Φ , e denota-se por $Conv(\Phi)$, a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm Φ . Em outras palavras, se Ω é convexo e $\Omega \supset \Phi$, então $\Omega \supset Conv(\Phi)$.

Notamos que $Conv(\Phi)$ está, portanto, contido em qualquer outro conjunto convexo que contém Φ . Em uma linguagem menos precisa, podemos dizer que $Conv(\Phi)$ é o menor conjunto convexo que contém Φ .

Os Teoremas 10 e 11 são reinterpretações, para o contexto desse artigo, de exercícios sugeridos nas referências: [4] e [15]

Teorema 10. *O polígono simples \mathcal{P}' com região limitada Φ' , que contém Φ (e contém \mathcal{P}) em seu interior, e que tem menor perímetro dentre todos os polígonos que contêm Φ , é convexo.*

Demonstração. Supondo que $\mathcal{P}' : P_1 \dots P_n$ não seja convexo. Então existem dois pontos A e B pertencentes a Φ' tal que AB não esteja inteiramente contido em Φ' . Pelo Teorema da curva de Jordan Poligonal, o número de intersecções que o segmento AB tem com \mathcal{P}' é par. Escolhemos os dois pontos C e D mais próximos de B . O interior do segmento CD está totalmente contido no exterior de \mathcal{P}' (Figura 16).

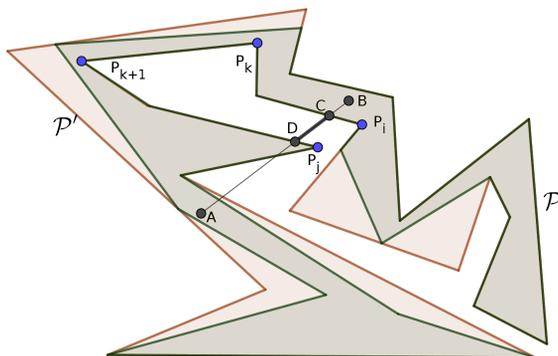


Figura 16: Visualização da ideia da demonstração do Teorema 10.

Naturalmente, C e D devem ser pontos de \mathcal{P}' . Substituindo a poligonal $C \dots P_k P_{k+1} \dots D$ pelo segmento CD obtemos o polígono $\mathcal{P}'' : P_1 \dots P_i C D P_j \dots P_n$, que contém ainda todos os pontos de Φ e tem perímetro menor do que \mathcal{P}' ⁸, contrariando a hipótese sobre \mathcal{P}' . Portanto, \mathcal{P}' é convexo. \square

Na sequência iremos demonstrar que a região limitada por \mathcal{P}' é o fecho convexo de Φ , isto é, que $\Phi' = Conv(\Phi)$. Para tal precisamos demonstrar o Teorema que segue. Usaremos as mesmas notações do Teorema 10.

⁸O comprimento da poligonal construída sobre o segmento CD é maior do que o comprimento do segmento CD . Essa é uma consequência da *Desigualdade Triangular*. O leitor encontrará uma demonstração para esse resultado em [17, p41].

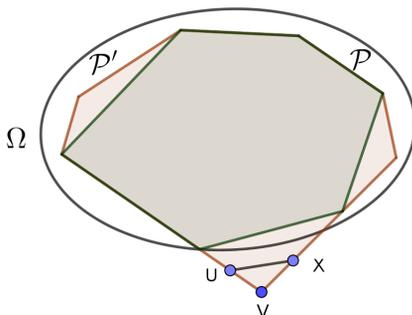


Figura 17: Visualização da ideia da demonstração do Teorema 11.

Teorema 11. *Qualquer conjunto convexo Ω que contém Φ , contém Φ' . Em outras palavras: Se $\Omega \supset \Phi$, então $\Omega \supset \Phi'$ e $\Phi' = \text{Conv}(\Phi)$.*

Demonstração. Demonstraremos essa proposição por redução ao absurdo. Assumamos que $\Omega \supset \Phi$ e que $\Omega \not\supset \Phi'$. Nessas condições há um vértice V de \mathcal{P}' que não pertence a Φ (Figura 17). Pois, se assim não fosse, todos os vértices de \mathcal{P}' estariam em Ω e da convexidade de Ω , cada lado de \mathcal{P}' estaria contido em Ω e daí teríamos $\Omega \supset \Phi'$. O vértice V não pertence a Φ , pois Ω contém todos os pontos de Φ . Tomemos os pontos U e X nos lados que partem de V em \mathcal{P}' , suficientemente próximos a V tal que o triângulo UVX não contenha nenhum ponto de Φ .

Substituindo UX por $UV + VX$, obtemos um novo polígono \mathcal{P}'' contendo Φ e com perímetro menor do que \mathcal{P}' . Essa contradição encerra a demonstração por redução ao absurdo e $\Omega \supset \Phi'$, como queríamos. \square

Pela definição 16, podemos concluir da demonstração do Teorema 11 que $\Phi' = \text{Conv}(\Phi)$.

A figura geométrica plana formada por todas as retas de apoio de um polígono simples não convexo forma uma outra figura que chamaremos na sequência de Σ . Iniciamos a discussão com uma definição. O que discutiremos na sequência até a Definição 18, pode ser consultado em [20].

Definição 17. Dado um polígono simples \mathcal{P} , define-se Σ o conjunto formado pelos semiplanos que contêm \mathcal{P} , determinados pelas retas suportes de \mathcal{P} .

Por ser uma intersecção de semiplanos, o Teorema 1 garante que Σ é uma figura convexa. Mostraremos no Teorema 12 que Σ é o fecho convexo de Φ .

Teorema 12. *A figura Σ é a menor figura convexa que contém Φ (no sentido da Definição 16). Portanto, $\Sigma = \text{Conv}(\Phi)$.*

Demonstração. A figura Σ é convexa por ser uma intersecção de semiplanos. A fronteira de Σ é um polígono convexo \mathcal{P}'' . Supondo que Σ seja diferente de $\text{Conv}(\Phi)$. Seja \mathcal{P}' o polígono que contém \mathcal{P} com menor perímetro. Pelos Teoremas 10 e 11, a região Φ' limitada por \mathcal{P}' é tal que $\Phi' = \text{Conv}(\Phi)$; portanto, $\Sigma \supset \text{Conv}(\Phi)$. Dado que supomos provisoriamente que Σ é diferente

de $Conv(\Phi)$, existe pelo menos uma reta de apoio de \mathcal{P}' (que limita $Conv(\Phi)$) que não é reta de apoio de \mathcal{P} . A última conclusão contraria a definição de Σ . Logo, $\Sigma = Conv(\Phi)$, como queríamos demonstrar. \square

Por causa do Teorema 12, podemos dar uma nova caracterização do fecho convexo da região Φ limitada por um polígono simples qualquer.

Definição 18 (Fecho convexo. 2ª Definição). Define-se fecho convexo de Φ o conjunto obtido pela intersecção de todos os semiplanos que contêm \mathcal{P} , determinados pelas retas de apoio de \mathcal{P} .

Uma visualização do fecho convexo da figura Φ , limitada por \mathcal{P} , pode ser obtida com o seguinte experimento: Imaginamos o polígono sobre uma superfície plana na qual colocamos tachinhas sobre os vértices. Envolvemos Φ com um elástico de látex fino (Figura 18). Ele ficará esticado em algumas tachinhas, minimizando a distância entre elas: por isso formam segmentos. Apoiam-se em alguns dos vértices, pois são retas de apoio do polígono \mathcal{P} . A região limitada pelo elástico é o fecho convexo de Φ .

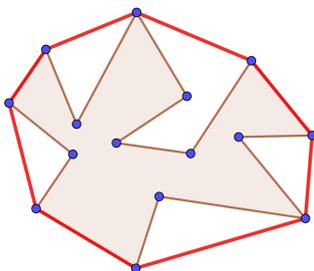


Figura 18: Fecho convexo da região limitada por um polígono simples.

O Teorema 13 tem bastante importância para a Geometria Computacional. Foi enunciado e demonstrado por Godfried T. Toussaint em 1991. Sua demonstração pode ser lida em [19].

Teorema 13 (Teorema da Boca). *Exceto para polígonos convexos, todo polígono simples tem pelo menos uma boca.*

Demonstração. Sejam \mathcal{P} o polígono simples e Φ sua região limitada. Pelo Teorema 11, o polígono \mathcal{P}' limita o fecho convexo $Conv(\Phi)$. Sendo que \mathcal{P} não é convexo, existem lados de \mathcal{P}' que não são lados de \mathcal{P} . Pode acontecer duas situações:

1. O lado $A_l A_{l+2}$ de \mathcal{P}' que não está em \mathcal{P} cobre uma boca de \mathcal{P} e o teorema está demonstrado.
2. O lado $A_j A_i$ de \mathcal{P}' que não pertence a \mathcal{P} cobre um “bolso” que se fecha nesse lado de \mathcal{P}' . Esse bolso é outro polígono que se fecha em $A_i A_j$. Dado que $Conv(\Phi)$ não coincide com Φ , parte de \mathcal{P} está no interior de \mathcal{P}' .

Na segunda situação forma-se o polígono $K_{ij} : A_i A_{i+1} \dots A_{j-1} A_j$. Vamos provar que K_{ij} tem pelo menos uma boca. Pelo Teorema 9, há pelo menos duas orelhas não sobrepostas em K_{ij} . Por não haver sobreposição, as pontas das orelhas não ocorrem em A_i e A_j , isto é, pelo pelo menos uma ponta ocorre em A_k com $i < k < j$ (Figura 19). Obviamente a orelha formada no vértice A_k de K_{ij} é uma boca de \mathcal{P} . Isso demonstra o teorema. \square

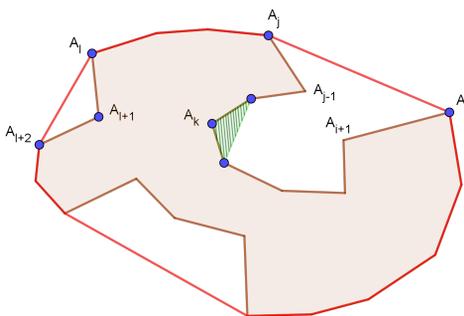


Figura 19: Visualização da ideia da demonstração do Teorema 13.

Na sequência iremos interpretar o Teorema da boca. Percebemos que pela definição de convexidade, se um polígono é convexo todas as suas diagonais devem ser internas, portanto o polígono não pode ter bocas ou qualquer outro tipo de vértice reentrante. O que o Teorema 13 nos ensina é que caso tenhamos um polígono que não contenha bocas, podemos garantir apenas com essa informação que ele é convexo. Obtemos, com isso, mais uma definição de convexidade para polígonos simples.

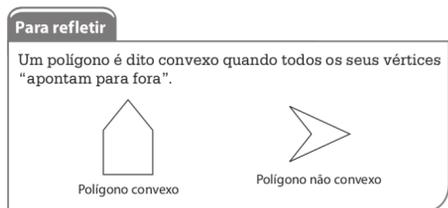
Definição 19 (5ª. Definição de Polígono Convexo). Um polígono simples é convexo quando não contém nenhuma boca.

No seção anterior discutimos a generalização da noção de ângulo em polígonos simples. Notamos que a existência de uma boca em um polígono implica a existência de um ângulo reflexo no vértice da respectiva boca. Podemos, portanto, obter mais uma definição de polígono convexo

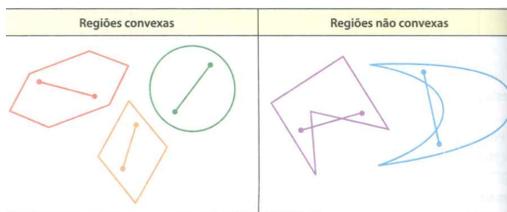
Definição 20 (6ª. Definição de Polígono Convexo). Um polígono é convexo quando todos os seus ângulos internos são convexos.

A Definição 20 é uma caracterização pouco usual na educação básica. Uma exceção pode ser encontrada no livro *Matemática: Contexto e Aplicações* de Luiz Roberto Dante, no qual apresenta-se uma caracterização de polígono convexo que nos remete à ideia de boca: “Um polígono é dito convexo quando todos os seus vértices apontam para fora.” [7, p397], (Figura 20a). Além disso, geralmente nos livros didáticos quando é apresentado um desenho de um polígono não convexo, é quase sempre um exemplo de um polígono com uma boca (Figura 20).

Pela 1ª Definição de polígono convexo (Definição 5), um polígono convexo pode ter apenas diagonais internas. Não é certo, porém, que um polígono simples tendo todas as suas diagonais internas seja convexo. Esse é o conteúdo do próximo teorema.



(a) FONTE: [7, p397]



(b) FONTE: Editora Moderna, 2010 [13].

Figura 20: Exemplos de polígonos não convexas em livros didáticos.

Teorema 14. *Quaisquer dois vértices não consecutivos de um polígono simples \mathcal{P} determinam uma diagonal interna de \mathcal{P} se, e somente se, \mathcal{P} é um polígono convexo.*

Demonstração. Primeira parte. Supondo que \mathcal{P} não seja convexo. Pelo Teorema da Boca, existe uma sequência de três vértices A , B , e C com B reflexo. Então o segmento AC , exceto pelos pontos A e C , está contido no exterior de \mathcal{P} e, portanto, não determina uma diagonal interna.

Segunda parte. Supomos que exista um par de vértices não consecutivos A e B de \mathcal{P} que não forma uma diagonal interna e que \mathcal{P} seja um polígono convexo. Se AB não é uma diagonal interna, então existe pelo menos um ponto de AB que não pertence a \mathcal{P} e \mathcal{P} não é convexo. Esse absurdo mostra que quaisquer dois vértices não consecutivos formam uma diagonal interna. \square

Por conta do Teorema 14 podemos colecionar mais uma definição de convexidade para polígonos simples.

Definição 21 (7^a. Definição de Polígono Convexo). Um polígono simples é convexo quando todas as suas diagonais são internas.

4. Sugestões de aplicações à sala de aula

Nessa seção discutiremos aplicações em sala de aula. A apresentação aqui terá como base o formalismo da seção anterior, porém apelaremos sempre que possível à intuição. O objetivo é sugerir ideias para o professor apresentar em sala de aula usando o conceito de convexidade.

4.1. Geoplano e o fecho convexo

Quando construímos um polígono simples no geoplano, percebemos que existem dois tipos de vértices:

1. Vértices em que o elástico fica tensionado para dentro do polígono.
2. Vértices em que o elástico fica tensionado para fora do polígono;

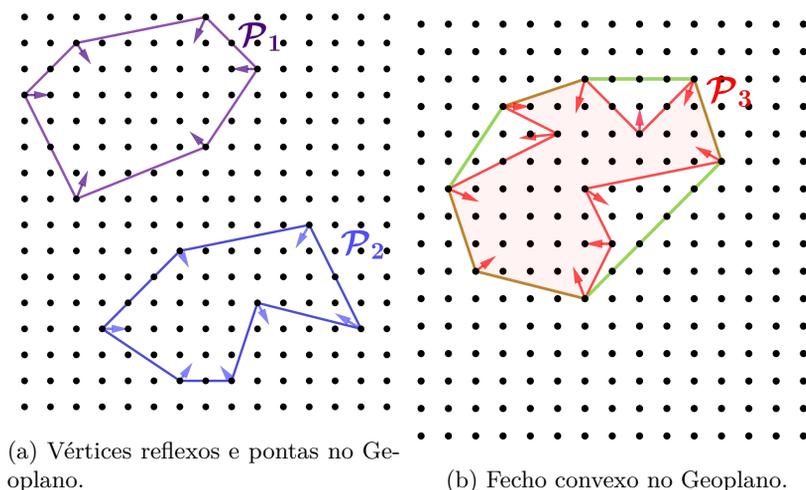


Figura 21: Convexidade no Geoplano.

Nos vértices do tipo 1, o elástico enrola-se na haste por fora do polígono, e nos do tipo 2, enrola-se por dentro (Figura 21). Os vértices do tipo 1 são pontas e os vértices do tipo 2 são vértices reentrantes.

O polígono \mathcal{P}_1 não contém nenhum vértice reflexo, i.e., só tem vértices do tipo 1; O polígono \mathcal{P}_2 tem um vértice reflexo, portanto não é convexo. No polígono \mathcal{P}_3 percebe-se que o fecho convexo apoia-se apenas em vértices do tipo 1, i. e., em pontas.

Na Figura 22a vemos um polígono simples e o contorno do seu fecho convexo. Sempre é possível, usando mais elásticos, dividir a região limitada pelo polígono inicial em polígonos convexos. Cada vértice das figuras parciais obtidas serão do tipo 1, para cada elástico, e teremos o cuidado para não haver sobreposições, ao menos entre lados, ou buracos no interior do polígono original (Figura 22b).

Essa demonstração visual permite concluir que todo polígono simples pode ser triangularizado, já que podemos triangularizar cada um dos polígonos convexos obtidos.

4.2. Circulação

Imaginemos um ponto móvel P percorrendo um polígono como na Figura 23. Há dois sentidos de percurso ao longo de \mathcal{P} , que chamamos de sentido horário e sentido anti-horário. Quando o sentido de percurso for o anti-horário, um observador no ponto móvel sempre verá o interior do polígono ao seu lado esquerdo. Quando o ponto móvel passa pelo vértice A ou pelo C , o observador no ponto móvel gira a sua esquerda. Quando o ponto móvel passa pelo ponto B , o observador gira a sua direita.

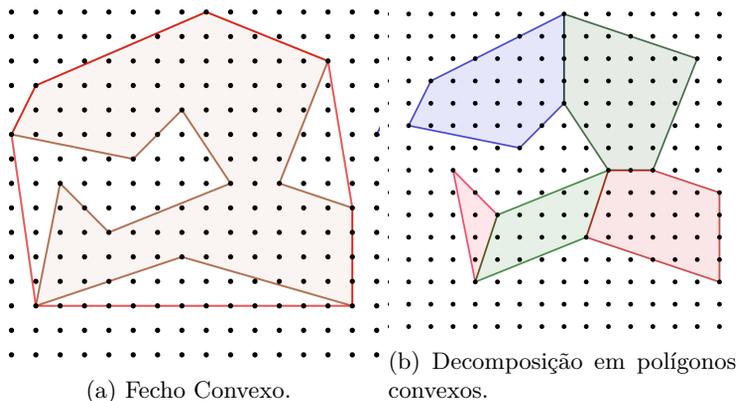


Figura 22: Demonstração visual da decomposição de um polígono simples.

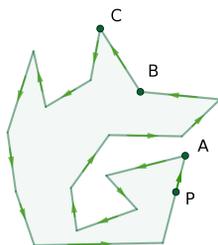


Figura 23: Percurso no polígono.

Percebe-se que os pontos A e B são vértices convexos e o ponto C é um vértice reflexo. Podemos concluir visualmente, que em um percurso sobre um polígono convexo no sentido anti-horário, quando o observador no ponto móvel passa por um vértice, a mudança de direção é sempre através de um giro para a esquerda do observador.

4.3. Visualização

A visibilidade é uma interpretação direta da Definição 4, de subconjunto convexo do plano.

Definição 22. Seja Φ a região limitada pelo polígono simples \mathcal{P} e $A \in \Phi$. O ponto B é visível relativamente a A se o segmento AB está inteiramente contido em Φ . Dizemos nesse caso que A cobre o ponto B . Quando A cobre todos os pontos de Φ diremos que A cobre Φ .

A Definição 22 admite que o segmento AB em alguns casos possa roçar a fronteira do polígono. Ainda nesse caso estamos considerando que não há perda de visibilidade.

Reinterpretando a Definição 4, podemos reescrevê-la em termos de visibilidade:

Definição 23 (8ª Definição de Polígono Convexo). Um polígono \mathcal{P} que limita uma região Φ , é convexo quando qualquer ponto $A \in \Phi$, cobre Φ .

Em casos menos gerais, existem apenas alguns pontos dos quais toda a região limitada pelo polígono pode ser coberta. Para os triângulos, quadriláteros ou pentágonos simples, convexos ou não, sempre podemos achar pelo menos um ponto interno que cubra toda a região limitada pelo polígono (Figura 24).

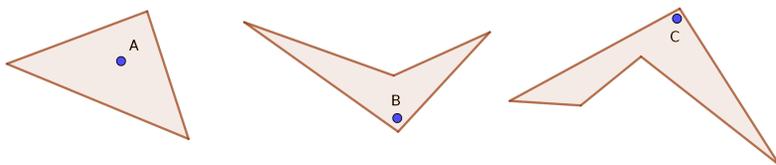


Figura 24: Visibilidade do triângulo, quadrilátero e pentágono simples.

Para polígonos simples com número de lados maior que ou igual a seis, essa propriedade não é garantida (Figura 25).

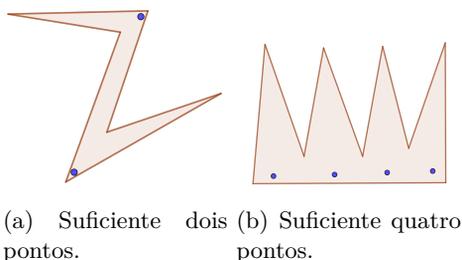


Figura 25: Cobertura de polígonos.

Surge aqui uma curiosidade. Para um polígono simples \mathcal{P} de n lados, que limita a região Φ , é possível obter um número mínimo de pontos fixos que dependa de n tal que Φ possa ser totalmente coberto? A resposta é sim. Historicamente esse problema é conhecido como o *Problema da Galeria de Arte* e foi proposto por Victor Klee em 1973. Na linguagem de Klee os pontos fixos são guardas estacionários e Φ é uma planta de uma galeria de arte. O problema da galeria de arte consiste no seguinte: *Qual o número mínimo de guardas suficientes para cobrir o interior de uma Galeria de Arte com n paredes?* Esse interessante problema foi resolvido por Václav Chvátal em 1975. Para maiores informações consulte [2].

Para a sala de aula é importante apresentar a convexidade dos polígonos simples por meio da visibilidade. Imagine um guarda com uma lanterna potente vigiando um andar de um *shopping*, cuja planta é uma polígono convexo, conforme Figura 26.

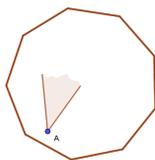


Figura 26: Polígono convexo.

Desconsiderando os obstáculos como móveis, pilares, o guarda consegue iluminar qualquer ponto da planta com sua superlanterna.

Considerações finais

Os resultados apresentados neste trabalho forneceram várias caracterizações de polígonos convexos, mas somente duas ou três delas são utilizadas na educação básica. A mais comum das caracterizações é a que diz ser necessário que um segmento esteja totalmente contido na região limitada pelo polígono, se seus extremos estejam nela. Essa definição é utilizada com frequência por ser mais intuitiva e se adequar a um primeiro contato com polígonos convexos. Perceber que as várias definições apresentadas nos livros são equivalentes não é algo trivial. No presente trabalho essa lacuna é preenchida ao serem provadas as equivalências entre as diversas caracterizações de polígonos convexos. Apresenta-se um texto que, de certo modo, complementa e amplia os tópicos sobre convexidade abordados em livros didáticos. Embora os resultados que foram demonstrados sejam de alto significado intuitivo, não são consequências imediatas do modelo axiomático considerado e tradicionalmente não surgem nos primeiros textos de geometria dedutiva. Por essa razão, os livros de geometria disponíveis aos estudantes de licenciatura no Brasil, que serão os futuros professores da educação básica, não tratam desses resultados devido às dificuldades oferecidas nas demonstrações, que exigem maior intimidade com o método axiomático. Tais habilidades ainda não estão presentes na maioria dos estudantes, pois o curso de geometria dedutiva, geralmente, é utilizado para ensinar o método axiomático. Por constituir uma extensão natural aos resultados obtidos em um primeiro curso de geometria dedutiva, acreditamos que os resultados aqui apresentados possam ser úteis a quem se interesse por geometria.

Referências

- [1] ALLEN, F. *et al.* *Geometry, Student's Text, Part I, Unit I3*. Yale University Press, 1960.
- [2] ANDRÉ, L. do N. *Convexidade em figuras geométricas planas*. Dissertação de Mestrado, Joinville, 2018. Disponível em <<http://www.proformat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=&aluno=Luciano+do+nascimento+andre>>. Acesso em: 08 set. 2018.
- [3] BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 10^aed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).
- [4] BERG, M. de B. *et al.* *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [5] BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini* 8^aed. São Paulo: Moderna, 1961. 4 v.

- [6] COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática?*: Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- [7] DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e aplicações*. 1ªed. São Paulo: Ática, 2010. 3 v.
- [8] GIOVANNI Jr., J. R.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática*, 6ª ano. Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009.
- [9] LEIVAS, J. C. P. *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática..* Tese de Doutorado, Curitiba, 2009. Disponível em <<https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/19925>>. Acesso em: 28 mar. 2019.
- [10] LIMA, E. L. “A soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não).” *Revista do Professor de Matemática*, 19. S.B.M, 1990.
- [11] LIMA, E. L. “Qual é mesmo a definição de polígono convexo?.” *Revista do Professor de Matemática*, 21. S.B.M, 1991.
- [12] LIMA, E. L. *Matemática e ensino*. 3ªed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).
- [13] EDITORA MODERNA. *Conexões com a matemática*. Editora responsável Juliane Matsubara Barroso. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 1ªed. São Paulo: MODERNA. 2010.
- [14] O’ROURKE, Joseph. *Art gallery theorem and algorithms*. New York: HOxford University Press Inc., 1987.(International Series of Monographs on Computer Science).
- [15] O’ROURKE, Joseph; DEVADOS, Satyan L. *Discrete and Computational Geometry*. New Jersey: Princeton university press, 2011.
- [16] PAIVA, M. *Matemática: Paiva*. 3ªed. São Paulo: Moderna, 2015.
- [17] POGORELOV, A. V. *Geometria Elemental*. Moscou: Editorial MIR, 1974.
- [18] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. São Paulo: Editora da Unicamp, 2008.
- [19] TOUSSAINT, G. T. Anthropomorphic polygons. *American Mathematical Monthly*, v. 98, n.1, pp31–35, 1991. Disponível em <<http://www-cgrl.cs.mcgill.ca/~godfried/>>. Acesso em: 31 mar. 2019.
- [20] YAGLOM, A. M.; BOLTYANSKII, V. G. *Convex Figures*. New York: Holt Rinehart and Winston, 1961.

Luciano André
EEB Antonio Milanez Netto - Criciúma, SC
<luciano.nasc.andre@gmail.com>

Rogério de Aguiar
UDESC - Joinville, SC
<rogerville2001@gmail.com>

Recebido: 30/01/2019

Inteiros algébricos e a questão da comensurabilidade entre o lado e as diagonais de um polígono regular

Ronald S. de M. Pinto

Diego Alves

Resumo

Neste artigo, apresentamos um estudo sobre a comensurabilidade entre as diagonais e o lado de polígonos regulares. Começando por fornecer uma fórmula para a razão entre os comprimentos da k -ésima diagonal mais curta e do lado de um polígono regular de n lados, iremos reduzir o estudo da questão da incomensurabilidade entre a k -ésima diagonal mais curta e o lado de um polígono regular de n lados à decisão pela racionalidade ou irracionalidade dessa razão. Para tal, utilizaremos os números inteiros algébricos.

Palavras-chave: Números irracionais; inteiros algébricos; segmentos incomensuráveis e polígonos regulares.

Abstract

In this article, we present a study on the commensurability between the diagonals and the side of regular polygons. Beginning by providing a formula for the ratio between the lengths of the shortest k -th diagonal and the side of a regular n -sided polygon, we will reduce the study of the question of the incommensurability between the k -th shortest diagonal and the side of a regular polygon of n sides to the decision of the rationality or irrationality of this reason. For this, we will use the algebraic integers.

Keywords: Irrational numbers; algebraic integers; incommensurable segments; regular polygons.

1. Introdução

Sabe-se da existência de segmentos incomensuráveis desde a Antiguidade, ver [5]. Não se conhece ao certo, no entanto, o primeiro exemplo de dois segmentos incomensuráveis. Acredita-se, contudo, que os incomensuráveis tenham surgido no estudo da diagonal do quadrado (que nos leva ao número $\sqrt{2}$) ou das diagonais do pentágono regular (que nos leva ao número de ouro ϕ , ver [3]), que constituem o famoso pentagrama. É natural analisarmos a questão da comensurabilidade entre as diagonais e o lado de outros polígonos regulares. Ao contrário, porém, do quadrado e do pentágono regular, polígonos com mais de 5 lados possuem diagonais não congruentes. Devemos falar então da diagonal mais curta, segunda diagonal mais curta e assim sucessivamente. O Portal Atrator, ver [1], apresenta o estudo da comensurabilidade entre o lado e diagonal mais curta e o

lado e a segunda diagonal mais curta de qualquer polígono regular. Mas não faz menção a outras diagonais, isto é, a partir da terceira diagonal mais curta. O que ocorre, por exemplo, com a medida do lado e da diagonal do dodecágono regular? Trata-se de segmentos comensuráveis ou incomensuráveis? No presente artigo, utilizando os inteiros algébricos, vamos examinar a questão da comensurabilidade entre o lado e outras diagonais de qualquer polígono regular. Para isso, iremos obter uma expressão para a razão da medida de uma diagonal e a medida do lado de um polígono regular, e, a partir daí, concluir que tal razão é um inteiro algébrico (real). Como os inteiros algébricos (reais) são números inteiros ou números irracionais, o estudo da comensurabilidade entre a medida de uma diagonal e a medida do lado de um polígono regular reduz-se a decidir se tal razão é, ou não, um número inteiro.

2. A razão entre a diagonal e o lado de um polígono regular

Vamos começar obtendo uma fórmula para a razão entre a medida da k -ésima diagonal mais curta e a medida do lado de um polígono regular de n lados, onde n e k são inteiros não negativos.

A primeira questão com o qual deparamos consiste em saber para que valores de k faz sentido falar da k -ésima diagonal mais curta de um polígono regular de n lados, onde $n \geq 4$ e k são números inteiros não negativos (em alguns momentos será útil interpretarmos o lado do polígono regular como a 0-ésima diagonal mais curta). Após respondermos esse ponto, iremos fornecer uma fórmula para a razão entre os comprimentos da k -ésima diagonal mais curta e do lado de um polígono regular de n lados, onde $n \geq 4$ e k são inteiros positivos, e expressar tal fórmula por meio de um polinômio em $2 \cos \frac{\pi}{n}$.

Dado um polígono regular de n lados e vértices V_1, V_2, \dots, V_n , se n for par, então para cada $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$ a reta $V_i V_{i+\frac{n}{2}}$ é um eixo de simetria do polígono. Assim, das $n-3$ diagonais que passam por V_i , temos uma (e apenas uma) diagonal maior, que é a $V_i V_{i+\frac{n}{2}}$, e as restantes $n-4$ diagonais são iguais duas a duas (veja o polígono regular de doze lados na Figura (1)). Há então $\frac{n-4}{2} + 1$ diagonais diferentes. Por isso, só faz sentido falar da k -ésima diagonal mais curta quando $k \leq \frac{n-4}{2} + 1$. Ou seja, quando

$$n \geq 2k + 2. \tag{1}$$

Por outro lado se n for ímpar, a reta $V_i M_i$, onde M_i é o ponto médio do lado oposto a V_i , é um eixo de simetria do polígono. Dessa forma, as $n-3$ diagonais que passam por V_i são iguais duas a duas (veja o polígono regular de onze lados na Figura (1)). Neste caso existem $\frac{n-3}{2}$ diagonais diferentes, de forma que só faz sentido falar da k -ésima diagonal mais curta quando $k \leq \frac{n-3}{2}$, ou seja, quando

$$n \geq 2k + 3. \tag{2}$$

De (1) e (2) resulta que só faz sentido falarmos da k -ésima diagonal mais curta de um polígono regular de n lados quando $n \geq 2k + 2$. Assim, no que segue, tomaremos os inteiros k e n que satisfaçam a Desigualdade (1).

Dessa forma, para a segunda diagonal mais curta o polígono regular deve ter ao menos $2 \cdot 2 + 2 = 6$ lados; para a terceira diagonal mais curta o polígono regular deve ter ao menos $2 \cdot 3 + 2 = 8$ lados e

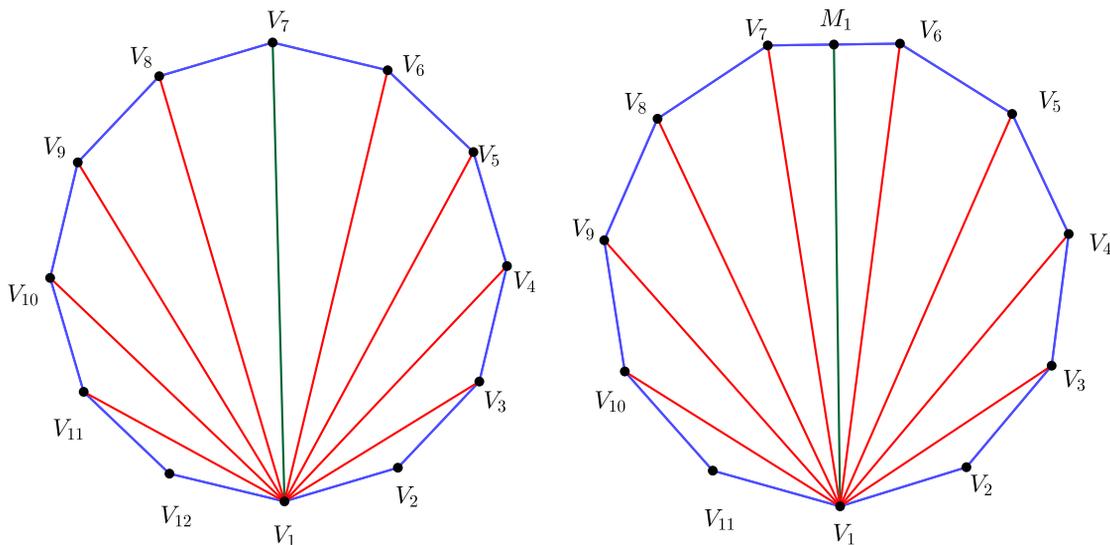


Figura 1: Só faz sentido falarmos da 5ª diagonal mais curta para polígonos com ao menos doze lados.

assim sucessivamente. Por exemplo, para tratarmos da 5ª diagonal mais curta, veja a Figura (1), o polígono deve ter ao menos $2 \cdot 5 + 2 = 12$ lados.

Dado um polígono regular de n lados, vamos denotar por $\lambda_{k,n}$ a razão entre a medida do comprimento da k -ésima diagonal mais curta e a medida do comprimento do seu lado, onde $n \geq 2k + 2$. Por exemplo, a medida da quarta diagonal mais curta do dodecágono regular de lado medindo 1, veja a Figura (2), é denotada por $\lambda_{4,12}$.

Com o objetivo de encontrarmos a razão entre a k -ésima diagonal mais curta e o lado de um polígono regular de n lados utilizaremos números complexos. Para isso, seja P_n o polígono regular de n lados inscrito na circunferência unitária $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, com um vértice no ponto $z = 1$.

Sabemos que, no plano complexo, as raízes n -ésimas da unidade (isto é, as raízes da equação $z^n = 1$) são os vértices do polígono regular P_n de n lados, inscrito na circunferência unitária $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, com um vértice no ponto $z = 1$, ver [2]. A Figura (3) representa o polígono P_7 .

Como todos os polígonos regulares de n lados são semelhantes, o nosso problema reduz-se a achar a razão entre a medida da k -ésima diagonal mais curta e a medida do lado do polígono regular P_n . Como mostra a referência [2], as n -ésimas raízes da unidade são dadas por

$$\xi_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}k\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (3)$$

Vamos denotar por $|z|$ e \bar{z} , respectivamente, o módulo e o conjugado do número complexo z . Lembre-se que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ e que $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}(z)$, onde $\mathcal{R}(z)$ denota a parte real de z . Com essas observações, estamos em condições de provar o lema a seguir, que será útil para obtermos uma expressão para a razão $\lambda_{k,n}$.

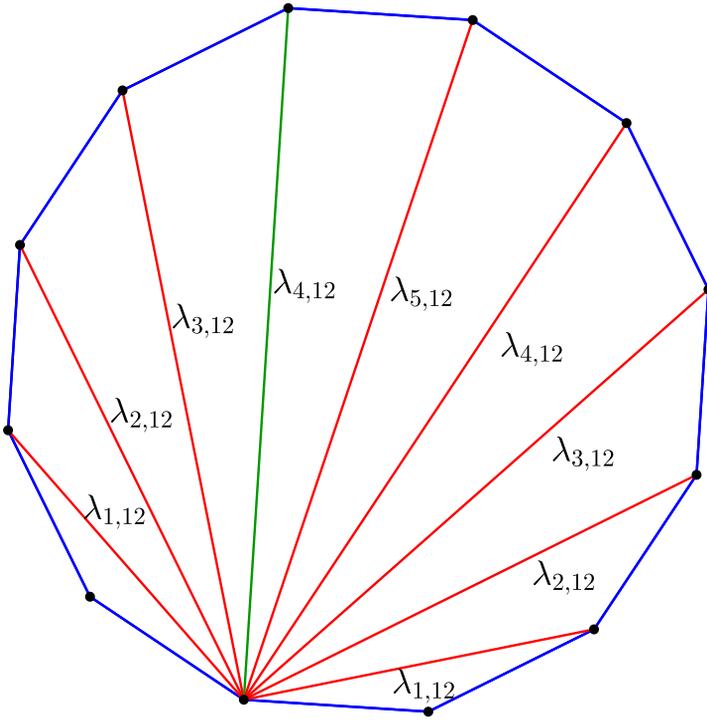


Figura 2: Significado da notação $\lambda_{k,n}$.

Lema 1. Seja P_n o polígono regular de n lados inscrito na circunferência unitária $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ com um vértice no ponto $z = 1$. Então a medida do lado é $2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)$.

Demonstração. A distância entre dois números complexos z_1 e z_2 é dada por $|z_2 - z_1|$. Note que

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1|^2 &= (z_2 - z_1)(\overline{z_2 - z_1}) \\ &= z_2 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_1} \\ &= |z_1|^2 - (z_1 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathcal{R}(z_1 \overline{z_2}) \end{aligned}$$

Em virtude da equação (3), a medida do lado do polígono regular P_n pode ser obtida por $|\xi_1 - \xi_0|$, onde $\xi_0 = 1$ e $\xi_1 = \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$. Note que

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \xi_0|^2 &= |\xi_0|^2 + |\xi_1|^2 - 2\mathcal{R}(\xi_0 \overline{\xi_1}) \\ &= |1|^2 + \left| \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right|^2 - 2\mathcal{R} \left(1 \cdot \overline{\cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)} \right) \\ &= 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} \\ &= 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{n} \right), \text{ pois } 1 - \cos 2\theta = 2 \operatorname{sen}^2 \theta. \end{aligned}$$

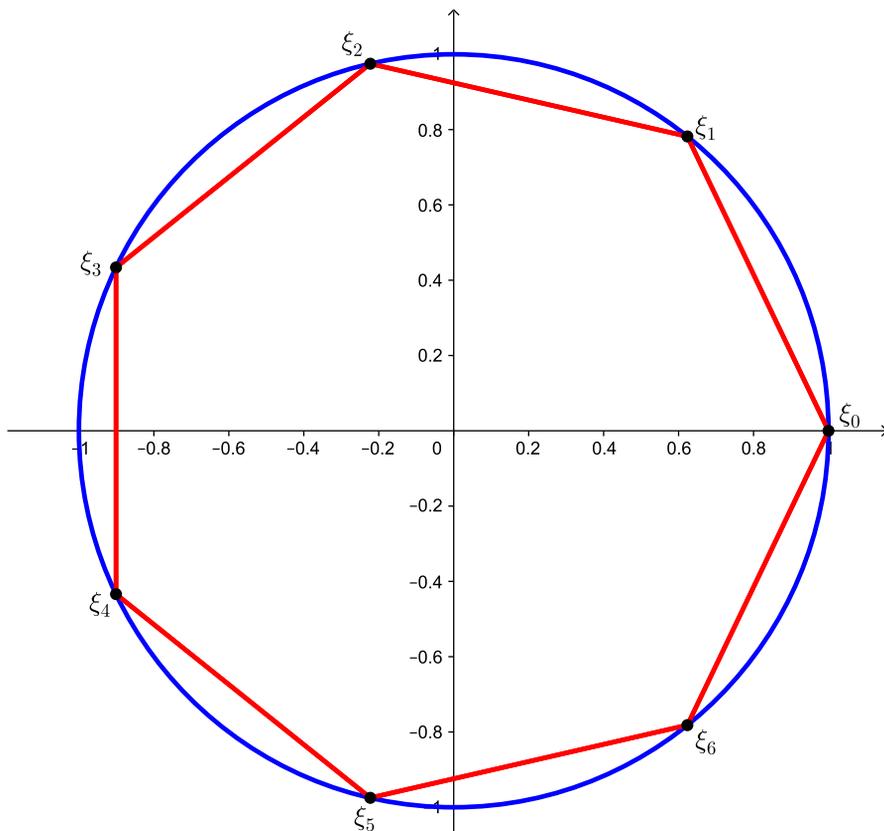


Figura 3: Representação do heptágono regular inscrito no círculo de centro na origem, raio 1 e com um vértice no ponto $(1,0)$.

Portanto, a medida do lado do polígono P_n é $2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)$. □

Observe que medida da k -ésima diagonal mais curta do polígono P_n é dada pela distância entre os vértices ξ_0 e ξ_{k+1} . Ou seja, a medida da k -ésima diagonal mais curta é o número $|\xi_{k+1} - \xi_0|$. Utilizando o mesmo raciocínio empregado na demonstração do Lema 1, pode-se concluir que

$$|\xi_{k+1} - \xi_0| = 2 \operatorname{sen} \frac{(k+1)\pi}{n}. \quad (4)$$

Segue da Equação (4) e do Lema 1 que a razão $\lambda_{k,n}$ entre a medida da k -ésima diagonal mais curta do polígono regular de n lados e a medida do seu lado é expressa por

$$\lambda_{k,n} = \frac{|\xi_{k+1} - \xi_0|}{|\xi_1 - \xi_0|} = \frac{\operatorname{sen} \frac{(k+1)\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}. \quad (5)$$

Repare que estudar a questão da incomensurabilidade entre a k -ésima diagonal mais curta e o lado de um polígono regular de n lados reduz-se a decidir pela racionalidade ou irracionalidade do

número $\lambda_{k,n}$. No caso particular da diagonal mais curta temos:

$$\lambda_{1,n} = \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} = 2 \cos \frac{\pi}{n}.$$

Note que $\lambda_{1,4} = \sqrt{2}$, $\lambda_{1,5} = \phi$ e $\lambda_{1,6} = \sqrt{3}$ que corresponde à razão entre a medida da diagonal mais curta e o lado de um quadrado, pentágono regular e hexágono regular, respectivamente.

3. Inteiros algébricos e números irracionais

Nesta seção vamos introduzir o conceito de números inteiros algébricos e apresentar um resultado que será útil no estabelecimento da comensurabilidade ou não entre medida de uma diagonal e a medida do lado de um polígono regular.

Um número (complexo) é dito um *inteiro algébrico* quando é raiz de uma equação polinomial da forma

$$x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0,$$

onde r é um inteiro positivo e os coeficientes c_0, c_1, \dots, c_{r-1} são números inteiros.

Em particular, todo número inteiro m é um inteiro algébrico pois é raiz da equação polinomial $x - m = 0$ de coeficientes inteiros. O número $\sqrt{2}$ é um inteiro algébrico pois é uma solução da equação $x^2 - 2 = 0$.

Proposição 1. *Todo inteiro algébrico (real) é inteiro ou irracional.*

Demonstração. Suponha que existam inteiros p e $q > 0$, primos entre si, tais que o número $\frac{p}{q}$ seja uma solução da equação

$$x^r + c_{r-1}x^{r-1} + c_{r-2}x^{r-2} + \dots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0,$$

em que r é um inteiro positivo e os coeficientes $c_{r-1}, c_{r-2}, \dots, c_2, c_1$ e c_0 são números inteiros. Substituindo x por $\frac{p}{q}$ obtemos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^r + c_{r-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{r-1} + c_{r-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{r-2} + \dots + c_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + c_1\frac{p}{q} + c_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por q^r temos:

$$p^r + c_{r-1}p^{r-1}q + \dots + c_1pq^{r-1} + c_0q^r = 0.$$

A equação anterior pode ser escrita como $p^r = -q(c_{r-1}p^{r-1} + \dots + c_1pq^{r-2} + c_0q^{n-1})$. Ou seja,

$$p^r = -qK, \text{ onde } K = c_{r-1}p^{r-1} + \dots + c_1pq^{r-2} + c_0q^{n-1}. \quad (6)$$

Se $q > 1$, segue da Equação (6) e do Teorema Fundamental da Aritmética que todo fator primo de q é também fator primo de p . Mas isso não pode ocorrer, pois p e q são primos entre si. Assim, concluímos que $q = 1$. \square

4. O número $\lambda_{n,k}$ é um inteiro algébrico

Vamos definir, para qualquer x real, o *piso* ou a *parte inteira* $[x]$ como o único inteiro r tal que $r \leq x < r + 1$. Ou seja, $[x]$ denota o maior inteiro menor do que ou igual a x .

A proposição a seguir mostra que a razão $\lambda_{k,n}$, com $k \geq 0$ e $n \geq 4$ inteiros, pode ser expressa em termos de um polinômio em $2 \cos \frac{\pi}{n}$. Este resultado nos dará a ferramenta necessária para averiguar a irracionalidade de $\lambda_{k,n}$.

Proposição 2. *Seja k um inteiro não negativo e $n \geq 4$ um inteiro. Então*

$$\lambda_{k,n} = \frac{\text{sen } \frac{(k+1)\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-j}{j} \left(2 \cos \frac{\pi}{n}\right)^{k-2j}. \quad (7)$$

Demonstração. A prova será feita por indução em k . Se $k = 0$ então

$$\lambda_{0,n} = \frac{\text{sen } \frac{(0+1)\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} = 1 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{-j}{j} \left(2 \cos \frac{\pi}{n}\right)^{-2j}.$$

(Vamos interpretar o caso em que $k = 0$ como o lado o polígono). Se $k = 1$ então

$$\lambda_{1,n} = \frac{\text{sen } \frac{(1+1)\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} = \frac{2 \text{sen } \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} = 2 \cos \frac{\pi}{n} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{1-j}{j} \left(2 \cos \frac{\pi}{n}\right)^{1-2j}.$$

Tome agora $k \geq 2$ e vamos admitir que a equação (7) é válida para qualquer inteiro menor do que k . Note que

$$\text{sen } \frac{(k+1)\pi}{n} = \text{sen } \frac{k\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n} \text{sen } \frac{\pi}{n}.$$

Dividindo a igualdade anterior por $\text{sen } \frac{\pi}{n}$, obtemos:

$$\lambda_{k,n} = \frac{\text{sen } \frac{(k+1)\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} = \frac{\text{sen } \frac{k\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n} = \lambda_{k-1,n} \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n}. \quad (8)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{(k+1)\pi}{n} &= \text{sen } \frac{k\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n} \text{sen } \frac{\pi}{n} \\ &= \text{sen } \frac{k\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{k\pi}{n} \text{sen } \frac{\pi}{n} + 2 \cos \frac{k\pi}{n} \text{sen } \frac{\pi}{n} \\ &= \text{sen } \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \right) + 2 \cos \frac{k\pi}{n} \text{sen } \frac{\pi}{n} \\ &= \text{sen } \frac{(k-1)\pi}{n} + 2 \cos \frac{k\pi}{n} \text{sen } \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Da expressão anterior, concluímos que

$$\lambda_{k,n} = \frac{\text{sen } \frac{(k+1)\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} = \frac{\text{sen } \frac{(k-1)\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} + 2 \cos \frac{k\pi}{n} = \lambda_{k-2,n} + 2 \cos \frac{k\pi}{n}. \quad (9)$$

Por fim, utilizando as equações (8) e (9), respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} \lambda_{k,n} &= 2\lambda_{k,n} - \lambda_{k,n} \\ &= 2 \left[\lambda_{k-1,n} \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n} \right] - \left[\lambda_{k-2,n} + 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right] \\ &= 2\lambda_{k-1,n} \cos \frac{\pi}{n} - \lambda_{k-2,n} \end{aligned}$$

A partir desse momento, com o propósito de simplificar a notação, vamos escrever x no lugar de $2 \cos \frac{\pi}{n}$. Assim,

$$\lambda_{k,n} = x\lambda_{k-1,n} - \lambda_{k-2,n}.$$

Vamos supor, para fixar as ideias, que k é um inteiro ímpar. Portanto, $k \geq 3$. Nesse caso,

$$\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor = \frac{k-1}{2} \text{ e } \left\lfloor \frac{k-2}{2} \right\rfloor = \frac{k-3}{2}.$$

Dessa forma, usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \lambda_{k,n} &= x\lambda_{k-1,n} - \lambda_{k-2,n} \\ &= x \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-1-j}{j} x^{k-1-2j} - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-2-j}{j} x^{k-2-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \binom{k-1-j}{j} x^{k-2j} - \sum_{j=0}^{\frac{k-3}{2}} (-1)^j \binom{k-2-j}{j} x^{k-2-2j} \\ &= x^k + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \binom{k-1-j}{j} x^{k-2j} - \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{j-1} \binom{k-1-j}{j-1} x^{k-2j} \\ &= x^k + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \binom{k-1-j}{j} x^{k-2j} + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \binom{k-1-j}{j-1} x^{k-2j} \\ &= x^k + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \left[\binom{k-1-j}{j} + \binom{k-1-j}{j-1} \right] x^{k-2j} \\ &= x^k + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^j \binom{k-j}{j} x^{k-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-j}{j} x^{k-2j} \end{aligned}$$

onde usamos, na penúltima igualdade da cadeia de equações acima, a relação de Stifel e, na última igualdade, o fato que $\frac{k-1}{2} = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ quando k é ímpar. A demonstração no caso em que k é par é análoga. \square

Se α e $\beta \neq 0$ são dois inteiros algébricos, então os números $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ e $\alpha\beta$ são também inteiros algébricos¹. A prova desse fato encontra-se em [4]. Além disso, se n é um inteiro positivo então α^n é um inteiro algébrico. Daí segue que se γ é um inteiro algébrico e f é uma função polinomial com coeficientes inteiros, então o número $f(\gamma)$ é também um inteiro algébrico.

Vamos mostrar agora que o número $2 \cos \frac{\pi}{n}$ (com n inteiro positivo) é um inteiro algébrico. Com efeito,

$$2 \cos \frac{\pi}{n} = \left(\cos \frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) + \left(\cos \frac{\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right)$$

e os números $\cos \frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ e $\cos \frac{\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ são soluções da equação $x^{2n} - 1 = 0$. De fato, segue da fórmula de De Moivre² que

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right)^{2n} - 1 &= \cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi) - 1 = 0 \text{ e} \\ \left(\cos \frac{\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right)^{2n} - 1 &= \cos(2\pi) - i \operatorname{sen}(2\pi) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Em outras palavras, o número $2 \cos \frac{\pi}{n}$ é algébrico pois é a soma de dois inteiros algébricos. Segue da equação (7) que o número $\lambda_{k,n}$ é um inteiro algébrico pois pode ser expresso como um polinômio em $2 \cos \frac{\pi}{n}$ com coeficientes inteiros. Segue da Proposição 1 que a razão $\lambda_{k,n}$ é um número inteiro ou irracional. Nossa conclusão é destacada na proposição a seguir.

Proposição 3. *Sejam $n \geq 4$ e $k \geq 1$ números inteiros. O número $\lambda_{k,n}$ é um inteiro algébrico. Ou seja, dado um polígono regular de n lados, a razão entre a medida da k -ésima diagonal mais curta e a medida do seu lado é um número inteiro ou um número irracional.*

Portanto, o problema de se decidir pela racionalidade ou irracionalidade do número $\lambda_{k,n}$, com $n \geq 2k + 2$, isto é, decidir pela comensurabilidade ou incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do polígono regular, reduz-se a decidir se $\lambda_{k,n}$ é inteiro ou não.

É evidente que se trata de um problema muito mais simples. Para a quarta diagonal mais curta do dodecágono regular, por exemplo, com o auxílio da expressão (5) e de uma calculadora, obtemos o valor $\lambda_{4,12} \approx 3,7321$. Como não é um número inteiro, concluímos que se trata de um número irracional. Em outras palavras, a quarta diagonal mais curta e o lado do dodecágono regular são dois segmentos incomensuráveis. O mesmo procedimento pode ser realizado com quaisquer outros valores de k e n , com $n \geq 2k + 2$.

A tabela a seguir, construída com auxílio da expressão (5), fornece uma aproximação com quatro casas decimais para os números $\lambda_{k,n}$, com $1 \leq k \leq 10$ e $4 \leq n \leq 34$. Note que o único número inteiro na tabela corresponde a razão $\lambda_{2,6} = 2$. Assim, no que diz respeito até a décima diagonal

¹O conjunto de todos os inteiros algébricos forma um subanel de \mathbb{C} . No entanto a razão de dois inteiros algébricos não é necessariamente um inteiro algébrico. Por exemplo, segue da Proposição 1 que o número $\frac{1}{2}$ não é um inteiro algébrico, apesar de ser a razão dos inteiros algébricos 1 e 2.

²Dado $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ (onde θ é um número real) um número complexo não nulo na forma polar e n um número inteiro, então $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$.

mais curta de polígonos regulares com até 34 lados, somente a segunda diagonal mais curta e o lado do hexágono regular formam segmentos comensuráveis.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1,4142									
5	1,6180									
6	1,7321	2,0000								
7	1,8019	2,2470								
8	1,8478	2,4142	2,6131							
9	1,8794	2,5321	2,8794							
10	1,9021	2,6180	3,0777	3,2361						
11	1,9190	2,6825	3,2287	3,5133						
12	1,9319	2,7321	3,3461	3,7321	3,8637					
13	1,9419	2,7709	3,4389	3,9070	4,1481					
14	1,9499	2,8019	3,5135	4,0489	4,3813	4,4940				
15	1,9563	2,8271	3,5743	4,1654	4,5743	4,7834				
16	1,9616	2,8478	3,6245	4,2620	4,7357	5,0273	5,1258			
17	1,9659	2,8649	3,6664	4,3430	4,8716	5,2344	5,4190			
18	1,9696	2,8794	3,7017	4,4115	4,9872	5,4115	5,6713	5,7588		
19	1,9727	2,8916	3,7317	4,4699	5,0862	5,5638	5,8896	6,0548		
20	1,9754	2,9021	3,7574	4,5201	5,1716	5,6957	6,0796	6,3138	6,3925	
21	1,9777	2,9111	3,7796	4,5636	5,2457	5,8106	6,2457	6,5413	6,6907	
22	1,9796	2,9190	3,7989	4,6015	5,3104	5,9112	6,3917	6,7420	6,9552	7,0267
23	1,9814	2,9258	3,8158	4,6347	5,3672	5,9998	6,5206	6,9199	7,1903	7,3268
24	1,9829	2,9319	3,8306	4,6639	5,4174	6,0781	6,6349	7,0781	7,4002	7,5958
25	1,9842	2,9372	3,8438	4,6898	5,4618	6,1477	6,7367	7,2194	7,5882	7,8374
26	1,9854	2,9419	3,8555	4,7128	5,5014	6,2098	6,8277	7,3459	7,7571	8,0552
27	1,9865	2,9461	3,8659	4,7334	5,5368	6,2654	6,9093	7,4598	7,9093	8,2519
28	1,9874	2,9499	3,8752	4,7518	5,5686	6,3155	6,9829	7,5624	8,0469	8,4302
29	1,9883	2,9532	3,8836	4,7684	5,5973	6,3606	7,0493	7,6554	8,1717	8,5922
30	1,9890	2,9563	3,8912	4,7834	5,6232	6,4014	7,1095	7,7397	8,2851	8,7397
31	1,9897	2,9591	3,8980	4,7970	5,6467	6,4385	7,1642	7,8164	8,3884	8,8744
32	1,9904	2,9616	3,9043	4,8093	5,6681	6,4723	7,2141	7,8865	8,4829	8,9976
33	1,9909	2,9639	3,9099	4,8206	5,6876	6,5031	7,2597	7,9506	8,5694	9,1107
34	1,9915	2,9659	3,9151	4,8309	5,7054	6,5313	7,3015	8,0093	8,6489	9,2146

Tabela 1: Razão $\lambda_{n,k}$ entre as medidas da k -ésima diagonal mais curta e do lado.

5. Conclusão

É importante notar que o problema da comensurabilidade entre a medida do lado e a medida de uma diagonal de um polígono regular não foi completamente respondida. No entanto, a questão foi reduzida em um problema mais simples. De fato, estudar a natureza quanto à racionalidade ou irracionalidade do número $\lambda_{k,n}$ reduziu-se, por meio da Proposição 1, a decidir se o número é inteiro ou não. Reduzir um problema em outro mais simples é um procedimento muito comum em matemática. Por exemplo, decidir se $\sqrt[3]{120}$ é racional ou irracional, por meio dessa abordagem,

torna-se simples pois basta notar que tal número é um inteiro algébrico (pois é raiz da equação $x^3 - 120 = 0$) e por outro lado não é inteiro, já que $4 = \sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{120} < \sqrt[3]{125} < 5$. Assim, da Proposição 1 concluímos que $\sqrt[3]{120}$ é irracional.

Apesar de sermos capazes de decidir se $\lambda_{k,n}$ é ou não irracional, fixado k e n , por meio da Proposição 1 e da expressão (5) o problema mais geral, de saber para quais inteiros k e n o número $\lambda_{k,n}$ é irracional, não foi respondido.

O presente artigo apresentou uma interessante conexão entre a álgebra e a geometria. Com efeito, o problema gemétrico da comensurabilidade entre o lado e uma diagonal de um polígono regular, que podemos localizar suas origens na matemática da Grécia Antiga, foi abordado utilizando conceitos de inteiros algébricos, além dos números complexos.

Acreditamos que os assuntos aqui tratados são de interesse para o professor de matemática já que se trata de números irracionais, tópico presente no 9º ano e na 1ª série do Ensino Médio, e de segmentos comensuráveis e incomensuráveis que são muitas vezes utilizados como uma introdução aos números irracionais. Tal assunto pode ser retomado na 3ª série do Ensino Médio, quando os alunos tomam contato com os números complexos. Trata-se de uma interessante aplicação dos números complexos para se resolver um importante problema de geometria.

Referências

- [1] ATRACTOR. Disponível em: <http://www.atractor.pt/mat/incomensurabilidade/>
- [2] HEFEZ, ABRAMO. VILLELA, MARIA LÚCIA *Polinômios e Equações Algébricas*, Coleção Profmat, Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] HAVIL, JULIAN *The Irrationals: A Story of the Numbers You Can't Count On*. New Jersey: Princeton University Press, 2012.
- [4] MARTINEZ, F. B. et al. *Teoria dos Números: Um passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro*. Impa, Rio de Janeiro: Impa, 2010.
- [5] ROQUE, TATIANA. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Ronald S. de M. Pinto
Colégio Pedro II
<ronaldsimoes@gmail.com>

Diego Alves
Colégio Pedro II
<diegoalv.mat@gmail.com>

Recebido: 21/04/2019
Publicado: 28/06/2019

Cálculo integral para o Ensino Médio

Alyrio A. Cordeiro Neto

Resumo

Nos exames do *Programme for International Student Assessment* (Pisa), há questões que avaliam a capacidade de o estudante estimar áreas de uma região do plano, onde a fronteira não é dada apenas por segmentos de reta, mediante as informações contidas num mapa. Motivados por esses problemas, apresentamos uma sequência didática para introduzir, no Ensino Médio, noções rudimentares do Cálculo Integral, com auxílio do *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra, para que possamos obter as estimativas. Mostramos também que, por intermédio dos conhecimentos sobre os processos de integração, os estudantes da última etapa da Educação Básica podem desenvolver algumas competências e habilidades específicas de Matemática e suas tecnologias descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Palavras-chave: Cálculo Integral; Ensino Médio; *GeoGebra*; Área; Estimativa.

Abstract

In the examinations of the Program for International Student Assessment (Pisa), there are questions that assess the student's ability to estimate areas of a region of the plane, where the boundary is not given only by straight line segments, using the information contained in a map. Motivated by these problems, we present a didactic sequence to introduce, in High School, rudimentary notions of the Integral Calculus, with the aid of the software of dynamic geometry GeoGebra, so that we can obtain the estimates. We also show that through the knowledge about integration processes, students of the last stage of Basic Education can develop some specific skills and abilities of Mathematics and its technologies described in the National Curricular Common Base (BNCC).

Keywords: Integral Calculus; High school; GeoGebra; Area; Estimation

1. Introdução

Em janeiro de 2019, vimos que ocorreu um desastre em Brumadinho, região metropolitana de Belo Horizonte, em Minas Gerais, devido ao rompimento de uma barragem de rejeitos de minério de ferro de uma mineradora multinacional. A lama de rejeitos atingiu a área administrativa da mineradora, bairros e comunidades próximas, pousadas, áreas de cultivo, pastagens, além de estradas e vias rurais (ver figura 1).

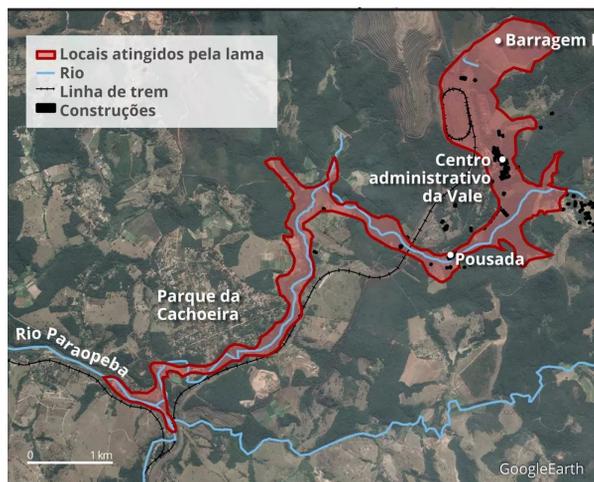


Figura 1: Caminho da lama após o rompimento da barragem em Brumadinho (MG)
Fonte: [5]

Após essa tragédia, é do interesse dos ambientalistas e autoridades estimar a área devastada. Mas a região em evidência não é delimitada apenas por segmentos de retas. Então, qual o procedimento que eles podem recorrer para obter, aproximadamente, a área atingida?

Questões envolvendo estimativas da área de uma região do plano qualquer também fazem parte do exame do Pisa, ver [7], como exemplo, citamos: usando a escala do mapa (ver Figura 2), estime a área da Antártida e explique como você fez a estimativa.



Figura 2: Mapa da Antártida
Fonte: [7]

Submetendo esses problemas aos alunos da Educação Básica, eles deverão procurar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para chegar a uma solução. E, de fato, essas expectativas estão de acordo com algumas competências e habilidades específicas de Matemática da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio, ver [1].

Por outro lado, quando se conhece o Cálculo Integral, quase imediatamente pensa-se em obter as aproximações para as áreas das regiões solicitadas nesses problemas por meio da integral da diferença entre duas funções num intervalo fechado tais que as regiões estejam entre seus gráficos, como na Figura 3. Isso seria fácil por intermédio do aplicativo de geometria dinâmica, o GeoGebra, pois, ele oferece recursos para obtermos as funções necessárias e para determinar a integral definida num intervalo fechado qualquer.

Portanto, mediante o ensino dos processos de integração na etapa final da Educação Básica, podemos prover os alunos de ferramentas matemáticas para que possam propor soluções para esses problemas e estimular o desenvolvimento de competências e habilidades específicas de Matemática e suas tecnologias, conforme as descritas na BNCC.

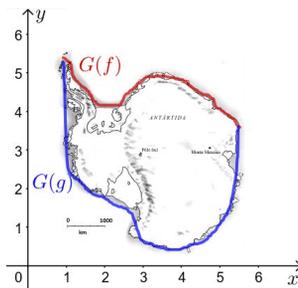


Figura 3: Mapa da Antártida entre os gráficos das funções f e g
Fonte: Autoria própria

O objetivo deste artigo é mostrar a possibilidade da inclusão das noções básicas de integração nos programas da etapa final da Educação Básica de tal forma que tais conhecimentos ajudem a desenvolver as competências e habilidades específicas de Matemática da BNCC do Ensino Médio.

2. Introdução ao Cálculo Integral

Nesta seção abordaremos o seguinte problema: qual o valor da área da região A (ver Figura 4), onde f é uma função positiva?

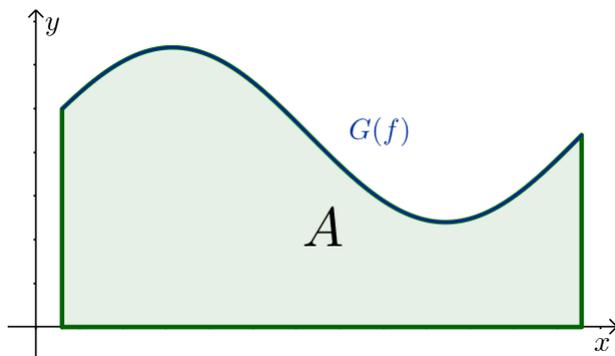


Figura 4: Região A
Fonte: Autoria própria

A solução desse problema será dada em quatro etapas. Nas três primeiras etapas, obteremos aproximações para a área da região A e, na última, apresentaremos a solução. Essas etapas serão descritas mediante a solução da questão seguinte.

Problema 1. Seja $f : [0, 40] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, definida por $f(x) = -\frac{x^2}{10} + 250$. Qual a área da região A (ver Figura 5), sob o gráfico de f ?

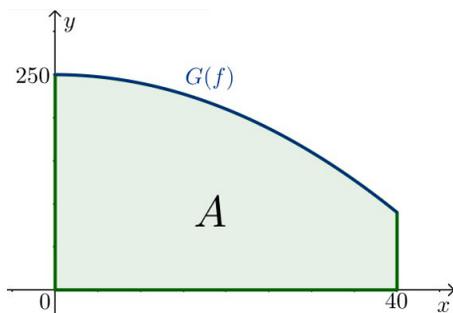


Figura 5: Região A sob gráfico de $f : [0, 40] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{x^2}{10} + 250$
Fonte: Autoria própria

Notemos que a fronteira da região A não é dada apenas por segmentos de retas. Ou seja, não será possível determinar a área de A mediante os métodos presentes nos programas da Educação Básica. Por isso, descreveremos uma estratégia para obter aproximações para A e, em seguida, resolveremos esse problema.

Inicialmente, divida o intervalo $[0, 40]$ em quatro subintervalos I_i de mesmo comprimento, isto é, $I_i = [10(i-1), 10i]$, $i = 1, 2, 3, 4$, e considere os retângulos sobre cada intervalo I_i de altura $f(10i)$, como na Figura 6.

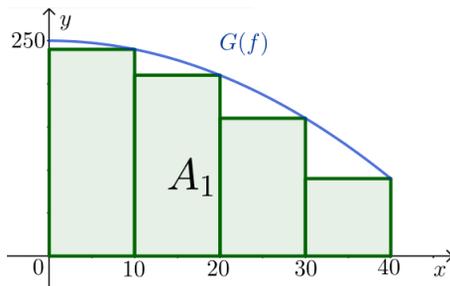


Figura 6: Retângulos sobre cada intervalo $[10(i - 1), 10i]$ de altura $f(10i)$
 Fonte: Autoria própria

Note que, de modo impreciso, a área da região A_1 é próxima da área da região A , isto é,

$$Área(A) \cong Área(A_1) = \sum_{i=1}^4 \left[\frac{40}{4} f\left(\frac{40}{4}i\right) \right] = 10 \sum_{i=1}^4 f(10i) = 7000. \quad (1)$$

Para uma melhor estimativa, divida o intervalo $[0, 40]$ em, por exemplo, dez subintervalos I_i de mesmo comprimento, isto é, $I_i = [4(i - 1), 4i]$, $i = 1, 2, \dots, 9, 10$, e considere os retângulos sobre cada intervalo I_i de altura $f(4i)$, como na Figura 7.

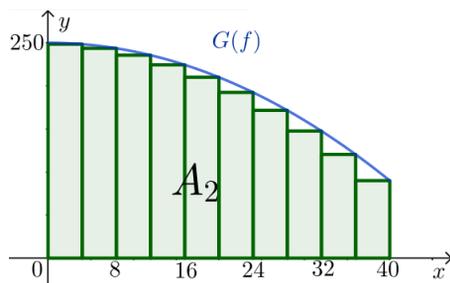


Figura 7: Retângulos sobre cada intervalo $[4(i - 1), 4i]$ de altura $f(4i)$
 Fonte: Autoria própria

Observe que, de fato, a área da região A_2 é uma aproximação melhor para a área da região A . Dessa forma,

$$Área(A) \cong Área(A_2) = \sum_{i=1}^{10} \left[\frac{40}{10} f\left(\frac{40}{10}i\right) \right] = 4 \sum_{i=1}^{10} f(4i) = 7536. \quad (2)$$

Para obter uma estimativa ainda melhor do que os resultados obtidos nas Equações (1) e (2) para área de A , divida o intervalo $[0, 40]$ em um número maior de subintervalos I_i de mesmo comprimento. Por exemplo, divida em vinte subintervalos, isto é, $I_i = [2(i - 1), 2i]$, $i = 1, 2, \dots, 19, 20$, e considere os retângulos sobre cada intervalo I_i de altura $f(2i)$, como na Figura 8.

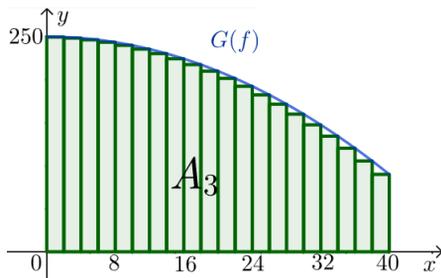


Figura 8: Retângulos sobre cada intervalo $[2(i - 1), 2i]$ de altura $f(2i)$

Fonte: Autoria própria

Intuitivamente, podemos afirmar que a área da região A_3 é uma aproximação melhor para a área de A do que as áreas de A_1 e A_2 . Então,

$$\text{Área}(A) \cong \text{Área}(A_3) = \sum_{i=1}^{20} \left[\frac{40}{20} f\left(\frac{40}{20}i\right) \right] = 2 \sum_{i=1}^{20} f(2i) = 7704.$$

Note que obtivemos as estimativas para a área da região A mediante o cálculo das áreas das regiões A_1 , A_2 e A_3 . Então, deduzimos, intuitivamente, que as aproximações para a área de A são dadas por

$$\text{Área}(A_n) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{40}{n} f\left(\frac{40}{n}i\right) \right],$$

onde n é o número de subintervalos, de mesmo comprimento, do intervalo $[0, 40]$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Área}(A) \cong \text{Área}(A_n) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{40}{n} f\left(\frac{40}{n}i\right) \right] = \frac{40}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{40}{n}i\right) \\ &= \frac{40}{n} \sum_{i=1}^n \left[-\frac{\left(\frac{40}{n}i\right)^2}{10} + 250 \right] = \frac{40}{n} \left[-\sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{40}{n}i\right)^2}{10} + 250n \right] \\ &= \frac{40}{n} \left[-\frac{160}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 + 250n \right] = 10000 - \frac{6400}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2. \end{aligned}$$

Observe que para determinarmos a área de A_n , precisamos calcular o valor de $\sum_{i=1}^n i^2$. Então, assumiremos o fato que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (3)$$

cuja demonstração pode ser encontrada em [2, p16]

Desse forma,

$$\begin{aligned} \text{Área}(A_n) &= 10000 - \frac{6400 n(n+1)(2n+1)}{n^3 \cdot 6} \\ &= 12500 - \left(\frac{6400}{3} + \frac{3200}{n} + \frac{3200}{3n^2} \right) \\ &= \frac{23600}{3} - \frac{3200}{n} - \frac{3200}{3n^2}. \end{aligned}$$

Por último, nota-se, intuitivamente, que a área de A_n aproxima-se da área de A tanto quanto se queira, bastando tornar n cada vez maior. Ou seja,

$$\text{Área}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Área}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{23600}{3} - \frac{3200}{n} - \frac{3200}{3n^2} \right) = \frac{23600}{3}.$$

Vale observar que a estratégia de aumentar indefinidamente o número de retângulos na região sob o gráfico de uma função para determinar sua área é muito semelhante ao método utilizado por Antífion (c. 430 a. C.), um contemporâneo de Sócrates, para o problema da quadratura do círculo, ver [3]. Ele teria antecipado a ideia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo (ver a Figura 9), a diferença final entre o círculo e o polígono exaurir-se-ia.

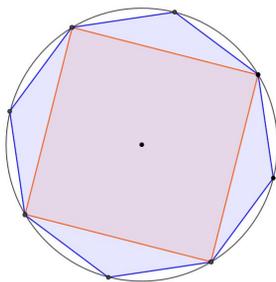


Figura 9: Polígonos regulares inscritos no círculo

Fonte: Autoria própria

Essa resolução apresentada por Antífion para o problema da quadratura do círculo contém o princípio do *método da exaustão grego*, cuja base é a seguinte proposição: *se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e, assim por diante, chega-se por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*

Os gregos, por volta de 300 a. C., na época que Euclides escrevia *Os Elementos*, estavam próximos da descoberta do Cálculo. Para avaliar até que ponto chegaram, basta verificar que Arquimedes (287-212 a. C.), em sua obra *O Método*, realizou o cálculo da área de um segmento parabólico (ver Figura 10), antecipando-se, assim, em mais de dezessete séculos aos resultados do Cálculo Integral.

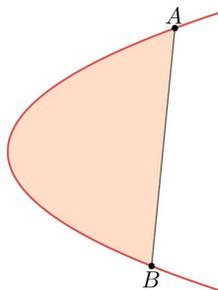


Figura 10: Segmento parabólico
Fonte: Autoria própria

O surgimento do Cálculo, no século dezessete, está em plena conexão com a busca de meios de simplificar os métodos gregos. Nesse século, a comunidade científica procurava respostas para algumas questões, como: determinar retas tangentes a curvas, resolver problemas de otimização e calcular áreas, volumes e centros de gravidade. Chegar a uma solução para esses problemas mediante o *método da exaustão* exigia muita engenhosidade. Então, alguns matemáticos enfrentaram o problema e deram suas contribuições. Newton e Leibniz, por exemplo, deram notórias contribuições, tanto que são considerados os criadores do Cálculo.

Vale destacar ainda a contribuição dada por Riemann para o Cálculo no século dezenove. Ele tornou claro o conceito de integrabilidade mediante definição do que denominamos atualmente como Integral de Riemann. Entretanto, a sua contribuição ao Cálculo é considerada pequena quando comparada com a dada em outras áreas, como na Geometria, cujo trabalho foi fundamental para a Teoria da Relatividade de Einstein, por exemplo.

No caso do problema do início desta seção, usamos os princípios do conceito de integral de Riemann para resolução. Então, definiremos formalmente esse conceito para que possamos aplicar em casos mais gerais.

2.1. Integral de Riemann

No caso particular do Problema 1, dividimos o intervalo $[0, 40]$ em alguns subintervalos. A partir de agora, usaremos o conceito de partição para isso.

Definição 1 (Partição). Uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, com $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n - 1, n$ e $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Exemplo 1. No Problema 1, usamos as partições $\mathcal{P}_1 = \{0, 10, 20, 30, 40\}$, $\mathcal{P}_2 = \{0, 4, 18, \dots, 36, 40\}$ e $\mathcal{P}_3 = \{0, 2, 4, \dots, 38, 40\}$ do intervalo $[0, 40]$.

As partições mostradas no Exemplo 1 são equiespaçadas, isto é, a diferença $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1, n$, é constante. Nesse caso, diremos que a norma da partição é igual a $\Delta_i x$. Mas, como uma partição não precisa ser necessariamente equiespaçada, definiremos sua norma de um modo geral.

Definição 2 (Norma da partição). Chamamos norma da partição \mathcal{P} o número $|\mathcal{P}|$, máximo do conjunto $\{\Delta_1x, \Delta_2x, \dots, \Delta_{n-1}x, \Delta_nx\}$, onde $\Delta_ix = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1, n$.

Exemplo 2. Sejam \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 e \mathcal{P}_3 as partições definidas no Exemplo 1. Logo, note que $|\mathcal{P}_1| = 10$, $|\mathcal{P}_2| = 5$ e $|\mathcal{P}_3| = 2$.

Exemplo 3. Seja $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, 1\}$ uma partição do intervalo $[0, 1]$. Então, $|\mathcal{P}| = \frac{2}{5}$.

Observação 1. Note que $\Delta_ix = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1, n$, representa, geometricamente, a distância entre os pontos x_{i-1} e x_i . Ou seja, a norma $|\mathcal{P}|$ será a maior distância entre dois pontos consecutivos da partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ de um intervalo $[a, b]$.

No caso do Exemplo 3, observa-se que a maior distância entre dois pontos consecutivos é, de fato, $\frac{2}{5}$ (ver Figura 11).

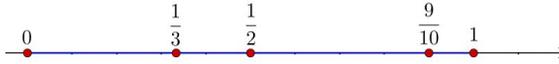


Figura 11: Representação geométrica da partição $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, 1\}$ do intervalo $[0, 1]$
Fonte: Autoria própria

Iniciamos a resolução do Problema 1 obtendo estimativas para a área da região A . Para isso, tomamos uma partição equiespaçada $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ do intervalo $[0, 40]$, escolhemos a imagem de $\bar{x}_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n - 1, n$, como a altura dos retângulos sobre esses subintervalos e, por último, determinamos a soma $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta_ix$ como uma aproximação para A . Esse somatório é o que denominamos de soma de Riemann e definiremos, de modo geral, a seguir.

Definição 3 (Soma de Riemann). Seja $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n - 1, n$, escolhido arbitrariamente nesse intervalo. Denominamos

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta_ix = f(\bar{x}_1)\Delta_1x + f(\bar{x}_2)\Delta_2x + \dots + f(\bar{x}_{n-1})\Delta_{n-1}x + f(\bar{x}_n)\Delta_nx \quad (4)$$

de soma de Riemann de f em $[a, b]$ relativa à partição \mathcal{P} e à escolha feita dos \bar{x}_i .

Geometricamente, o somatório na Equação (4) representa, ver Figura 12, a soma das áreas dos retângulos de bases Δ_ix e alturas $f(\bar{x}_i)$.

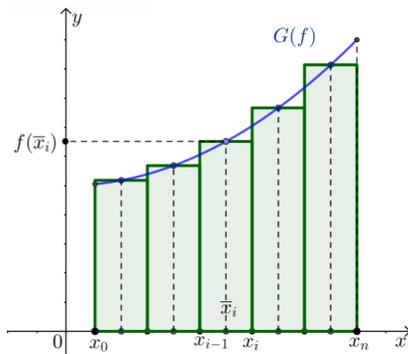


Figura 12: Representação geométrica da soma de Riemann
Fonte: Autoria própria

Finalmente, para obter a solução do Problema 1, calculamos o limite, quando n tende ao infinito, da soma de Riemann de f em $[0, 40]$ relativa a uma partição \mathcal{P} , pois, dessa forma, a soma tende à área de A , isto é,

$$\text{Área}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x.$$

Nesse caso particular, note que se n tende a $+\infty$, então (ver Figura 13), $|\mathcal{P}|$ tende a 0. E, observe ainda que se $|\mathcal{P}|$ tende a 0, então

$$\text{Área}(A) = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x. \quad (5)$$

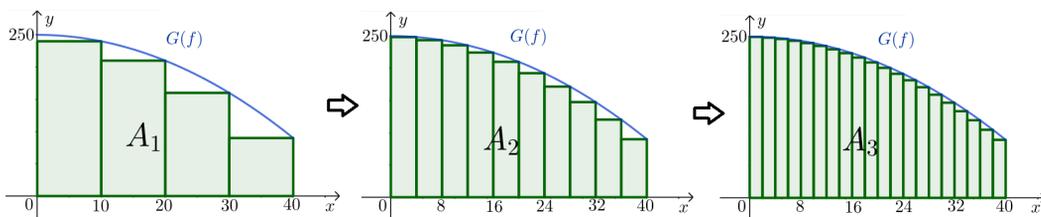


Figura 13: Representação geométrica da Integral no sentido de Riemann
Fonte: Autoria própria

Nesse caso, se existir e for finito o limite da Equação (5), diremos que a função f é integrável no sentido de Riemann e que a integral é igual a esse limite, isto é, igual à área de A .

Definição 4 (Função integrável no sentido de Riemann). Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Diremos que f é integrável no sentido de Riemann (ou apenas integrável) se existir e for finito o limite da soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x$ quando a norma da partição \mathcal{P} tender a zero, isto é, se existir um número real I satisfazendo a seguinte condição:

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x = I.$$

Nesse caso, diremos que I é a integral definida (ou apenas integral) de f em $[a, b]$.

Observação 2. Denotaremos a integral definida I usando a notação, devida a Liebzniz:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta_i x.$$

Observação 3. Assumiremos que se a função f é contínua no intervalo $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Para verificar esse resultado, o leitor pode consultar [8, p. 131].

Vimos que o cálculo de áreas motiva conceito de Integral definida. Então, faz sentido definirmos a área da região compreendida entre o gráfico de uma função contínua num dado intervalo e o eixo das abcissas em relação ao cálculo da Integral.

Definição 5. Seja A a região compreendida entre as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, e o gráfico da função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ver Figura 14). Se f é uma função integrável e não negativa, definimos a área da região A sendo

$$\text{Área}(A) = \int_a^b f(x)dx.$$

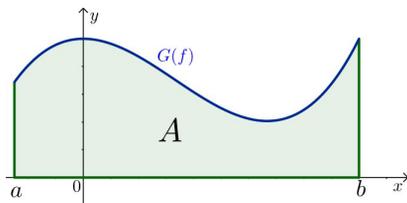


Figura 14: Área sob o gráfico da função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$
Fonte: Autoria própria

No Problema 1, conseguimos obter a área da região A por intermédio do resultado que assumimos na Equação (3). Mas, como resolver esse problema sem assumir esse fato?

Embora tenhamos definido a Integral de modo geral, não elaboramos uma maneira de determiná-la. Por isso, apresentaremos um teorema a seguir que nos ajudará nessa questão.

Teorema 1 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e não negativa nesse intervalo. Se A é a função que associa a área sob o gráfico de f no intervalo $[a, x]$, isto é,*

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

então A é derivável em (a, b) e $A'(x) = f(x)$.

Observação 4. Ao longo desse artigo, assumiremos o seguinte teorema, devido a Weierstrass: se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então existem $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que x_m é um mínimo global e x_M é um máximo global.

O leitor pode consultar a demonstração desse resultado em [8, p82].

Demonstração. Sejam $x \in [a, b]$ e $h > 0$ com $x + h \in [a, b]$.

Se f é contínua em $[a, b]$, por hipótese, então f é contínua em $[x, x + h]$. Portanto, o teorema de Weierstrass garante que f admite um ponto de máximo x_M e um ponto de mínimo x_m em $[x, x + h]$.

Raciocinando geometricamente, em termos de área, ver Figura 15, segue que

$$f(x_m)h \leq A(x + h) - A(x) \leq f(x_M)h.$$

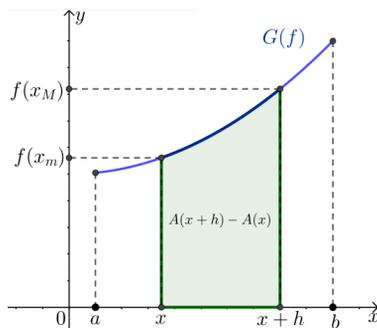


Figura 15: Área sob gráfico da função f no intervalo $[x, x + h]$

Fonte: Autoria própria

Logo,

$$f(x_m) \leq \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \leq f(x_M).$$

Note que quando h tende a zero, $f(x_m)$ e $f(x_M)$ se aproximam simultaneamente de $f(x)$ enquanto o quociente $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ aproxima-se do limite $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$, ou seja,

$$f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \leq f(x).$$

Então,

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(x + h) - A(x)}{h}.$$

Analogamente, quando $h < 0$, considerando o intervalo $[x + h, x]$ (ver Figura 16), temos

$$f(x_m)(-h) \leq A(x) - A(x + h) \leq f(x_M)(-h).$$

Logo,

$$f(x_m) \leq \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \leq f(x_M).$$

Como no caso anterior, se h tende a zero, então $f(x_m)$ e $f(x_M)$ se aproximam simultaneamente de $f(x)$ enquanto o quociente $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ aproxima-se do limite $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$, isto é,

$$f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \leq f(x).$$

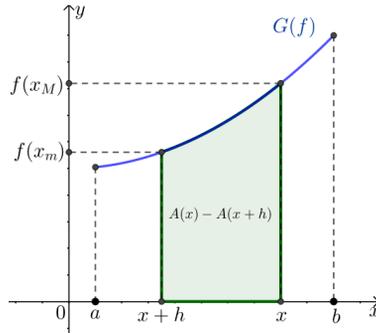


Figura 16: Área sob gráfico da função f no intervalo $[x+h, x]$
 Fonte: Autoria própria

Então,

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}.$$

Portanto, A é derivável em (a, b) e $A'(x) = f(x)$. □

Definição 6 (Primitiva). Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em todo intervalo $[a, b] \subset I$. Uma primitiva para f em I é uma função derivável $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ em I .

Exemplo 4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, definida por $f(x) = x^2$. A função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, é uma primitiva de f .

Exemplo 5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, definida por $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. A função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, é uma primitiva de f .

Observação 5. Por intermédio dos resultados do Cálculo diferencial, ver [6], mostra-se que se duas funções f, g possuem a mesma derivada em um intervalo aberto I , então $f = g + c$, onde c é uma constante.

Corolário 1. Sejam f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e não negativa nesse intervalo, F uma primitiva de f e A a função que associa a área sob o gráfico de f no intervalo $[a, x]$, isto é,

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Então,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \tag{6}$$

Demonstração. Raciocinando geometricamente, em termos de áreas, nota-se que $A(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ e $A(b) = \int_a^b f(t)dt$.

Por outro lado, se $A'(x) = f(x)$, então $F(x) = A(x) + c$ visto que F é uma primitiva de f . Logo, $F(a) = A(a) + c = c$ e $F(b) = A(b) + c$.

Portanto, $F(b) = A(b) + F(a)$. □

Finalmente, por intermédio do Corolário 1, poderemos determinar a área da região A , do Problema 1, sem que seja necessário assumir o resultado da Equação (3).

Note que a função $F : [0, 40] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = -\frac{x^3}{30} + 250x$, é uma primitiva de f . Então,

$$\text{Área}(A) = \int_0^{40} f(t)dt = F(40) - F(0) = \frac{23600}{3}.$$

Corolário 2. *Sejam as funções $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Então a área da região A compreendida entre os gráficos das funções f e g , e as retas $x = a$ e $x = b$ (ver Figura 17), é dada por*

$$\text{Área}(A) = \int_a^b (f - g)(x)dx.$$

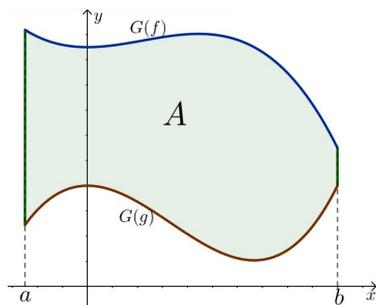


Figura 17: Região A entre os gráficos das funções f e g tais que $f(x), g(x) \geq 0$
 Fonte: Autoria própria

3. Cálculo da Integral Definida usando GeoGebra

Nesta seção, resolveremos os problemas mencionados na introdução deste artigo, isto é, os problemas de obter estimativas para a área devastada devido ao desastre em Brumadinho (MG) (ver Figura 1), e para a área da Antártida (ver Figura 2), por intermédio do aplicativo de geometria dinâmica, o *GeoGebra Clássico 6*, que está disponível em [4]. Os principais itens do *layout* inicial desse aplicativo, ver Figura 18, são: a janela de visualização, a janela de álgebra, o campo de entrada, onde daremos a maioria dos comandos, algumas ferramentas, um teclado virtual, com algumas teclas adicionais, e opções de configuração.



Figura 18: *Layout* inicial do *GeoGebra*
Fonte: Autoria própria

3.1. Plotagem de gráficos de funções

Usaremos o campo de *Entrada* para plotagem dos gráficos das funções no aplicativo. Sempre, após a inserção do comando nesse campo, apertaremos a tecla *Enter*. Por exemplo, se escrever o comando $x \wedge 2$ e, logo após, pressionar essa tecla, veremos que aparecerá $f(x) = x^2$ na janela de álgebra e, simultaneamente, o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, na janela de visualização (ver Figura 19).

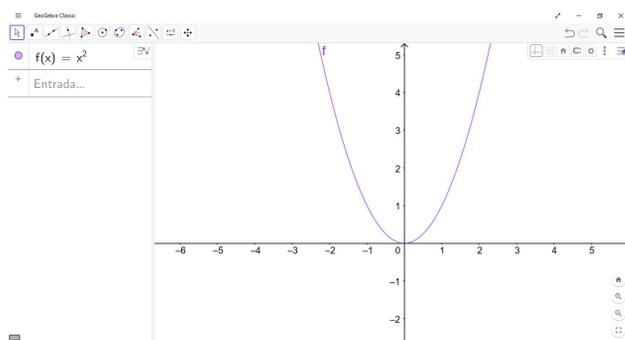


Figura 19: Plotagem do gráfico de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$
Fonte: Autoria própria

Observe que o próprio *software* escolheu o domínio da função. Ou seja, se inserirmos a lei que define a imagem de qualquer função, o aplicativo fará a plotagem do gráfico considerando o domínio maximal da função, isto é, o maior subconjunto dos reais no qual a função está definida. Se houver a necessidade de plotar o gráfico de uma função f definida em um intervalo fechado $[a, b]$, podemos utilizar o comando *Função*(f, a, b), onde f é a expressão que define a função ou é uma função que foi inserida previamente.

Vale ressaltar ainda que o *GeoGebra* nomeou a função automaticamente. Poderemos, porém, nomear a função como acharmos mais conveniente. Para isso, basta inserir, por exemplo, $f(x) =$,

seguido da lei que define a função.

Exemplo 6. Façamos a plotagem do gráfico da função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Para isso, basta inserirmos o comando $f(x) = \text{Função}(x \wedge 2, 0, 2)$ que aparecerá o gráfico desejado, ver Figura 20.

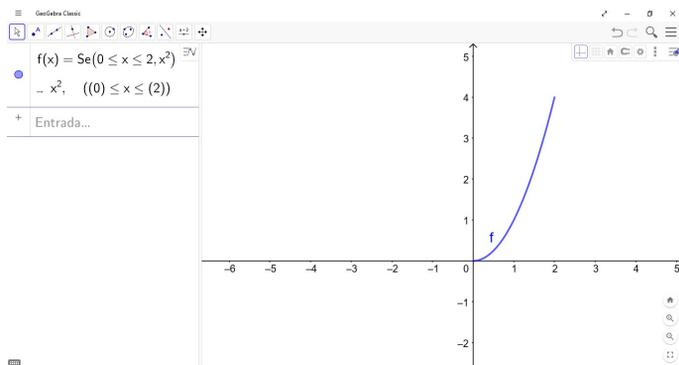


Figura 20: Plotagem do gráfico de $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$
Fonte: Autoria própria

Observação 6. A plotagem do gráfico da função f , do Exemplo 6, poderia ser realizada fazendo a inserção do comando $g(x) = x \wedge 2$ e, em seguida, $f(x) = \text{Função}(g, 0, 2)$.

Como vimos anteriormente, inserindo $\text{Função}(f, a, b)$, o programa entenderá como a função f definida no intervalo fechado $[a, b]$. Para intervalos de modo geral, podemos utilizar o comando $\text{Se}(\langle \text{condição} \rangle, \langle \text{então} \rangle)$, onde $\langle \text{condição} \rangle$ escreveremos o intervalo para os valores de x e $\langle \text{então} \rangle$ a função f ou a expressão que define a função f .

Outra maneira de plotar o gráfico de uma função no *GeoGebra* é utilizando a ferramenta *função à mão livre*, ver Figura 21. Como o próprio da ferramenta sugere, desenha-se o gráfico da função diretamente na janela de visualização com o *mouse* ou, se for o caso, com o toque na tela *touchscreen*.



Figura 21: Ferramenta *função à mão livre*
Fonte: Autoria própria

Vale ressaltar que, nesse caso, aparecerá, na janela de álgebra, $f(x) = \text{mãolivre}(x)$, ver Figura 22.

Ou seja, não obteremos a fórmula da função. Mas, ainda sim, será possível calcular a Integral dessas funções, conforme veremos mais adiante.

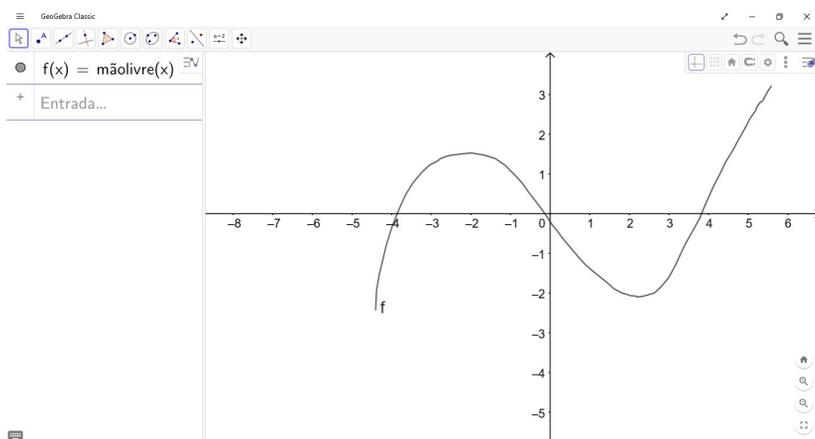


Figura 22: Plotagem do gráfico de uma função mediante a ferramenta *função à mão livre*
Fonte: Autoria própria

3.2. Integrais Definidas

Nesta subsecção, apresentaremos outra aplicação interessante do *GeoGebra*, que é a de calcular e representar geometricamente as integrais definidas.

Para determinarmos o valor e obter uma representação geométrica da Integral definida de uma função f no intervalo $[a, b]$, inseriremos o seguinte comando: $Integral(f, a, b)$.

Exemplo 7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, definida por $f(x) = -\frac{x^2}{10} + 250$.

Para determinarmos o valor da Integral $\int_0^{50} f(x)dx$ e plotar sua representação geométrica, ver Figura 23, sigamos os passos a seguir:

Passo 1. Faça a inserção do comando $f(x) = -(x \wedge 2)/10 + 250$.

Passo 2. Faça a inserção do comando $Integral(f, 0, 50)$.

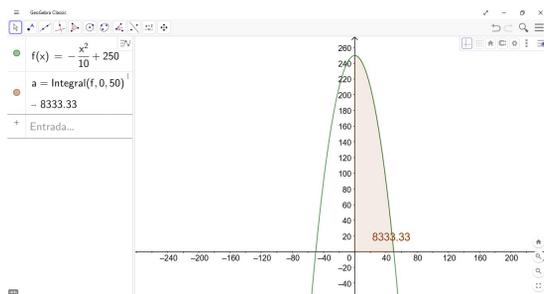


Figura 23: Cálculo e representação geométrica da Integral definida
Fonte: Autoria própria

Outro recurso que podemos explorar nesse *software* é o de calcular e representar a área entre os gráficos das funções f e g no intervalo $[a, b]$, mediante o recurso $IntegralEntre(f, g, a, b)$. Observe que esse recurso representa a integral $\int_a^b (f - g)(x)dx$.

Exemplo 8. Qual a área da região compreendida entre os gráficos das funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 3$, no intervalo $[-1, 3]$?

Para determinar a área pedida e plotar sua representação geométrica, ver Figura 24, basta inserirmos os comandos a seguir:

Passo 1. Faça a inserção do comando $f(x) = x \wedge 2$.

Passo 2. Faça a inserção do comando $g(x) = 2x + 3$.

Passo 3. Faça a inserção do comando $IntegralEntre(g, f, -1, 3)$.

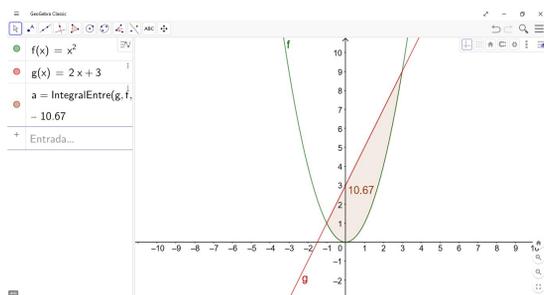


Figura 24: Cálculo e representação geométrica da integral da diferença entre duas funções
Fonte: Autoria própria

Observação 7. No Exemplo 8, se inserirmos $IntegralEntre(f,g, -1, 3)$, aparecerá em destaque a mesma região na janela de visualização, mas o valor da integral será negativo, visto que, no intervalo $[-1, 3]$, $f(x) \leq g(x)$. Vale ressaltar ainda que a área dessa região é, por definição, o módulo dessa integral.

3.3. Recursos complementares

Nesta subseção, aprenderemos a inserir figuras, realizar configurações básicas da janela de visualização e utilizar as ferramentas *Ponto* e *Segmento*.

Para inserir uma figura basta escolher a ferramenta *Inserir Imagem*, ver Figura 25.

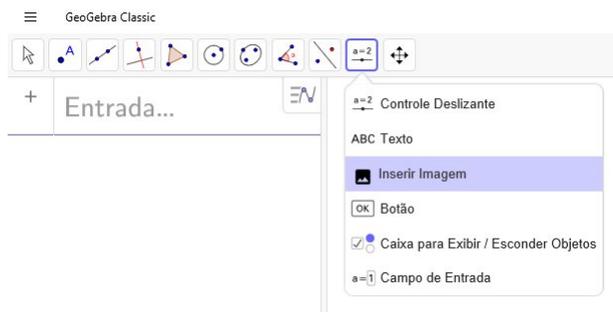


Figura 25: Ferramenta *Inserir Imagem*

Fonte: Autoria própria

Após escolher essa ferramenta, o aplicativo dará a opção de escolher a imagem armazenada em algum dispositivo ou inserir a imagem mediante foto da *webcam*.

Quando fizer a inserção da imagem, o programa, por padrão, colocará a imagem como *objeto auxiliar*, isto é, não aparecerá nenhuma referência na janela de álgebra. Mas, também por padrão, o *software* mostrará dois pontos vinculados à imagem, onde poderemos transladar, rotacionar, ampliar ou reduzir essa imagem por intermédio do deslocamento desses pontos.

Poderemos definir uma imagem como plano de fundo da janela de visualização. Dessa forma, veremos os eixos e a malha à frente da imagem, ver Figura 26. Para isso, sigamos os passos a seguir:

Passo 1. Dê um *clique* com o botão esquerdo do *mouse* sobre a imagem.

Passo 2. Escolha a opção *Configurações* no canto superior direito da janela de visualização.

Passo 3. Escolha a opção *Imagem de Fundo*.

Passo 4. Feche a janela de configurações.

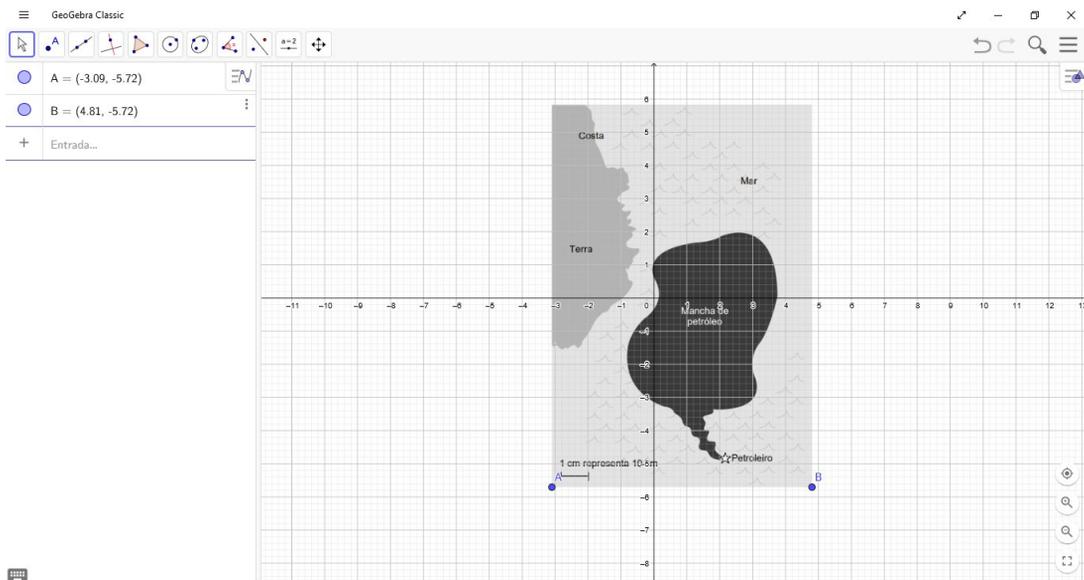


Figura 26: Imagem ao fundo
 Fonte: Autoria própria

Outra configuração importante é a dos eixos cartesianos. Para isso, *clique* com o botão esquerdo do *mouse* em algum lugar da janela de visualização, onde não há objeto, e escolha a opção *Configurações* no canto superior direito da janela de visualização. Assim como na configuração da imagem, abrirá uma janela, ver Figura 27. Nessa janela aparecerão varias opções, inclusive a opção de configurar a malha quadriculada.

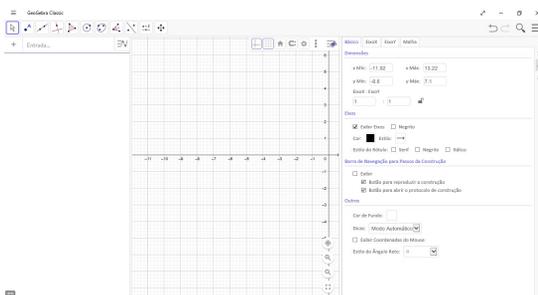


Figura 27: Configurações da janela de visualização
 Fonte: Autoria própria

Observação 8. O ícone do cadeado, ao lado da escala, dá a opção de fixar uma determinada escala enquanto trabalhamos com *software*.

Agora, finalizaremos esta subseção, mostrando o uso das ferramentas *Ponto* e *Segmento* que são bastante intuitivas. Ao escolher a opção *Ponto*, ver Figura 28, dê um *clique* com o botão esquerdo

do *mouse* onde deseja determinar um ponto na janela de visualização. Vale ressaltar ainda que o aplicativo mostrará, também, uma representação do ponto na janela de álgebra.

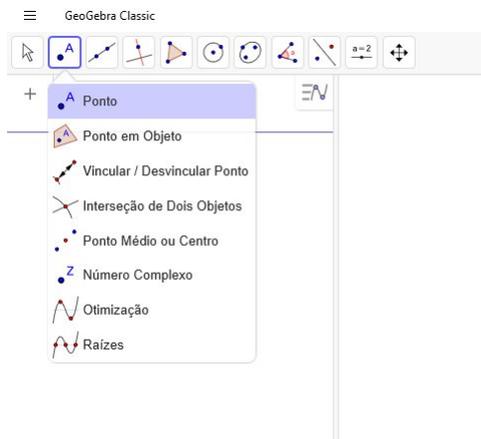


Figura 28: Ferramenta *Ponto*

Fonte: Autoria própria

Poderemos utilizar a ferramenta *Segmento* de duas formas: mediante dois pontos dados ou determinando dois pontos. Ao escolher esse recurso, ver Figura 29, determine os extremos do segmento por intermédio de um *clique*, com o botão esquerdo do *mouse*, sobre dois pontos existentes ou defina os pontos extremos do segmento. Dessa forma, de imediato, o aplicativo representará, na janela de álgebra, o segmento, evidenciando o comprimento, e os pontos de suas extremidades.

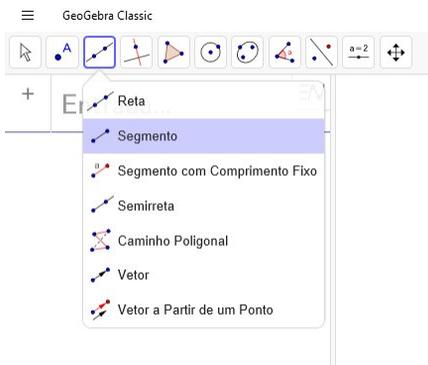


Figura 29: Ferramenta *Segmento*

Fonte: Autoria própria

3.4. Resolução de problemas

Nesta subseção, mostraremos como utilizar os recursos do *GeoGebra* para obtermos as estimativas para as áreas da região da Antártida, ver Figura 2, e da região devastada em Brumadinho (MG), ver Figura 1, devido ao rompimento da barragem de uma mineradora.

Inicialmente, daremos uma estimativa para a área da região da Antártida. Para isso, sigamos os passos:

Passo 1. Configure os eixos cartesianos e malha quadriculada com escala de 1 por 1 e fixe essa escala.

Passo 2. Faça inserção da imagem do mapa da Antártida.

Passo 3. Defina o mapa como imagem de fundo.

Passo 4. Rotacione, translate, amplie ou reduza a imagem de tal forma que facilite a plotagem dos gráficos de algumas funções sobre a fronteira da Antártida.

Passo 5. Rotacione, translate, amplie ou reduza a imagem de tal forma que sua escala coincida com a escala dos eixos cartesianos.

Passo 6. Usando a ferramenta *função à mão livre*, desenhe o gráfico das funções sobre a fronteira da Antártida.

Passo 7. Use o comando $IntegralEntre(f, g, a, b)$, onde f e g são as funções sobre a fronteira da Antártida no intervalo $[a, b]$.

Então, seguindo esses passos e considerando a escala do mapa da Antártida, ver Figura 30, a área pedida será aproximadamente igual a $14.730.000 \text{ km}^2$.

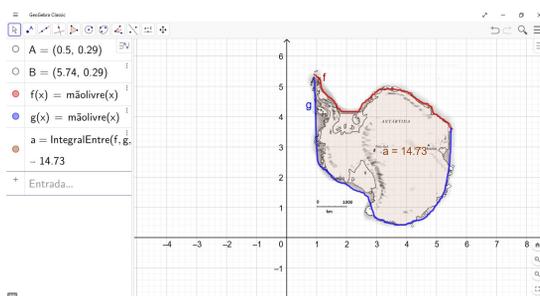


Figura 30: Área da Antártida no *GeoGebra*
 Fonte: Autoria própria

Observação 9. Se houver dificuldade em verificar se a escala do mapa está coincidindo com a escala dos eixos, crie um segmento sobre a escala e verifique o comprimento.

Por último, para obter uma estimativa para a área da região devastada em Brumadinho, seguiremos os passos análogos ao da estimativa da área da Antártida. Ou seja, inseriremos o mapa da região devastada e definiremos como imagem de fundo, posicionaremos a imagem de tal forma que facilite o desenho o gráfico das funções sobre a fronteira da região e que a escala dos eixos coincida com a escala do mapa, usaremos a ferramenta *função à mão livre* para determinar os gráficos das funções f e g sobre a fronteira no intervalo $[a, b]$ e, finalmente, usaremos o comando $IntegralEntre(f, g, a, b)$. Dessa forma, ver Figura 31, a área procurada terá aproximadamente 309 hectares.

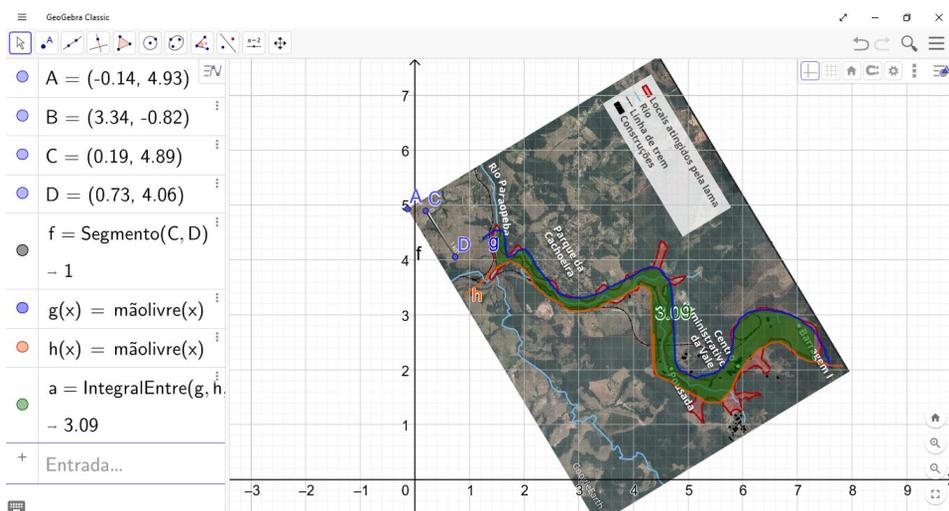


Figura 31: Área da região devastada após rompimento da barragem em Brumadinho (MG)
 Fonte: Autoria própria

4. Conclusão

Por intermédio dos conhecimentos elementares do Cálculo Integral, os alunos do Ensino Médio poderão desenvolver competências e habilidades específicas de Matemática e suas tecnologias esperadas para a etapa final da Educação Básica, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Além disso, por intermédio do *GeoGebra*, poderemos propor solução para o problema envolvendo estimativa da área de uma região do plano que não é delimitada apenas por segmentos de retas, como algumas questões dos exames do *Programme for International Student Assessment* (Pisa).

Vale ressaltar ainda que, nesse texto, apresentamos o Cálculo Integral apelando para intuição geométrica, pois, dessa forma, acreditamos alcançar um número maior de estudantes do Ensino Médio. Para uma abordagem mais completa, inclusive para os conceitos de limite, continuidade e derivada, recomendamos a leitura de [6].

Agradecimentos

Este artigo é parte do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do Profmat-Ufal. Agradeço ao Prof. Hilário Alencar pela sua orientação. Também sou grato à Larissa Cândido e ao parecerista desse artigo pelos comentários e sugestões.

Referências

- [1] Brasil. *Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio*. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 7 jun. 2019.
- [2] Carvalho, P. C. P.; Morgado, A. C. *Matemática discreta*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [3] Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Unicamp, 2004.
- [4] GeoGebra. *Aplicativos matemáticos*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 7 jun. 2019.
- [5] G1, Globo. *Tragédia em Brumadinho: o caminho da lama*. Disponível em: <<https://g1.globo.com/mg/minas-gerais/noticia/2019/01/27/tragedia-em-brumadinho-o-caminho-da-lama.ghtml>>. Acesso em: 7 jun. 2019.
- [6] Iezzi, G.; Machado, N. J.; Murakami, C. *Fundamentos de Matemática Elementar: limites, derivadas e noções de integral*. 7ª ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 8.
- [7] Inep. *Exemplos de questões do Pisa*. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/guest/acoes-internacionais/pisa/provas>>. Acesso em: 7 abr. 2019.
- [8] Lima, E. L. *Análise real: funções de uma variável*. Rio de Janeiro: Impa, 2017. v. 1.

Alyrio A. Cordeiro Neto
EREM Prof. Jerônimo Gueiros
55295-270, Garanhuns, Pernambuco, Brasil
<alyrioneto@live.com>

Recebido: 26/04/2019
Publicado: 28/06/2019