

Mínimos quadrados lineares desenvolvidos no contexto do Ensino Médio

Adriano R. de Melo

Resumo

Estudamos o método dos mínimos quadrados lineares na perspectiva de conteúdos do ensino médio, a saber, funções de segundo grau e desigualdades, compreendendo-o como um problema de otimização que pode ser acessível ao ensino médio, sobretudo quando desenvolvido na forma de projetos de ensino e iniciação científica em classes de cursos técnicos de tecnologia integrados ao ensino médio.

Palavras-chave: Função de Segundo Grau; Otimização no Ensino Médio; Aplicações no Ensino Médio.

Abstract

We study the method of linear least squares in the perspective of high school contents, namely, quadratic functions and inequalities, understanding it as an optimization problem that can be accessible to high school, especially when developed in the form of teaching projects and scientific initiation in classes of technology courses integrated to high school.

Keywords: Quadratic Function; Optimization in High School; Applications in High School.

1. Introdução

O primeiro contato com problemas de otimização ocorre, normalmente, no ensino médio ao se estudar as funções quadráticas, que se constituem como o primeiro tipo de função ao qual se é possível associar os termos máximo e mínimo (no contexto de domínio real), facilmente intuídos como a ordenada do vértice da parábola correspondente. Embora a análise gráfica seja sensível, concreta e lúdica, pode-se definir esse conceito formalmente como:

Definição 1. Uma função f , com domínio em \mathbb{R} , possui um mínimo global quando se é possível encontrar $x_m \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_m) \leq f(x)$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Analogamente, o máximo global é definido a partir da possibilidade de se poder determinar $x_M \in \mathbb{R}$ de tal modo que $f(x_M) \geq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nessa fase de escolarização, os principais e convencionais exemplos que tratam deste tópico trazem por objetivo a minimização ou maximização de áreas, lucros, receitas, alturas ou velocidades de projéteis (IEZZI *et al.*, 2013; PAIVA, 2015; CHAVANTE, PRESTES, 2016; SOUZA, GARCIA, 2016).

Diante dessa lista de temas, perguntamo-nos se não existiria um problema de otimização de função quadrática mais sofisticado, porém acessível ao aluno do ensino médio. Pensamos no clássico da teoria da aproximação: a técnica de mínimos quadrados lineares, comumente estudada no nível de graduação nas disciplinas de estatística (como uma técnica da análise de regressão linear) e cálculo numérico. Ora, seriam os argumentos lógicos de sua construção compatíveis com o nível médio de ensino? Este artigo propõe responder positivamente essa questão.

1.1. O Contexto do Ensino Médio

No contexto do ensino médio, um problema clássico e de simples solução (IEZZI, MURAKAMI, 1977) é aquele em que se deseja determinar, para dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) quaisquer, a reta que os contém (satisfaz).

Poderíamos avançar na dificuldade e considerar a seguinte situação II: seja um conjunto com n pontos quaisquer, digamos $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Qual é a reta que contém os pontos do conjunto A ? Esse segundo caso pode não ter solução, pelo simples fato de que dois pontos distintos determinam uma única reta (o que implica que o problema I possui solução única, no caso dos pontos serem distintos), então, para $n > 2$, não há garantia de que todos os pontos estarão alinhados. Nesses termos, podemos considerar também a existência de uma reta que melhor se ajusta aos pontos do conjunto A , isto é, que melhor descreve, se enquadra ao conjunto de pontos dados.

Observe que no caso I, a função que se almeja deve satisfazer exatamente os pontos dados, a isso dá-se o nome de interpolação. No problema II, o que se espera é que a reta ajustada acompanhe o padrão dos dados (conjunto de pontos), neste caso, um padrão linear. É preciso dar significado a ideia de ajuste; esse é o objetivo da próxima seção.

2. Desenvolvimento

Para encontrar esta reta, com equação

$$y = ax + b, \tag{1}$$

é necessário definir o critério de otimização que dá significado ao termo "melhor ajuste". A reta definida pela equação (1) aproxima os dados e por isso existe um erro inerente à aproximação. O critério de otimização é que esse erro seja o menor possível, isto é, que seja mínimo. Então, basta definir uma função que meça o erro cometido na aproximação.

Cada ordenada y_i dos pontos de A será aproximada por $\hat{y}_i = ax_i + b$, de modo que o erro quadrático no i -ésimo ponto seja $(y_i - \hat{y}_i)^2$, $1 \leq i \leq n$. Então, o erro total cometido na aproximação será

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2, \tag{2}$$

ou, após seu desenvolvimento,

$$E(a, b) = a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + nb^2 + 2ab \sum_{i=1}^n x_i - 2a \sum_{i=1}^n x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2. \tag{3}$$

Desejamos que a soma dos quadrados dos desvios, isto é, a função dada pela equação (3) seja mínima. Em outras palavras, buscamos minimizar (determinar o mínimo) da função (3). Teria ela

esse mínimo desejado? Com o objetivo de responder essa pergunta, necessitamos definir o conceito de mínimo (máximo) global em funções de duas variáveis como $E(a, b)$:

Definição 2. Uma função f , com domínio em \mathbb{R}^2 , possui um mínimo global quando se é possível encontrar um par $(x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$, tal que $f(x_m, y_m) \leq f(x, y)$, qualquer que seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Analogamente, o máximo global é definido a partir da possibilidade de se poder determinar $(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$ de tal modo que $f(x_M, y_M) \geq f(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2.1. Determinando o Ponto de Mínimo

Numa perspectiva intuitiva e exploratória, supondo a existência desse ponto de mínimo (a_m, b_m) , podemos fixar $b = b_m$ na função erro E , obtendo uma função quadrática na variável a , com coeficiente dominante positivo:

$$E_{b_m}(a) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a^2 + 2 \left(b_m \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) a + \left(n b_m^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 b_m \sum_{i=1}^n y_i \right). \quad (4)$$

Analogamente, fixando $a = a_m$ em (3), obtemos a função também quadrática na variável b de coeficiente dominante positivo:

$$E_{a_m}(b) = n b^2 + 2 \left(a_m \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i \right) b + \left(a_m^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 a_m \sum_{i=1}^n x_i y_i \right). \quad (5)$$

Nestes termos, (4) e (5) possuem pontos de mínimo, conforme teoria das funções quadráticas que estabelece a existência de valor mínimo a partir do fato de o coeficiente dominante ser positivo. Seus pontos de mínimo são a_m e b_m , respectivamente (prove isso), e são conhecidamente dados conforme equação:

$$a_m = \frac{-2 \left(b_m \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{2 \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{e} \quad b_m = \frac{-2 \left(a_m \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i \right)}{2n}. \quad (6)$$

Assim, combinando as equações em (6) na forma de um sistema linear, chega-se aos coeficientes angular e linear da reta (1) desejada:

$$a_m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad \text{e} \quad b_m = \frac{\sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (7)$$

O desenvolvimento acima tem por hipótese a existência do ponto de mínimo. Dessa forma, se E possui mínimo, então ele ocorre no ponto (a, b) dado conforme equação (7). Agora qual é a condição para que E possua um valor mínimo, isto é, quando que se pode afirmar a existência do valor mínimo?

3. Condição Suficiente para Existência de Ponto de Mínimo

Considere nos desenvolvimentos a seguir o caso geral de (3), pela função polinomial de duas variáveis $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x, y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6, \text{ com } a_1 \neq 0 \text{ e } a_2 \neq 0.$$

Estabeleceremos o seguinte

Teorema 1. *i) O coeficiente a_1 é positivo (negativo), se e somente se, para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ fixo, existe um ponto (x_m, y_0) tal que $f(x_m, y_0) \leq f(x, y_0)$ ($f(x_m, y_0) \geq f(x, y_0)$), qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$;*

ii) O coeficiente a_2 é positivo (negativo), se e somente se, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ fixo, existe um ponto (x_0, y_m) tal que $f(x_0, y_m) \leq f(x_0, y)$ ($f(x_0, y_m) \geq f(x_0, y)$), qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. i) Com efeito, fixando-se y_0 em f , obtemos uma função real g

$$f(x, y_0) = a_1x^2 + (a_3y_0 + a_4)x + (a_2y_0^2 + a_5y_0 + a_6) = b_1x^2 + b_2x + b_3 = g(x), \quad (8)$$

quadrática, com coeficiente dominante positivo e que, portanto, admite valor mínimo, isto é, existe

$$x_m = -\frac{a_3y_0 + a_4}{2a_1}, \quad (9)$$

real tal que, conforme Definição 1,

$$f(x_m, y_0) = g(x_m) \leq g(x) = f(x, y_0), \quad \text{qualquer que seja } x \text{ real.} \quad (10)$$

Por outro lado, se existe um ponto (x_m, y_0) tal que $f(x_m, y_0) \leq f(x, y_0)$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f(x_m, y_0) - f(x, y_0) &= a_1x_m^2 + a_3x_my_0 + a_4x_m - a_1x^2 - a_3xy_0 - a_4x, \\ &= a_1x_m^2 + (a_3y_0 + a_4)x_m - a_1x^2 - (a_3y_0 + a_4)x, \\ &= -a_1x_m^2 - a_1x^2 + 2a_1xx_m, \\ &= -a_1(x_m - x)^2 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (11)$$

Assim, para que a inequação em (11) seja verdadeira é necessário e suficiente que $a_1 > 0$.

ii) A demonstração é análoga. Observamos apenas que y_m é dado por

$$y_m = -\frac{a_3x_0 + a_5}{2a_2}. \quad (12)$$

□

Observação 1. A demonstração da implicação de ida (\Rightarrow) é simples consequência de que uma função quadrática possui um mínimo (máximo) (concavidade para cima (baixo)) se, e somente se, o seu coeficiente dominante é positivo (negativo). Neste caso, o ponto de mínimo (máximo), que portanto é único, fica completamente determinado pelos coeficientes da função quadrática, conforme equações (9) e (12).

Observação 2. A implicação de volta (\Leftarrow) pode ser menos restritiva, conforme sua demonstração, de modo que as hipóteses "para todo $y_0 \in \mathbb{R}$..." e "para todo $x_0 \in \mathbb{R}$..." podem ser substituídas por "existe $y_0 \in \mathbb{R}$..." e "existe $x_0 \in \mathbb{R}$...", respectivamente. Tais implicações tornam-se então:

- i) Se existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para algum ponto (x_m, y_0) , tem-se $f(x_m, y_0) \leq f(x, y_0)$ ($f(x_m, y_0) \geq f(x, y_0)$), qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, então o coeficiente a_1 é positivo (negativo).
- ii) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para algum ponto (x_0, y_m) , tem-se $f(x_0, y_m) \leq f(x_0, y)$ ($f(x_0, y_m) \geq f(x_0, y)$), qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, então o coeficiente a_2 é positivo (negativo).

Observação 3. Importante notar também que x_m e y_m obtidos nos itens i) e ii), respectivamente, não são arbitrários e dependem, cada qual, explicitamente dos pontos y_0 e x_0 , conforme equações (9) e (12), respectivamente.

Corolário 1. Se a função f admite um mínimo (máximo) global, então $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ ($a_1 < 0$ e $a_2 < 0$). Além disso, (x_m, y_m) dado no Teorema 1 é o ponto de mínimo (máximo).

Demonstração. Com efeito, se f possui mínimo então existe (x_0, y_0) em \mathbb{R}^2 tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \text{qualquer que seja } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (13)$$

De modo particular, podemos obter

$$f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y), \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Assim, pelo Teorema 1, concluímos que a_1 e a_2 devem ser positivos.

O fato de o ponto de mínimo ter coordenadas

$$x_m = -\frac{a_3 y_m + a_4}{2a_1} \quad \text{e} \quad y_m = -\frac{a_3 x_m + a_5}{2a_2} \quad (15)$$

ocorre pelas desigualdades em (14), das equações (9) e (12) e ainda da unicidade de x_m e y_m . \square

Para avançar na compreensão de f , analisaremos a situação em que $a_3 = 0$ e inexistente termo misto. Para isso, demonstraremos o seguinte

Teorema 2. Se $a_1 > 0$ ($a_1 < 0$), $a_2 > 0$ ($a_2 < 0$) e $a_3 = 0$, então f possui mínimo (máximo) global.

Demonstração. A condição $a_3 = 0$ implica que os pontos x_m e y_m dados pelo Teorema 1 não dependem de x_0 e y_0 , respectivamente, conforme equações (9) e (12):

$$x_m = -\frac{a_4}{2a_1} \quad \text{e} \quad y_m = -\frac{a_5}{2a_2}. \quad (16)$$

Dessa forma, f avaliada em (x_m, y_m) dados por (16) e com a hipótese de que $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$, resulta em

$$\begin{aligned} f(x_m, y_m) &= -a_1 \left(\frac{a_4}{2a_1} \right)^2 - a_2 \left(\frac{a_5}{2a_2} \right)^2 + a_6, \\ &\leq -a_1 \left(\frac{a_4}{2a_1} \right)^2 - a_2 \left(\frac{a_5}{2a_2} \right)^2 + a_6 + a_1 \left(x + \frac{a_4}{2a_1} \right)^2 + a_2 \left(y + \frac{a_5}{2a_2} \right)^2, \\ &= f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Concluimos, nos termos da Definição 2, que f possui ponto de mínimo global que é dado por (x_m, y_m) , conforme equações (16).

O caso da existência de máximo global em que $a_1 < 0$ e $a_2 < 0$ prova-se de maneira análoga. \square

Vejam os casos gerais no seguinte

Teorema 3. Se $a_1 > 0$ ($a_1 < 0$), $a_2 > 0$ ($a_2 < 0$) e $a_1 a_2 - (a_3/2)^2 > 0$, então f possui mínimo (máximo) global em (x_m, y_m) .

Demonstração. Com efeito:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{a_1}{2} \left[\left(x + \frac{a_3 y + a_4}{2a_1} \right)^2 - \left(\frac{a_3 y + a_4}{2a_1} \right)^2 \right] + \frac{a_2}{2} \left[\left(y + \frac{a_3 x + a_5}{2a_2} \right)^2 - \left(\frac{a_3 x + a_5}{2a_2} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_4}{2} x + \frac{a_2}{2} y^2 + \frac{a_5}{2} y + a_6, \\ &\geq -\frac{a_1}{2} \left(\frac{a_3 y + a_4}{2a_1} \right)^2 - \frac{a_2}{2} \left(\frac{a_3 x + a_5}{2a_2} \right)^2 + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_4}{2} x + \frac{a_2}{2} y^2 + \frac{a_5}{2} y + a_6, \\ &= \left(\frac{a_1 a_2 - (a_3/2)^2}{2a_2} \right) x^2 + \left(\frac{a_1 a_2 - (a_3/2)^2}{2a_1} \right) y^2 + \left(\frac{2a_2 a_4 - a_3 a_5}{4a_2} \right) x \\ &\quad + \left(\frac{2a_1 a_5 - a_3 a_4}{4a_1} \right) y + \left(a_6 - \frac{a_4^2}{8a_1} - \frac{a_5^2}{8a_2} \right), \\ &= g(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Pelo Teorema 2, a função g possui mínimo, logo, existe (x_0, y_0) tal que

$$g(x_0, y_0) \leq g(x, y) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{19}$$

ou seja, a função f é limitada inferiormente. Pelo Corolário 1, o mínimo de g ocorre conforme equação (15), isto é,

$$x_0 = \frac{\left(\frac{-2a_2 a_4 - a_3 a_5}{4a_2} \right)}{2 \left(\frac{a_1 a_2 - (a_3/2)^2}{2a_2} \right)} = \frac{a_3 a_5 - 2a_2 a_4}{4a_1 a_2 - a_3^2} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{-\left(\frac{2a_1 a_5 - a_3 a_4}{4a_1} \right)}{2 \left(\frac{a_1 a_2 - (a_3/2)^2}{2a_1} \right)} = \frac{a_3 a_4 - 2a_1 a_5}{4a_1 a_2 - a_3^2}. \tag{20}$$

O par (x_0, y_0) dado pela equação (20) corresponde à solução do sistema linear constituído pelas equações em (15):

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & a_3 \\ a_3 & 2a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_4 \\ -a_5 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Este sistema possui solução única, conforme hipótese do teorema que garante que o determinante da matriz de coeficientes é diferente de zero. Assim, temos que $(x_0, y_0) = (x_m, y_m)$. Por outro lado, conforme equação (18),

$$f(x, y) = g(x, y) + \frac{a_1}{2} \left(x + \frac{a_3 y + a_4}{2a_1} \right)^2 + \frac{a_2}{2} \left(y + \frac{a_3 x + a_5}{2a_2} \right)^2 \tag{22}$$

e por isso, segue-se que

$$f(x_m, y_m) = g(x_m, y_m), \quad (23)$$

ao passo que da inequação em (19), concluímos que

$$f(x_m, y_m) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (24)$$

□

A função $E(a, b)$ satisfaz as condições dadas pelo Teorema 3 se $n \geq 2$ e se pelo menos um dos x_i for diferente dos demais x_j , pois nesse caso conseguimos garantir que ambos a_1 e a_2 são positivos:

$$a_1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \quad \text{e} \quad a_2 = n > 0.$$

A desigualdade $a_1 a_2 - (a_3/2)^2 > 0$ pode ser verificada por indução. Com efeito, provaremos inicialmente a seguinte igualdade:

$$a_1 a_2 - (a_3/2)^2 = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)^2. \quad (25)$$

Para $n = 2$ temos que

$$a_1 a_2 - (a_3/2)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2. \quad (26)$$

Agora, supondo verdadeira a seguinte hipótese de indução

$$n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)^2, \quad (27)$$

então,

$$\begin{aligned} (n+1) \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^2 &= (n+1) \sum_{i=1}^n x_i^2 + (n+1)x_{n+1}^2 - \left(x_{n+1} + \sum_{i=1}^n x_i \right)^2, \\ &= \sum_{i=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)^2 + nx_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2x_{n+1} \sum_{i=1}^n x_i, \\ &= \sum_{i=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)^2 + \sum_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i)^2, \\ &= \sum_{i=1, j \neq i}^{n+1} (x_i - x_j)^2. \end{aligned} \quad (28)$$

ou seja,

$$a_1 a_2 - (a_3/2)^2 = \sum_{i=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)^2, \quad n \geq 2, \quad (29)$$

e como por hipótese pelo menos um x_i é diferente de algum dos demais x_j , temos que $a_1 a_2 - (a_3/2)^2 > 0$. Concluímos, com isso, a prova do seguinte

Teorema 4. *Considere o conjunto $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$, dado de tal forma que exista um $x_i \neq x_j$, em que $i, j \in \{1, \dots, n\}$, e com $2 \leq n \in \mathbb{N}$. A função $E(a, b)$, definida pela equação (3) sobre os pontos do conjunto A , possui mínimo global.*

Observação 4. Observamos que para $n = 1$, a condição $a_1 a_2 - (a_3/2)^2 > 0$ não é satisfeita, visto que nesse caso teríamos $a_1 a_2 - (a_3/2)^2 = x_1^2 - x_1^2 = 0$, conforme equação (25).

Observação 5. É possível concluirmos que $a_1 a_2 - (a_3/2)^2 \geq 0$ pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (LIMA, 2008, p20), conforme equação (25).

4. Considerações Finais

Desenvolvemos o método de mínimos quadrados lineares utilizando os temas abordados no ensino médio: funções quadráticas e desigualdades. A presente estratégia constitui uma aplicação valiosa que pode ser inserida no contexto de problemas de otimização em nível de ensino médio, sobretudo quando desenvolvida na forma de projetos de ensino e iniciação científica em classes de cursos técnicos de tecnologia integrados ao ensino médio.

Em termos práticos, tendo em vista o contexto do ensino médio, poder-se-ia abordar apenas a determinação do ponto de mínimo a partir da hipótese de existência desse mínimo (primeira subseção junto à seção Desenvolvimento), visto que a construção da condição suficiente para existência de mínimo (segunda subseção da mesma seção) possui maiores detalhes em sua teoria.

A construção de um pseudocódigo que computa os parâmetros do modelo, coeficientes a e b da reta de equação (1), constitui uma primeira aplicação que se poderia considerar, sobretudo em cursos técnicos que adotam alguma linguagem de programação em seus currículos. Um segundo tema a ser considerado é aquele que se preocupa com o crescimento populacional. Para a aplicação, é possível obter os dados relativos ao censo demográfico brasileiro através de consulta junto à página do Ibge [4]. Com as devidas adaptações¹, um modelo exponencial $y = ae^{bx}$ pode ser analogamente desenvolvido a fim de se obter uma função útil para se realizar previsões da população brasileira. Um terceiro tema que pode ser abordado, da tecnologia de *hardware*, é aquele associado ao conceito de latência² CAS (*Column Address Strobe*). As variáveis latência CAS e velocidade possuem um padrão linear que pode ser estudado via mínimos quadrados (os dados necessários para o estudo, bem como maiores informações, estão disponíveis em [3]).

Agradecimentos

Agradecimentos ao professor Ricardo David de Moraes da Silva pelas discussões e contribuições, bem como aos estudantes Matheus Eduardo dos Santos e Keslene Lima que trabalharam com o tema em suas iniciações científicas.

¹Na equação (2), no lugar de se obter $E(a, b)$ calculando-se o erro entre y e \hat{y} , obtenha-o calculando o logaritmo natural $\ln y$ e $\ln \hat{y}$ dos mesmos. Isso tornará o desenvolvimento idêntico ao presente. Para mais detalhes consultar Burden e Faires (2008, p465).

²Refere-se ao intervalo de tempo, medido pelo número de ciclos de clock, em que um comando é inserido e executado [3].

Referências

- [1] Burden, R. L.; Faires, J. D. *Análise Numérica*. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- [2] Chavante, E.; Prestes, D. *Quadrante Matemática, 1º Ano: Ensino Médio*. São Paulo: Edições SM, 2016.
- [3] MICRON TECHNOLOGY. *Speed vs. Latency: Why CAS latency isn't an accurate measure of memory performance*. Disponível em: <https://www.crucial.com/usa/en/memory-performance-speed-latency>. Acesso em: 05 setembro 2018.
- [4] Ibge- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 31 maio 2019.
- [5] Iezzi, G., Murakami, C. *Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos, Funções*. São Paulo: Atual Ed., 1977.
- [6] Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R.; Almeida, N. *Matemática: Ciência e Aplicações, Volume 1: Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva, 2013.
- [7] Lima, E. L. *Análise Real Volume 1. Funções de Uma Variável Real*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [8] Paiva, M. *Matemática: Paiva*. São Paulo: Moderna, 2015.
- [9] Souza, J. R.; Garcia, J. S. R. *#Contato Matemática, 1º Ano*. São Paulo: FTD, 2016.

Adriano R. de Melo
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia Catarinense
Araquari/SC
<adriano.melo@ifc.edu.br>

Recebido: 23/04/2019
Publicado: 02/07/2019

Matemática aplicada ao estudo da área ocupada pelo crescimento de micro-organismos como ferramenta para o ensino da função exponencial

Elizangela K. S. Goldoni

Resumo

O estudo de funções no Ensino Médio, praticado sob a perspectiva apenas da matemática teórica, pode-se constituir em obstáculo de difícil transposição no que diz respeito à compreensão de seus conceitos e aplicações. No processo de ensino e aprendizagem dos fundamentos da função exponencial, objeto de estudo deste artigo, tem-se constatado, por meio de avaliações e relatos de alunos, que o tratamento apenas teórico da expressão algébrica associada a essa função pode limitar o desenvolvimento do seu aprendizado. Este artigo, oriundo de uma experiência realizada em sala de aula com alunos da 1ª série do Ensino Médio, sugere uma atividade de pesquisa desenvolvida em laboratório, visando compreender e modelar matematicamente o crescimento de micro-organismos coletados da saliva dos alunos e depositados em placas de Petri que foram observadas durante dez dias com a finalidade de medir o crescimento da colônia. Após esse período, foi realizada a análise dos dados aferidos e com o apoio dos programas Excel e GeoGebra, feita a modelagem matemática que se provou fundamentar nos conceitos da função exponencial apresentando suas características, o que proporcionou um aprendizado mais significativo para os alunos envolvidos no experimento. Destaca-se então, o uso do ambiente laboratorial para a construção desse conhecimento, possibilitando ao aluno superar suas limitações e refletir sobre a aplicabilidade dos conceitos aprendidos.

Palavras-chave: Matemática aplicada; Laboratório; Função Exponencial; Modelagem matemática.

Abstract

The study of functions in High School, practiced from the perspective of only theoretical mathematics, can constitute an obstacle of difficult transposition with respect to the understanding of its concepts and applications. In the process of teaching and learning the fundamentals of the exponential function, object of study of this article, it has been verified, through student evaluations and reports, that the treatment purely theoretical of the algebraic expression associated with this function can limit the development of its learning. This article, from a classroom experience with students of the 1st grade of High School, suggests a research activity developed in laboratory, seeking to understand and mathematically model the growth of microorganisms collected from students' saliva and deposited on petri dishes that were observed during ten days with the purpose of measuring the growth of the colony. After this period, the data analyzed were analyzed and with the support of the Excel and GeoGebra programs, made the mathematical modeling that

proved to be based on the concepts of the exponential function presenting its characteristics, which provided a more meaningful learning for the students involved in the experiment. We highlight the use of the laboratory environment to build this knowledge, enabling the student to overcome their limitations and reflect on the applicability of the concepts learned.

Keywords: Applied mathematics; Laboratory; Exponential Function; Mathematical modeling.

1. Introdução

A abordagem de conteúdos de forma mecanizada e com pouco aprofundamento pode levar o aluno a desenvolver de forma superficial e apenas com ideia de correspondência o domínio de técnicas, fórmulas e procedimentos de manipulações simbólicas e numéricas. Desta forma, inibe-se o desenvolvimento do pensamento complexo, que possibilita a busca e a análise de diferentes tipos de relações, representações e argumentações que podem ser estabelecidas dentro do estudo e aplicação de um conteúdo.

Segundo Maria Salett Biembengut¹, não se pode negar que boa parte dos professores procura meios eficazes para que seus alunos aprendam. Porém, a estrutura educacional com currículo fragmentado em várias disciplinas, cada uma sob a responsabilidade de um professor que deverá cumprir seu programa em horário e período determinado, dificulta a abordagem mais abrangente e interdisciplinar de cada conteúdo, não contribuindo para que os estudantes percebam a realidade e se interessem pelas questões do meio.

Após pesquisar e analisar várias metodologias utilizadas na área acadêmica, tais como aprendizagem baseada em problemas (PBL), baseada em projetos, aprendizagem entre times (TBL), sala de aula invertida, entre outras, vislumbrou-se as ideias que partem do pressuposto de que na prática aprende-se melhor, propondo metodologias ativas² tais como o “faça você mesmo”, o “movimento maker”, o “mão na massa”. Mas como trazer esse conceito e essas metodologias para as aulas de matemática?

Biembengut, ressalta que a Matemática, enquanto alicerce de quase todas as áreas do conhecimento permite desenvolver os níveis cognitivo e criativo, e defende sua utilização como meio para ajudar o aluno a desenvolver a habilidade de criar, resolver problemas e modelar. Dessa forma, o uso dos ambientes laboratoriais unido à aprendizagem baseada na modelagem matemática, por exemplo, pode permitir essa abordagem mais ativa dentro da sala de aula. Nesses ambientes, pode-se explorar diversos conceitos investigando a relação de dependência entre situações do cotidiano, possibilitando ao aluno aplicar os conteúdos estudados, fazendo as devidas conexões algébricas, o que o levará ao aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o processo de ensino-aprendizagem.

Partindo desse pressuposto iniciou-se uma pesquisa sobre a possibilidade de aplicar a modelagem matemática no estudo de Funções Exponenciais, conteúdo trabalhado na 1ª série do Ensino Médio. Foi então constatado que era possível aplicar os fundamentos dessa função e modelar matematicamente diversas situações, tais como: decaimento radioativo e o método do carbono-14, crescimento populacional, magnitude aparente estelar, estudo da pressão atmosférica, estudo do crescimento de

¹BIEMBENGUT, Maria Salett ; HEIN, Nelson *Modelagem matemática no ensino médio*. Contexto. 5 ed, São Paulo, 2018.

²HOHENWARTER, Markus, HOHENWARTER, Judith. Trad. Antonio Ribeiro. *Ajuda GeoGebra - manual Oficial da Versão 3.2*. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 05 de maio de 2018.

colônias de micro-organismos, entre outros. No caso desse último, se coletarmos um fungo e observarmos o crescimento da sua colônia, é possível coletar dados e estudar as variações identificando a função que relaciona as grandezas aferidas. Dessa forma têm-se dados suficientes para modelar matematicamente o crescimento da colônia, possibilitando o estudo da expressão algébrica e os gráficos associados a ela, trazendo ao aluno a oportunidade de um estudo aprofundado e aplicado das relações resultantes.

Em vista disso, este artigo apresenta uma atividade, desenvolvida em laboratório, cujo objetivo é auxiliar o professor de Matemática do ensino médio no tratamento do conceito da função exponencial, baseado na perspectiva de mostrar ao aluno como modelar matematicamente situações do seu cotidiano, propondo a construção do conhecimento através de atividades que visam explorar ideias intuitivas de variação e dependência entre os objetos estudados. O experimento a seguir apresenta condições para que o professor possa trabalhar todos os conceitos relacionados ao estudo da função exponencial.

2. Conceitos introdutórios

Entende-se por função, toda relação de dependência entre duas variáveis. A função denominada como exponencial tem como principal característica o aparecimento da variável x no expoente. E assim como toda função, a exponencial também obedece a uma lei de formação.

Observe a notação: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$.

Sua representação gráfica pode ser definida através de duas situações. Veja os exemplos abaixo.

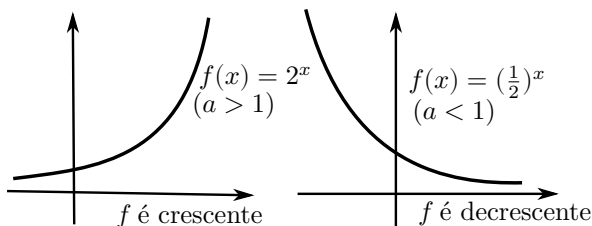


Figura 1: Exemplo de gráfico de funções exponenciais crescentes e decrescentes. (BIZELLI, 2018)

As funções exponenciais possuem diversas aplicações no cotidiano, em especial na Ciência e na indústria. São geralmente utilizadas para representar o crescimento ou decréscimo de dados analisados, expressando situações onde ocorrem grandes variações em curtos períodos, tais como representação de rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, no decaimento radioativo de substâncias químicas, desenvolvimento de bactérias, fungos e micro-organismos, crescimento populacional, entre outras situações, o que faz acreditar que a melhor forma de estudá-la é através de laboratórios.

2.1. O crescimento de micro-organismos

Micro-organismos são uma forma de vida que não pode ser visualizada sem auxílio de um microscópio. Tais seres diminutos podem ser encontrados no ar, no solo, e, inclusive, no homem, tais como

bactérias, fungos, vírus e parasitas. Seu crescimento dá-se por meio de colônias que se tornam visíveis a olho nu. Algumas vezes, os cientistas criam suas próprias colônias para estudar um tipo particular de micro-organismo usando um meio de cultura. Algumas colônias crescem em padrões ondulados, a depender da disponibilidade de nutrientes disponível no seu meio de cultura.

Em geral, pode-se observar quatro fases de crescimento: a primeira fase, de latência (Lag), dá-se quando o micro-organismo está se adaptando ao meio de cultura; a segunda fase, é a fase exponencial (Log), na qual o micro-organismo já está adaptado ao ambiente em que está exposto e dirige todo o seu metabolismo para a reprodução; a terceira fase, é a chamada estacionária, na qual os nutrientes já começam a ficar escassos e a taxa de reprodução é equivalente à taxa de mortes; e por fim a quarta e última fase, chamada fase de declínio, na qual a quantidade de micro-organismos que morrem torna-se progressivamente superior àquela dos que surgem.

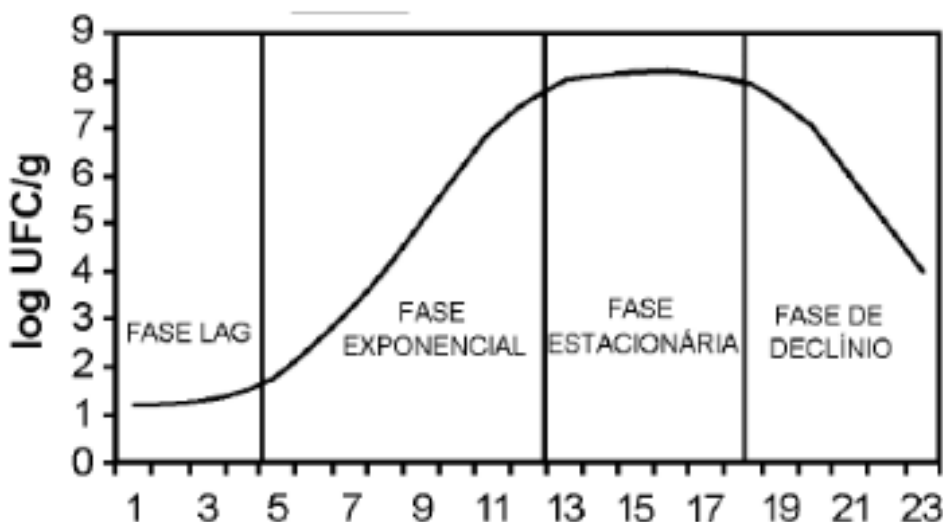


Figura 2: Exemplo de curva de crescimento típica de micro-organismos.(ROBAZZA, 2010)

3. Procedimento e Análise

A maioria dos livros didáticos, tais como *Matemática: ensino médio* de Vanderlei Nemitz, *360°-matemática fundamental* de José Ruy Giovanni, entre outros, apresenta esse conteúdo de forma exclusivamente teórica, apenas citando algumas de suas aplicações. Inicialmente revisam as regras de potenciação e logo em seguida apresentam os conceitos e propriedades da função exponencial, concluindo com uma bateria de exercícios que exigem do aluno a associação entre os conceitos apresentados e suas aplicações. Mas como ajudar esse aluno a fazer tal conexão, se tudo fora visto apenas teoricamente até então?

Desse modo e em síntese, sugere-se a intervenção laboratorial, propondo o estudo do crescimento de uma colônia de micro-organismos, visando levar o aluno a refletir sobre a conexão entre os

conteúdos que serão apresentados ao longo desse laboratório e sua aplicação prática, a fim de modelar matematicamente o experimento realizado. Foi proposta, então, atividade de laboratório investigativa, entendida aqui como aquela que apresenta condições de estudo prático e manipulação do objeto estudado.

O objetivo da atividade foi apresentar uma situação problema, que aparece com muita frequência em atividades teóricas propostas nos livros didáticos, de tal forma que os estudantes obtivessem uma gama razoável de elementos para análise, a fim de observar os resultados e desenvolver estratégias de generalizações, possibilitando ao final da pesquisa o desenvolvimento de modelos matemáticos que representassem o estudo realizado. Para desenvolver o trabalho, os alunos foram divididos em pequenas equipes (no máximo quatro integrantes), dispuseram do laboratório de química e de informática, além de outros recursos como *tablets* e calculadoras, além do *software* GeoGebra. Na sequência, será apresentado o passo a passo do experimento, que foi dividido em algumas fases, bem como a análise de um recorte da atividade realizada pelos alunos da 1ª série do Ensino Médio do Colégio FAAT, situado na cidade de Atibaia, estado de São Paulo.

1ª fase: A primeira atividade foi diagnosticar quais conceitos básicos, necessários para a análise do experimento deveriam ser retomados com os alunos. Para tanto foi utilizada uma avaliação diagnóstica contendo questões que abordassem as regras da potenciação e conceitos geométricos sobre área e comprimento de circunferência, visto que seriam importantes para coleta e análise dos dados. Após a realização da avaliação, foi divulgado o resultado de cada questão e feita a discussão das mesmas, retomando assim os conceitos necessários. A maior dificuldade apresentada pelos alunos foi sobre as regras para se trabalhar com expoente fracionário e/ou negativo e em especial para análise inversa das propriedades da potência

2ª fase: A intervenção de um professor de Biologia, é interessante nesta fase, visto que além de ser necessário obter algum conhecimento básico sobre microrganismos e meio de cultura, também é uma excelente oportunidade para o trabalho interdisciplinar. Aqui foi então definido quais seriam os procedimentos para a realização da coleta dos micro-organismos e preparação do meio de cultura. A partir do estudo realizado juntamente com o professor de Biologia, considerou-se que o meio de cultura semissólido seria o mais propício para a realização do experimento, e a coleta deveria ser feita através da saliva.

3ª fase: Nesta fase iniciou-se o procedimento laboratorial. As etapas destacadas a seguir foram realizadas por cada equipe, composta por no máximo quatro alunos.

3.1. Etapa 1 - Preparando o meio de cultura

Cada equipe recebeu um cotonete que deveria ser esfregado na bochecha de um dos membros até ficar bem úmido e depois passado levemente na superfície da gelatina, infectando assim o meio de cultura preparado.

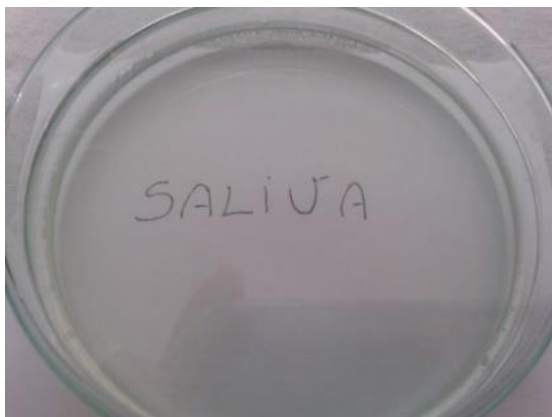


Figura 3: infectando o meio de cultura.(Própria autoria)

Para preparar o meio de cultura foi utilizado um pacotinho de gelatina sem sabor e incolor, meio litro de água fervente, duas colheres de açúcar e duas placas de Petri , devidamente esterilizadas. A gelatina e o açúcar foram dissolvidos em água fervida, obtendo-se um líquido homogêneo. A mistura foi despejada em uma das placas e leveda à geladeira até endurecer. A placa preparada irá receber os micro-organismos que serão coletados da saliva dos alunos através de um cotonete.

3.2. Etapa 2 - Colhendo os micro-organismos

Cada equipe recebeu um cotonete que deveria ser esfregado na bochecha de um dos membros até ficar bem úmido e depois passado levemente na superfície da gelatina, infectando assim o meio de cultura preparado.



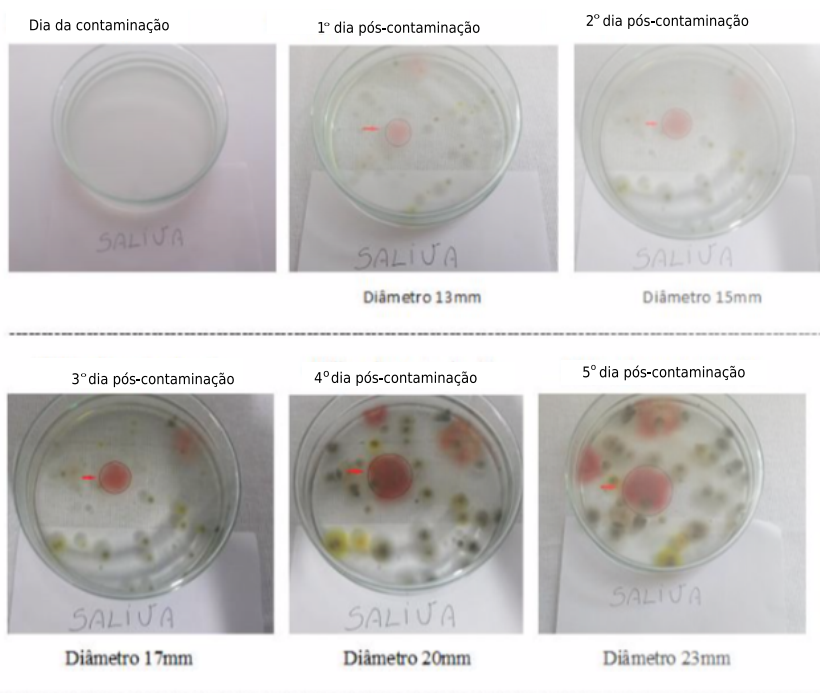
Figura 4: Infectando o meio de cultura.(Própria autoria)

Após a coleta dos micro-organismos lacrou-se a placa utilizando fita adesiva transparente e a deixou em local com pouca luz.

Cada equipe ficou responsável por coletar os dados seguindo as orientações do relatório disponibilizado no Anexo 1, deste artigo. As placas ficaram guardadas no laboratório de química do Colégio e no fim de semana um aluno da equipe ficou responsável por levá-las para casa e dar continuidade à coleta de dados.

3.3. Etapa 3 - Aferindo as medidas

Ao longo de 10 dias cada equipe deveria medir o diâmetro da circunferência da colônia, visto que esta cresce circularmente. Abaixo pode-se observar as fotos e dados coletados por uma das equipes. Faz-se necessário ressaltar que várias colônias cresceram no meio preparado e que foi escolhida apenas uma para estudo.



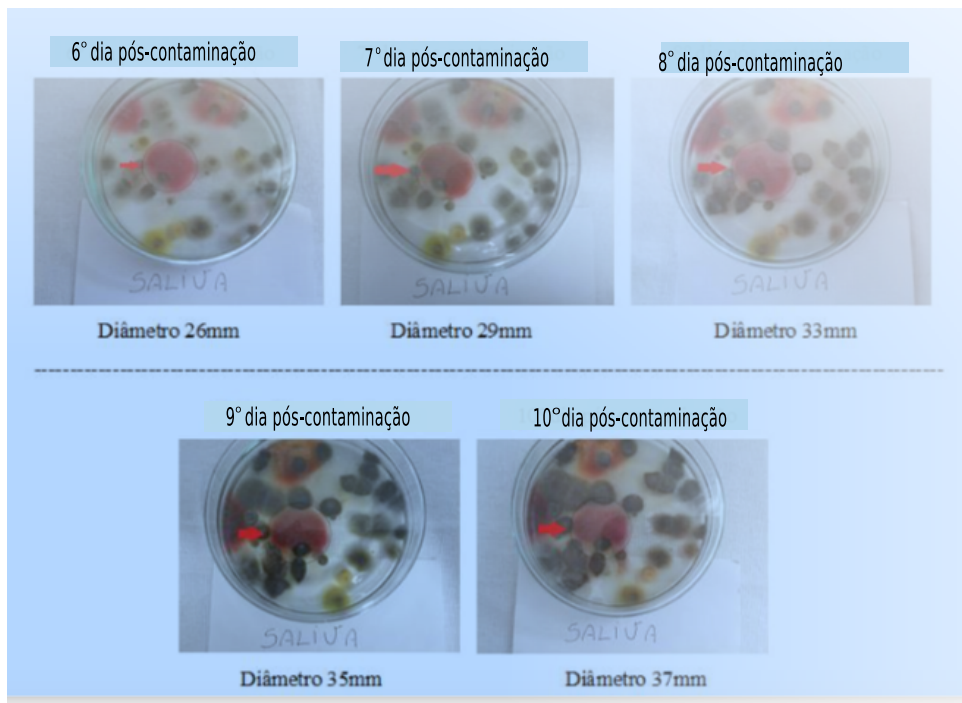


Figura 5: crescimento diário de uma colônia de micro-organismos, registrado por um dos grupos envolvidos no experimento.(Própria autoria)

Após observação do crescimento da colônia e coleta dos dados solicitados no experimento, em sala de aula, as equipes realizaram os cálculos necessários para preencher a tabela disponibilizada no relatório e discutiram os resultados. Cada equipe modelou, manualmente, a função que confirmava o crescimento exponencial da colônia observada, iniciando a próxima etapa do experimento.

3.4. Etapa 4 - Modelagem matemática do experimento

Ao observar o crescimento da colônia ao longo de 10 dias foi possível, através da aferição do seu diâmetro, calcular a área de contaminação. Foi considerada aproximação de duas casas decimais.

	A	B	C	D	E
1	Dia (n°) – pós contaminação	Contaminação (diâmetro - mm)	Contaminação (diâmetro - cm)	Contaminação (raio/cm)	Área de contaminação (cm²) ($A_c = \pi r^2$)
2					
3	Dia da contaminação	Fase 1 de crescimento (adaptação ao meio de cultura)			
4	1° dia – T ₂	13	1,30	0,65	1,33
5	2° dia – T ₃	15	1,50	0,75	1,77
6	3° dia – T ₄	17	1,70	0,85	2,27
7	4° dia – T ₅	20	2,00	1,00	3,14
8	5° dia – T ₆	23	2,30	1,15	4,15
9	6° dia – T ₇	26	2,60	1,30	5,31
10	7° dia – T ₈	29	2,90	1,45	6,6
11	8° dia – T ₉	33	3,30	1,65	8,55
12	9° dia – T ₁₀	35	3,50	1,75	9,62
13	10° dia – T ₁₁	37	3,70	1,85	10,75
14	11° dia – T ₁₂	Iniciou-se a fase estacionária			

Figura 6: Dados coletados referentes ao crescimento de uma das colônias estudadas. (Própria autoria)

Com os valores referentes em mãos foi feita a representação gráfica da área contaminada em função do tempo, dado em dias. Os pontos (pares ordenados) foram marcados no plano cartesiano determinando como domínio (x) os dias e como imagem (y) a área de contaminação. Ao unir esses pontos observou-se que o gráfico era semelhante ao gráfico de uma função exponencial.

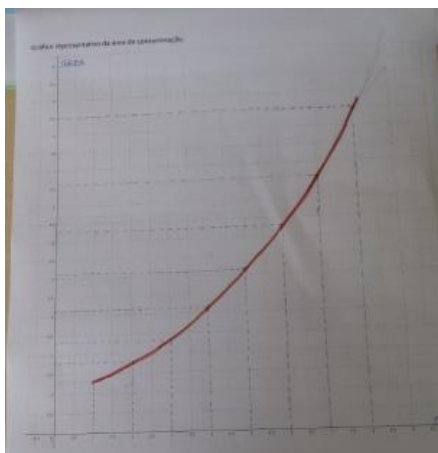


Figura 7: Gráfico construído manualmente por uma das equipes de pesquisa. (Própria autoria)

Após construção do gráfico, os alunos substituíram os valores encontrados, na lei geral da função exponencial, $f(x) = a^x$, a fim de determinar o algoritmo que define a curva de crescimento dos micro-organismos estudados. Abaixo observe a modelagem realizada por uma das equipes.

Foram realizadas um total de 10 medições, sendo considerado:

- Fase de adaptação ao meio: dia da contaminação tempo inicial - T1;
- Início da fase exponencial: primeiro dia após contaminação - T2;
- Final da fase exponencial: décimo primeiro dia após contaminação - T11;
- Fase estacionária: após o 11º dia observou-se que a colônia não crescia mais.

Cálculo para determinar a função			
$f(x) = a^x$			
	x	f(x)	a
Dia da contaminação	***	***	***
Análise 2º dia	2	1,33	1,1532563
Análise 3º dia	3	1,77	1,2096445
Análise 4º dia	4	2,27	1,2274575
Análise 5º dia	5	3,14	1,2571466
Análise 6º dia	6	4,15	1,2676753
Análise 7º dia	7	5,31	1,2693604
Análise 8º dia	8	6,74	1,2693532
Análise 9º dia	9	8,55	1,2692635
Análise 10º dia	10	10,37	1,2635076
Análise 11º dia	11	11,94	1,2528800
		Moda	1,27

Figura 8: Dados analisados no Excel para determinação do coeficiente “a”.(Própria autoria)

Considerando então o valor da moda encontrada nos dados calculados para o coeficiente “a” obteve-se a função exponencial que determinava o crescimento da colônia de micro-organismos em estudo. No exemplo utilizado acima, oriundo do experimento de uma das equipes, observou-se um crescimento exponencial determinado pela função $f(x) = 1,27^x$. Cada equipe encontrou uma função exponencial diferente, o que determina que a área ocupada por colônias de diferentes micro-organismos dá-se em ritmo diferente para cada uma delas.

Com a lei calculada, chegou o momento de validar os resultados obtidos. Os alunos foram motivados a fazer a análise inicialmente no Excel, a fim de determinar a equação do gráfico obtido.

A equipe em destaque neste artigo ao construir o gráfico de dispersão no Excel, obteve a equação dos dados fornecidos, $y = e^{0.239x}$, o que confirmou a função encontrada nos cálculos manuais, $f(x) = 1,27^x$, visto que o coeficiente “e” na equação encontrada através do *software* corresponde ao número de Euler, que vale aproximadamente 2,7. Elevando esse número a $0,239x$, onde x é determinado pelo dia da contaminação, chega-se a resultados que determinam os valores correspondentes às áreas encontradas para cada dia.

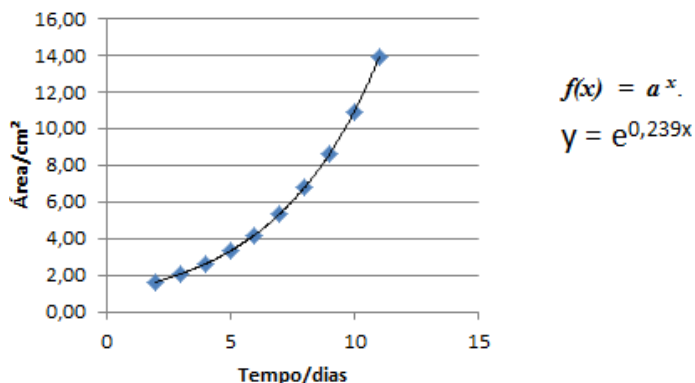


Figura 9: Gráfico do crescimento exponencial da colônia construído no Excel.(Própria autoria)

Após essa análise cada equipe, com o auxílio de *tablets*, pôde modelar matematicamente, utilizando o programa GeoGebra, a função exponencial encontrada, a fim de observar o comportamento do gráfico da mesma. Aqui vale destacar que tal *software* associa ferramentas algébricas e geométricas, o que possibilita, em um mesmo ambiente, construir figuras e expressões dinâmicas que representam relações comuns, permitindo sua investigação. Assim, o GeoGebra possibilita representar as diferentes facetas do objeto estudado e suas interações, oferecendo, portanto, possibilidades para a exploração do conteúdo apresentado pelo professor em sala de aula.

Foram, então, inseridos nesse programa os dados coletados e estudados inicialmente, obtendo-se assim o gráfico que, ao ser comparado com o gráfico construído manualmente, provou-se a exatidão da modelagem, comprovando assim o crescimento exponencial da área ocupada pela colônia observada.

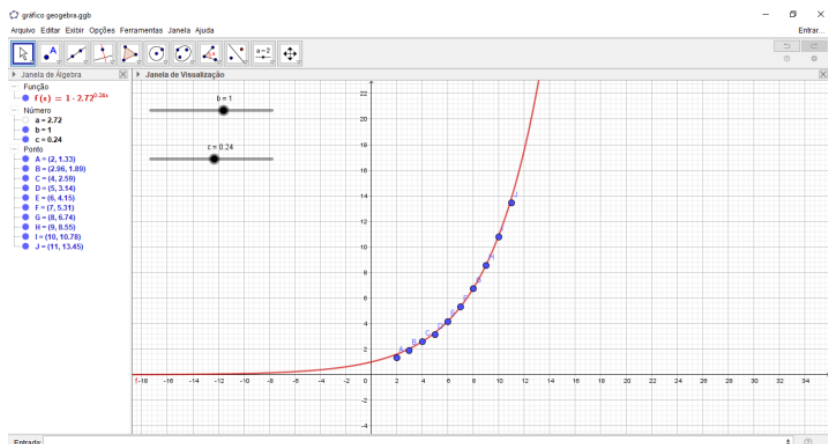


Figura 10: Gráfico do crescimento exponencial da colônia construído no GeoGebra. (Própria autoria)

Logo os resultados obtidos pela modelagem matemática determinada no experimento indicam que o modelo empregado consegue reproduzir a área ocupada pelo crescimento do micro-organismo estudado.

Durante todas as etapas para realização do experimento e da modelagem matemática associada a ele, destaca-se ressaltar que as discussões em torno da construção dos conceitos e fundamentos sobre função exponencial com a turma deram-se de forma construtiva e possibilitaram que o aluno fosse protagonista e capaz de desenvolver um discurso com embasamento muito mais consistente.

4. Considerações Finais

O artigo aqui apresentado propõe uma metodologia diferenciada para se trabalhar a Matemática em sala de aula. O uso de laboratórios resulta em aulas dinâmicas e mais apreciáveis, podendo então se tornar um método mais eficaz quando se trata de um aprendizado significativo. O experimento proposto aqui traz a possibilidade de se trabalhar a função exponencial de forma mais envolvente, proporcionando um aprendizado mais significativo para os alunos envolvidos, fato esse observado através da mudança de postura dos mesmos e dos resultados nas avaliações teóricas. Destaca-se, então, o uso do ambiente laboratorial para a construção desse conhecimento, possibilitando ao aluno superar suas limitações e refletir sobre a aplicabilidade dos conceitos aprendidos, tornando-os mais significativos.

Referências

[1] BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino médio*. Contexto. 5 ed, São Paulo, 2018.

- [2] BIZELLI, Maria Helena S. S. *Conteúdos didáticos digitais para o ensino e aprendizagem de Cálculo*. Disponível em: <<http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/funcao-graficos-exponencial.html>>. Acesso em: 10 de janeiro de 2018.
- [3] GARAFALO, Débora. “*Como as metodologias ativas favorecem o aprendizado*”. Revista *Nova escola*, 25 jun 2018. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/11897/como-as-metodologias-ativas-favorecem-o-aprendizado>>. Acesso em: 30 jun 2018.
- [4] HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. Trad. Antonio Ribeiro. *Ajuda GeoGebra - manual Oficial da Versão 3.2*. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 05 de maio de 2018.
- [5] ROBAZZA, W.S.; TELEKEN, J.T.; GOMES, G.A. *Modelagem Matemática do Crescimento de Microrganismos em Alimentos*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. Vol. 11, nº. 1, p.101-110. 2010. Disponível em: <<https://tema.sbmacc.org.br/tema/article/viewFile/117/61>>. Acesso em: 13 de maio de 2018.

Elizangela K. S. Goldoni
Colégio FAAT de Atibaia
<elizangela.goldoni@hotmail.com>

Recebido: 25/09/2018
Publicado: 01/07/2019

O problema do mapeamento no plano

Josimar da Silva Rocha

Rogério César dos Santos

Hudson Rodrigues Armando

Resumo

O objetivo deste artigo é mostrar uma forma de se fazer mapeamento do plano, no sentido de que, se conhecemos as distâncias duas a duas entre quatro pontos do plano, é possível determinarmos as coordenadas de tais pontos. O estudo do problema aqui apresentado pode servir de atividade lúdica que aplica e contextualiza resultados básicos da Geometria Euclidiana e da Geometria Analítica.

Palavras-chave: Mapeamento; Distância; Teorema de Pitágoras.

Abstract

The aim of this paper is to show a way to map the plane, in the sense that if we know the distances two by two between four points of the plane, we can determinate the coordinates of such points. The study of the problem presented here can serve as a playful activity that applies and contextualizes basic results of Euclidean Geometry and Analytical Geometry.

Keywords: Mapping; Distance; Pythagorean theorem.

1. Introdução

O artigo apresentado traz um interessante problema que mostra uma aplicação prática do estudo das coordenadas no plano cartesiano. O emprego das coordenadas no plano tem uma dupla finalidade, como apontada em [2]: a primeira é atribuir um significado geométrico (e com isso dar um maior conteúdo intuitivo) a fatos de natureza numérica. A segunda finalidade vai no sentido oposto ao da primeira: recorre-se a coordenadas a fim de resolver problemas de Geometria.

As ferramentas teóricas utilizadas não vão além das que são empregadas por professores do ensino médio ou técnico nas disciplinas de Geometria Plana e Analítica. Assim, o estudo do problema aqui proposto pode ser utilizado em salas de aula como um exemplo de aplicação dessas disciplinas.

2. O Problema

Para permitir uma visualização lúdica do problema, vamos considerar que os pontos que formam um plano sejam cidades numeradas de 1 até n , e seja $M = (d_{ij})$ a matriz que representa a distância entre as cidades, ou seja, para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, o elemento de matriz d_{ij} corresponderá à

distância euclidiana entre as cidades i e j , de tal forma que suas distâncias satisfazem a desigualdade triangular estrita:

$$\begin{cases} d_{ij} < d_{jk} + d_{ik} \\ d_{jk} < d_{ij} + d_{ik} \\ d_{ik} < d_{ij} + d_{jk}. \end{cases} \quad (1)$$

Sem perda de generalidade, podemos fixar a cidade i na origem do plano cartesiano, ou seja, no ponto $P_i = (0,0)$. A cidade j será fixada em $P_j = (0, d_{ij})$ e a cidade k em $P_k = (x_k, y_k)$. Representaremos a distância entre as cidades i e k como $d_{ik} = d(P_i, P_k)$ e, de forma análoga, a distância entre as cidades j e k será escrita como $d_{jk} = d(P_j, P_k)$. Note que, para calcular a distância entre dois pontos num plano, não faremos mais do que simplesmente aplicar um dos mais importantes e úteis teoremas da Geometria Euclidiana Plana: O "Teorema de Pitágoras" [1].

Dessa forma, mostraremos que é possível obter a localização (ou seja, as coordenadas) de uma cidade t qualquer no plano cartesiano de forma biunívoca a partir das distâncias tomadas duas a duas entre os pontos P_i, P_j, P_k e P_t , como ilustrado na Figura 1

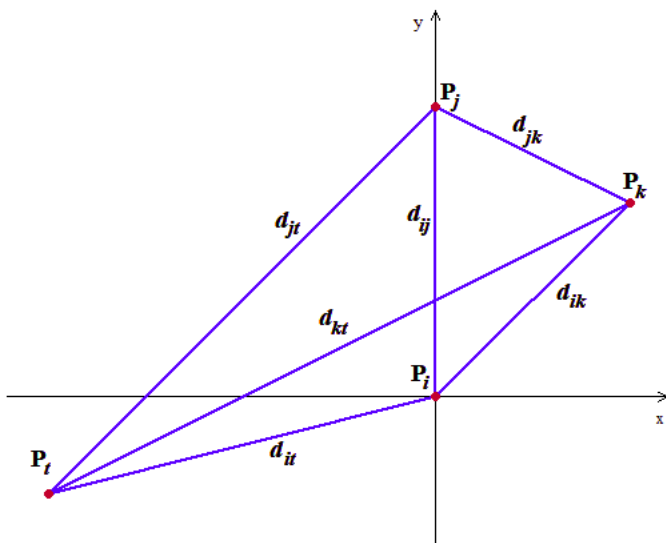


Figura 1: Cidades P_i, P_j, P_k e P_t

2.1. Um Resultado Intermediário

Como vimos, o objetivo deste artigo é provar que as coordenadas de uma cidade ficam determinadas dadas as distâncias duas a duas entre ela e mais três cidades distintas. Se, porém, a cidade da qual queremos descobrir as coordenadas possui abscissa positiva, bastam apenas mais duas cidades distintas. É o que provaremos nesta seção. Este caso particular será importante para a prova do caso geral que veremos na seção 3. Iremos provar agora que uma cidade P_k que tenha abscissa $x_k > 0$ fica unicamente determinada quando são dadas apenas as distâncias d_{ij} , d_{jk} e d_{ik} . Vejamos:

Observando a Figura (1), vemos as posições dos pontos $P_i = (0, 0)$, $P_j = (0, d_{ij})$ e $P_k = (x_k, y_k)$. Assim, temos:

$$d_{ik}^2 = d(P_i, P_k)^2 = x_k^2 + y_k^2 \quad (2)$$

e

$$d_{jk}^2 = x_k^2 + (d_{ij} - y_k)^2.$$

Desse modo,

$$d_{jk}^2 = d(P_j, P_k)^2 = x_k^2 + y_k^2 - 2y_k d_{ij} + d_{ij}^2. \quad (3)$$

Subtraindo a equação (2) de (3), obtemos

$$2y_k d_{ij} - d_{ij}^2 = d_{ik}^2 - d_{jk}^2. \quad (4)$$

O termo d_{ij} deve ser tal que $d_{ij} > 0$ (pois as cidades i e j são distintas). Dessa forma, podemos isolar a variável y_k da equação anterior e obter:

$$y_k = \frac{d_{ij}^2 + d_{ik}^2 - d_{jk}^2}{2d_{ij}}. \quad (5)$$

Assim, obtemos a coordenada y_k em função das distâncias d_{ij} , d_{jk} e d_{ik} . Para fazer o mesmo em relação à coordenada x_k , podemos recorrer à equação (2), dada por:

$$d_{ik}^2 = x_k^2 + y_k^2,$$

onde podemos isolar a coordenada x_k . Como ela é positiva por hipótese, podemos isolá-la assim:

$$x_k = \sqrt{d_{ik}^2 - y_k^2}. \quad (6)$$

Observe que poderíamos ter chegado aos mesmos resultados se o ponto P_j tivesse ordenada negativa. Isso mostra a possibilidade de se determinar univocamente $P_k = (x_k, y_k)$ dadas as distâncias duas a duas entre as cidades i, j e k , porém com a restrição $x_k > 0$, isto é, com a abscissa de P_k positiva.

3. A Prova do Resultado Principal

Agora sim vamos determinar as coordenadas de uma quarta cidade P_t qualquer, sem restrição de suas coordenadas, dadas as distâncias duas a duas entre i, j, k e t , onde estamos nas mesmas hipóteses do enunciado do problema inicial como mostra a Figura (1):

- $P_k = (x_k, y_k)$, onde $x_k > 0$
- $P_i = (0, 0)$ e $P_j = (0, d_{ij})$

Seja t uma cidade cujas coordenadas no plano cartesiano compõem o ponto $P_t = (x_t, y_t)$. Considerando a distância da cidade t com relação às cidades i, j e k , obtemos:

$$d(P_t, P_i)^2 = d_{it}^2 = x_t^2 + y_t^2, \quad (7)$$

$$d(P_t, P_j)^2 = (-x_t)^2 + (-y_t + d_{ij})^2,$$

$$d(P_t, P_j)^2 = d_{tj}^2 = x_t^2 + y_t^2 - 2y_t d_{ij} + d_{ij}^2. \quad (8)$$

Também temos

$$d(P_t, P_k)^2 = (x_k - x_t)^2 + (y_k - y_t)^2.$$

Assim,

$$d(P_t, P_k)^2 = d_{tk}^2 = x_t^2 - 2x_t x_k + x_k^2 + y_t^2 - 2y_t y_k + y_k^2. \quad (9)$$

Por (7) e (8),

$$y_t = \frac{d_{ij}^2 + d_{it}^2 - d_{tj}^2}{2d_{ij}}. \quad (10)$$

Ou seja, já temos a ordenada y de P_t . Para obtermos a abscissa de P_t , podemos rearranjar os termos da equação (9) para observar que:

$$d_{tk}^2 = \underbrace{x_t^2 + y_t^2}_{d_{it}^2} - 2x_t x_k - 2y_t y_k + \underbrace{x_k^2 + y_k^2}_{d_{jk}^2}.$$

Assim, das equações (2), (7) e (9), temos:

$$d_{tk}^2 = d_{it}^2 - 2(x_t x_k + y_t y_k) + d_{ik}^2. \quad (11)$$

Isolando o termo x_t na equação (11):

$$x_t = \frac{d_{it}^2 + d_{ik}^2 - d_{tk}^2 - 2y_t y_k}{2x_k}. \quad (12)$$

Na equação (12), x_k e y_k foram determinados pelo resultado preliminar provado anteriormente, e y_t é dado por (10), finalizando, portanto, a prova de que qualquer ponto P_t é determinado univocamente pelas distâncias duas a duas entre as quatro cidades i, j, k e t .

4. Considerações Finais

O resultado aqui demonstrado permite-nos, hipoteticamente, fazer um programa de computador a partir de três sensores que meçam a distância entre pontos para fazer o mapeamento de um ambiente. Como exemplo de aplicação, poderíamos citar a Agrimensura, que traz em si um conjunto de técnicas topográficas utilizadas para efetuar medidas de terras. Os sistemas de radares de trânsito ou outro qualquer tipo de rastreamento eletrônico constituem outros exemplos de aplicações para algoritmos semelhantes a esse.

Referências

- [1] Barbosa, J.L.M. *Geometria Plana Euclidiana*. SBM, 11^a Edição. Rio de Janeiro, 2012.
- [2] Lima, E.L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E.; Morgado, A.C. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 3*. SBM, 6^a Edição. Rio de Janeiro, 2006.

Josimar da Silva Rocha
UFTPR/CP
<jsrocha74@gmail.com>

Rogério César dos Santos
Universidade de Brasília - UnB
<rogerc@unb.br>

Hudson Rodrigues Armando
Universidade de Brasília - UnB
<hrodrigues1729@hotmail.com>

Recebido: 26/05/2019
Publicado: 16/08/2019

Uma abordagem para o estudo da função quadrática no conjunto dos números complexos

Roberto do Nascimento Batista

André Fabiano Steklain Lisbôa

Resumo

Este trabalho propõe o estudo da função quadrática complexa baseado em gráficos de duas e três dimensões, e, na sua analogia com o gráfico da função quadrática real, a parábola. Nesta abordagem são investigados os tipos de cônicas que surgem no caso da imagem de uma reta por esta função e ao se fazer a intersecção dos gráficos das partes real e imaginária com planos. Esta exploração pode enriquecer o estudo introdutório de funções complexas a nível de graduação.

Palavras-chave: números complexos; função quadrática; cônicas

Abstract

This paper proposes the study of the complex quadratic function based on two and three dimensional graphs and their analogy with the real quadratic graph, the parabola. In this approach we investigate the types of conics arising in the case of the image of a line by this function and considering the intersection of the real and imaginary parts graphics with planes. This exploration can enrich the introductory study of complex functions at undergraduate level.

Keywords: complex numbers; quadratic function; conics.

1. Introdução

As funções complexas em geral não são abordadas no Ensino Médio. Isso é justificável pelo nível de abstração exigido para o estudo de uma função cujo domínio e contradomínio não sejam subconjuntos dos números reais. No Ensino Superior é desejável que os estudantes possuam familiaridade com esses conceitos, mas a quantidade de tópicos a serem cobertos em curso típico limita a sua abordagem. A utilização de ferramentas computacionais pode auxiliar no sentido da visualização desses conceitos, abrindo caminho para uma compreensão mais ampla do estudante em estudos posteriores. A compreensão da função como uma transformação, em detrimento do gráfico, é particularmente impulsionada no estudo das funções complexas, já que não é possível visualizar um gráfico inserido em um espaço quadridimensional.

A escolha da função quadrática complexa deve-se principalmente a duas de suas características. A primeira é o fato de se tratar de uma função simples, podendo ser tratada a partir do momento em que o estudante é introduzido às operações (em particular, multiplicação) entre números complexos. A segunda é que a sua restrição ao caso real resulta em uma função familiar aos estudantes, a função quadrática real, amplamente estudada no Ensino Médio. Isso permite resgatar tais conceitos e estabelecer analogias entre os casos real e complexo.

Nesse conjunto de analogias entre o caso real e o caso complexo situa-se o estudo de cônicas. No caso real, o gráfico de uma função quadrática resume-se a uma parábola, mas o caso complexo possui uma estrutura mais rica, sendo possível obter hipérbolas. De fato, como o estudo apresentado não vai além da determinação da parte real e imaginária da função, com alguma adaptação tal abordagem pode também ser trabalhada durante o estudo de cônicas na Geometria Analítica.

O presente artigo irá fazer uma abordagem do estudo de funções quadráticas complexas por meio dos seus gráficos. Primeiramente apresentaremos um resumo dos conceitos trabalhados no tratamento da função quadrática real. Em seguida apresentaremos uma exploração da função quadrática complexa e das cônicas resultantes da restrição da imagem da função complexa. Por fim, apresentamos nossas conclusões a respeito deste trabalho.

2. A Função Quadrática Real e Cônicas

Durante o Ensino Médio o estudante é introduzido ao conceito de função quadrática, dada pela definição [2], [5]:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \quad . \quad (1)$$

Essa função toma um número real e retorna, como a imagem deste número, a multiplicação deste número por ele mesmo. Tomando o conjunto dos pontos $P = (x, y)$, sendo $y = f(x) = x^2$ temos que tais pontos compõem uma parábola de equação

$$y = x^2. \quad (2)$$

Esta curva pode ser visualizada por meio da representação desses pontos em um plano cartesiano, sendo mostrada na figura 1.

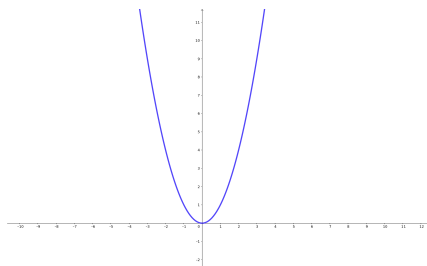


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = x^2$.

A função quadrática pode ser generalizada para uma função do segundo grau, fazendo, por exemplo, $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Independentemente do valor dessas constantes, no entanto, o gráfico ainda corresponderá a uma parábola [6]. Outros tipos de cônica, como hipérbolas e elipses, são obtidas por funções reais que não possuem nenhuma relação direta com a função quadrática.

3. A Função Quadrática Complexa e Cônicas

No caso das funções complexas a representação do gráfico não é trivial, devido a uma série de fatores. O principal a se considerar é o fato de o corpo dos números complexos não ser ordenável [7], o que impede de representar esses números em uma reta. De fato, os números complexos guardam relação com o \mathbb{R}^2 , sendo representados, portanto, em um plano, chamado plano complexo de Argand-Gauss [1]. O gráfico de uma função complexa teria, portanto, que ser inserido em uma estrutura de ao menos quatro dimensões. Uma função complexa pode ser visualizada utilizando-se dois planos de Argand-Gauss. No primeiro plano ficam representados os pontos do domínio da função e, no segundo, as imagens desses pontos. Em uma abordagem mais simplificada é possível utilizar o mesmo plano para representar os pontos do domínio e da imagem. Nesse caso é preciso identificar quais são os pontos do domínio e quais pertencem à imagem da função. Essa última representação será utilizada neste trabalho.

É interessante verificar o que ocorre quando conjuntos de pontos do domínio são transformados pela função quadrática complexa. Para simplificar a discussão vamos nos deter na função, em sua forma mais simples:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 \quad . \quad (3)$$

Quando restringimos a atuação de f à reta real, a imagem correspondente é a semirreta real positiva. A parábola é perdida pois ao invés de considerarmos pontos de coordenadas (t, t^2) , estamos fazendo a correspondência entre pontos do $(t, 0)$ eixo real com pontos $(t^2, 0)$ também pertencentes ao eixo real. De fato, é fácil verificar que, para qualquer reta passando pela origem do plano de Argand-Gauss a imagem correspondente será uma semirreta partindo da origem, conforme mostrado na figura 2.

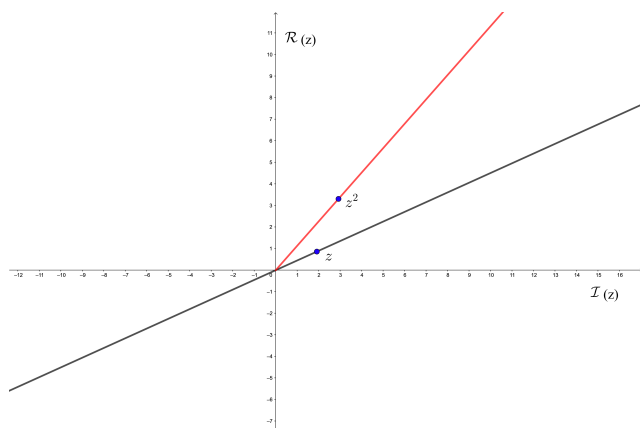


Figura 2: Imagem de uma reta (cor preta) passando pela origem pela função f no plano de Argand-Gauss. A imagem é uma semirreta passando pela origem (cor vermelha).

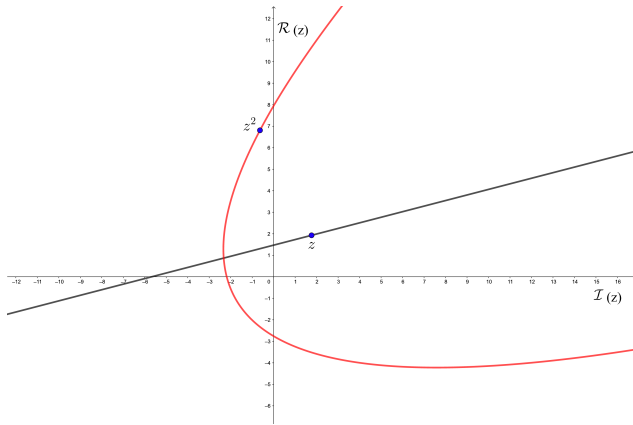


Figura 3: Imagem de uma reta (cor preta) que não passa pela origem pela função f no plano de Argand-Gauss. A imagem é uma parábola (cor vermelha).

A situação é diferente, no entanto, quando a reta não passa pela origem. Como pode ser visto na figura 3, a imagem dessa reta é uma curva bastante semelhante a uma parábola. Para demonstrarmos que de fato a curva é uma parábola, vamos tomar uma reta em \mathbb{C} que não passe pela origem parametrizada por $z(t) = z_0 + wt$, sendo $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = w_x + iw_y$ complexos não nulos e t real. Nesse caso é conveniente escrever $z(t) = x(t) + iy(t)$ obtendo, assim, as equações da parte real e imaginária:

$$x(t) = x_0 + w_x t, \quad (4)$$

$$y(t) = y_0 + w_y t. \quad (5)$$

A função complexa f pode ser representada por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, sendo as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a parte real e imaginária de f . Ao considerarmos a função $f(z(t)) = z(t)^2$ temos, para a parte real e imaginária dessa função

$$u(t) = u_0 + \alpha t + \beta t^2, \quad (6)$$

$$v(t) = v_0 + \gamma t + \delta t^2, \quad (7)$$

onde $u_0 = x_0^2 - y_0^2$, $v_0 = 2x_0y_0$, $\alpha = 2(x_0w_x - y_0w_y)$, $\beta = w_x^2 - w_y^2$, $\gamma = 2(x_0w_y + y_0w_x)$ e $\delta = 2w_xw_y$. Vamos considerar a mudança de variáveis dadas por

$$U = \delta(u - u_0) - \beta(v - v_0), \quad (8)$$

$$V = \gamma(u - u_0) - \alpha(v - v_0). \quad (9)$$

Neste novo sistema de coordenadas, fazendo $p = 1/(\gamma\beta - \alpha\delta)$, temos a seguinte relação entre U e V :

$$V = pU^2, \quad (10)$$

ou seja, nas novas coordenadas a curva gerada pela transformação da reta pela função quadrática é uma parábola. É fácil se convencer de que o mesmo ocorre nas coordenadas originais, utilizando

a Equação (10) e a equação geral da cônica. Note que, para que a parábola não seja degenerada devemos ter a condição $\gamma\beta - \alpha\delta = 2(w_x^2 + w_y^2)(x_0w_y - y_0w_x) \neq 0$. Como w é não nulo, temos que $|w|^2 = w_x^2 + w_y^2 > 0$. Logo, a condição para que a parábola seja não degenerada é dada por

$$x_0w_y - y_0w_x \neq 0. \tag{11}$$

Essa condição equivale a dizer que os números complexos z_0 e w e a origem do plano complexo não são colineares.

A demonstração acima exige o domínio de conceitos como a equação geral da cônica, normalmente trabalhados em Geometria Analítica, que faz parte dos estudos iniciais na maioria dos cursos superiores na área de exatas. No entanto, esse resultado pode ser facilmente explorado utilizando *softwares* tais como o *GeoGebra* [4], para mostrar como a função atua sobre os elementos do domínio. Esta abordagem serve, entre outras coisas, como mecanismo para expandir o conceito de função, normalmente apresentado em sala de aula através de exemplos envolvendo funções reais e o conceito de gráfico cartesiano.

Em uma abordagem mais avançada é possível trabalhar com os gráficos das partes real e imaginária da função f , a saber:

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \tag{12}$$

$$v(x, y) = 2xy. \tag{13}$$

Os gráficos dessas duas funções são superfícies em um espaço tridimensional, conforme as figuras 4 e 5.

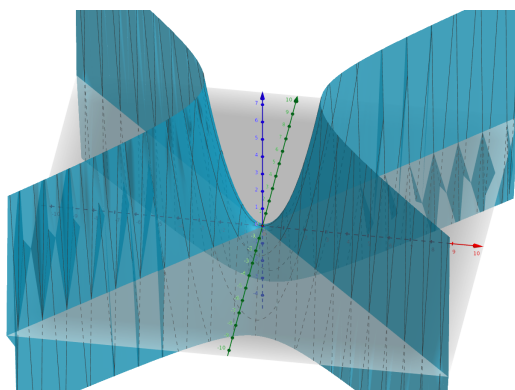


Figura 4: Parte real da função $f(z) = z^2$.

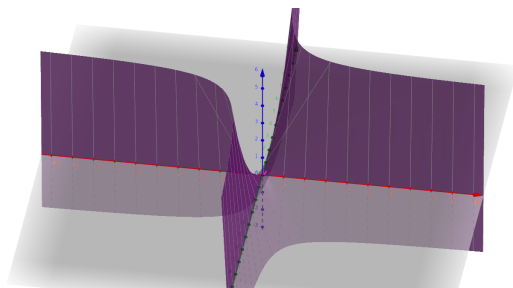


Figura 5: Parte imaginária da função $f(z) = z^2$.

A função real $f(x) = x^2$ é equivalente ao caso complexo ao tomarmos $y = 0$. Geometricamente isso equivale a fazer a interseção dos gráficos de u e v com o plano $y = 0$, conforme as figuras 6 e 7. Note que a interseção com o gráfico de u é a parábola, e a interseção com o gráfico de v é a reta referente ao eixo x .

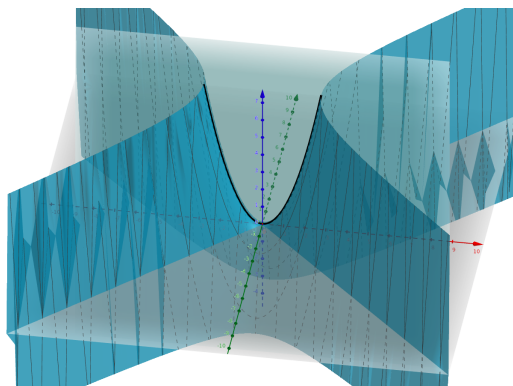


Figura 6: Interseção do gráfico de $u(x, y) = x^2 - y^2$ com o plano $y = 0$. A interseção é uma parábola (em preto).

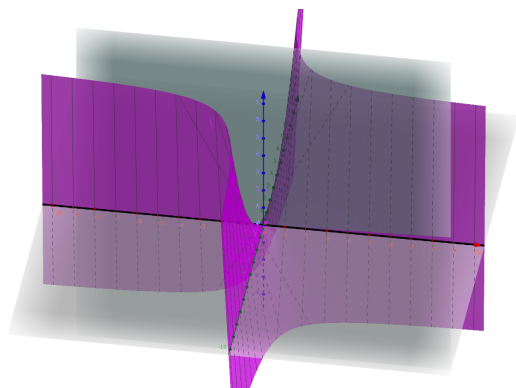


Figura 7: Interseção do gráfico de $v(x, y) = 2xy$ com o plano $y = 0$. A interseção é uma reta (em preto).

Essa discussão pode ser aprimorada ao se considerar a interseção dos gráficos de u e v com outros planos. Tome, por exemplo, o plano $z = 2$. A interseção com os gráficos de u e v são hipérbolas, como podem ser vistas nas figuras 8 e 9. De fato, é

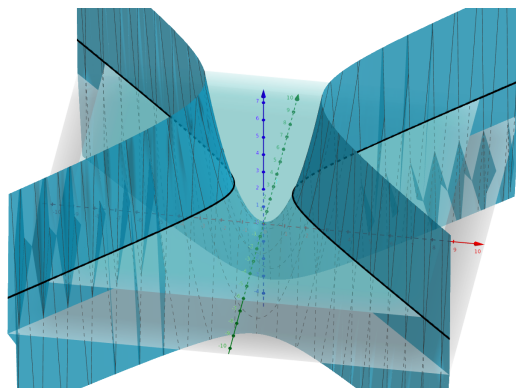


Figura 8: Interseção do gráfico de $u(x, y) = x^2 - y^2$ com o plano $z = 2$. A interseção é uma hipérbole (em preto).

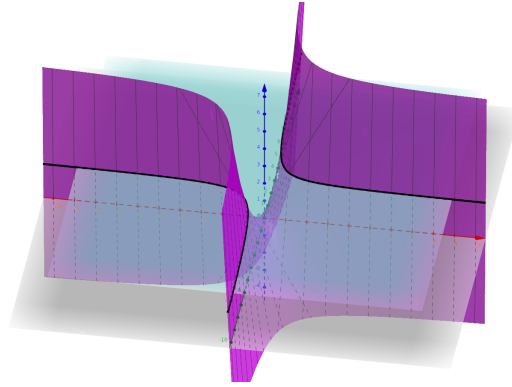


Figura 9: Interseção do gráfico de $v(x, y) = 2xy$ com o plano $z = 2$. A interseção é uma hipérbole (em preto).

Proposição 1. *Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função quadrática complexa. A interseção dos gráficos de u e v com um plano no espaço resultará em uma hipérbole ou uma parábola.*

Para demonstrar essa proposição, considere a função quadrática complexa na forma geral:

$$f(z) = az^2 + bz + c, \quad (14)$$

com $z, a, b, c \in \mathbb{C}$. Tomando $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ e $c = c_1 + ic_2$ temos

$$u(x, y) = a_1(x^2 - y^2) - 2a_2xy + b_1x - b_2y + c_1, \quad (15)$$

$$v(x, y) = a_2(x^2 - y^2) + 2a_1xy + b_2x + b_1y + c_2. \quad (16)$$

Vamos tomar a interseção dos gráficos dessas duas funções com um plano de equação geral dada por

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \quad (17)$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Vamos considerar primeiramente $\gamma \neq 0$. Nesse caso, temos

$$z = -\frac{\alpha}{\gamma}x - \frac{\beta}{\gamma}y - \frac{\delta}{\gamma}. \quad (18)$$

Fazendo $z = u(x, y)$ temos a seguinte equação:

$$a_1(x^2 - y^2) - 2a_2xy + \left(b_1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right)x - \left(b_2 - \frac{\beta}{\gamma}\right)y + c_1 + \frac{\delta}{\gamma} = 0. \quad (19)$$

Analogamente, fazendo $z = v(x, y)$, temos

$$a_2(x^2 - y^2) + 2a_1xy + \left(b_2 + \frac{\alpha}{\gamma}\right)x - \left(b_1 + \frac{\beta}{\gamma}\right)y + c_2 + \frac{\delta}{\gamma} = 0. \quad (20)$$

Podemos analisar essa equação à luz da equação geral das cônicas, dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (21)$$

A natureza da cônica pode ser obtida através da análise do discriminante $\Delta_{conica} = B^2 - 4AC$. Caso $\Delta_{conica} < 0$ temos uma elipse, $\Delta_{conica} = 0$ corresponde a uma parábola e, se $\Delta_{conica} > 0$, trata-se de uma hipérbole. Em ambos os casos, nas Equações 19 e 20 temos, para o discriminante

$$\Delta_C = 4(a_1^2 + a_2^2) = 4|a|^2 > 0. \quad (22)$$

Note que a condição $|a| \neq 0$ corresponde ao fato de que a função é quadrática. Portanto, a interseção do gráfico de u e v com um plano que intersecta o eixo z é sempre uma *hipérbole*.

Resta estudar o caso $\gamma = 0$. Neste caso, para que tenhamos um plano, temos necessariamente α ou β diferentes de zero. Supondo $\beta \neq 0$, temos

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\delta}{\beta}. \quad (23)$$

Fazendo essa substituição do lado direito da equação $z = u(x, y)$ e $z = v(x, y)$, temos z como uma função quadrática de x , o que define uma *parábola*. Os casos degenerados corresponderão a retas e semirretas.

4. Conclusões

O ensino de números complexos pode ser aprimorado através de outras abordagens que contemplem conteúdos que são de domínio dos estudantes. O estudo da parábola referente ao gráfico da função quadrática é de domínio dos estudantes no momento em que eles são introduzidos aos números complexos. O estudo da função quadrática complexa, todavia, apresenta a necessidade de outras ferramentas de visualização. Felizmente os recursos computacionais podem fornecer tais instrumentos e permitem a exploração desses objetos. Durante a exploração é possível observar que a extensão dos conceitos utilizados para funções reais permite obter outro tipo de cônica, as hipérbolas, servindo como conexão com a Geometria Analítica. As ferramentas computacionais são de grande valia na exploração matemática. Contudo, devem ser utilizadas com o devido cuidado [3], sem nunca dispensar a demonstração quando possível.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001. Agradecemos ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat.

Referências

- [1] Brown, J. W e Churchill, R. V. *Variáveis Complexas e Aplicações*. São Paulo: McGraw Hill Brasil, 2015.
- [2] Dante, L. *Matemática: Contextos e Aplicações*. 2ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2013. v. 3.

- [3] Giraldo, V., Caetano, P. A. S. e Mattos, F. R. P. *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] Hohenwarter, M. *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*, Salzburg: IGI, 2002.
- [5] Leonardo, F. M. de. *Conexões com a Matemática*. 2^a ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013. v. 3.
- [6] Stewart, J. *Cálculo Volume 1 - Tradução da 6^a edição norte- americana*. Cengage Learning Edições Ltda., 2010.
- [7] Zill, D. G. e Shanahan, P. D. *Curso introdutório à análise complexa com aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

Roberto do Nascimento Batista
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<robertonb1@hotmail.com>

André Fabiano Steklain Lisbôa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<steklain@utfpr.edu.br>

Recebido: 01/07/2019
Publicado: 06/09/2019

Bases Numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática

Juan López Linares

Alexys Bruno-Alfonso

Grazielle Feliciani Barbosa

Resumo

Neste artigo são discutidos de forma detalhada três problemas que foram propostos para as Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) e que de forma criativa lidam com bases numéricas. O intuito é que esses possam ser usados no treinamento de estudantes que se preparam para olimpíadas internacionais. O material também pode ser usado por professores e estudantes do ensino universitário. O primeiro problema explora a base ternária em relação a triplas aritméticas (três números consecutivos em progressão aritmética). No segundo problema é pedido determinar um elemento de uma sequência que serve como base mista e pode ser correlacionado com a base octal. E no terceiro problema deve-se encontrar a ordem de um elemento de uma sequência que é usado como código de primos em uma base binária.

Palavras-chave: Olimpíada Internacional de Matemática; Sequências; Ensino Médio; Ensino Universitário; Bases Numéricas

Abstract

In this article we discuss in detail three problems that were proposed for the International Mathematical Olympiad (IMO) and that in a creative way deal with numerical bases. The intention is that these problems be used to train students preparing for international olympics. The material can also be used by university teachers and students. The first problem explores the ternary base in relation to arithmetic triples (three consecutive numbers in arithmetic progression). In the second problem it is asked to determine an element of a sequence that serves as a mixed base and can be correlated with the octal base. And in the third problem one must find the order of an element of a sequence that is used as prime code on a binary basis.

Keywords: International Mathematical Olympiad; Sequences; High School Education; University Teaching; Numerical Systems

1. Introdução

As bases numéricas têm permitido à humanidade representar contas e medidas usando um conjunto de símbolos (dígitos) para formar números e realizar operações com esses, como somas e multiplicações. Em 1957, um estudante de 12 anos, George Bergman, mostrou que era possível usar um

número irracional (a razão áurea maior, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) como base de uma base numérica posicional para representar qualquer número real [2]. Tal resultado, atrelado ao problema de correção de erros nas operações críticas de computadores, tem motivado uma intensa pesquisa em anos recentes [1].

O assunto “Bases Numéricas”, porém, pode ser visto por alguns professores de Matemática como tedioso. O presente artigo procura reverter essas ideias e mostrar, mediante a discussão de três problemas, extraídos das propostas de perguntas para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), que as bases numéricas podem ser ensinadas desde outras perspectivas.

O primeiro problema, proposto para a IMO de 1983, explora a base ternária em relação a triplas aritméticas (três números consecutivos em progressão aritmética). No segundo problema, proposto para a IMO de 1998, é pedido determinar um elemento de uma sequência que serve como base mista e pode ser correlacionado com a base octal. E no terceiro problema, proposto para a IMO de 1995, deve-se encontrar a ordem de um elemento de uma sequência que é usado como código de primos em uma base binária.

Os três problemas mencionados fazem parte de um conjunto de vinte e seis problemas sobre sequências, que serão apresentados por parte dos autores (primeiro e terceiro) em uma Tese de Mestrado do Profinat, relacionada com o treinamento de estudantes do ensino médio para participar de Olimpíadas Internacionais de Matemática [4].

2. Exemplos de transformações entre bases numéricas

Um número inteiro não negativo cujos dígitos na base 10 são $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, com $i = 1, 2, \dots, n$, pode ser escrito como:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^n a_n$$

Em geral, seja $b \geq 2$ um número inteiro, podemos representar um número inteiro não negativo na base b usando os dígitos $a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, com $i = 1, 2, \dots, n$, e transformá-lo à base decimal como

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_b = a_0 + b \cdot a_1 + b^2 a_2 + \dots + b^{n-1} a_{n-1} + b^n a_n$$

Em particular, um número inteiro não negativo cujos dígitos na base 8 (Octal) são $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$, com $i = 1, 2, \dots, n$ pode ser escrito na base decimal como:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_8 = a_0 + 8a_1 + 8^2 a_2 + \dots + 8^{n-1} a_{n-1} + 8^n a_n$$

e um número inteiro não negativo cujos dígitos na base 2 (Binária) são $a_i \in \{0, 1\}$, com $i = 1, 2, \dots, n$, pode ser escrito na base decimal como:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2 = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^{n-1} a_{n-1} + 2^n a_n$$

Exercício: Levar à base decimal os números $(7302)_8$ e $(10100)_2$.

$$(7302)_8 = 2 + 8 \cdot 0 + 8^2 \cdot 3 + 8^3 \cdot 7 = (3778)_{10} = 3778$$

$$(10100)_2 = 0 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^4 \cdot 1 = (20)_{10} = 20$$

Inversamente, dado um número representado na base decimal podemos escrevê-lo em qualquer outra base usando sucessivamente a divisão pela base com resto ou euclidiana. O número que no passo n -ésimo for quociente passa a ser dividendo no passo de ordem $n + 1$. O processo conclui quando o quociente é zero.

Exercício: Representar $(2019)_{10} = 2019$ nas bases 2 e 8.

Solução: Dividindo sucessivamente por 2 temos

$$2019 = 2 \cdot 1009 + 1$$

$$1009 = 2 \cdot 504 + 1$$

$$504 = 2 \cdot 252 + 0$$

$$252 = 2 \cdot 126 + 0$$

$$126 = 2 \cdot 63 + 0$$

$$63 = 2 \cdot 31 + 1$$

$$31 = 2 \cdot 15 + 1$$

$$15 = 2 \cdot 7 + 1$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

Tomando os restos em ordem inversa segue que $2019 = (11111100011)_2$.

Analogamente, dividindo sucessivamente por 8 temos

$$2019 = 8 \cdot 252 + 3$$

$$252 = 8 \cdot 31 + 4$$

$$31 = 8 \cdot 3 + 7$$

$$3 = 8 \cdot 0 + 3$$

Tomando os restos em ordem inversa segue que $2019 = (3743)_8$.

3. Base Três, Progressão Aritmética e Geométrica

Provar que é verdadeiro ou que é falso: Do intervalo $[1, 30000]$ pode ser selecionado um subconjunto de 1000 inteiros que não contém tripla aritmética (três números consecutivos em progressão aritmética).

A IMO 1983 foi realizada na cidade de Paris, França [6]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [3].

Solução:

Seja $\{T_n\}$ o conjunto de inteiros positivos que na base três é representado por, no máximo, n dígitos sendo que nenhum deles é 2. Isto é,

$$T_n = a_0 \cdot 3^0 + a_1 \cdot 3^1 + \dots + a_{n-1} \cdot 3^{n-1}, \quad (1)$$

com $a_i \in \{0, 1\}$ para $0 \leq i \leq (n - 1)$. Como para cada a_i somente existem duas possibilidades, zero ou um, e existem n escolhas, a cardinalidade, ou número de elementos, de $\{T_n\}$ é

$$|\{T_n\}| = 2^n. \quad (2)$$

O maior elemento de $\{T_n\}$ é encontrado quando todos os coeficientes são iguais a um:

$$\max \{T_n\} = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^{n-1}. \quad (3)$$

Mas a equação anterior é uma soma de uma progressão geométrica de razão 3, logo

$$\max \{T_n\} = \frac{3^n - 1}{2}. \quad (4)$$

Proposição 1. Não existe tripla aritmética em $\{T_n\}$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista uma tripla aritmética (x, y, z) tal que seus elementos sejam um subconjunto de $\{T_n\}$: $\{x, y, z\} \subset \{T_n\}$. Como x, y e z são inteiros consecutivos de uma progressão aritmética, vale que

$$2y = x + z \quad (5)$$

Com $y \in \{T_n\}$ segue que os coeficientes de $2y$, lado esquerdo de (5), na base 3 são somente 0 ou 2:

$$y = a_{0y} \cdot 3^0 + a_{1y} \cdot 3^1 + \dots + a_{(n-1)y} \cdot 3^{n-1}$$

com $a_{iy} \in \{0, 1\}$ para $0 \leq iy \leq (n - 1)$ e

$$2y = (2 \cdot a_{0y}) \cdot 3^0 + (2 \cdot a_{1y}) \cdot 3^1 + \dots + (2 \cdot a_{(n-1)y}) \cdot 3^{n-1}$$

com $2 \cdot a_{iy} \in \{0, 2\}$ para $0 \leq iy \leq (n - 1)$.

Estudaremos agora o lado direito de (5). Temos que $x, z \in \{T_n\}$, logo podemos escrever

$$x = a_{0x} \cdot 3^0 + a_{1x} \cdot 3^1 + \dots + a_{(n-1)x} \cdot 3^{n-1}$$

$$z = a_{0z} \cdot 3^0 + a_{1z} \cdot 3^1 + \dots + a_{(n-1)z} \cdot 3^{n-1}$$

com $a_{ix}, a_{iz} \in \{0, 1\}$ para $0 \leq ix, iz \leq (n-1)$. Notamos que a soma $a_{ix} + a_{iz} \in \{0, 2\}$ quando $a_{ix} = a_{iz} = 0$ ou $a_{ix} = a_{iz} = 1$ para todo $0 \leq ix, iz \leq (n-1)$. Isto é, no caso em que

$$x = z$$

e por (5) $x = y = z$. Contradição, $x \neq y \neq z$. Como os lados direito e esquerdo de (5) são incompatíveis concluímos que não existe tripla aritmética em $\{T_n\}$. \square

Considere $n = 10$, de (2) e (4) calculamos

$$|T_{10}| = 2^{10} = 1024 > 1000$$

$$\max\{T_{10}\} = \frac{3^{10}-1}{2} = 29524 < 30000$$

Logo, a afirmação do problema é verdadeira. O conjunto $\{T_n\}$ é um subconjunto de $[1, 30000]$ com mais de 1000 inteiros e não contém tripla aritmética.

4. Base Mista, Binária e Octal

Seja a_0, a_1, a_2, \dots uma seqüência crescente de inteiros não negativos tal que cada número inteiro não negativo possa ser escrito de forma única como

$$a_i + 2a_j + 4a_k, \tag{6}$$

onde i, j, k não são necessariamente diferentes. Determinar a_{1998} .

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan [6]. O problema acima foi proposto pela delegação do Canadá [3].

Solução:

Note que devemos escrever de forma única todos os números inteiros não negativos como uma combinação linear (6) dos elementos da seqüência (a_n) . Isso leva a que, dada a seqüência até o termo de ordem $n-1$, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , o termo de ordem n , a_n , é o menor inteiro positivo que não seja da forma $a_i + 2a_j + 4a_k$, com $i, j, k < n$.

Vamos encontrar os primeiros termos da seqüência de forma intuitiva. O primeiro inteiro não negativo é o zero. Para escrever zero na forma em (6) devemos ter $a_0 = 0$:

$$0 = a_0 + 2a_0 + 4a_0 = 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0.$$

Não temos como escrever 1 usando somente $a_0 = 0$. Isso leva a adicionar o número 1 na seqüência (a_n) , logo $a_1 = 1$. Com isso podemos escrever os números do 1 ao 7 usando somente dois elementos da seqüência $a_0 = 0, a_1 = 1$:

$$1 = a_1 + 2a_0 + 4a_0 = 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,$$

$$2 = a_0 + 2a_1 + 4a_0 = 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,$$

$$3 = a_1 + 2a_1 + 4a_0 = 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,$$

$$4 = a_0 + 2a_0 + 4a_1 = 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1,$$

$$5 = a_1 + 2a_0 + 4a_1 = 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1,$$

$$6 = a_0 + 2a_1 + 4a_1 = 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1,$$

$$7 = a_1 + 2a_1 + 4a_1 = 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1.$$

O número 8 não pode ser escrito usando somente dois elementos da sequência: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Isso leva a adicionar o número 8 na sequência (a_n) , logo $a_2 = 8$:

$$8 = a_2 + 2a_0 + 4a_0 = 8 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0.$$

O número 9 não pode ser escrito usando somente três elementos da sequência: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 8$. Isso leva a adicionar o número 9 na sequência (a_n) , logo $a_3 = 9$. Com quatro elementos da sequência é possível escrever os números do 9 até o 63:

$$9 = a_3 + 2a_0 + 4a_0 = 9 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,$$

$$63 = a_3 + 2a_3 + 4a_3 = 9 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9.$$

Segue que $a_4 = 64$ e $a_5 = 65$. Resumindo, os primeiros termos da sequência são

$$(a_n) = (0, 1, 8, 9, 64, 65, \dots).$$

Sabemos que todo número inteiro não negativo m pode ser escrito de forma única na base binária:

$$m = 2^0 t_0 + 2^1 t_1 + 2^2 t_2 + 2^3 t_3 + \dots + 2^r t_r \quad (7)$$

com $t_i \in \{0, 1\}$ e $i = 0, 1, 2, \dots, r$. Por outro lado, queremos escrever m como em (6):

$$m = 2^0 a_i + 2^1 a_j + 2^2 a_k. \quad (8)$$

Uma comparação entre (7) e (8) sugere escolher a_i , a_j e a_k como somas finitas:

$$a_i = t_0 + 2^3 t_3 + 2^6 t_6 + \dots = t_0 + 8t_3 + 8^2 t_6 + \dots$$

$$a_j = t_1 + 2^3 t_4 + 2^6 t_7 + \dots = t_1 + 8t_4 + 8^2 t_7 + \dots$$

$$a_k = t_2 + 2^3 t_5 + 2^6 t_8 + \dots = t_2 + 8t_5 + 8^2 t_8 + \dots$$

As três equações anteriores podem ser reescritas como

$$a_n = s_0 + 8s_1 + 8^2 s_2 + \dots + 8^r s_r, \quad (9)$$

onde $s_i \in \{0, 1\}$ e $i = 0, 1, 2, \dots, r$. Em outras palavras, a sequência (a_n) consiste dos números inteiros não negativos que podem ser escritos em base 8 usando somente zeros e uns.

Para encontrar um termo arbitrário de (a_n) devemos escrever primeiro n em base 2:

$$n = s_0 + 2s_1 + 2^2s_2 + \dots + 2^r s_r. \quad (10)$$

Os s_i em (10) coincidem com os s_i em (9). Vejamos os primeiros termos já encontrados

$$0 = 0 + 2 \cdot 0 \quad , \quad a_0 = 0 + 8 \cdot 0 = 0,$$

$$1 = 1 + 2 \cdot 0 \quad , \quad a_1 = 1 + 8 \cdot 0 = 1,$$

$$2 = 0 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 \quad , \quad a_2 = 0 + 8 \cdot 1 + 8^2 \cdot 0 = 8,$$

$$3 = 1 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 \quad , \quad a_3 = 1 + 8 \cdot 1 + 8^2 \cdot 0 = 9,$$

$$4 = 0 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 \quad , \quad a_4 = 0 + 8 \cdot 0 + 8^2 \cdot 1 + 8^3 \cdot 0 = 64,$$

$$5 = 1 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 \quad , \quad a_5 = 1 + 8 \cdot 0 + 8^2 \cdot 1 + 8^3 \cdot 0 = 65.$$

Como queremos encontrar a_{1998} escreveremos primeiro $1998 = (11111001110)_2$ em base 2:

$$1998 = 0 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^5 \cdot 0 + 2^6 \cdot 1 + 2^7 \cdot 1 + 2^8 \cdot 1 + 2^9 \cdot 1 + 2^{10} \cdot 1.$$

Segue que

$$a_{1998} = 0 + 8 \cdot 1 + 8^2 \cdot 1 + 8^3 \cdot 1 + 8^4 \cdot 0 + 8^5 \cdot 0 + 8^6 \cdot 1 + 8^7 \cdot 1 + 8^8 \cdot 1 + 8^9 \cdot 1 + 8^{10} \cdot 1 = 1227096648.$$

5. Código Primo-Binário

Considere números inteiros $x \geq 1$ e seja $p(x)$ o menor primo que não divide x . Em particular, $p(1) = 2$. Quando $p(x) = 2$, defina $q(x) = 1$, caso contrário, defina $q(x)$ como o produto de todos os primos menores que $p(x)$. Considere a sequência x_0, x_1, x_2, \dots definida por $x_0 = 1$ e $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$ para todo $n \geq 0$. Encontrar todos os valores de n tal que $x_n = 1995$.

A IMO 1995 foi realizada na cidade de Toronto, Canada [6]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [3].

Solução:

Como $q(x)$ é definida por um produto de primos que dividem individualmente x ou $q(x) = 1$, segue que $q(x)$ divide x para todos os números inteiros $x \geq 1$, logo $f(x) = \frac{x p(x)}{q(x)}$ também é um número inteiro positivo.

A Tabela 1 ilustra o cálculo dos primeiros termos da sequência.

n	$p(x_{n-1})$	$q(x_{n-1})$	x_n	x_n fatorado	Cx_n
0			1		0
1	2	1	2	2	1
2	3	2	3	3	10
3	2	1	6	3 · 2	11
4	5	6	5	5	100
5	2	1	10	5 · 2	101
6	3	2	15	5 · 3	110
7	2	1	30	5 · 3 · 2	111
8	7	30	7	7	1000
9	2	1	14	7 · 2	1001
10	3	2	21	7 · 3	1010
11	2	1	42	7 · 3 · 2	1011
12	5	6	35	7 · 5	1100
13	2	1	70	7 · 5 · 2	1101
14	3	2	105	7 · 5 · 3	1110
15	2	1	210	7 · 5 · 3 · 2	1111
16	11	210	11	11	10000
17	2	1	22	11 · 2	10001

Tabela 1: Cálculo dos primeiros termos das seqüências (x_n) e (Cx_n) .

Seja $(p_0, p_1, p_2, \dots) = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ a seqüência de todos os números primos escritos em ordem crescente.

Notemos primeiramente que, na decomposição de x_n em fatores primos, nenhum primo pode aparecer elevado a uma potência superior a um. De fato, isso é verdade para os primeiros 17 termos listados na Tabela 1. Para completar a demonstração por indução em n , observamos que se por hipótese $x_n = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdots p_{n_m}$, então $p(x_n)$ não é nenhum dos p_{n_k} anteriores com $1 \leq k \leq m$. Segue que o produto $x_n p(x_n)$ não terá, na sua decomposição, nenhum quadrado de primo. Dividir por $q(x_n)$ somente reduz (ou deixa igual quando $q(x) = 1$) o número de primos presentes na fatoração de x_n . Segue que $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$ é livre de potências superiores a um para todo n .

Como cada número primo aparece somente uma vez (ou não se encontra) na fatoração de x_n , podemos associar de forma única a x_n um código: $Cx_n = \dots 000s_l s_{l-1} \dots s_0$. Onde $s_i = 1$ se p_i divide x_n e $s_i = 0$ se p_i não divide x_n com $0 \leq i \leq l$. Adicionalmente, p_l é o maior primo que divide x_n .

A seguir vamos enunciar e justificar o resultado principal. A representação binária de n coincide com o código de x_n . Isto é, $(n)_2 = Cx_n$. Veja na Tabela 1 a primeira e última colunas.

No caso em que x_n é ímpar temos que $Cx_n = \dots 000s_l s_{l-1} \dots s_1 0$ termina em 0, pois 2 não divide x_n . Segue que $p(x_n) = 2$ e $q(x_n) = 1$. Logo $x_{n+1} = \frac{x_n \cdot 2}{1}$ é par e $Cx_{n+1} = \dots 000s_l s_{l-1} \dots s_1 1$ tem o mesmo código de x_n com o primeiro dígito da direita trocado de 0 para 1.

Quando x_n é par, temos que Cx_n termina em 1 pois 2 divide x_n . Estudaremos dois subcasos:

(1) $Cx_n = \dots 000s_k 11 \dots 1$ o código de x_n é somente composto de uns, de s_k em diante é tudo zero

e

(2) $Cx_n = \dots 00s_m \dots s_{k+1}s_k 11 \dots 1$ o código de x_n é composto de uns de s_0 até s_{k-1} , $s_k = 0$, de s_{k+1} a s_{m-1} os valores podem ser zero ou um, $s_m = 1$ e de s_{m+1} em diante é tudo zero.

(1) Se $Cx_n = \dots 000s_k 11 \dots 1$, temos que $p(x_n) = p_k$ e $q(x_n) = x_n$. Segue que $x_{n+1} = p_k$ e $Cx_{n+1} = \dots 000100 \dots 0$ com o 1 na posição k -ésima da direita para esquerda.

(2) Se $Cx_n = \dots 00s_m \dots s_{k+1}s_k 11 \dots 1$ temos que $p(x_n) = p_k$ e $q(x_n) = p_0 \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_{k-1}$. Segue que $Cx_{n+1} = \dots 00s_m \dots s_{k+1} 100 \dots 0$.

Logo, o efeito da lei de recorrência f sobre o código de x_n é acrescentar um na representação binária de n , isto é, $Cx_{n+1} = f(Cx_n) = (n+1)_2$. Em outras palavras, $(n)_2 = Cx_n$ e x_n determina univocamente n .

Como estamos interessados em encontrar n tal que $x_n = 1995$, primeiro fatoramos 1995:

$$1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19$$

A seguir escrevemos o código de 1995:

$$C(1995) = 10001110.$$

Isso corresponde a $n = (10001110)_2 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^7 = 142$.

6. Conclusões

O presente artigo discute três problemas propostos em olimpíadas internacionais de matemática para estudantes do ensino médio. O conteúdo explora as bases numéricas de uma forma não usual. No primeiro problema mostramos que não existe tripla aritmética no conjunto formado pelos números que na base três somente usam os dígitos zero ou um. No segundo problema a chave foi encontrar que a sequência (a_n) era formada pelos números que na base oito usam somente zeros ou uns. E no terceiro problema mostramos que fatorando em primos os elementos da sequência (x_n) e usando um código com zeros e uns descobrimos n escrito em binário. Outros três problemas da IMO relativos a série harmônica encontram-se em [5].

Agradecimentos

Agradecemos aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Profmat

Referências

- [1] Alexey Stakhov, *Mission-Critical Systems, Paradox of Hamming Code, Row Hammer Effect*, 'Trojan Horse' of the Binary System and Numeral Systems with Irrational Bases, The Computer Journal, Volume 61, Issue 7, July 2018, Pages 1038–1063, <https://doi.org/10.1093/comjnl/bxx083>.
- [2] Bergman, George (1957) *A Number System with an Irrational Base*. Math. Mag., Vol. 31. [doi:10.2307/3029218](https://doi.org/10.2307/3029218). JSTOR 3029218.
- [3] Djukic D. e col., *The IMO Compendium - A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004*, Springer, 2006. <http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf>. Acesso em 30/06/2019.

- [4] Problemas Resolvidos sobre Sequências no Treinamento de Estudantes do Ensino Médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática, Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Profmat, Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil (2019). Orientadora Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa. Disponível em <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>.
- [5] López, J., Bruno-Alfonso, A. e Barbosa, G.F. *A Série Harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática*, VI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (Ermac), 17-19 Junho de 2019, Bauru, SP, Brasil, Caderno de Trabalhos e Resumos, página 16, 2019, Disponível em <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>
- [6] Sitio oficial das Olimpíadas Internacionais de Matemática, <http://www.imo-official.org/problems.aspx>. Acesso em 30/06/2019.

Juan López Linares
Universidade de São Paulo
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA-USP)
<jlopez@usp.br>

Alexys Bruno-Alfonso
Unesp, Faculdade de Ciências de Bauru
Departamento de Matemática
<alexys.bruno-alfonso@unesp.br>

Grazielle Feliciani Barbosa
Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Matemática (DM-UFSCar)
<grazielle@dm.ufscar.br>

Recebido: 28/06/2019
Publicado: 10/10/2019

Revisitando as equações do terceiro grau

João Francisco da Silva Filho

Odete Elana Sousa Pereira

Resumo

No presente trabalho, estabelecemos uma interessante relação entre as raízes (reais e complexas) de uma equação do terceiro grau, através de uma fórmula que nos permite determinar duas das raízes a partir de uma terceira raiz. Na sequência, apresentamos alguns exemplos e concluímos com aplicações da fórmula supracitada, que consistem essencialmente de critérios para caracterizar as raízes de equações do terceiro grau.

Palavras-chave: Equações do Terceiro Grau; Fórmula de Cardano-Tartágia; Raízes.

Abstract

In this work, we have established an interesting relationship between the roots (real and complex) of a third degree equation through a formula that allows us to determine two of the roots from a third root. In the sequel, we present some examples and conclude with applications of this formula, which consists of criteria to characterize the roots of third degree equations.

Keywords: Third degree equation; Cardano-Tartaglia formula; Roots.

1. Introdução

As raízes da equação do terceiro grau (ou *equação cúbica*) podem ser obtidas através das fórmulas de Cardano-Tartaglia, publicadas por Girolamo Cardano (1501-1576) no livro *Ars Magna* em 1545. Por muito tempo, tais fórmulas ficaram conhecidas simplesmente como “fórmulas de Cardano”, embora tenham sido descobertas por Scipione del Ferro (1465-1526) e redescobertas por Tartaglia (1500-1557). A contribuição de Cardano foi desenvolver um método que reduz a equação geral a um caso particular, no qual um dos coeficientes é nulo. Devemos ressaltar que as fórmulas de Cardano-Tartaglia resumem-se a uma única fórmula, por isso nas próximas seções, passaremos a tratá-las apenas por “Fórmula de Cardano-Tartaglia”.

As fórmulas de Cardano-Tartaglia foram uma importante motivação para a introdução dos números complexos, no entanto convém destacar que essas fórmulas não são muito práticas. Basta observar que aplicando-as às equações do terceiro grau que possuem três raízes reais, recaímos na necessidade de utilizar funções trigonométricas inversas para chegar em aproximações decimais de cada raiz. Por outro lado, recorrendo aos métodos numéricos, enfrentamos a dificuldade de isolar as raízes e depois construir sequências que convirjam para diferentes limites, sem contar a dificuldade de trabalhar com sequências de números complexos.

Diante do exposto, desenvolvemos uma fórmula que relaciona diretamente as raízes de uma equação do terceiro grau, cuja expressão consiste em escrever duas raízes em termos de uma terceira. Essa fórmula permite-nos calcular todas as raízes a partir de apenas uma delas, contornando a dificuldade de isolá-las ao usar os métodos numéricos. Sabendo que as equações do terceiro grau sempre possuem raízes reais, então a fórmula obtida minimiza o inconveniente de trabalhar com seqüências de números complexos não reais. Por fim, apresentamos algumas aplicações da referida fórmula, que nos fornecem critérios simples para caracterizar as raízes de equações do terceiro grau, determinando quantas são as raízes reais e as complexas não reais.

2. A Fórmula de Cardano-Tartaglia

Inicialmente, devemos lembrar que as raízes de um polinômio do terceiro grau na forma reduzida (ou forma *deprimida*), definido por

$$Q(x) = x^3 + px + q,$$

podem ser obtidas a partir da fórmula de Cardano-Tartaglia, dada pela expressão

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

onde a constante

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \tag{1}$$

é chamada de *discriminante*.

Observação 1. No decorrer do artigo, estaremos trabalhando apenas com polinômios de coeficientes reais. Ademais, usaremos a expressão *raízes complexas* para fazer menção às raízes complexas não reais.

A fórmula de Cardano-Tartaglia também pode ser aplicada a um polinômio na sua *forma geral*, ou seja, um polinômio do terceiro grau na forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

já que é possível escrevê-lo como múltiplo de um polinômio na forma reduzida, através de uma mudança de variável. Nessa perspectiva, observe que

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + p \left(x + \frac{b}{3a}\right) + q \right],$$

onde

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}.$$

Aplicando a translação dada pela mudança de variável

$$y = x + \frac{b}{3a},$$

segue-se que

$$P\left(y - \frac{b}{3a}\right) = a(y^3 + py + q);$$

por fim, basta usar a fórmula de Cardano-Tartaglia para calcular as raízes do polinômio

$$Q(y) = y^3 + py + q$$

e subtrair “ $-b/3a$ ” de cada uma das raízes obtidas, encontrando assim as raízes de $P(x)$.

Observação 2. De acordo com o sinal do discriminante D , podemos identificar os tipos de raízes de $P(x)$ (cf. [3] ou [7]). Mais precisamente, temos que:

- (a) Se $D < 0$, então $P(x)$ possui três raízes reais.
- (b) Se $D = 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real de multiplicidade dois ou três.
- (c) Se $D > 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas conjugadas.

3. Relacionando as raízes

Nesta seção, apresentamos um teorema que relaciona diretamente as três raízes de um polinômio do terceiro grau, escrevendo duas raízes em termos de uma terceira raiz, que por conveniência, podemos supor real.

Teorema 1. *Sejam $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais e $r \in \mathbb{R}$ uma raiz de $P(x)$, então as demais raízes de $P(x)$ são dadas por*

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a}$$

onde $\Omega := b^2 - 3ac$.

Demonstração. Fazendo um cálculo direto, obtemos

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(r) \\ &= a(x^3 - r^3) + b(x^2 - r^2) + c(x - r) \\ &= (x - r)[a(x^2 + rx + r^2) + b(x + r) + c], \end{aligned}$$

ou ainda,

$$P(x) = (x - r)[ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c)].$$

Por simplicidade, reescrevemos $P(x)$ na forma

$$P(x) = (x - r)Q(x),$$

onde $Q(x)$ denota o polinômio

$$Q(x) = ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c),$$

cujas raízes são dadas por

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Delta_Q}}{2a}. \quad (2)$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} \Delta_Q &= (ar + b)^2 - 4a(ar^2 + br + c) \\ &= -a(3ar^2 + 2br + c) + b^2 - 3ac, \end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$\Delta_Q = \Omega - aP'(r), \quad (3)$$

onde

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad (4)$$

denota a derivada de $P(x)$ (cf. Lima *et al.* [5], p. 188).

Por fim, substituimos a igualdade (3) em (2) e concluímos que

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a}$$

determina as outras duas raízes do polinômio $P(x)$. □

Se uma das raízes do polinômio $P(x)$ for previamente conhecida, podemos aplicar diretamente o Teorema 1 para determinar as demais raízes. Neste momento, faremos alguns exemplos que ilustram essa afirmação.

Exemplo 1. Determinar as raízes do polinômio do terceiro grau $P(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.

Solução: Desde que $r = 1$ é uma raiz real de $P(x)$, então

$$w_{1,2} = -\frac{(a + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(1)}}{2a}, \quad (5)$$

determina as demais raízes de $P(x)$. Observe que

$$a = b = c = 1 \quad \text{e} \quad d = -3,$$

enquanto $P'(1) = 6$.

Substituindo todos esses valores, obtemos

$$\Omega = b^2 - 3ac = -2,$$

donde concluímos por (5) que

$$w_1 = -1 + \sqrt{2}i \quad \text{e} \quad w_2 = -1 - \sqrt{2}i$$

são as raízes procuradas.

Caso não conheçamos nenhuma das raízes de $P(x)$, podemos aplicar um dos métodos numéricos para calcular aproximações decimais de uma raiz real. Na sequência, basta usar o Teorema 1 para deduzir as aproximações decimais das demais raízes.

Exemplo 2. Calcular aproximações decimais das raízes do polinômio $P(x) = 8x^3 - 6x + 1$.

Solução: Usando o método de Newton-Raphson (cf. [4], [5] ou [6]), devemos construir uma sequência que convirja para uma raiz real do polinômio $P(x)$. Tal sequência é definida por

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases},$$

onde k é um número real (a saber) suficientemente próximo da raiz que buscamos.

Reescrevendo a expressão de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos que

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ \frac{16x_n^3 - 1}{24x_n^2 - 6}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases},$$

daí escolhemos $k = 1$, obtendo as aproximações

$$\begin{aligned} x_1 &= 1; & x_2 &= 0,83333 \dots; & x_3 &= 0,77431 \dots; \\ x_4 &= 0,76620 \dots; & x_5 &= 0,76604 \dots & \text{e} & x_6 &= 0,76604 \dots, \end{aligned}$$

ou seja, uma das raízes reais de $P(x)$ é aproximadamente $r \approx 0,76604$.

Substituindo a aproximação obtida e os coeficientes do polinômio $P(x)$ na fórmula do Teorema 1, concluímos que

$$w_1 \approx -0,93969 \quad \text{e} \quad w_2 \approx 0,17365$$

são as aproximações decimais das outras duas raízes de $P(x)$.

Observação 3. As aproximações decimais obtidas no Exemplo 2 podem ser calculadas a mão, porém recomenda-se o uso de uma calculadora para facilitar os cálculos.

O próximo exemplo ilustra um caso bem interessante, no qual o polinômio $P(x)$ possui raízes complexas e não conhecemos sua raiz real.

Exemplo 3. Calcular as raízes do polinômio do terceiro grau $P(x) = 9x^3 + 12x^2 + 7x - 4$.

Solução: Novamente usamos o método de Newton-Raphson para construir a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \frac{18x_n^3 + 12x_n^2 + 4}{27x_n^2 + 24x + 7}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases},$$

que nos fornece as aproximações decimais

$$\begin{aligned} x_1 &= 1; & x_2 &= 0,58621\dots; & x_3 &= 0,38717\dots; \\ x_4 &= 0,33646\dots; & x_5 &= 0,33334\dots & \text{e} & x_6 &= 0,33333\dots, \end{aligned}$$

então uma das raízes de $P(x)$ é aproximadamente $r \approx 0,33333$.

Substituímos a aproximação encontrada e os coeficientes de $P(x)$ na fórmula obtida no Teorema 1, concluindo que

$$w_1 \approx -0,83333 + 0,79931i \quad \text{e} \quad w_2 \approx -0,83333 - 0,79931i$$

são as aproximações decimais das demais raízes de $P(x)$.

Observação 4. No Exemplo 3, foi obtida a aproximação $r \approx 0,33333$ para a raiz real de $P(x)$, que nos permite conjecturar que $1/3$ é raiz do referido polinômio. Essa conjectura confirma-se ao verificarmos que $P(1/3) = 0$, conseqüentemente segue-se do Teorema 1 que as demais raízes de $P(x)$ podem ser expressas na forma

$$w_1 = -\frac{5 - \sqrt{23}i}{6} \quad \text{e} \quad w_2 = -\frac{5 + \sqrt{23}i}{6}.$$

4. Algumas Aplicações

Apresentamos aqui algumas aplicações do Teorema 1 em forma de corolários, buscando estabelecer condições para identificar os tipos de raízes de um polinômio do terceiro grau. O primeiro corolário pode ser deduzido a partir do Teorema de Rolle (cf. Lima [4], p. 270), no entanto trazemos uma prova mais elementar.

Corolário 1. *Dado um polinômio do terceiro grau $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com coeficientes reais satisfazendo*

$$\Omega := b^2 - 3ac < 0 \quad \text{ou} \quad \Lambda := c^2 - 3bd < 0,$$

então $P(x)$ possui duas raízes complexas.

Demonstração. Primeiramente, dividimos a prova em dois casos:

1º Caso: $\Omega < 0$.

Usando os coeficientes de $P(x)$, definimos o polinômio quadrático

$$R(x) = 3a^2x^2 + 2abx - (b^2 - 4ac),$$

que satisfaz

$$\Delta_R = 16a^2(b^2 - 3ac) = 16a^2\Omega < 0$$

e portanto

$$R(x) > 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \Omega - aP'(r) &= -a(3ar^2 + 2br + c) + (b^2 - 3ac) \\ &= -[3a^2r^2 + 2abr - (b^2 - 4ac)], \end{aligned}$$

ou ainda

$$\Omega - aP'(r) = -R(r) < 0,$$

implicando pelo Teorema 1 que $P(x)$ possui duas raízes complexas.

2º Caso: $\Lambda < 0$.

Usando as mesmas notações anteriores, vamos ter

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}(dx^3 + cx^2 + bx + a),$$

para todo x não nulo. Desde que a constante Λ é negativa, obtemos

$$c^2 < 3bd,$$

portanto $d \neq 0$, e, pelo caso anterior, concluímos que

$$S(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a,$$

possui duas raízes complexas, ocorrendo o mesmo para o polinômio $P(x)$. □

A condição apresentada no Corolário 1 é suficiente, porém não é necessária para a existência de raízes complexas; basta considerar o contraexemplo $P(x) = x^3 + 1$. O próximo corolário contempla casos como esse contraexemplo.

Corolário 2. *Sejam $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais e $r \in \mathbb{R}$ uma raiz de $P(x)$. Suponha que $\Omega := b^2 - 3ac \geq 0$, então vale a desigualdade*

$$\left| r + \frac{b}{3a} \right| \leq \frac{2\sqrt{\Omega}}{3|a|},$$

se, e somente se, todas as raízes de $P(x)$ são reais.

Demonstração. Por hipótese, temos que

$$\Omega = b^2 - 3ac \geq 0,$$

então os coeficientes do polinômio

$$R(x) = 3a^2x^2 + 2abx - (b^2 - 4ac),$$

devem satisfazer

$$\Delta_R = 16a^2(b^2 - 3ac) = 16a^2\Omega \geq 0.$$

Nessas condições, podemos afirmar que

$$\left| r + \frac{b}{3a} \right| \leq \frac{2\sqrt{\Omega}}{3|a|}, \tag{6}$$

se, e somente se,

$$\Omega - aP'(r) = -R(r) \geq 0.$$

Por fim, decorre do Teorema 1 que essa desigualdade equivale a afirmar que todas as raízes de $P(x)$ são necessariamente reais. \square

Observação 5. Se para alguma das raízes reais de $P(x)$, tivermos a igualdade atingida em (6), verifica-se diretamente que $P(x)$ admite uma raiz real de multiplicidade dois ou três.

Decorre do Teorema de Rolle que se um polinômio $P(x)$ do terceiro grau possui apenas raízes reais, então uma de suas raízes satisfaz a desigualdade $aP'(r) \leq 0$, onde " a " denota o coeficiente líder. No nosso último corolário, apresentamos a recíproca desse resultado.

Corolário 3. *Um polinômio do terceiro grau $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ possui apenas raízes reais, desde que ocorra uma das condições a seguir:*

- (a) $P(x)$ possui coeficiente líder positivo e admite uma raiz real com derivada não positiva.
- (b) $P(x)$ possui coeficiente líder negativo e admite uma raiz real com derivada não negativa.

Demonstração. Supondo que se verifica um dos itens (a) ou (b), então $P(x)$ admite uma raiz $r \in \mathbb{R}$, tal que

$$aP'(r) \leq 0, \tag{7}$$

em particular, os coeficientes do polinômio quadrático

$$aP'(x) = 3a^2x^2 + 2abx + ac$$

satisfazem

$$\Delta_{(aP')} = 4a^2(b^2 - 3ac) = 4a^2\Omega \geq 0.$$

Da última desigualdade, obtemos

$$\Omega \geq 0, \tag{8}$$

implicando por (7) e (8) que

$$\Omega - aP'(r) \geq 0,$$

por fim, concluímos do Teorema 1 que $P(x)$ possui apenas raízes reais. \square

Agradecimentos

Os autores agradecem ao(s) parecerista(s) pelas relevantes observações e valiosas sugestões apresentadas.

Referências

- [1] Boyer, C. B. *História da Matemática*. 3^a ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- [2] Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra*. 5^a ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013
- [3] Lima, E. L. *Equação do Terceiro Grau*. Matemática Universitária, v. 5, pp. 10-23, 1987.
- [4] Lima, E. L. *Curso de Análise - Volume 1*, 10^a ed. Rio de Janeiro: Impa, 2002.
- [5] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. 10^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [6] Lopes, V. L. R.; Ruggiero, M. A. G. *Cálculo Numérico: Aspectos Numéricos e Computacionais*. 2^a ed. São Paulo: Makron Books, 1997.
- [7] Rechtschaffen, E. E. M. *Sobre Aproximações Polinomiais de Raízes Reais de Cúbicas*. Matemática Universitária, v. 46, pp. 12-16, 2009.

João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional
da Lusofonia Afro-Brasileira - Unilab
<joaofilho@unilab.edu.br>

Odete Elana Sousa Pereira
Universidade Federal do Ceará - UFC
<odetelana@hotmail.com>

Recebido: 28/07/2019
Publicado: 15/10/2019

Característica de Euler-Poincaré para poliedros n -tóricos

Luciene Parron Gimenes Arantes

Wellen Eder Pedrochi¹

Rodrigo Martins

Resumo

A Característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico bem conhecido e o cálculo para superfícies compactas, em geral, depende de uma instrumentação topológica bastante refinada. Entretanto, no caso de poliedros convexos esse invariante é igual a 2 e resulta de uma simples verificação de uma fórmula a qual relaciona o número de vértices V , o número de arestas A e o número de faces F de um poliedro, mais especificamente, $V - A + F = 2$ (Fórmula de Euler) e isso se dá porque tais poliedros convexos são homeomorfos à esfera. Neste trabalho apresentamos uma demonstração, usando apenas indução finita, para o cálculo desse invariante para uma classe de poliedros não convexos, apresentados de maneira específica, aqui chamados poliedros n -tóricos, que são homeomorfos a n -toros.

Palavras-chave: Característica de Euler-Poincaré; poliedro não convexo; n -toros; poliedros n -tóricos

Abstract

The Euler-Poincaré Characteristic is a well-known topological invariant. The computation for compact surfaces depends on a highly refined topological tools, however in the case of convex polyhedra this invariant is constant equal to two and it follows, because convex polyhedra are homeomorphic to a sphere, from a simple verification of the formula which relates the number of vertices V , the number of edges A and the number of faces F of a polyhedron, more precisely, $V - A + F = 2$ (Euler's Formula). In this work we present a proof, using only finite induction, for the computation this invariant taking into account, however, only a class of non-convex polyhedra, presented in a specific way, here called n -toric polyhedra, which are homeomorphic to an n -torus.

Keywords: Euler-Poincaré characteristic; non-convex polyhedra; n -torus; n -torics polyhedra.

1. Introdução

A Fórmula de Euler é um tema de muita relevância e tem sido ensinado nas disciplinas que envolvem Geometria Espacial no Ensino Médio, por exemplo; veja SOUZA(2013) e LIMA(1999). É um resultado muito simples e com um enunciado de fácil compreensão o qual relaciona o número

¹Apoio financeiro Capes

de vértices V , o número de arestas A e o número de faces F de um poliedro, mais especificamente, $V - A + F = 2$, o que é de fácil ilustração e entendimento.

Poincaré foi o primeiro matemático a compreender que a Fórmula de Euler é um resultado de Topologia, e não de Geometria como se pensava, assim a relação $X(P) = V - A + F$ ficou conhecida como Característica de Euler-Poincaré de um poliedro P . Também esse tema foi amplamente discutido em livros, veja por exemplo, LIMA(1991) e LIMA(1999) e nas dissertações GISOLDI(2013) e PEDROCHI(2016).

Segundo E. L. Lima, em LIMA(1991), a demonstração mais divulgada da Fórmula de Euler foi apresentada por Cauchy, depois reproduzida por autores conceituados, como Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins numa forma aparentemente compatível com o nível de conhecimento adquirido pelos alunos no Ensino Médio. Nesse mesmo artigo, o próprio Professor E. L. Lima apresentou uma leitura crítica da demonstração de Cauchy verificando que se pode expandir as noções apresentadas, na versão envolvendo poliedros convexos, para poliedros não convexos.

De igual forma, queremos aqui estudar não apenas a Fórmula de Euler, mas a Característica de Euler-Poincaré, da maneira mais simples e informal possível para alcançar o mesmo público apto a compreender essa fórmula para poliedros regulares levando em consideração um conjunto mais amplo de poliedros. Para isso, queremos lançar mão apenas das ferramentas mais elementares de geometria, entre elas a observação construtiva e a recursividade já utilizadas desde os tempos remotos.

2. A Característica de Euler-Poincaré

2.1. Poliedros não convexos

Foi graças a Poincaré, em 1893, a solução definitiva para a Fórmula de Euler. Poincaré mostrou que dado um poliedro P , o número $X(P) = V - A + F$, chamado de Característica de Euler-Poincaré, é um invariante topológico; isto é, dados os poliedros P e Q , com mesma Característica de Euler-Poincaré, existe uma transformação contínua $f : P \rightarrow Q$ cuja inversa $f^{-1} : Q \rightarrow P$ também é contínua. Nesse caso, a função f é chamada de homeomorfismo e dizemos que os poliedros P e Q são homeomorfos.

A seguir, nos exemplos 2.1 e 2.2, apresentamos um poliedro homeomorfo à esfera e outro homeomorfo ao toro. De maneira intuitiva, se imaginarmos um poliedro regular feito de borracha e o inflarmos, injetando ar (não precisa ser regular, nem mesmo convexo basta que não possua espaços vazios, buracos, como um toro), ele será transformado em uma esfera. Nesse caso seu invariante topológico é $X(P) = V - A + F = 2$ (Fórmula de Euler). Já os poliedros que têm um único buraco serão transformados em um toro (câmara de pneu cheia de ar) e seu invariante topológico é $X(P) = V - A + F = 0$.

No caso dos exemplos é fácil contar o número de faces, arestas e vértices e concluir o resultado; mais especificamente, os objetos homeomorfos à esfera têm característica 2 e os homeomorfos ao toro característica 0.

Ademais, sabe-se que toda superfície compacta pode ser triangularizável, isto é, pode ser apresentada em forma de poliedro formado por faces triangulares e cujas faces só compartilham arestas e vértices (de forma mais generalizada, podemos cobrir a superfície compacta por um complexo simplicial), mas nesse caso as ferramentas para o cálculo da Característica de Euler-Poincaré vão

se tornando cada vez mais complexas, a ponto de se perderem as noções intuitivas da Geometria Euclideana.

Exemplo 2.1. O poliedro da Figura 1 é homeomorfo à esfera.

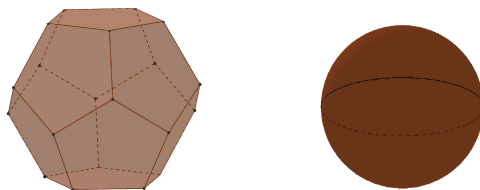


Figura 1: Poliedro homeomorfo à esfera

Exemplo 2.2. O poliedro da Figura 2 é homeomorfo a um toro.

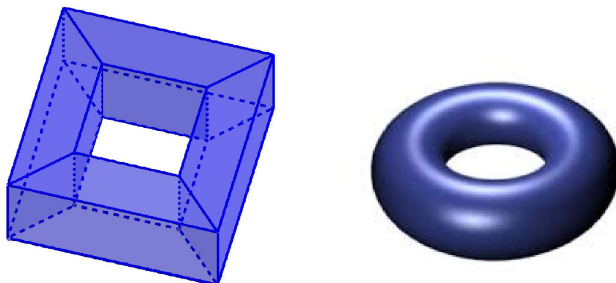


Figura 2: Poliedro homeomorfo a um toro

Igualmente homeomorfa ao toro, a figura a seguir possui a Característica de Euler-Poincaré igual a 0, porém, é óbvio que, ao contarmos o número de faces, arestas e vértices constatamos que a tarefa não é tão fácil.

É irrelevante a forma poliédrica que se retrate um toro, desde que se tenha a propriedade que as faces só possuam em comum arestas com arestas e vértices com vértices, para que a fórmula $V - A + F$ seja sempre constante e igual a 0, exatamente por ser esse número um invariante topológico. Tal tarefa, porém, pode se tornar complexa de acordo com a forma escolhida.

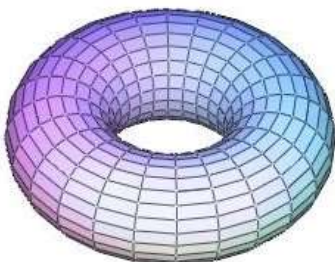


Figura 3: Poliedro homeomorfo a um toro

2.2. Poliedros n -tóricos

Nesta seção, tratamos de poliedros com buracos no formato do exemplo 2.2. Percebemos que a Fórmula de Euler não está satisfeita para esse poliedro com buraco, já que $V - A + F = 0$ e esperávamos que esse valor fosse 2, e isso ocorre exatamente porque esse objeto não é homeomorfo à esfera.

Dessa forma, usando apenas indução finita, demonstraremos o valor da Característica de Euler-Poincaré para uma classe de poliedros homeomorfos aos n -toros.

Na verdade, o que necessitamos é uma classe de objetos homeomorfos aos n -toros que sejam construídos de forma poliédrica, sendo que o número de faces, arestas e vértices, sejam controladas à medida que se adere a ele um novo toro.

Entre as provas da validade da Característica de Euler-Poincaré está a utilização de complexos simpliciais; primeiro mostra-se que toda superfície compacta pode ser triangularizável, depois estuda-se o que ocorre quando se unem simplexes, e, finalmente prova-se a validade do invariante. Para conhecer mais sobre esses resultados temos uma classificação completa das superfícies compactas na dissertação de SOUZA(2016) ou um estudo mais algébrico utilizando simplexes no livro de HU(1966) e, ainda, algumas aplicações destes resultados podem ser encontradas no livro de CARMO(2006).

O que faremos é uma simplificação desse processo. Para isso criaremos uma definição intuitiva de uma forma poliédrica de n -toros, como nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.3. Consideremos um poliedro 1-tórico, conforme Figura 4. A Característica de Euler-Poincaré do poliedro 1-tórico é dada por

$$X(P) = V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0.$$

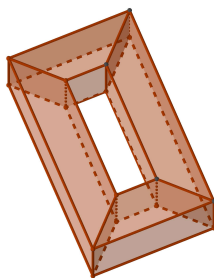


Figura 4: 1-tórico.

Exemplo 2.4. Consideremos um poliedro 2-tórico, veja Figura 5. A Característica de Euler-Poincaré do poliedro 2-tórico é dada por

$$X(P) = V - A + F = 24 - 48 + 22 = -2.$$

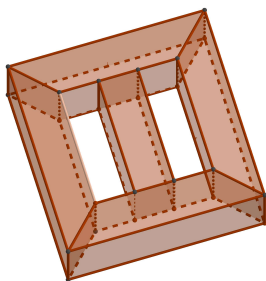


Figura 5: 2-tórico

Exemplo 2.5. Para 3-tórico, temos

$$X(P) = V - A + F = 32 - 64 + 28 = -4.$$

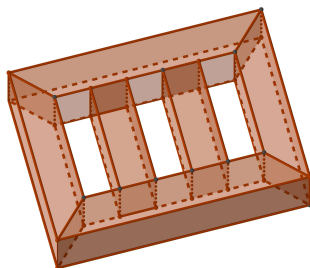


Figura 6: 3-tórico

Definição 2.6 (Poliedros n -tóricos). Em linhas gerais, denominamos de poliedros n -tóricos os poliedros, retos ou oblíquos cujas faces são paralelogramos e em sua constituição final aparecem com n buracos construídos de forma que as faces internas, que constituem os buracos, são paralelas às faces externas, conforme os exemplos anteriores.

Pretendemos demonstrar, por indução finita, a Característica de Euler-Poincaré para poliedros n -tóricos.

Calculando a Característica de Euler-Poincaré dos poliedros das Figuras 4, 5 e 6, obtemos termos de uma progressão aritmética, a saber $(0, -2, -4, \dots)$, de razão $r = -2$, onde o primeiro termo é $a_1 = 0$. Assim, o termo geral a_n dessa progressão é dado por

$$a_n = a_1 + (n - 1).r = 0 + (n - 1).(-2) = 2 - 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esse resultado motiva-nos a enunciar uma reformulação da conhecida Fórmula de Euler, que corresponderá a Característica de Euler-Poincaré para poliedros n -tóricos.

Teorema 2.7. Seja P um poliedro n -tórico com V vértices, A arestas e F faces. Então, a Característica de Euler-Poincaré de P é dada por

$$X(P) = V - A + F = 2 - 2n, \tag{1}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução sob $n \in \mathbb{N}$. Para o 1-tórico, conforme Figura 4, temos

$$X(P) = V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0,$$

satisfazendo (1).

Suponhamos a fórmula (1) válida para um poliedro n -tórico, $n > 1$.

$$X(P) = V_n - A_n + F_n = 2 - 2n,$$

onde V_n , A_n e F_n denotam o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, do poliedro n -tórico.

Nosso objetivo é provar que a fórmula (1) vale para poliedros com $n + 1$ buracos.

Para concluirmos a prova, vamos examinar o que acontece quando incluímos mais um buraco em poliedro um n -tórico.

Como ilustração vamos unir os poliedros das Figuras 4 e 5 por meio de suas faces (esse procedimento topológico é chamado de cirurgia ou soma conexa).

Notemos que, para o poliedro da Figura 5, vale $X(P) = V_2 - A_2 + F_2 = 2 - 2(2)$. Ao “colarmos” os dois poliedros das Figuras 5 e 4, a saber o 2-tórico e o 1-tórico, alguns vértices, faces e arestas tornar-se-ão apenas um. E obtemos um novo poliedro com um buraco a mais, ou seja, um poliedro 3-tórico, Figura 6, para o qual podemos contar e verificar que $X(P) = V_3 - A_3 + F_3 = 2 - 2(3)$.

De fato, isso é exatamente o que ocorre no caso geral quando unimos convenientemente um poliedro n -tórico a um poliedro 1-tórico, para obter um poliedro $n + 1$ -tórico. O que precisamos estudar é o que ocorrem com os vértices, arestas e faces nesse procedimento para obtermos o caso geral.

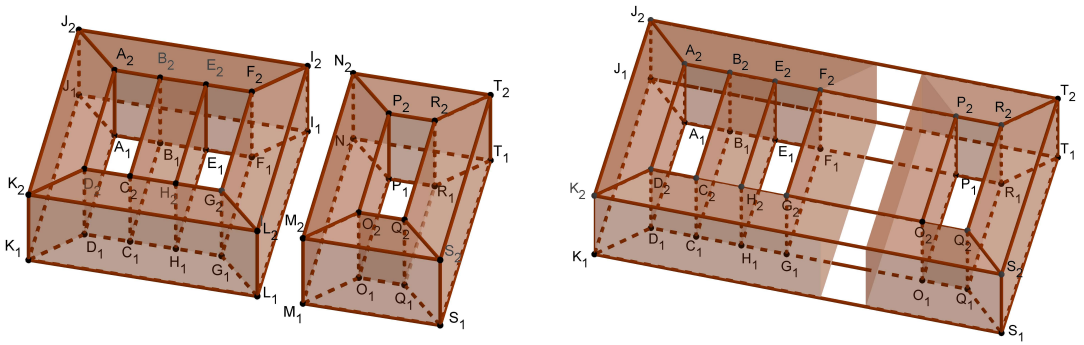


Figura 7: $(2 + 1)$ -tórico

A seguir, apresentamos a demonstração geral de forma detalhada.

Com relação aos vértices V_n do poliedro n -tórico, ao juntarmos os poliedros como nas Figuras 7, o novo poliedro terá 16 vértices a mais oriundos do poliedro da Figura 4, porém 4 vértices de cada figura tornar-se-ão apenas um, a saber, (I_1, I_2, L_1, L_2) e (M_1, M_2, N_1, N_2) . Desta forma, o número de vértices obtidos em V_{n+1} é dado por $V_n + 16 - 8$.

Com relação às arestas, observamos que as A_n arestas do poliedro n -tórico serão acrescentadas as 32 arestas da Figura 4, porém muitas arestas acabaram por se unir, a saber,

$$\begin{aligned} & (I_1 I_2, L_1 L_2, I_1 L_1, I_2 L_2), \\ & (M_1 M_2, N_1 N_2, M_1 N_1, M_2 N_2), \\ & (F_1 I_1, F_2 I_2, G_1 L_1, G_2 L_2), \\ & (M_1 O_1, M_2 O_2, N_1 P_1, N_2 P_2), \\ & (I_1 J_1, I_2 J_2, K_1 L_1, K_2 L_2), \\ & (M_1 S_1, M_2 S_2, N_1 T_1, N_2 T_2). \end{aligned}$$

Ainda novas arestas serão formadas; veja

$$(K_1 S_1, K_2 S_2, J_1 T_1, J_2 T_2), (F_1 P_1, F_2 P_2, G_1 O_1, G_2 O_2).$$

Daí, obtemos o seguinte número de arestas

$$A_{n+1} = A_n + 32 - 24 + 8.$$

Com relação às faces do novo poliedro, temos que as F_n faces do poliedro da n -tórico serão acrescentadas às 16 faces do poliedro da Figura 4, porém algumas faces unir-se-ão, a saber,

$$(I_1 I_2 L_1 L_2, M_1 M_2 N_1 N_2),$$

$$(F_1 G_1 I_1 L_1, F_2 G_2 I_2 L_2, M_1 N_1 O_1 P_1, M_2 N_2 O_2 P_2),$$

$$(D_1 G_1 K_1 L_1, D_2 G_2 K_2 L_2, A_1 F_1 I_1 J_1, A_2 F_2 I_2 J_2, M_1 O_1 Q_1 S_1, M_2 O_2 Q_2 S_2, N_1 P_1 R_1 T_1, N_2 P_2 R_2 T_2)$$

e

$$(K_1 K_2 L_1 L_2, M_1 M_2 S_1 S_2, I_1 I_2 J_1 J_2, N_1 N_2 T_1 T_2)$$

dando origem às faces

$$(F_1 G_1 O_1 P_1, F_2 G_2 O_2 P_2),$$

$$(D_1 K_1 Q_1 S_1, D_2 K_2 Q_2 S_2, A_1 J_1 R_1 T_1, A_2 J_2 R_2 T_2)$$

e

$$(J_1 J_2 T_1 T_2, K_1 K_2 S_1 S_2).$$

Logo, obtemos o seguinte número de faces do $(n + 1)$ -tórico, como mostra a Figura 8,

$$F_{n+1} = F_n + 16 - 18 + 8.$$

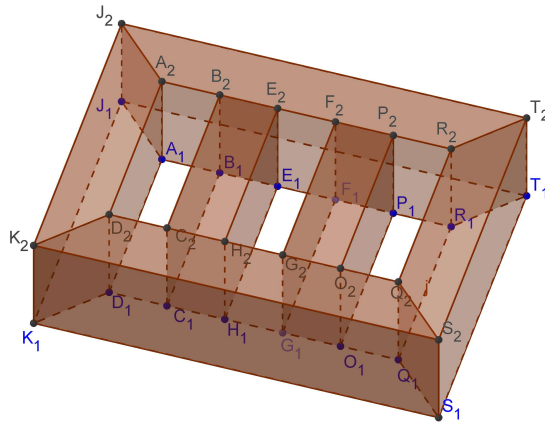


Figura 8: $(n + 1)$ -tórico

Agora, em particular, para o poliedro $(n + 1)$ -tórico,

$$V_{n+1} - A_{n+1} + F_{n+1} = V_n + 16 - 8 - (A_n + 32 - 24 + 8) + F_n + 16 - 18 + 8 = V_n + 8 - A_n - 16 + F_n + 6.$$

Logo,

$$V_{n+1} - A_{n+1} + F_{n+1} = V_n - A_n + F_n - 2 = 2 - 2n - 2 = 2 - 2(n + 1).$$

Portanto, a fórmula (1) é válida para poliedros com $n + 1$ buracos, conseqüentemente,

$$X(P) = V - A + F = 2 - 2n,$$

é válida para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, provando o resultado desejado. □

3. Considerações finais

Os poliedros aqui chamados de n -tóricos são versões poliédricas de n -toros, para os quais se conhece muito bem a Característica de Euler-Poincaré- entretanto, por se tratar de invariante topológico, em geral, para sua apresentação faz-se necessário um ferramental topológico muito grande, como, os simplexos, as cirurgias ou somas conexas, entre outros.

Como vimos na Figura 3, a escolha da figura poliédrica homeomorfa a um n -toro é o que diferencia a capacidade de se contar o número de faces, arestas e vértices. Assim, para simplificarmos a prova do valor da Característica precisamos fazer uma escolha planejada - neste caso os poliedros n -tóricos.

Por outro lado, é claro que o presente artigo lança mão das mesmas ferramentas topológicas, como os simplexos, uma vez que faces poliédricas formam um simplexo, mas o faz de maneira menos elaborada - demonstramos esse fato usando a boa e velha observação (tão usada na geometria ao longo da história) e a indução finita.

Tal resultado, assim, passa a ser relevante como ferramenta para melhorar ainda mais as possibilidades de sedução (já mencionadas) da geometria aos jovens estudantes. Não esperamos, portanto, que esse trabalho seja visto como inovador mas como uma forma diferente e, talvez, mais atraente de ver a geometria envolvida neste resultado.

De forma muito similar pode-se, ainda, definir a garrafa de Klein poliédrica (infelizmente não tão intuitiva como os n -toros, veja [8],[9]) e verificar que a fórmula ainda é válida para objetos de característica positiva.

Agradecimentos

Agradecimento especial ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat

Referências

- [1] CARMO, M.P. do *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM. 2006.
- [2] GISOLDI, D. V. *A característica de Euler*. 43f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Orientador: Alice Kimie Miwa Libardi. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2013.
- [3] HU, Sze-Tse. *Homology Theory: a first course in algebraic topology*. San Francisco: Holden-Day, Inc. 1966.

- [4] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM. 1991.
- [5] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C., WAGNER, E., *A Matemática do Ensino Médio*. vol. 2. Rio de Janeiro: SBM. 1999.
- [6] PEDROCHI, W. E. *Teorema de Euler para poliedros não convexos*. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Orientador: Rodrigo Martins. Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 2016.
- [7] SOUZA, J. *Novo Olhar Matemática*. vol. 3. São Paulo: FTD. 2013.
- [8] SOUZA, A. F. M. de. *Um estudo sobre a classificação topológica das superfícies*. 86f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Orientadora: Thaís F. M. Monís. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016.
- [9] WOLFRAM MathWorld. *Klein Bottle*. Disponível em:
<http://mathworld.wolfram.com/KleinBottle.html>. Acesso em: 15 de set. 2019.

Luciene Parron Gimenes Arantes
Universidade Estadual de Maringá (UEM), DMA, Maringá, PR, Brasil
<lpgarantes@uem.br>

Wellen Eder Pedrochi
Universidade Estadual de Maringá (UEM), ProfMat, Maringá, PR, Brasil
<wpedrochi@hotmail.com>

Rodrigo Martins
Universidade Estadual de Maringá (UEM), DMA, Maringá, PR, Brasil
<rmartins@uem.br>

Recebido: 11/06/2019
Publicado: 24/10/2019

Geometria diferencial de curvas planas com Geogebra

Rafael Diógenes ¹

Resumo

Este trabalho explora a geometria diferencial de curvas planas com a ajuda do *software* Geogebra através da construção de um *Applet* com os principais conceitos usados nas curvas como vetor velocidade, vetor aceleração, curvatura e referencial de Frenet, mostrando o dinamismo que existe na curva com a variação do parâmetro. Além disso, explora a experiência do autor na disciplina de geometria diferencial de curvas do curso de matemática da Unilab mostrando os efeitos positivos do uso do Geogebra na disciplina.

Palavras-chave: Curvas Planas; Geogebra; Geometria Diferencial.

Abstract

This work explores differential geometry of flat curves with the help of Geogebra software by constructing an Applet with the main concepts used in curves such as velocity vector, acceleration vector, curvature and Frenet frame, showing the dynamism that exists in the curve with a variation of the parameter. In addition, explore the author's experience in the discipline of differential geometry of curves in the Unilab mathematics course shows the positive effects of use of geogebra in the discipline.

Keywords: Geogebra; plane curves; differential geometry.

1. Introdução

O uso das tecnologias no ensino da matemática não é mais uma novidade, porém ainda temos uma grande dificuldade de relacioná-las ao conteúdo matemático, uma vez que de nada vale ter o conhecimento da tecnologia e não saber os conceitos matemáticos que se pretende aprofundar ou mesmo ajudar no entendimento. Toda tecnologia é sempre bem-vinda, e a mesma precisa encontrar espaços maiores nas salas de aula ou nas atividades de ensino e aprendizagem. Um dos pontos importantes no uso das tecnologias é saber o momento certo de usá-las em sala de aula, pois o uso demasiado pode fazer com que os alunos percam o rigor matemático, pois nenhuma figura, equação ou expressão em computadores, por exemplo, prova um resultado ou teorema, mas podem

¹O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (Capes) – Código de Financiamento 001

indicar o caminho para a solução. Ainda assim, eles podem ser usados para averiguar resultados ou conferir respostas. Nesse sentido Hellmann *et al* [2] relata que

A utilização da tecnologia, especialmente a do computador, pode ser encarada como colaboradora na sala de aula, pois permite tratar de problemas diversos, que envolvem diferentes níveis de complexidade algébrica e grande quantidade de dados. Ela é facilitadora, já que, ao possibilitar uma ampla visualização de imagens, contribui tanto para a melhor aprendizagem de conceitos, quanto para aplicações da Matemática (Hellmann et al, 2016, p. 34)

No caso específico de Geometria de curvas, podemos complementar Hellmann *et al* [2] dizendo que o uso do computador ou aplicativo do Geogebra ajuda na visualização da dinâmica que existe entre o parâmetro de uma curva com seu ponto no plano, com seu vetor velocidade, com sua curvatura, etc. E de fato, com as dificuldades de aprendizado que temos hoje, essa visualização facilita bastante o entendimento do conteúdo por parte dos alunos. Além de que podem ir além do que é ensinado pelo professor.

Neste trabalho vamos explorar as curvas parametrizadas diferenciáveis, mais especificamente, a geometria diferencial de curvas no plano, entretanto, com os devidos ajustes pode-se estender o que será explorado para curvas no espaço euclidiano tridimensional. Nossa abordagem terá como base os conceitos de geometria diferencial, que pouco muda da abordagem das curvas parametrizadas que se estuda em geral no cálculo diferencial e integral II. Naturalmente a didática do professor em sala de aula é essencial para um bom aprendizado dos alunos. Aqui não iremos explorar aspectos pedagógicos do uso do Geogebra, mas sim dos conteúdos de Geometria de curvas dando as diretrizes de como construir um *Applet* que contenha a maioria dos conceitos usados durante o estudo de curvas planas. *Applet* é o que se denomina uma construção feita no Geogebra. Em todo o trabalho admitimos que o leitor esteja familiarizado com os comandos do Geogebra.

2. Curvas parametrizadas diferenciáveis

Quando se pretende definir matematicamente uma curva no plano, essa não pode fugir da nossa intuição de curva como um subconjunto unidimensional do plano que “desenhe” um traço como um lápis, de uma única vez, sem tirá-lo do papel (veja [1]). Claramente, gráficos de funções devem ser exemplos, mas não os únicos; a circunferência também deve ser um exemplo, e esta não é gráfico de função. Desse modo, uma maneira bem eficaz de definir uma curva segundo Alencar e Santos ([1]) é considerarmos que um ponto $\alpha(s)$ representa a posição de uma partícula em movimento contínuo, quando o tempo s varia em um intervalo $[a, b]$. O conjunto que iremos considerar é $C = \{\alpha(s); s \in [a, b]\}$. Assim, conseguimos formalizar o conceito de curvas e as noções de vetores velocidade e aceleração fazem todo o sentido, pois o ponto $\alpha(s)$ “anda” sobre C .

Assim, podemos definir uma curva parametrizada diferenciável no plano como uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável s é dita parâmetro da curva, e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\{\alpha(s); s \in I\}$ é chamado traço da curva α . Logo, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, onde x e y são funções diferenciáveis de I em \mathbb{R} .

Um exemplo clássico é a circunferência cuja parametrização pode ser $\alpha(s) = (\cos(s), \sin(s))$, $s \in \mathbb{R}$. Na medida em que o parâmetro s desloca-se em \mathbb{R} o ponto $\alpha(s)$ desloca-se no sentido anti-horário

sobre a circunferência centrada na origem e de raio 1. Para quem já tem um bom entendimento, essa explicação não é nada demais, porém encontramos cada vez mais alunos com dificuldades de visualizar esses tipos de movimentos.

Note que há um dinamismo entre o parâmetro s e o ponto da curva, e, além disso, com essa definição temos um deslocamento do ponto. Assim, o Geogebra nesse momento pode ser bastante utilizado, pois permite esse dinamismo que existe entre o parâmetro s e o ponto $\alpha(s)$.

Vamos iniciar a construção do *Applet* com três controles deslizantes a , b e s , com as seguintes propriedades: a varia de -10 até 10 , b varia de a até 10 e s varia de a até b (todos com incremento de 0.01 e colocar para não exibir, exceto o s que deve ser exibido na Janela de visualização 2). Para termos um bom uso do *Applet* é necessário construirmos as funções coordenadas separadamente. Assim, a função coordenada $x(s)$ será denotada por $f(s)$ e a função coordenada $y(s)$ será denotada por $g(s)$. Logo, no campo de entrada escrevemos $f(s) = \cos(s)$ e posteriormente $g(s) = \sin(s)$ (ambos marcados como não exibir). Feita essa primeira parte, podemos construir a curva desejada escrevendo no campo entrada $\alpha = \text{curva}(f(u), g(u), u, a, b)$ (desmarcar a opção de exibir rótulo).

Agora, vamos construir o ponto que se deslocará sobre a curva. Para isso, escreva no campo de entrada $P = \alpha(s)$ (desmarcar exibir rótulo). Por fim, podemos inserir campos de entrada para cada item construído acima e colocarmos todos eles na Janela de Visualização 2 conforme Figura 1. Para uma melhor configuração, pode-se acrescentar a definição de curva na Janela de Visualização 2.

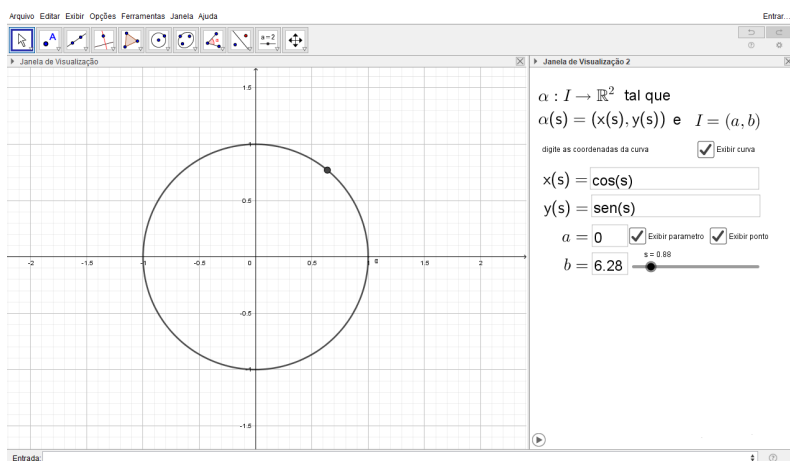


Figura 1: Construção inicial do *Applet*. Exemplo da circunferência

Nessa primeira parte o leitor pode mudar à vontade as coordenadas $x(s)$, $y(s)$, e os números a e b , construindo assim a curva que desejar.

Desde que estamos tratando curva como a trajetória de uma partícula que desloca-se dependendo de um parâmetro s , podemos então falar naturalmente de velocidade e aceleração. Considerando uma curva parametrizada diferenciável que a cada s associa $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, o vetor $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ é chamado de vetor velocidade (ou tangente) de α em s . O módulo do vetor velocidade

é a velocidade instantânea. O vetor $\alpha''(s) = (x''(s), y''(s))$ é chamado de vetor aceleração de α em s .

Algo simples, mas que muitos alunos não percebem inicialmente é que o módulo do vetor velocidade pode variar com o parâmetro. Assim, podemos continuar a construção do nosso *Applet*, para que fique clara essa variação de tamanho. Além disso, o vetor aceleração aponta sempre para “dentro” da curva, que pode ser observado no *Applet*.

Nessa parte da construção, vamos construir os vetores velocidade e aceleração. Para o vetor velocidade no campo de entrada digita-se $\alpha' = \text{vetor}(P, P + \alpha'(s))$ (desmarcar exibir rótulo). Para o vetor aceleração, faz-se de maneira similar: no campo de entrada digita-se $\alpha'' = \text{vetor}(P, P + \alpha''(s))$ (desmarcar exibir rótulo). Em ambos os casos, construímos caixas para exibir/esconder objetos, colocando a legenda $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$, respectivamente. Com isso, temos uma ilustração de como os vetores velocidades variam de tamanho (Figura 2) e também os vetores aceleração (Figura 3). Para uma melhor ilustração vamos fazer no exemplo da cardioide $(x(s) = \cos(s)(2\cos(s) - 1)$ e $y(s) = \sin(s)(2\cos(s) - 1)$).

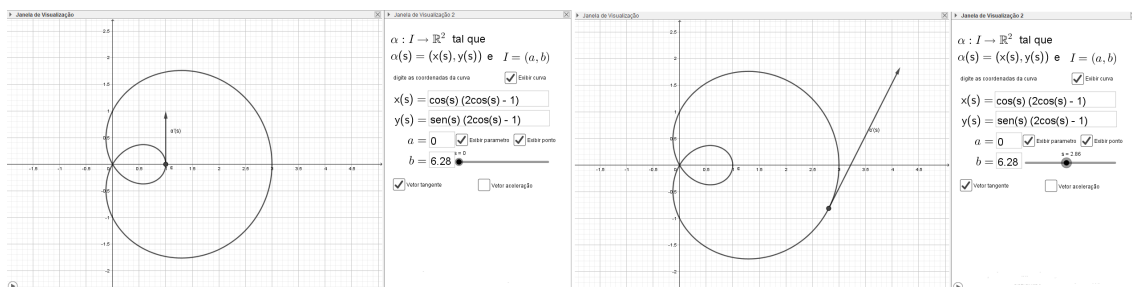


Figura 2: Variação do vetor velocidade

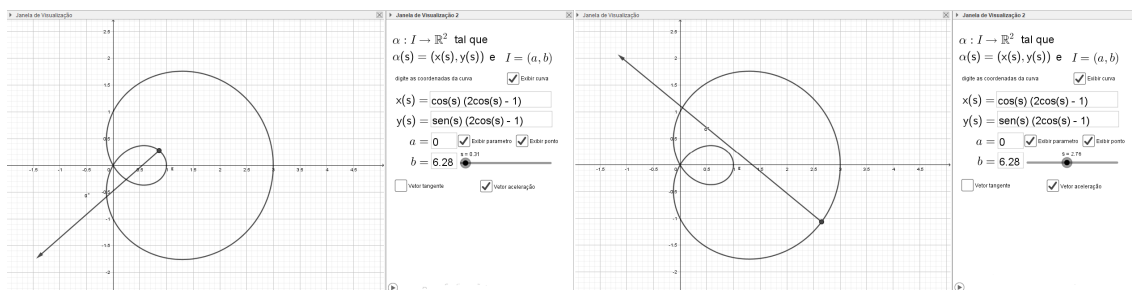


Figura 3: Variação do vetor aceleração

Naturalmente, pode-se trabalhar a questão de curva regular no intervalo, que é quando o vetor velocidade não se anula em todo o parâmetro. Além disso, pode-se trabalhar também comprimento de arco, mas que não serão objetos de estudo desse *Applet*.

Para finalizar a construção do nosso *Applet*, vamos construir os referenciais de Frenet. Considerando uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $|\alpha'(s)| = 1$, para todo s , temos que o vetor velocidade é unitário para todo o parâmetro e fazendo $t(s) = \alpha'(s)$ temos o vetor tangente unitário à curva α em s . Como estamos trabalhando em \mathbb{R}^2 para cada parâmetro s , existe um vetor unitário e ortogonal a $t(s)$ que forma com $t(s)$ uma base positiva de \mathbb{R}^2 . Seja $n(s)$ o vetor unitário normal este vetor. O par de vetores $\{t(s), n(s)\}$ forma uma base positiva para todo s e é chamado de referencial de Frenet da curva α em s .

O referencial de Frenet satisfaz as seguintes equações, conhecidas como equações de Frenet

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases},$$

onde $k(s)$ é chamada de curvatura de α em s e mede o quanto a curva deixa de ser uma reta, ou seja, quanto mais curvada for a nossa curva, maior será o valor de $|k(s)|$. Uma observação importante é que a função $k(s)$ pode ser positiva, nula ou negativa, e isso vai depender exatamente de $t'(s)$ e $n(s)$ estarem na mesma direção.

A construção do referencial é feita para curvas regulares parametrizadas pelo comprimento de arco, mas também se pode calcular o referencial de Frenet para curvas com parâmetro qualquer, pois a curvatura não vai depender da parametrização. Assim, podemos dizer que o vetor unitário tangente é o vetor velocidade normalizado, e o vetor unitário normal é o vetor que forma com o tangente uma base positiva do \mathbb{R}^2 .

Para continuar a construção do nosso *Applet*, vamos normalizar o vetor velocidade e construir o vetor normal a partir desse. Para isso, digita-se no campo de entrada $t = \text{VetorUnitario}(\alpha')$ e posteriormente $n = \text{VetorPerpendicular}(t)$. E mais uma vez desmarcar os exibir rótulos. Além disso, constroem-se as caixas de exibir/esconder objetos para cada um dos vetores. Na Figura 4 exibimos o referencial de Frenet em alguns pontos.

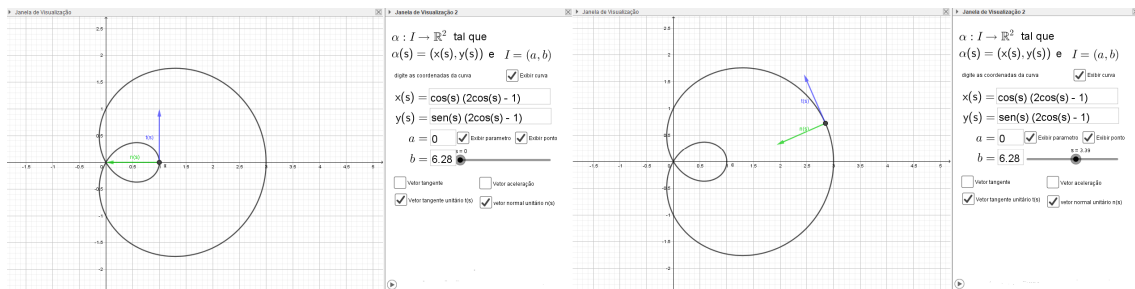


Figura 4: Variação do referencial de Frenet

Um dos aspectos importantes da curvatura é perceber o quanto mais curvada for a curva, maior será, em módulo, o valor da curvatura. Para vermos isso no *Applet*, vamos construir o vetor $t'(s)$, pois das equações de Frenet vem que $|t'(s)| = |k(s)|$. Para isso, no campo de entrada digita-se $k = \text{VetorCurvatura}(P, \alpha)$ e nas propriedades desmarca-se o exibir rótulo e muda-se a cor para dar um destaque (aqui será vermelho). Além disso, constrói-se uma caixa de exibir/esconder objeto na Janela de Visualização 2 com a legenda $k(s)n(s)$ (veja Figura 5). Com isso, pode-se notar a

variação do tamanho do vetor e perceber visualmente que quanto mais curvada a curva, maior será o módulo do vetor curvatura.

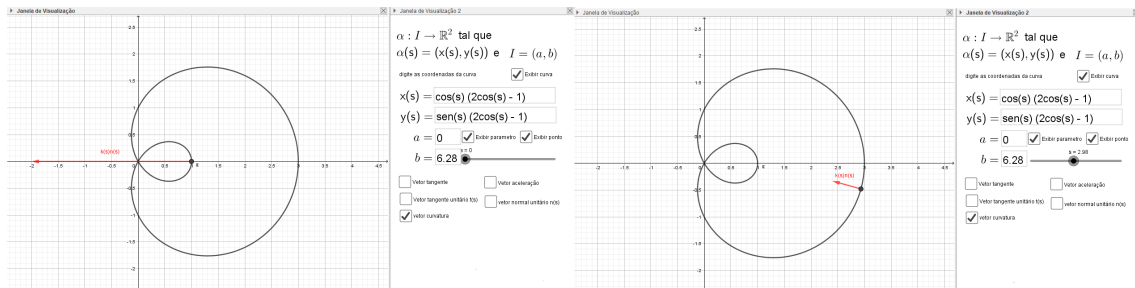


Figura 5: Variação do vetor curvatura

3. Uma experiência na Unilab

Tudo que foi construído na seção anterior não é mero conteúdo, mas sim fruto de uma experiência na disciplina de geometria diferencial de curvas do sétimo semestre do curso de Matemática da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab). Já havia preparado toda a disciplina incluindo o uso do Geogebra para facilitar o entendimento dos alunos e o resultado foi bastante satisfatório. Decidi acompanhar o desenvolvimento do entendimento dos alunos depois que na primeira aula faltou energia e continuei a aula normalmente sem o uso do Geogebra (aqui se mostra necessário o preparo do professor para os diversos imprevistos, principalmente relacionados às tecnologias) e no momento estava explicando o vetor velocidade e como ele varia de tamanho de acordo com o parâmetro. Na aula seguinte fiz uma pesquisa para ver se eles haviam entendido, apenas pelas explicações do quadro, que o vetor velocidade pode variar pelo parâmetro da curva e, de 20 alunos, 12 responderam que não. Continuei a aula, expliquei o vetor velocidade com o Geogebra e ao final da aula realizei uma nova pesquisa perguntando se após o uso do Geogebra eles conseguiram compreender a possibilidade de variação do tamanho do vetor velocidade. E a resposta foi bem positiva, dessa vez, 17 responderam que sim (Veja Figura 6).

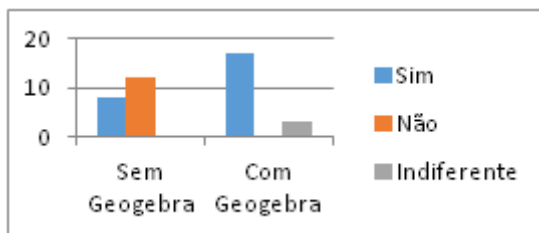


Figura 6: Compreensão da variação do tamanho do vetor velocidade com e sem Geogebra

É nítido como o Geogebra melhora a percepção dos alunos para essa parte dinâmica. Em toda aula havia uma pesquisa ao final, para saber do entendimento acerca dos conteúdos e conceitos passados.

Todas as perguntas sempre se direcionavam sem o uso do Geogebra e com o uso do Geogebra. As perguntas foram: *Você conseguiu compreender o conceito de curvatura e o referencial de Frenet? Os slides com a explicação no Geogebra ajudaram a compreender e visualizar o referencial de Frenet? Os slides com a explicação no Geogebra ajudaram a compreender e visualizar o significado da curvatura de uma curva através do vetor curvatura?* (Veja Figura 7). Por fim, foi perguntado aos alunos se o Geogebra ajudara-os a compreender os conteúdos, e o resultado foi bastante satisfatório (veja Figura 8).

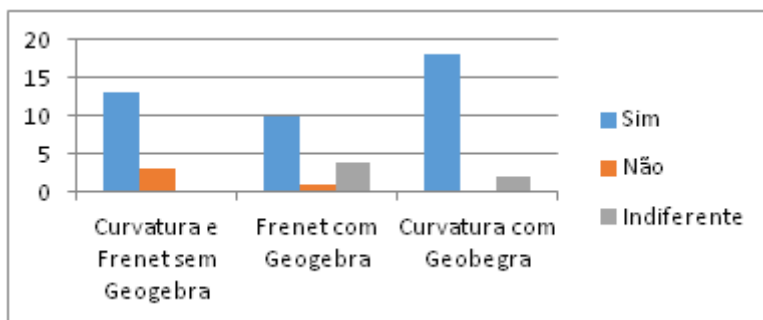


Figura 7: Compreensão da curvatura e referencial de Frenet

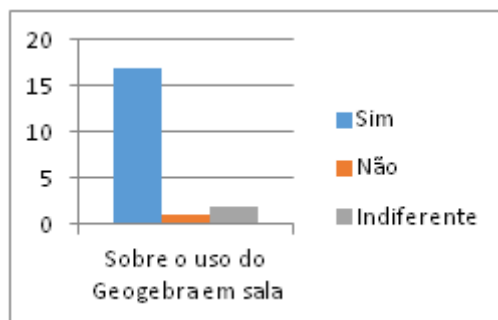


Figura 8: Compreensão dos conteúdos com o uso do Geogebra nas aulas

Por fim, compartilho o *link* do arquivo final do *Applet* <https://ggbm.at/uaykprt>, para o leitor que desejar.

4. Conclusão

O uso do Geogebra no ensino de curvas mostra-se muito eficaz, fazendo com que o aluno consiga compreender melhor o conteúdo e para o professor é uma ferramenta poderosa para fazer com que os alunos desenvolvam interesse pela matemática. Além, é claro, da facilidade de testar outros exemplos de curvas e opções de exibir ou não os seus vetores velocidade, aceleração e curvatura.

Agradecimentos

O autor agradece ao parecerista pelas valiosas contribuições ao texto.

Referências

- [1] ALENCAR, H.; SANTOS, W. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*, 2003. Disponível em <<https://www.im.ufal.br/posgraduacao/posmat/index.php/downloads/category/6-livros?download=61:livro.geometria.diferencial.das.curvas.planas02.07.2003>> . Acesso em: 01 nov. 2018.
- [2] HELLMANN, L.; SANDMANN, A.; HALLAL, R.; CARVALHO, A. de P.; GASPARIN, P. P.; GAFFURI, S. L. *Geogebra no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I*. R. Eletr. Cient. Inov. Tecnol., Medianeira, v. 2, n^o 14, pp. 31-46, jul./dez. 2016. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/recit>> . Acesso em: 01 nov. 2018.
- [3] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2^a Edição revisada. São Paulo: Blucher, 2008.

Rafael Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira,
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza,
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
<rafaeldiogenes@unilab.edu.br>

Recebido: 12/04/2019
Publicado: 28/10/2019

Uma proposta pedagógica para o ensino de potenciação por meio de atividades lúdicas

Daniely Cristiny Lucas Reghim

Glaucia Maria Bressan

Resumo

O presente trabalho apresenta uma proposta pedagógica de ensino que contribua para a abordagem do conteúdo de Potenciação no 1º ano do Ensino Médio, mediante a inserção de jogos e atividades lúdicas no cotidiano escolar. A proposta foi aplicada em uma turma de uma escola pública do interior do estado do Paraná, onde foi realizado o Estágio Supervisionado da primeira autora deste trabalho. Foi aplicado um jogo de bingo referente ao tema trabalhado, abordando o conteúdo de Potenciação. A metodologia aplicada trouxe resultados positivos na realização da tarefa dos alunos, proporcionando dinamismo, desafios e uma maior interação entre os alunos, contribuindo assim para uma melhor aprendizagem.

Palavras-chave: Potenciação; Jogos; Regência; Ensino Médio.

Abstract

This paper presents a pedagogical proposal of teaching, which contributes to the approach of the Potentiation content in the first year of high school, through the insertion of games and recreational activities in daily school life. The proposal was applied in a class of a public school in the interior of the state of Paraná, where the Supervised Internship of the first author of this paper was performed. A bingo game was applied, corresponding to the taught subject, addressing the content of Potentiation. The applied methodology brought positive results in the accomplishment of the students task, providing dynamism, challenges and greater interaction among the students, thus contributing to a better learning.

Keywords: Potentiation; Games; Regency; High school.

1. Introdução

O conceito de Potenciação está presente hoje em diversas situações do cotidiano da sociedade, sendo utilizado, por exemplo, nos cálculos envolvendo juros compostos, que são desenvolvidos baseado na potenciação das taxas de juros; a função exponencial também é um exemplo onde utilizamos potências, a notação científica utiliza potências no intuito de representar números muito grandes ou pequenos. É notória a importância das potências nos cálculos matemáticos modernos, facilitando e contribuindo na resolução de problemas cotidianos.

Em se tratando de aulas de matemática, o uso de jogos implica uma transformação significativa nos processos de ensino e aprendizagem que permite modificar-se o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes tem no livro e em exercícios padronizados seu principal recurso didático [8]. O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisões, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico [7]. Além disso, para o ensino de matemática por meio de jogos, é fundamental o domínio dos conceitos pelo docente, para que as dúvidas que possam surgir ao decorrer do jogo sejam atendidas. Conforme [6], as formas de manipular valores, realizar operações, elaborar e solucionar problemas são determinados não só pela estrutura lúdica, mas também pelos conhecimentos socioculturais que, incorporados pelas crianças, passam a fazer parte do sistema de regras dos jogos.

Neste trabalho, propõe-se a utilização de jogos e atividades lúdicas para a abordagem da definição e das propriedades da potenciação para relembrar o conteúdo já visto no ensino fundamental, pois sua relação direta com operações elementares da matemática permite simplificar expressões mais complexas para melhor manipulá-las e, mesmo no Ensino Médio, tornam-se conteúdos importantes para as disciplinas de física, química, biologia e para a própria matemática. “A aplicação do jogo, trazendo situações do contexto do/a aluno/a, vem contemplar toda a sua gama de conhecimento que foi construída fora da escola e, muitas vezes, é ignorada em sala de aula” [5]. Com o intuito de aproveitar esta bagagem de conhecimento trazida e tornar o aprendizado mais lúdico, buscou-se a utilização de jogos matemáticos para contribuir na aprendizagem da Potenciação no 1º ano do ensino médio, proporcionando dinamismo, desafios, uma maior interação entre os alunos e entre esses e o professor, além de desenvolver vários aspectos atrelados à aprendizagem. A atividade proposta foi aplicada em uma turma de uma escola pública do interior do estado do Paraná, onde foi realizado o Estágio Supervisionado da primeira autora deste trabalho.

A proposta apresentada neste trabalho mostra-se pertinente pois, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [1], “embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações”. Desta forma, o uso de jogos se torna uma ferramenta de auxílio para progressão do aprendizado do aluno.

2. Atividade Desenvolvida no 1º ano do Ensino Médio

Primeiramente, as atividades do Estágio Supervisionado foram iniciadas a partir das observações em sala de aula, no 1º do Ensino Médio. Em seguida, a regência ocorreu nos meses de setembro, outubro e novembro de 2018. Foi realizada uma revisão sobre o conteúdo de potenciação com a aplicação de uma lista de resolução de problemas. Logo depois, foi exposto o conteúdo com as propriedades e as regras da potenciação.

Em seguida, foi aplicado um jogo de Bingo com as propriedades da Potenciação, por já terem visto esse conteúdo em outro ano escolar e por ter feito mais uma revisão dada na aula anterior; assim, foram aplicadas algumas expressões mais elaboradas. A Figura 1 exibe a relação das expressões utilizadas para o jogo de Bingo. Essas expressões foram escritas no quadro, uma a uma, baseadas em [2, 3]. Os alunos deveriam então calcular a expressão em seu caderno e obter o resultado da operação. Em seguida, deveriam verificar se aquele resultado constava em sua cartela, recebida pela

professora. Em caso afirmativo, marcavam um sinal sobre o valor; em caso negativo, aguardavam a próxima expressão. O aluno que completasse a cartela toda, seria o vencedor [4]. Uma das cartelas distribuídas para os alunos é exibida na Figura 2.

$\frac{10^{-2} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}}{10^{-1} \cdot 10^{-6}}$	$\frac{2 \cdot (3^6 + 3^5)}{3^4 - 3^3}$	7^{-2}	$\left[\left(-\frac{1}{2} \right)^4 : \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right] \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^6 + 2^{-7}$	$\frac{8^{-2} - 4^{-2}}{8^{-1} - 4^{-1}}$	$[-2]^2 - 2^{-1}$
$(0,3)^{-1} + (-27)^{0,333\dots}$	$2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 2^{-2}$	$4^0 + 4^{-1} - 5^{-1}$	$4 \cdot (2,5)^2 - 8 \cdot (1,5)^2$	$(0,4)^2 + 2 \cdot (1,2)^2$	$y = \frac{2^{-2} + 2^2 - 2^{-1}}{2^{-2} - 2^{-1}}$
$(-1)^{10} + 3 \cdot (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^6$	$8^{0,666\dots} - 9^{0,5}$	$[16^2 \cdot 64^3] : 1024$	$\frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4}$	$10x^2 + 100x - 100$ para $x = 5$	Se $a = 3^2e$ e $b = a^2$, então o valor do produto ab é
$x^3 - x^2 - x + 1$ para $x = -1$	$\frac{2^{3+x} - 3^{x-3}}{2^x + 2^{x-3}}$	$\frac{3^{x+2} + 3^{x+1}}{3^{x-1}}$	$\frac{35^{-1} \cdot 40^{-1} \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 100}{2^3 \cdot 14^{-1} \cdot 5 \cdot 25}$	$[4^2 + (5 - 3)^2] : (9 - 7)^2$	$(5^{-5})^5$
$\frac{\left(\frac{x^3 - 25x}{3x - 15} \right) \cdot \left(\frac{3y}{x} \right)}{\frac{xy + 5y}{4}}$ Para $x = 2,71$ e $y = 3,14$	$\frac{x^2y^2 - x^3y}{y^2 - x^2}$ Para $x = 0,5$ e $y = 1,5$	$\frac{4^2 - 4^{-2}}{4^2 + 4^{-2}}$	$5^1 \cdot 3^{-2} + 3^{-1} - 3 \cdot 3^0$	$[2^9 : (2^2 \cdot 2)^3]^{-3}$	$(-5)^2 - 3^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^0 : \left(3^{-2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right)$
$(-1)^3 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{-1} \cdot (-2)^{-1}$	$2^3 - 2 \cdot 3^2$	$0^{25} + (-25)^0 + (-1)^4$	$(0,16)^0$	$2^2 \cdot 2^{-3}$	$\frac{2^{2003} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}}$
$\frac{3^0 + (-2)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^{-1}}{\left(\frac{1}{2} \right)^{-2}}$	$\frac{(-5)^2 - 4^2}{2^{-1} + 2^{-2}}$	$(5)^4 - (-5)^4$	$(-2) + (-3) \cdot (-2)^{-1} : (-3)$	$\frac{1}{9^2}$	14^1
$x = \left(-\frac{1}{3} \right)^3 + [3^{-1}(-3)^{-1}]^{-2}$	$3^2 - 23 + \left(\frac{1}{2} \right)^0$	$\left(\frac{3^4 \cdot 2^3}{37 \cdot 2^2} \right)^{-1}$	$\left(27^{\frac{1}{2}} + 64^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2^{-1} + (-2)^{-1} - (-2)^2}{1 - 2^{-2}}$	$\frac{9^3 \cdot 27^4 \cdot 3^{-7}}{3^{-1} \cdot 243^2}$
$(2^2 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-1} \cdot 3^2)^2$	$5 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$	$\frac{10^{-1}}{5^{-1} + 2^{-1}}$	$(0,5)^3 - (0,75)^2$	$4 \cdot 2^3 - \left(\frac{3}{2} \right) \cdot (-2)^1$	$(0,7777\dots)^0$
$\frac{1}{(-2)^{-5}}$	-5^3	$\left(-\frac{2}{3} \right)^{-3}$	$(-1)^0 + (-6) : (-2) - 2^4$	$\frac{(10^{-3} \cdot 10^5)}{(10 \cdot 10^4)}$	$20x^3 + 2x^2y^5$, para $x = -4$ e $y = 2$

Figura 1: Expressões utilizadas no jogo de bingo.

Ao entrar em sala, os alunos foram receptivos e participativos durante quase todas as atividades, apresentando bons resultados nos trabalhos em grupos e individuais. O conteúdo aplicado, Potenciação, foi abordado de uma maneira que os alunos compreendessem, trazendo exercícios para fixação. As inúmeras dúvidas que surgiam foram vistas e sanadas com a aplicação da lista de exercícios, resoluções de problemas e jogos, mostrando-lhes que existem outras formas de aprendizagem além da que eles estão acostumados. Mas acreditamos que o ensino deve ser constante e que em apenas poucas aulas não conseguiríamos fazer com que esse conteúdo fosse totalmente compreendido.

$\frac{9}{4}$	-256	1	$\frac{1}{100}$	3	$\frac{7}{2}$	0	1
14	4	36	$-\frac{7}{16}$	-13	-250	36	0
$-\frac{16}{3}$	0	1	0	7	729	$-\frac{19}{9}$	4
1	1	729	7	$\frac{1}{100}$	1	$\frac{255}{257}$	-256
$\frac{1}{49}$	-12	-250	-32	-10	36	1	$\frac{239}{108}$
$-\frac{5}{2}$	$\frac{24}{128}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1530}{73}$	35	1	10^3	3
$-\frac{27}{8}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	2^{16}	9	$\frac{21}{20}$
2	$\frac{76}{25}$	36	$\frac{1}{2}$	12	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{9}{4}$
$(\frac{1}{5})^{25}$	$2 \cdot 10^6$	$-\frac{19}{9}$	$\frac{19}{20}$	-5	-125	$(\frac{1}{5})^{25}$	14
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{21}{20}$	-125	-15	$\frac{19}{20}$	2	$-\frac{16}{3}$
9	$\frac{255}{257}$	3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{8}$	1
10^{-3}	1	$\frac{239}{108}$	2^{16}	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{49}$

Figura 2: Exemplo de cartela distribuída aos alunos.

Em síntese, a metodologia aplicada trouxe resultados positivos na realização da tarefa dos alunos. Isso só foi possível com o apoio da professora supervisora, que nos deu total liberdade para desenvolver as atividades propostas e sugestões sobre como poderíamos proceder.

3. Conclusão

O conteúdo matemático foi trabalhado de forma lúdica, abrangendo a resolução de problemas e discussão sobre a adaptação da prática cotidiana em que todos tiveram conhecimentos obtidos; entretanto, fez-se necessário também o estudo sobre o conteúdo matemático abordado nos problemas.

Com essa experiência, percebemos que um dos fatores que deixa os professores insatisfeitos é a falta de disciplina e de interesse dos alunos. Precisamos, portanto, sempre buscar alternativas e novas metodologias para despertar o interesse, a atenção e também conquistar o respeito dos alunos, além de ter uma postura efetiva de um profissional que se preocupa verdadeiramente com o aprendizado, que deve exercer o papel de um mediador entre a sociedade e a particularidade do educando. Devemos despertar no educando a consciência de que ele não está pronto, aguçando-lhe o desejo de se complementar. Esse é o grande desafio que o educador encontra em sua profissão.

Acreditamos que experiências como essas são importantes no estágio, como parte da formação do

professor, e também como uma forma de ensinar relacionando o conteúdo com situações problemas do dia a dia, mostrando ao aluno o quanto a construção do conhecimento é essencial para sua vida.

Agradecimentos

As autoras agradecem o Departamento Acadêmico de Matemática da UTFPR Campus Cornélio Procópio.

Referências

- [1] Brasil. *Ministério da Educação*. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 pp.
- [2] Carvalho, A. *Potenciação e Radiação lista 5*. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/delima-carvalho/potenciaao-e-radicaao-lista-5>. Acesso em: 20 setembro de 2018.
- [3] Ferreira, J. *Reforço Orientado, Potenciação*. Disponível em: <https://saturniz.files.wordpress.com/2015/11/potenciaac3a7c3a3o-9c2b0-ano.pdf>. Acesso em: 20 de setembro 2018.
- [4] Giordani, J. *Bingo*. Disponível em: <https://euridespidibmatematica.wordpress.com/2015/04/28/bingo/>. Acesso em: 12 de outubro 2019.
- [5] Lara, I.C.M. *Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série*. São Paulo: Rêspel, 2003.
- [6] Muniz, C.A. *Brincar e jogar: enlacs teóricos e metodológicos no campo da educação matemática*. São Paulo: Autêntica, 2010.
- [7] Silva, M.N.P. *Potenciação: a utilização de potências no cotidiano*. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/a-utilizacao-potencias-no-cotidiano.htm>. Acesso em: 12 de outubro 2019.
- [8] Smole, K.S.; Diniz, M.I.; Milani, E. *Cadernos de Mathema Jogos de matemática de 6º a 9º ano*. Porto Alegre: artmed editora, 2007.

Daniely Cristiny Lucas Reghim
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - câmpus Cornélio Procópio
<danielyreghim@alunos.utfpr.edu.br>

Glauca Maria Bressan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - câmpus Cornélio Procópio
<glauciabressan@utfpr.edu.br>

Recebido: 13/10/2019
Publicado: 13/12/2019

O conceito de integrais nos cursos de Cálculo

José C. Magossi e Antônio C. C. Barros

Resumo

O conceito de integrais, *grosso modo*, nasceu na Grécia antiga e sofisticou-se após a descoberta do Cálculo por I. Newton e G. Leibniz. Com tais cientistas surge o Teorema Fundamental do Cálculo, que relaciona o conceito de diferenciação com o de integração, e responde, de certa forma, o problema grego da determinação de áreas de regiões não regulares. Quase dois séculos após, A. Cauchy entende que o conceito de integrais deve ser desenvolvido de modo independente do conceito de derivadas. Para isso, cria o conceito de limites. Na sequência, B. Riemann expande os trabalhos de Cauchy e enuncia condições para que uma função seja integrável. As classes de funções integráveis expandem-se novamente com os trabalhos de H. Lebesgue, O. Perron, A. Denjoy, J. Kurzweil e R. Henstock, entre outros. Neste artigo, o objetivo é exibir exemplos de funções integráveis, e não integráveis, de acordo com suas definições. Isso pode facilitar o entendimento das fronteiras do conceito de integração e mostrar aos alunos que resolver integrais não se limita apenas a encontrar primitivas.

Palavras-chave: Integrais; Newton-Leibniz; Cauchy; Riemann; Lebesgue; Kurzweil-Henstock.

Abstract

The integrals concepts started, roughly speaking, in Ancient Greece, and was later enhanced after the discovery of the calculus by I. Newton and G. Leibniz. These scientists give birth to the Fundamental Theorem of Calculus, which relates the differentiation concept to the integration one, and provides the answer, in a way, to the Greek problems concerning of determining areas of non-regular regions. Nearly two centuries later, A. Cauchy understands that the integrals concept must be developed in an independent way from the concept of derivatives. To this end, the limit concept is developed by Cauchy. In the historical sequence, B. Riemann expands Cauchy's work and enunciates conditions for a function to be integrable. The classes of integrable functions expand once again with the works of H. Lebesgue, O. Perron, A. Denjoy, J. Kurzweil, and R. Henstock, among others. In this article, the aim is to show examples of integrable and non integrable functions, according to their definitions, which will foster the understanding of the boundaries in the integral concept, and also show students that solving integrals is not limited to only determine the primitives.

Keywords: Integrals; Newton-Leibniz; Cauchy; Riemann; Lebesgue; Kurzweil-Henstock.

1. Introdução

O conceito de integrais tem uma forte relação com geometria, pois na Grécia antiga, em particular, relacionavam-no à busca por áreas de regiões não regulares. Por isso, é comum limitar o escopo desse conceito ao de área. Com a descoberta do *Cálculo*, por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried W. Leibniz (1646-1716), essas ideias avançam em sofisticação, e com o Teorema Fundamental do Cálculo dá-se a relação entre diferenciação e integração. Esse teorema abre portas para fornecer uma resposta positiva, por conseguinte, ao problema grego da determinação de um valor para áreas de regiões não regulares. A área de uma região acima do eixo x entre as retas $x = a$ e $x = b$, sob uma curva contínua determinada por $f(x) \geq 0$, é calculada, em notação atual, como $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, desde que $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Nesse caso, a função $F(x)$ é denominada de função primitiva de $f(x)$. Diz-se ainda que $f(x)$ é uma função primitivável. Não há como negar o impacto que esse teorema acarretou na matemática nos séculos XVIII e XIX. Com uma intuição, magistral, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), em seu *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. 1^{re} partie: analyse algébrique*, de 1821, prepara os fundamentos do rigor em matemática, e, em seguida, em seu *Résumé des leçons donnés a l'école royale polytechnique sur le calcul infinitesimal*, de 1823, expõe a definição de integral como limites de somas e com demonstrações rigorosas [17]. Por um lado, com o operador limites, Cauchy coloca precisão no conceito de derivadas, por outro, ele trabalha no sentido de eliminar “as derivadas” da definição do conceito de integrais. Cauchy desenvolve o conceito de integrais, para todo $x \in [a, b]$,

em termos do limite de somas $S = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ em que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

é uma partição do intervalo $[a, b]$, para funções $f(x)$ adequadas, contínuas, de números reais. É clássico na história da matemática que o conceito de funções, na época de Cauchy, não estava em patamares matemáticos sólidos, fazendo com que ele cometesse alguns erros ao lidar com o conceito de continuidade, principalmente com o de continuidade uniforme ([20], p9). Mas é notório que a matemática mudou a partir da época de Cauchy e de suas definições de *limites* e *integrais*. Cauchy, que nasceu em 1789, ano da Revolução Francesa, também proporcionou, ele próprio, uma revolução, mas científica [17], conforme as ideias de Thomas Kuhn [25]. É um problema investigativo indicar quais foram as razões que levaram Cauchy a trabalhar com seus limites e integrais, mas sabe-se, além disso, que a teoria de integração avançou graças ao desenvolvimento, em paralelo, do conceito de funções. Logo após o surgimento das integrais de Newton e Leibniz, a busca por funções que tenham primitivas incentivou o surgimento de técnicas, algoritmos, diga-se de passagem, que facilitassem essa busca. Como o conceito de funções não se encontrava ainda em bases sólidas ocorria, entre outros problemas, a falta de entendimento do porquê algumas funções não tinham primitivas.

A procura por funções primitivas é essencialmente uma busca por um algoritmo que determine quais funções elementares são primitivas. (Grosso modo, uma função elementar é qualquer função que pode ser obtida pressionando-se uma sequência finita de botões numa calculadora científica.) Tal algoritmo, baseado em investigações passadas feitas por Liouville nos anos de 1830, foi obtido por Risch em 1960, e versões aprimoradas dele são empregadas em pacotes algébricos computacionais atuais. Como resultado pode-se afirmar categoricamente que não existe uma primitiva elementar para $\exp(-x^2)$, mas a teoria é sutil: por exemplo $\sqrt{\operatorname{tg} x}$ e $x \operatorname{sen} x$ ambas têm tais primitivas mas $\sqrt{\operatorname{sen} x}$ e $x \operatorname{tg} x$ não têm (...). (Tradução dos autores) ([23], pp13-14)

A instabilidade do conceito de funções ganha força com os trabalhos de Jean B. J. Fourier (1768-1830), matemático contemporâneo de Cauchy, que em 1807 deposita, na hoje conhecida como Academia de Paris, um trabalho sobre condução de calor em uma barra metálica com o objetivo de concorrer ao prêmio proposto pela Academia. Fourier expõe uma solução formal do problema. Os conceitos de convergência, funções, continuidade, séries de funções etc., e também o conceito de integrais, não se encontravam bem fundamentados matematicamente na época de Fourier, e, desse modo, sua solução foi questionada pelos jurados do concurso. Mesmo assim, seu trabalho impactou significativamente na matemática, seja no desenvolvimento do conceito de funções, seja no desenvolvimento do conceito de integrais ou seja nos desenvolvimentos de propriedades de convergência [37]. Ao trabalhar na elucidação dos problemas deixados por Fourier, em síntese, *–quais funções podem ser escritas como séries infinitas de senos e cossenos–*, Georg F. B. Riemann (1826-1866) volta-se para o conceito de integrais e levanta o seguinte questionamento: *Para quais funções tem-se $\int_a^b f(x)dx$?* B. Riemann desenvolve critérios para indicar se uma função é ou não integrável. Em sua época, ele expande a classe de funções integráveis no sentido de Cauchy e vai além das funções integráveis que sejam contínuas ou descontínuas em um conjunto finito de pontos, tal como exposto por Cauchy.

Riemann mostra que há funções integráveis com número infinito de pontos de descontinuidade¹. Com Riemann tem-se a primeira caracterização sistemática de funções integráveis [19, 20, 24].

Como em todo desenvolvimento matemático é comum ocorrer “deficiências” que indicam que ajustes precisam ser realizados, o mesmo se deu com as integrais de Riemann. A classe de funções integráveis é pequena, nem toda função Riemann integrável tem primitiva, há funções que têm primitivas mas não são Riemann integráveis etc. [3].

Além de Riemann, outros matemáticos preocuparam-se com os problemas deixados por Fourier e também pela solução das deficiências presentes nas integrais de Riemann. Em particular, o francês Henri Leon Lebesgue (1875-1941), publica no início do século XX, alguns trabalhos com o intuito de expandir a classe das funções integráveis e, principalmente, com o objetivo de “integrar todas as funções primitiváveis”. A nova definição de integral dada por Lebesgue remove a restrição, nas integrais de Riemann, de que o integrando seja limitado e que o intervalo de integração seja compacto. Junto com a definição de Lebesgue vem uma *Teoria da Medida* para sustentar seu conceito de integral [4, 5, 23]. No entanto, mesmo com a definição de Lebesgue, que aumentou significativamente a classe de funções integráveis, ainda assim algumas deficiências permaneciam, como a ideia de que cada função primitivável seja integrável. Uma outra deficiência, digamos pedagógica, se apresenta na integrais de Lebesgue: os pré-requisitos para o bom entendimento de sua teoria da medida e integração acabam por ser complicados demais aos alunos iniciantes. Um ponto positivo é que, com base na integrais de Lebesgue, os problemas deixados por Fourier são resolvidos. Mais ainda, as integrais de Lebesgue auxiliam no desenvolvimento de ferramentas matemáticas em áreas tais como mecânica estatística, teoria de probabilidades etc.

Com foco na ideia de integrar todas as funções primitiváveis, Arnauld Denjoy (1884-1974) e Oskar Perron (1880-1975) desenvolvem, de modo independente, no início do século XX, abordagens distintas para novos conceitos de integrais, os quais integram todas as funções que tenham primitivas. As duas abordagens mostram-se equivalentes, ou seja, produzem a mesma classe de funções integráveis. Se as integrais de Lebesgue são consideradas difíceis para alunos iniciantes, as de Denjoy

¹Em linguagem atual diz-se que: *Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável se e somente se ela é contínua em quase todo ponto em $[a, b]$, ([3], p221).*

e Perron são consideravelmente mais difíceis ([2], pxi). No entanto, a *simplicidade* da definição de integrais ao estilo de Riemann (e Cauchy) deixam de existir ao tratar-se com integrais de Lebesgue, de Denjoy e de Perron, haja vista exigirem conhecimentos matemáticos avançados para seu entendimento. Por volta de 1960, J. Kurzweil (1926-) e R. Henstock (1923-2007) propõem uma nova abordagem sobre integrais, fundamentada nas ideias simples de somas de Riemann [21, 26]. Com isso obtém-se uma classe de funções integráveis que engloba todas as anteriores, e com uma exposição que pode ser exposta aos alunos iniciantes [2, 3, 16, 27]. Além disso, as integrais de Kurzweil-Henstock são equivalentes, em termos de classe de funções integráveis, às de Denjoy e de Perron. As integrais de Kurzweil-Henstock, ou *integrais de Riemann generalizadas*, ou ainda *integrais de calibres*, [2, 16], ganham adeptos na comunidade matemática ao ponto de haver listas de discussões na *internet* onde advogam-se em prol da utilização dessas integrais em cursos de Cálculo, em lugar das clássicas integrais de Riemann. À parte de advogar, neste artigo, em prol de uma ou de outra abordagem sobre integrais, é possível encontrar discussões interessantes sobre esse assunto no endereço eletrônico <https://math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/>².

Diante da breve exposição nas linhas acima, é possível inferir que o assunto *teoria da integração* ainda está em pleno desenvolvimento. Há livros destinados aos alunos de graduação que tratam das integrais de Riemann em paralelo às integrais de Riemann generalizadas [3, 27]. Com o avanço das publicações desses recentes desenvolvimentos em integrais, é interessante que sejam escritos textos destinados aos alunos iniciantes no sentido de clarear o cenário em que as integrais estejam presentes. Por exemplo, em livros antigos encontram-se frases do tipo: “a função $f(x)$ é integrável”. Já em livros modernos e em publicações atuais encontram-se frases do tipo: “a função $f(x)$ é Riemann-integrável,” “a função $f(x)$ é Lebesgue-integrável,” “a função $f(x)$ é Newton-Leibniz integrável,” “a função $f(x)$ é Kurzweil-Henstock-integrável” etc. É importante que haja classificações, um quadro comparativo com relação às funções, para saber se determinada função é ou não integrável com respeito a determinada definição de integral. Ou seja, ao se ler em um livro que f é integrável, se quer dizer então que f é integrável no sentido de Riemann? Ou no sentido de Cauchy? Ou no sentido de Lebesgue? Ou no sentido de Darboux? Ou ainda no sentido de Kurzweil-Henstock? É evidente que algumas classes são equivalentes, mas um esclarecimento pode facilitar o caminhar do leitor. Urge que os alunos visualizem que resolver integrais não se resume na busca por funções que tenham primitivas ao estilo das integrais de Newton e Leibniz. Estima-se que ao exibir uma tabela comparativa, via exemplos ilustrativos, de funções integráveis de acordo com suas definições, seja possível avançar na compreensão e entendimento do conceito de integrais. O objetivo neste texto é tanto didático quanto matemático. A parte didática, tem-se em conta, vai auxiliar na compreensão do conceito de integrais em suas várias facetas. A parte matemática indica uma compilação de diferentes conceitos de integral e sua relação com a referida classe de funções obtida. Do mesmo modo que pode ser útil ao pesquisador em matemática, ou professor, por exemplo, saber de exemplos de funções que são Riemann integráveis mas não são Newton integráveis, pode ser igualmente útil ao aluno perceber que resolver integrais não se resume simplesmente a encontrar primitivas. Assim, objetiva-se exibir, sem pretensões de completude, exemplos e contraexemplos de funções integráveis, e não integráveis, de acordo como o conceito de integral tenha sido definido. É evidente que a face generalista da matemática incide sobre o conceito de integral [16] de modo a torná-lo, com os desenvolvimentos subsequentes, o mais extensivo possível e com impacto em diversas áreas da matemática. É clássico na matemática que a *teoria moderna de integração* é um dos pilares que sustentam a análise matemática, e que uma grande parte da matemática vale-se dos conceitos advindos da análise matemática [2]. Desse

² Acessado em 05 de dezembro de 2019 às 12h34min.

modo, o conhecimento do conceito de integrais torna-se útil para a ciência em geral e, mais ainda, alterações nesses conceitos podem impactar em diversas áreas. A teoria da integração é ampla e com muitas ramificações. Desse modo, neste texto, opta-se pela abordagem das classes de funções integráveis que, entende-se, acarretaram alterações significativas. São elas, as classes de Newton-Leibniz, Cauchy, Riemann, Lebesgue e Kurzweil-Henstock.

2. Funções e Integrais

Um dos motivos que levam à expansão das classes de funções integráveis é devido, às vezes, às limitações presentes nas definições vigentes. Com os trabalhos de Cauchy pode-se citar a preocupação com a pedagogia em seus cursos, o estabelecimento de rigor na matemática e a independência da definição de integrais do conceito de derivadas. Com Riemann houve um primeiro tratamento sistemático sobre o conceito de integrais e o de classe de funções integráveis, além, é claro, da expansão da classe de funções integráveis em relação às de Cauchy, pois Riemann entendeu que a exigência de continuidade não era essencial ([20], p32). Lebesgue, por sua vez, queria integrar funções que não eram Riemann integráveis, tais como o exemplo de Volterra ([8], p16 e p70). Kurzweil desenvolveu suas integrais com o objetivo de investigar equações diferenciais e Perron queria integrar todas as funções primitiváveis.

Isso pode parecer estranho ao se tratar de matemática, haja vista ser conhecida como uma *ciência cumulativa*. No entanto, o fato de a matemática poder ser vista como sendo composta de estruturas e objetos, suas múltiplas leituras científicas permitem alterações em suas estruturas e a criação de novos conceitos. Um exemplo clássico básico é o teorema de Pitágoras e suas inúmeras demonstrações [14]. Segundo as ideias de Felix Klein, fazer matemática também é reescrevê-la sob uma outra forma, isto é, resolver o mesmo problema, mas de uma forma diferente [29, 30]. Seguindo essa linha de pensamento, de Felix Klein, algo semelhante ocorre com o conceito de integral³. Enquanto que o conceito de derivada encontra-se nos livros de Cálculo *quase* da mesma forma em que foi enunciado por I. Newton e G. Leibniz no século XVII, o mesmo não se dá com o conceito de integral, o qual começou a ser esboçado na Grécia antiga, por Arquimedes, passou por I. Newton (1642-1727) e G. W. Leibniz (1646-1716), A. L. Cauchy (1789-1857), J.G. Darboux (1842-1917), G. F. B. Riemann (1826-1866), T. J. Stieltjes (1856-1894), H. Lebesgue (1875-1941), E. J. McShane (1904-1989), A. Denjoy (1884-1974), O. Perron (1880-1975), R. Henstock (1923-2007) e J. Kurzweil (1926-), para citar alguns⁴. Cada nova definição de integral implica alguma inovação que pode gerar uma nova classe ou se revelar equivalente às anteriores.

Com foco nos processos de transformação da matemática, estima-se que o esclarecimento das classes de funções integráveis de acordo com suas definições pode acarretar melhorias na interação e compreensão de conceitos. Espera-se que perguntas como *O que é uma integral?* possam ser respondidas com consistência por alunos iniciantes, leitores etc., cujas respostas não sejam simplesmente: *É uma função que tem uma primitiva*.

³Nota-se que o conceito de funções, importante no desenvolvimento das teorias de integração, também sofreu alterações significativas ao longo da história da matemática [20, 24, 34, 41].

⁴Não se pretende fazer uma descrição exaustiva de todos os matemáticos que de uma forma ou outra indicaram alterações no conceito de integral. Pode-se citar também J.C. Burkill (1900-1993), Giulio Ascoli (1843-1896), Henry J. S. Smith (1826-1883), Karl J. Thomae (1840-1921), S. Pollard (1894-1945), B.C. Getchell, W. H. Young (1863-1942), P.J. Daniel (1889-1946) etc. [8, 21, 33].

A iniciativa de clarear os conceitos e fazer uma releitura apropriada sob a ótica histórica não é isolada, pois muitos livros compartilham dessa preocupação que implica a divulgação, com consistência, de conceitos matemáticos. Um exemplo clássico refere-se à caracterização, em livros de cálculo, dos termos “antiderivada,” “primitiva” e “integral indefinida.” É comum que sejam tratados como sinônimos, tal como alertado por R. Bartle em seu livro *A Modern Theory of Integration* ([2], p56). No entanto, caso ocorra, em algum livro de Cálculo, que o conceito de integrais seja exposto apenas sob a ótica de Newton-Leibniz, então, por força do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), a busca por integrais indefinidas, do tipo $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, acaba por ser a busca por antiderivadas $F(x)$ (primitivas) tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Desse modo, é plausível que ocorra uma certa confusão entre antiderivada e integral indefinida. Por conta disso, em alguns livros comentários são descritos com fins de clarear a diferença entre *integral indefinida* e *antiderivada (ou primitiva)* ([3], pp216-218). Há também comentários sobre a importância de se explicar a notação, não muito clara, de integral indefinida, comumente escrita como $\int f(x)dx = F(x) + c$ ([11], p189). Isso acaba por gerar dúvidas, entre alunos, sobre o conceito de integrais. *Calcular uma integral é encontrar sua antiderivada? Qual é a relação entre antiderivada e integral indefinida?* A notação $\int f(x)dx$ pode indicar simplesmente a classe de funções que tenham primitivas, mas isso não indica necessariamente que seja uma integral indefinida, que pode ser vista como “área sob uma curva”. Calcular “integrais” do tipo $\int (x^3 + 2)dx$ é determinar apenas as classes de antiderivadas, ou primitivas, da função $x^3 + 2$. É certo que existem métodos que indicam “algoritmos” que facilitam a busca por primitivas, tais como “integração” por partes, método da substituição, substituição trigonométrica etc., mas $\int f(x)dx = F(x) + c$ é apenas a indicação de que $F(x) + c$ é uma classe de primitivas (antiderivadas) de $f(x)$. Caso o conceito de integral não seja precisamente definido, corre-se o risco de se confundir o cálculo de integrais com a busca por antiderivadas. O TFC que, por um lado, é dito Fundamental devido a sua importância na Análise Matemática [6], por outro, pode induzir ao leitor menos atento, o pensamento de que cálculo de integrais resume-se à busca por primitivas. A força do TFC e das integrais, no sentido de Newton-Leibniz, fortalece essa crença. O estudo de integral em Cauchy indica um procedimento **construtivo** (algorítmico) voltado ao cálculo de integrais e não simplesmente um procedimento **descritivo** onde se deve “adivinhar” a resposta, ou seja, determinar alguma função primitiva. Integrais de Newton-Leibniz são descritivas, enquanto que integrais de Riemann são construtivas ([40], p175).

Esclarecimentos desse tipo são importantes pois eliminam inconsistências advindas do processo histórico e das transformações matemáticas ocorridas ao longo de anos. Por exemplo, as seções sobre integrais, sejam em livros ou artigos, se o objetivo é didático, poderiam começar, como estratégia pedagógica, pela explicação das integrais de Newton e Leibniz (descritivas) e seguir com as de Cauchy e Riemann (construtivas).

Como um outro exemplo sobre a importância do esclarecimento dos conceitos, dos processos de transformação em matemática, pode-se citar a confusão que se faz ao escrever sobre o tema *integrais de Riemann* e exibir a definição de *integrais de Darboux*. Deve-se ter cuidados para não misturar classes equivalentes de funções integráveis, como as de Riemann e Darboux, por exemplo, com suas definições de integrais. Nesse caso, a integral de Riemann tem uma definição distinta da definição de integral de Darboux. Riemann utiliza uma extensão mais aprimorada das somas de Cauchy, enquanto que Darboux utiliza de somas com supremo e ínfimo em sua definição. Gaston Darboux (1842-1917), ao traduzir, em 1873, o trabalho de Riemann para a língua francesa, fez inovações na definição de integral e lançou mão das propriedades de completude do sistema de números reais (supremo, ínfimo, axiomas de completude etc.) para elaborar sua nova definição ([3], p225). Assim, em 1875 ele publica o artigo *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues*

[13] e expõe um novo método para identificar funções integráveis, diferente, mas equivalente à classe de funções integráveis de Riemann ([20], p27), ([3], pp225-232). Por isso, entende-se, com base nos exemplos acima, que a identificação de conceitos matemáticos em consonância com a gênese de seu surgimento, [36], favorece o entendimento dos processos de interação e transformação em matemática.

2.1. Notação para funções integráveis

É interessante observar como as notações matemáticas têm evoluído ao longo do tempo. No caso de integrais, há alterações desde os tempos de Leibniz até os dias de hoje. Constitui-se também como propósito neste artigo o alerta sobre a importância de uma notação clara para funções integráveis. Assim, diferente da notação advinda dos tempos de Newton e Leibniz, em tempos atuais o conceito de integral está relacionado à notação de integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Leibniz introduziu, em 1686, o símbolo \mathcal{S} estendido, para denotar o símbolo \int , utilizado nos dias de hoje. Já o termo “integral” foi introduzido por Johann Bernoulli e foi publicado, em 1690, por seu irmão Jacob Bernoulli ([19], p107). No livro de Florian Cajori há comentários sobre as notações utilizadas para o símbolo de integral e mostra que a de Fourier é utilizada até hoje ([9], pp242-254, Vol. II). O trabalho de J. B. J. Fourier foi publicado em 1822 [15], e, nele, a notação \int_a^b é exposta, tal como na citação abaixo:

Nós designamos em geral pelo sinal \int_a^b a integral que começa quando a variável equivale a a, e que está completo quando a variável equivale a b; (Tradução dos autores) ([15], p252, seção 231.)

O trabalho de Riemann sobre representação de funções por séries trigonométricas, publicado em 1854, no qual ele desenvolve suas integrais, é inspirado na busca de uma solução para os problemas deixados por Fourier [31]. Como consequência dessa notação para integrais, tem-se, hoje em dia, a notação para integral indefinida, tal como em [3],

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Neste texto, dizer que “uma função f é integrável” num intervalo $[a, b]$ é inseri-la em uma das 5 classes: Newton-Leibniz ($\mathcal{NL}[a, b]$), Cauchy ($\mathcal{C}[a, b]$), Riemann ($\mathcal{R}[a, b]$), Lebesgue ($\mathcal{L}[a, b]$) ou Kurzweil-Henstock ($\mathcal{KH}[a, b]$).

A exibição de exemplos é um dos objetivos no presente artigo. Não há como negar que os exemplos matemáticos funcionam como divisores de águas, pontos de transformação na matemática. Desse modo, nesse artigo, exibem-se alguns, não exaustivos, exemplos de funções que indicam os limites das classes de funções integráveis. Como é o caso de Vito Volterra (1860-1940) que em 1881 exibiu um exemplo de uma função F diferenciável cuja derivada F' é limitada mas não é Riemann integrável [38]. Problemas como esse, entre outros, motivaram Lebesgue a desenvolver um novo conceito de integrais, fundamentado num novo conceito, o de medida.

No que se segue expõe-se, de modo sucinto, para uniformizar o contexto, as definições de integrais relacionadas às cinco classes de integrais discutidas anteriormente, integrais de Newton-Leibniz,

integrais de Cauchy, integrais de Riemann, integrais de Lebesgue e integrais de Kurzweil-Henstock. As notações e símbolos utilizados são atuais, e seguem àquelas presentes no livro de R. Bartle e D. Sherbert [3].

O objetivo é mostrar que, a partir de alterações no conceito de integral, novas classes, mais abrangentes, são criadas. Mais ainda, procura-se enfatizar que essas alterações são, às vezes, **muito sutis**, imperceptíveis se não for realizada uma leitura cuidadosa.

2.2. Integrais de Newton-Leibniz

A ideia de integral, como é clássico na literatura, e já dito anteriormente, é investigada desde a Grécia antiga, cujo objetivo inicial era o de obter um número associado à área de uma região no plano, ou o volume de uma região no espaço etc. Inúmeras técnicas foram desenvolvidas para esse fim. O surgimento do Cálculo, de certa forma, corresponde ao surgimento do conceito de derivada e, paralelamente, e o de integral.

No entanto, no decorrer desses acontecimentos, Newton e Leibniz fazem uma descoberta interessante, qual seja, que a obtenção da área sob uma curva pode ser obtida com base no processo de antiderivação. Desse modo, surge a clássica fórmula⁵, exposta na definição seguinte, conhecida como integral de Newton-Leibniz, que se refere também ao *Teorema Fundamental do Cálculo - TFC*, pois relaciona o conceito de integral ao conceito de derivadas.

Definição 1. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função **Newton-Leibniz integrável** em $[a, b]$ se

$$\mathcal{N}\mathcal{L} \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

desde que $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Neste caso, a função F é chamada de *primitiva* (ou antiderivada) da função f , pois tem-se que

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Fundamentado nessas ideias, é possível determinar o resultado de integrais por meio de derivadas. Na maior parte dos textos de Cálculo utilizados em cursos de graduação da área de exatas, a exposição do conceito de integrais ocorre logo após o desenvolvimento do conceito de derivada⁶. Com o TFC alguns problemas podem ser resolvidos, tais como *área sob parábolas, área de círculos, volume de esferas, trabalho num campo de forças, comprimento de arco, centro de massa* etc.

O TFC surgiu após a descoberta do processo de diferenciação, seja sob a ótica de Newton ou de Leibniz, mas há evidentemente outros cientistas que influenciaram nessa descoberta, tais como Arquimedes, Kepler, Cavalieri, Fermat, Wallis, Isaac Barrow etc, para citar alguns. Nas palavras de E. Hairer e G. Wanner [19],

⁵Essa fórmula está escrita numa notação moderna, diferente daquela escrita no século XVII.

⁶Assim, é plausível a associação de *integral indefinida* como sendo a operação inversa da *derivada*.

O passo decisivo veio quando Newton, Leibniz, e Joh. Bernoulli descobriram independentemente que integração é a operação inversa da diferenciação, reduzindo assim os esforços dos pesquisadores acima a algumas regras de diferenciação (Tradução dos autores) ([19], p. 107).

O TFC é demonstrado levando-se em conta a relação entre integrais e antiderivadas, e doravante, naquela época, esforços seriam canalizados na busca por funções que tivessem primitivas. Em cursos iniciais de Cálculo há um foco no estudo sobre integrais em que se tem em mente o TFC e a busca por primitivas. Há também, às vezes, uma forte relação entre o conceito de integrais e o conceito de antiderivadas. Essa estratégia pedagógica não está em desacordo com o contexto histórico, mas deve-se cuidar, tal como também ocorreu na história da matemática, ao investigar integrais que contenham funções com pontos de singularidades, tal como $\int_{-2}^3 \frac{1}{x-1} dx$, ou mesmo para integrais do tipo $\int_1^2 e^{-x^2} dx$, em que $f(x) = e^{-x^2}$ não tem primitivas. Ou, ainda, como exposto no livro *A Introduction to Analysis and Integration Theory*, [28], em que se diz que o uso indiscriminado da integral definida de Newton-Leibniz pode gerar problemas de difícil explicação, tais como:

Era difícil explicar o que significava $\int_{-1}^1 x^{-1} dx = \ln(-1)$; o lado esquerdo aparentava ser um número real, enquanto que o direito era imaginário (...) (Tradução dos autores) ([28], pviü).

Antes disso, em seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, de 1687, Newton preocupa-se com a busca de áreas via quadraturas, ou seja, se o objetivo é determinar a área A de uma região R , então busca-se por um quadrado cuja área seja igual a A . Já para Leibniz, o problema de encontrar áreas resumia-se a trabalhar com *infinitésimos*.

Com a definição acima de integral, a classe de funções integráveis, no sentido de Newton-Leibniz, será aquela para a qual existem primitivas. Incluídas nesta classe estão as funções polinomiais, trigonométricas etc., que representam, normalmente, a grande parte das funções tratadas em cursos de Cálculo. No entanto, uma grande parte de funções não são integráveis, no sentido de Newton-Leibniz. As funções do tipo *escada* – ou seja, uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que $[a, b]$ é particionado em n intervalos disjuntos I_1, I_2, \dots, I_n tal que $f(x) = c_k$, para todo $x \in I_k$ com $k = 1, 2, 3, \dots, n$ – não são Newton-Leibniz integráveis.

A ideia de integral como antiderivada implica uma redução às derivadas do conceito de integrais. A expansão de funções como uma série de Taylor e a possibilidade de integração termo a termo ajuda a diminuir o impacto da não resolução de integrais devido à não existência de primitivas. No entanto, problemas associados a equação da onda e séries de Fourier “indicaram” que a descoberta de uma caracterização independente do conceito de integral passaria pela revisão do conceito de funções, e isso foi feito por A. Cauchy. A caracterização de integral baseada em Newton-Leibniz não possibilita, nos dias de hoje, a resolução de alguns problemas em áreas tais como estatística, teoria da informação, física, equações diferenciais etc., [18].

2.3. Integrais de Cauchy

O que significa “área de uma região”? A resposta a essa pergunta implica a definição precisa do conceito de integral, que até a época de A. Cauchy estava sendo caracterizado pelo processo inverso da derivada, ou seja, pelas integrais de Newton-Leibniz. As razões que levaram A. Cauchy a iniciar um processo de rigor na matemática e a introduzir o conceito de limites ainda constituem palco para muitas discussões. Para H. Lebesgue, Cauchy esboçou o rigor na matemática por motivos unicamente pedagógicos, devido aos seus cursos na École Polytechnique ([28] px).

Henri Lebesgue, por outro lado, acreditava que Cauchy tinha iniciado seu programa de rigor principalmente por razões pedagógicas, (...) (Tradução dos autores) ([28], px).

Com o objetivo de fornecer uma definição de integral independentemente do conceito de derivadas, Cauchy introduz o moderno conceito de integral, definido como limite de somas “infinitas”. Em 1823, no *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Cauchy define o conceito de *integral definida* para funções contínuas [10]. Em notação moderna tem-se a seguinte definição:

Definição 2. ([3], pp199-200) Se $I = [a, b]$ é um intervalo fechado limitado em \mathbb{R} , então uma **partição** de I é um conjunto finito, ordenado, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ de pontos em I , tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Os pontos de \mathcal{P} são usados para dividir $I = [a, b]$ em subintervalos disjuntos

$$I_1 = [x_0, x_1] \quad I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Representa-se uma partição de $[a, b]$ por

$$\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n.$$

Definição 3. Se $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ é uma partição de $[a, b]$, então a **soma de Cauchy** de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente a \mathcal{P} é o número

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Definição 4. Uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **Cauchy integrável** em $[a, b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se \mathcal{P} é uma partição de $[a, b]$ com $||\mathcal{P}|| < \delta$, então

$$|S(f; \mathcal{P}) - L| < \varepsilon.$$

O conjunto de todas as funções que são Cauchy integráveis em $[a, b]$ será denotado por $\mathcal{C}[a, b]$. Se $f \in \mathcal{C}[a, b]$, então o número L é unicamente determinado e será chamado de **integral de Cauchy** de f em $[a, b]$, comumente denotado por

$$\mathcal{C} \int_a^b f(x) dx = L.$$

Com base na noção de limites, Cauchy define integrais a partir de “somas infinitas.” Nesses desenvolvimentos, Cauchy limita-se a abordar o conceito de integrais, via somas, independentemente de derivadas, apenas para funções contínuas, em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$. É o início das definições das classes de funções integráveis. Com Cauchy, inicia-se um método **construtivo** para o cálculo de integrais, e a classe de funções integráveis, no sentido de Cauchy, torna-se independente do conceito de derivadas. Mas Cauchy não investigou apenas funções contínuas, ele estendeu seu conceito para funções descontínuas em um número finito de pontos de descontinuidade, funções com descontinuidades isoladas. Funções com pontos de descontinuidade não podiam ser integráveis, e métodos especiais precisavam ser elaborados para integrá-las. Para as funções do tipo $\frac{1}{(x-1)^2}$, Cauchy utiliza limites para sua integração e trabalha com *integrais impróprias*.

Definição 5. ([35], p505) Seja f uma função contínua em um intervalo $(a, b]$ que é ilimitada em cada intervalo $(a, a + \delta)$. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)dx,$$

se esse limite existir. No caso de o limite existir a integral é dita ser convergente, caso contrário é dita ser divergente.

Com o fortalecimento do conceito de funções, fortalece-se também o conceito de integrais, e, daí, busca-se por novos desenvolvimentos do conceito de integral com vistas a aumentar a classe de funções integráveis. É o que ocorre com G. Riemann, que fornece um tratamento sistemático para as integrais, mais amplo que o de Cauchy.

2.4. Integrais de Riemann

O que é uma função integrável? Questionamento como esse foi elaborado por Riemann, quando propôs investigar com precisão o conceito de integral. Em 1854 ele questiona em seu artigo [31]:

Nossa primeira questão é portanto: que significado devemos dar para $\int_a^b f(x)dx$?
(Tradução dos autores) (Riemann 1854, Werke, p239) ([19] p221).

O esclarecimento dessas questões leva ao entendimento e discernimento do que seja uma função integrável. Pode-se dizer que Riemann precisou rever o conceito de integrais, e de funções, para poder investigar os problemas deixados por Fourier. Riemann foi o primeiro a desenvolver um processo sistemático para avaliar condições de integrabilidade sobre funções. As somas de Cauchy consideram, em cada subintervalo de uma partição, o valor da esquerda, x_{i-1} , do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ como argumento da função f . Riemann, por sua vez, aprofunda os estudos sobre a classe de funções integráveis e, ao invés de escolher, em cada partição o valor x_{i-1} , escolhe um valor qualquer, ou seja, considera um valor $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Cauchy: $\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$

Riemann: $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

Essa flexibilidade permite estabelecer condições necessárias e suficientes para a existência da integral. Com isso, Riemann investiga as questões deixadas por J. P. Lejeune Dirichlet (1805-1859) e trabalha para responder à seguinte pergunta: *Em quais casos uma função é integrável?* Por isso atribui-se a Riemann o início das investigações sobre as condições de integrabilidade. No entanto, alguns conceitos básicos de análise (como limites, continuidade, continuidade uniforme, convergência uniforme etc.) ainda não eram conhecidos na época de Riemann e só viriam a ser entendidos por volta dos anos 1872 (final do século XIX). Também, mesmo sabendo que *série de Fourier* foi um dos pontos de investigação de Riemann, o qual resultou nos estudos sobre condições de integrabilidade, foi a aceitação de uma caracterização geral do conceito de funções que alavancou todo o processo.

G. Riemann definiu a integral definida de uma função f de números reais [31], no intervalo fechado $[a, b]$, da seguinte maneira, em notação atual ([3], pp199-201):

Definição 6. ([3], p200) Seja $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ uma partição⁷ de I . Uma **etiqueta** é um ponto $t_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Uma **partição etiquetada** é um conjunto de pares ordenados

$$\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n.$$

Definição 7. ([3], p200) Se $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ é uma partição etiquetada, então a **soma de Riemann** de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente a $\dot{\mathcal{P}}$ é o número

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definição 8. ([3], p201) Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **Riemann integrável** em $[a, b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição etiquetada de $[a, b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, então

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon.$$

O conjunto de todas as funções que são Riemann integráveis em $[a, b]$ será denotado por $\mathcal{R}[a, b]$. Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$, então o número L é unicamente determinado e será chamado de **integral de Riemann** de f em $[a, b]$, comumente denotado por

$$\mathcal{R} \int_a^b f(x)dx = L.$$

As somas $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ são as famosas *somas de Riemann*, já em notação moderna [3]. No entanto, é comum observar a denominação “somas de Riemann” sendo aplicada a quaisquer tipo de somas cujo objetivo é calcular o valor de uma integral via inserção ou circunscrição de retângulos na região que se pretende calcular a área. Tal como em Cauchy, Riemann utilizou também de integrais impróprias. Num sentido estrito, integrais impróprias não podem ser ditas serem integrais de Riemann, pois lidam com funções ilimitadas (que não são Riemann integráveis) ([5], p30). Mas com as integrais impróprias, a classe de funções integráveis expande-se. O exemplo

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx,$$

⁷Leva-se em conta a definição de partição exposta na seção sobre Integrais de Cauchy.

mostra uma função, $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$, que é integrável (imprópria) no sentido de Riemann, mas

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

não é uma integral resolvida no sentido de Riemann (integral imprópria). Isso mostra que a existência de antiderivadas (neste caso, $F(x) = \ln(|x|)$) não garante a existência de integrais impróprias ([5], pp30-31). Como será visto em exemplos nas seções que se seguem, há também funções que são integráveis no sentido de Riemann (integral imprópria) mas não o são no sentido de Lebesgue.

3. Integrais de Lebesgue

É aceito, na comunidade acadêmica, que as integrais de Newton e Leibniz eram insuficientes para impor desenvolvimentos na matemática, haja vista sua dependência ao conceito de derivadas. Além disso, funções como a função sinal $f(x) = \text{sign}(x)$ não seriam integráveis em $[-1, 1]$, por exemplo. No entanto a área da região entre o gráfico dessa função e o eixo x nesse intervalo é 2, por isso Cauchy aborda integrais para funções contínuas e descontínuas em um número finito de pontos. Riemann segue esses passos e vai além. Caracteriza o que é “área sob uma curva” e integra funções com um número infinito de pontos de descontinuidade. Mesmo assim, o conceito de integral ainda se mantém sob a tutela do conceito de continuidade. “Quanto” de descontinuidade pode haver em uma função para que ela ainda seja integrável? A função de Dirichlet não é Riemann integrável, mas a função de Thomae é Riemann integrável ([1], p193), e ambas têm infinitos pontos de descontinuidade⁸. A resposta a essa pergunta foi dada por Lebesgue no trabalho *Sur une généralisation de l'intégrale définie* em 1901 e em sua tese de doutorado *Intégrale, Longuer, Aire* em 1902.

Na sequência, para fins de comparação entre as várias definições do conceito de integral, expõe-se o conceito de integral de Lebesgue de modo semelhante ao de Riemann, em notação moderna, tal como exposto em [39].

Definição 9. ([39], p19) Uma medida exterior $m^*(G)$ de um conjunto aberto $G \subset [0, 1]$ é definida como o número real $\sum_i (b_i - a_i)$, em que $G = \cup_i (a_i, b_i)$ ⁹.

Definição 10. ([39], p19) Uma medida exterior $m^*(A)$ de qualquer conjunto $A \subset [0, 1]$ é definida como sendo o número real

$$\sup\{m^*(G) | A \subset G \text{ e } G \text{ é um conjunto aberto em } [0, 1]\}.$$

Definição 11. ([39], p22) Uma medida interior $m_*(A)$ de qualquer conjunto $A \subset [0, 1]$ é definida como sendo um número real $1 - m^*([0, 1] \setminus A)$.

⁸A função de Dirichlet tem um conjunto não enumerável de pontos de descontinuidade e a função de Thomae tem um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade ([3], pp127-128).

⁹Leva-se em conta que cada conjunto não vazio aberto $G \subset \mathbb{R}$ pode ser expresso unicamente como uma união finita ou uma união infinita contável de pares disjuntos de intervalos abertos.

Definição 12. ([39], p22) Um conjunto $A \subset [0, 1]$ é dito ser *Lebesgue mensurável* se $m_*(A) = m^*(A)$. Neste caso, a medida de A , denotada por $m(A)$, é o número $m_*(A) = m^*(A)$.

Definição 13. ([39], p47) Seja A um subconjunto mensurável limitado de \mathbb{R} . Então $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função mensurável* em A se $\{x \in A \mid c < f(x)\}$ é mensurável para cada número real c .

Definição 14. ([39], pp59-60) Se f é uma função mensurável em um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}$, se $P = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ é uma partição de

$$[\ell, u] = [\sup\{f(x) \mid x \in A\}, 1 + \inf\{f(x) \mid x \in A\}],$$

e se

$$y_i^* \in [y_{i-1}, y_i] \text{ para } i = 1, 2, \dots, n,$$

então denomina-se

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n y_i^* \cdot m(\{x \in A \mid y_{i-1} \leq f(x) < y_i\})$$

de *soma de Lebesgue* de f relativa a P .

Definição 15. ([39], p60) Uma função mensurável $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função Lebesgue integrável* em A se existe um número real L tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $\|P\| < \delta$, e se $L(f, P)$ é uma soma de Lebesgue de f relativa a P , então $|L(f, P) - L| < \varepsilon$.

O número L , único, é chamado de *integral de Lebesgue* de f em A , e denotado por

$$\int_A f dm.$$

Lebesgue elaborou uma “teoria da medida” para que seu novo conceito de integral pudesse ser desenvolvido. Mas a noção de medida deveria satisfazer a intuição comum, tal como na medida de um intervalo em \mathbb{R} . Por exemplo, ao se medir, com base na intuição, um intervalo $X = [a, b]$ e um intervalo $Y = (b, c]$, disjuntos e tal que $[a, b] \cup (b, c] = [a, c] = Z$, deve-se ter que a medida de X mais a medida de Y deve fornecer a medida de Z . Ou ainda, como mais um exemplo, estima-se que a medida de um subconjunto de X não exceda a medida do próprio conjunto X . Além dessas, outras noções intuitivas sobre o conceito de medida deveriam ser satisfeitas. Mas uma delas foi muito significativa, qual seja, a ideia de que “o todo é a soma das partes.” A generalização dessa ideia é conhecida como **aditividade contável**, ([8], pp86-90)¹⁰. Mas há recursos matemáticos que auxiliam na definição de medida, tal como uma σ -álgebra¹¹, que é fechada para as operações usuais da teoria de conjuntos. A σ -álgebra gerada pela coleção de todos os intervalos abertos de \mathbb{R} é chamada de σ -álgebra \mathcal{B} de Émile Borel (1871-1956). Com base nisso, tem-se que cada conjunto de Borel de números reais é um conjunto Lebesgue mensurável ([7], p.112-113). Se \mathcal{M} é a coleção de todos os conjuntos mensuráveis de \mathbb{R} , então existem conjuntos em \mathcal{M} que não estão em \mathcal{B} ([2], p.311). Isso indica que há uma hierarquia de conjuntos: mensuráveis, de Borel, σ -álgebra,

¹⁰Há uma explicação muito interessante desse conceito no capítulo 3 de [7], bem como a explicação do complexo desenvolvimento da teoria da medida de Lebesgue.

¹¹Uma coleção S de subconjuntos de E é chamada de classe *contavelmente aditiva* de conjuntos (ou σ -álgebra) se: i) $E \in S$, ii) se $A \in S$ então $(E - A) \in S$ e iii) se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ então $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ ([39], p33).

que satisfazem *aditividade contável* etc., os quais indicam também a classe de funções integráveis no sentido de Lebesgue ([7], p.114). Nota-se com isso o quanto que a noção de medida influencia no conceito de integral de Lebesgue.

Nota-se que Riemann aprimorou as somas de Cauchy, e Lebesgue, de modo análogo, aprimorou as somas de Riemann. Em vez de tomar as partições no domínio da função $f(x)$, como em Riemann, Lebesgue tomou as partições na imagem da função $f(x)$, mas para isso precisou **medir** os subconjuntos de \mathbb{R} .

Riemann : Partições no domínio (a, b)

Lebesgue : Partições na imagem (f, \bar{f})

O entendimento do conceito de continuidade revela o quanto “extensivo” é o conceito de integração de Riemann. Seja, por exemplo, para $x \in [0, 1]$ e $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ uma enumeração de todos os números racionais ([1], p210-211). Seja a função g_n de números reais definida como segue. Seja $g_1(x) = 1$ se $x = r_1$ e seja $g_1(x) = 0$ caso contrário. Seja agora, $g_2(x) = 1$ se x é r_1 ou r_2 , exclusivamente, e seja $g_2(x) = 0$ em todos os outros pontos de $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Cada g_n tem somente um número finito de descontinuidades, e portanto é Riemann integrável com

$$\mathcal{R} \int_0^1 g_n = 0.$$

Mas a sequência de funções (g_n) converge para a função $g(x)$ de Dirichlet, ponto a ponto, no intervalo $[0, 1]$. Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R} \int_0^1 g_n \neq \mathcal{R} \int_0^1 g \tag{1}$$

Essa última equação seria válida se a convergência g_n para g fosse uma convergência uniforme¹². Henri Lebesgue alterou a definição de integral de modo que a equação acima pudesse ser verdadeira. Para isso, Lebesgue introduz a ideia de *medida* de um conjunto e, com base nisso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L} \int_0^1 g_n = \mathcal{L} \int_0^1 g, \tag{2}$$

e a função de Dirichlet torna-se Lebesgue Integrável. Há também deficiências nas integrais de Lebesgue. Nem todas as funções integráveis no sentido de Lebesgue satisfazem o TFC, e há funções cuja integral imprópria existe no sentido de Riemann, mas não no sentido de Lebesgue ([1], p212). Isso sugere novos desenvolvimentos no conceito de integrais. Isso foi o que O. Perron, A. Denjoy, J. Kurzweil e R. Henstock fizeram.

¹²Sobre esses conceitos ver [3], páginas 241 a 246.

4. Integrais de Kurzweil-Henstock

Com base na teoria da medida e integração de Lebesgue, é possível dizer, acerca das integrais de Riemann, que uma função limitada é Riemann integrável se seu conjunto de pontos de descontinuidade for um conjunto de *medida zero* ([3], p.220). No entanto, mesmo na *teoria de Lebesgue*, ainda havia deficiências na teoria de integrais, indicando que alterações e ajustes faziam-se necessários. Com as integrais de Lebesgue tornou-se possível integrar a função de Dirichlet, mas ainda não era possível integrar todas as funções primitiváveis. Além disso, existem funções cuja integral imprópria existe e não são funções Lebesgue integráveis. Essas duas deficiências das integrais de Lebesgue, se assim se pode dizer, foram resolvidas também com as integrais de Kurzweil-Henstock. Em 1957 o matemático tcheco Jaroslav Kurzweil (1926-) em trabalhos de pesquisa em equações diferenciais fornece uma definição de integral equivalente à de Perron [26]. Mais tarde, o matemático britânico Ralph Henstock (1923-2007) desenvolve, independentemente, um conceito de integral equivalente ao de Kurzweil [22]. Em ambas as apresentações, o conceito fundamenta-se nas ideias simples das integrais de Riemann. Além disso, o conceito é amplo o suficiente para considerar as integrais de Riemann e de Lebesgue como casos particulares.

Definição 16. ([3], p149) Uma função **calibre** em um intervalo $I = [a, b]$ é uma função estritamente positiva definida em I . Se δ é um calibre em I , então uma partição **etiquetada** \mathcal{P} é dita ser δ -**fina** se

$$t_i \in I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Lema 1 (Cousin). ([3], p151) Se δ é um calibre definido no intervalo $[a, b]$, então existe uma partição δ -fina de $[a, b]$.

Um ponto importante é a relação entre as integrais de Kurzweil-Henstock e o lema de Cousin, que é equivalente a um axioma de completude [32]. Pierre Cousin (1867-1933) provou, [12], que, se $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ é um intervalo não degenerado e se δ é qualquer calibre definido sobre I , então sempre existirá uma partição etiquetada de I , que é δ -fina ([2], p11), base para a definição das integrais de Kurzweil-Henstock.

Definição 17. ([3], p290)¹³ Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **Kurzweil-Henstock integrável** em $[a, b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe um calibre $\delta_\epsilon > 0$ em $[a, b]$ tal que se \mathcal{P} é qualquer partição δ_ϵ -fina de $[a, b]$, então

$$|S(f; \mathcal{P}) - L| < \epsilon.$$

O conjunto de todas as funções que são Kurzweil-Henstock integráveis em $[a, b]$ será denotado por $\mathcal{KH}[a, b]$. Se $f \in \mathcal{KH}[a, b]$, então o número L é unicamente determinado e será chamado de **integral de Kurzweil-Henstock** de f em $[a, b]$, comumente denotado por

$$L = \mathcal{KH} \int_a^b f(x) dx.$$

Do mesmo modo que, com simples alterações na definição de integrais de Cauchy, Riemann expandiu sua classe de funções integráveis, as integrais de Kurzweil-Henstock foram expandidas graças

¹³No livro *Introduction to Real Analysis*, ([3], p290), os autores utilizam a denominação *Integrais de Riemann generalizadas*, em vez de integrais de Kurzweil-Henstock como denotadas nesse texto.

também a simples alterações nas integrais de Riemann. Em Riemann considera-se **um valor** $\delta > 0$, já em Kurzweil-Henstock considera-se **uma função** δ de valores estritamente positivos.

$$\text{Riemann} : I_i \subseteq [t_i - \delta, t_i + \delta]$$

$$\text{Kurzweil-Henstock} : I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$$

Observa-se que há vantagens e desvantagens nessas classes de funções integráveis expostas neste texto. Por exemplo, **existem** funções f que são Kurzweil-Henstock integráveis mas o mesmo não ocorre com o valor absoluto dessas mesmas funções, ou seja, $f \in \mathcal{KH}[a, b]$, mas $|f| \notin \mathcal{KH}[a, b]$. Já, com as funções Riemann integráveis, se tem que se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ então $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ ([3], p. 304). Por outro lado, dentre as funções que pertencem à classe de funções que são Kurzweil-Henstock integráveis, torna-se possível identificar quais delas são Lebesgue integráveis. Para isso basta levar em conta a seguinte asserção: uma função $f \in \mathcal{L}[a, b]$ se, e somente se, ambas as funções, $f \in \mathcal{KH}[a, b]$ e seu valor absoluto $|f| \in \mathcal{KH}[a, b]$ ([2], p.17).

5. Exemplos

Nessa seção apresentam-se exemplos de funções que são e que não são integráveis, nas abordagens expostas em seções anteriores. As demonstrações podem ser encontradas nas respectivas referências bibliográficas. Além de expor exemplos clássicos e facilitadores, no sentido didático, argumenta-se também que o assunto não se esgotou em termos de desenvolvimento científico. A classe de funções integráveis no sentido de Kurzweil-Henstock não aborda uma classe tão ampla como se imagina. Além disso sempre há prós e contras com relação às facilidades que essas integrais produzem no fazer matemático. Isso indica que novos desenvolvimentos ainda podem ser elaborados com o objetivo de ampliar ainda mais a classe de funções integráveis. No livro *A Modern Theory of Integration*, Robert Bartle escreve que ainda há desenvolvimentos a serem realizados na teoria da integração:

*(...) é surpreendente que novos desenvolvimentos continuem a surgir nessa teoria
(...) (Tradução dos autores) ([2], p. ix).*

Exemplo 1. ([3], p206) Seja a função de Thomae $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, com $h(x) = 0$ se $x \in [0, 1]$ é um número irracional; $h(0) = 1$; e $h(x) = \frac{1}{n}$ se $x \in [0, 1]$ é um número racional $x = \frac{m}{n}$ onde $m, n \in \mathbb{N}$ são primos entre si. A função de Thomae, que é contínua em cada número irracional e descontínua em cada número racional, é Riemann integrável em $[0, 1]$.

Exemplo 2. As funções e^{-x^2} , $\sin x^2$, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$ e $\frac{x}{|x|}$ não são Newton-Leibniz integráveis.

Exemplo 3. ([3], p218) Seja $F(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x^2})$ para $x \in (0, 1]$ e $F(0) = 0$. A função

$$F'(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin(\frac{1}{x^2}),$$

para $x \in (0, 1]$ com $F'(0) = 0$ não é limitada em $[0, 1]$ e $F(x)$ é contínua e diferenciável em cada ponto em $[0, 1]$. F' é uma função que não é Riemann integrável, é Newton-Leibniz integrável e é Kurzweil-Henstock integrável em $[0, 1]$.

Exemplo 4. A função $f(x)$ de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{I} \end{cases},$$

introduzida por P. G. L. Dirichlet em 1829, é Kurzweil-Henstock integrável em $[0, 1]$, ([3], p291), é Lebesgue integrável em $[0, 1]$, ([8], p21), mas não é Riemann integrável ([3], p209) e nem Newton-Leibniz integrável

Exemplo 5. ([40], p71) A função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

para $x \neq 0$ não é Kurzweil-Henstock integrável em $[0, 1]$. Também, $f(x) = \frac{1}{x}$ com $x \in [1, +\infty)$ não é Kurzweil-Henstock integrável em $[1, +\infty)$ ([3], p314).

Exemplo 6. ([3], p288 e p311) Na integral imprópria de Dirichlet,

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx,$$

a função $\frac{\text{sen } x}{x}$ pertence a $\mathcal{KH}[0, \infty)$, mas não é Lebesgue integrável em $[0, \infty)$. Nota-se também que na integral com valor absoluto $\int_0^{\infty} \left| \frac{\text{sen } x}{x} \right| dx$, a função $\left| \frac{\text{sen } x}{x} \right|$ não é nem Kurzweil-Henstock, nem Lebesgue integrável em $[0, \infty)$.

Exemplo 7. ([40], p18) ([5], p91) A função

$$f(x) = 2x \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

é descontínua e limitada, para $x \neq 0$, com $f(0) = 0$. A função $F(x) = x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, com $F(0) = 0$ é tal que $F' = f$. Assim, f é Riemann integrável e também é Newton-Leibniz integrável em $[0, 1]$.

Exemplo 8. ([3], p215, ex. 12), ([40], p. 18) A função

$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

para $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$ é Riemann integrável, mas não é Newton-Leibniz integrável.

Exemplo 9. ([4], p254), ([3], p302) A função ilimitada

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

com $f(0) = 0$ é Newton-Leibniz integrável, é Cauchy integrável, é Riemann integrável em $(0, 1]$ e é também Kurzweil-Henstock integrável em $[0, 1]$. A função $g(x) = f(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \in (0, 1]$ com $g(0) = 0$ é Lebesgue integrável em $[0, 1]$ ([3], p307).

Exemplo 10. ([5] pp33-35) A função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((nx))}{n^2}$$

é Riemann integrável, mas é descontínua em todos os números racionais. Neste caso, a função $((x))$ é definida como:

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] & \text{se } [x] \leq x < [x] + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } x = [x] + \frac{1}{2} \\ x - [x] - 1 & \text{se } [x] + \frac{1}{2} < x < [x] + 1 \end{cases}$$

Exemplo 11. ([3], p301) Seja $F(x) = x \cos(\frac{\pi}{x})$ para $x \in (0, 1]$ com $F(0) = 0$. A função $f(x) = F'(x) = \frac{\pi}{x} \sin(\frac{\pi}{x}) + \cos(\frac{\pi}{x})$, com $f(0) = F'(0) = 0$, é Kurzweil-Henstock integrável em $[0, 1]$, mas $|f(x)| = |F'(x)| \notin \mathcal{KH}[0, 1]$.

Exemplo 12. ([8], p194) A função $f(x) = 2x \operatorname{sen}(\frac{\pi}{x^2}) - \frac{2\pi}{x} \cos(\frac{\pi}{x^2})$ para $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$ é Kurzweil-Henstock integrável, mas não é Lebesgue integrável.

Exemplo 13. ([5], p189) Seja $f(x) = 2x \operatorname{sen}(x^{-2}) - 2x^{-1} \cos(x^{-2})$. A integral imprópria

$$\int_0^1 f(x) dx,$$

existe no sentido de Riemann, mas não existe no sentido de Lebesgue.

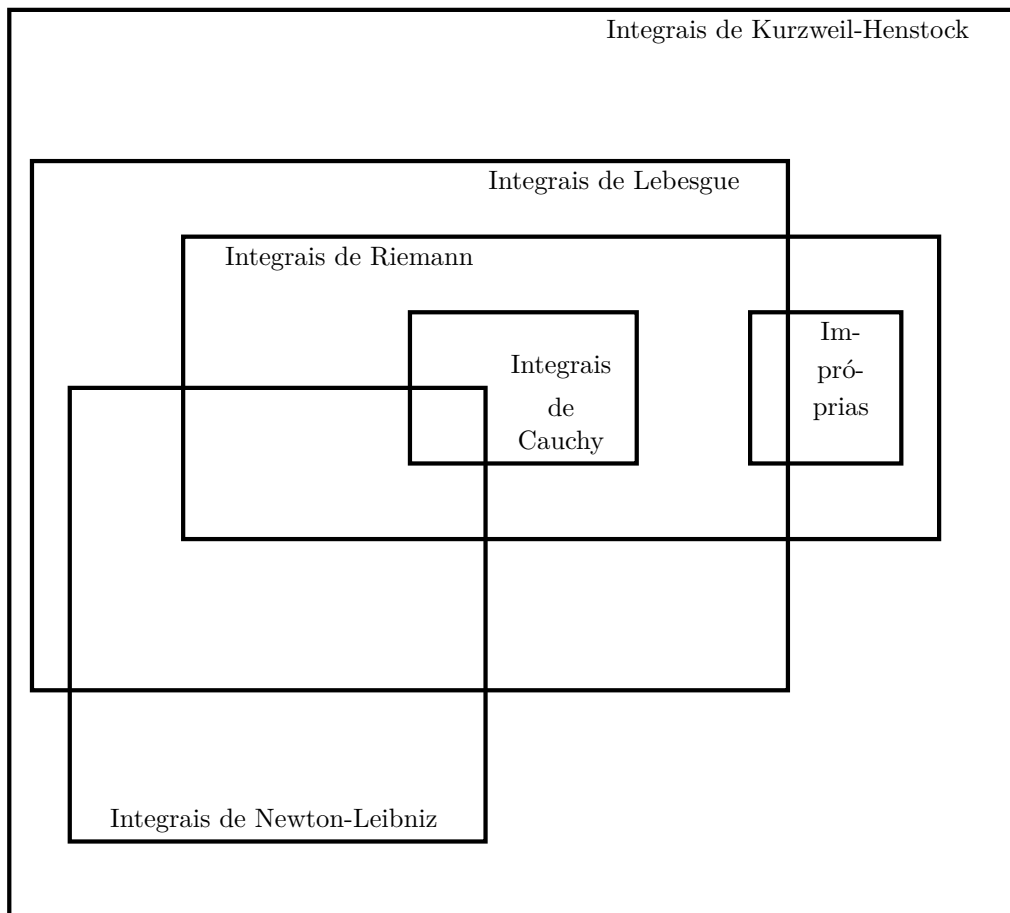
Exemplo 14. Seja a função $F(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^{-2})$, para $x \neq 0$ e $F(0) = 0$.

Seja $F'(x) = 2x \operatorname{sen}(x^{-2}) - 2x^{-1} \cos(x^{-2})$. F' é integrável no sentido de Newton-Leibniz e é Kurzweil-Henstock integrável em $[0, 1]$ ([40], p71), mas F' não é Riemann integrável¹⁴ ([5], p89).

Exemplo 15. ([3], p225) Se $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de Thomae e se $\operatorname{sign}(x)$ é a função Sinal, então a função composta $\operatorname{sign}(x) \circ h$ não é Riemann integrável, mesmo que as funções de Thomae e Sinal sejam Riemann integráveis.

A partir do exposto nas seções anteriores, e nos exemplos desta seção, é possível exibir um quadro comparativo em que as funções integráveis, segundo sua definição particular, apresentam-se numa relação entre conjuntos.

¹⁴Não se leva em conta, neste caso, as integrais impróprias de Riemann.



6. Conclusão

A exposição histórica com olhares na gênese do conhecimento, [36], torna-se fundamental como estratégia pedagógica, haja vista que esclarece os desenvolvimentos que são essenciais para a compreensão de conceitos matemáticos e para a percepção de que na matemática há processos de transformação e interação. Além disso, ajusta, destarte, os caminhos que formaram a construção de determinados conceitos. No caso do presente trabalho, o conceito de integrais é exposto e, tal como no quadro comparativo acima, são elencados exemplos, não exaustivos, onde a alteração (ou ajuste) do conceito de integrais impactou na expansão da classe de funções integráveis e na interação da matemática com outros campos do conhecimento. Urge que esclarecimentos, em cursos de Cálculo, sejam feitos em paralelo à apresentação de conceitos matemáticos. Caso não se explicita, num curso de Cálculo, por exemplo, qual é a abordagem de integrais adotada, dificuldades de leitura podem surgir, tal como no seguinte exemplo, sobre qual resposta pode ser considerada correta.

Exemplo 16. No escopo de integração via Riemann, a função de números reais $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ defi-

nida, por exemplo, num intervalo $(0, 2]$, pode ser resolvida, num curso de Cálculo, com a aplicação das técnicas de integrais impróprias:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_a^2 = \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{2} - 2\sqrt{a}] = 2\sqrt{2}. \quad (3)$$

Mas, no escopo das integrais de Kurzweil-Henstock, essa mesma função pode ser resolvida de modo imediato:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_0^2 = [2\sqrt{2} - 2\sqrt{0}] = 2\sqrt{2}. \quad (4)$$

Vale citar um comentário de R. Bartle:

Esses processos de limites não são necessários quando se trata de integrais de Riemann generalizadas. (Tradução dos autores) ([3], p302).

Esse exemplo indica o quanto é importante o conhecimento de conceitos matemáticos e também da exibição de sua trajetória histórica e conceitual. Esses “caminhos” que formam a gênese de um conceito são vitais para se ter uma matemática conexa com seu desenvolvimento. É evidente que exemplos que desvelam o surgimento de um conceito existem em vários setores da matemática, haja vista que a evolução da matemática dá-se por processos dedutivos e indutivos, caracterizando uma *ciência* cumulativa. No entanto, como em toda ciência, há alterações e inovações em seus aspectos teóricos. O conceito de integrais é um desses exemplos. As facilidades de acesso às informações no mundo atual podem ser utilizadas para clarear e precisar os conceitos matemáticos. Desse modo, algumas confusões podem ser evitadas, tais como: utilizar *somas de Riemann* numa definição de integrais de Darboux [13], dizer de funções integráveis como sendo funções Newton-Leibniz integráveis; caracterizar *somas de Cauchy* como sendo *somas de Riemann*; dizer que a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ não é integrável em $(0, 2]$ sem dizer do conceito de integral no qual a função está inserida (exemplo 16); esquivar-se de uma caracterização de diferenças entre integrais construtivas e integrais descritivas etc. Outro cuidado que se deve ter refere-se ao Teorema Fundamental do Cálculo, pois esse pode induzir ao pensamento de que “ser integrável” é possuir primitivas. Atualmente se faz necessário que, ao se definir um conceito de integral, se explicita também a que tipo de integral se refere. O esclarecimento desse cenário, entende-se, é uma estratégia pedagógica com vistas às melhorias na compreensão de conceitos matemáticos em Cálculo.

Agradecimentos

Uma pequena parte deste artigo foi apresentada no *V Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste*, ocorrido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, na cidade de Goiânia, de 26 a 30 de novembro de 2018, com auxílio financeiro, Projeto Faepex-Unicamp-3082/18 - Prof. J. C. Magossi. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] Abbott, Stephen. *Understanding Analysis*. Springer, New York, 2001.
- [2] Bartle, R. G. *A Modern Theory of Integration*. Graduate Studies in Mathematics, Volume 32. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.
- [3] Bartle, R.G., Sherbert, D.R. *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition, Wiley India Edition, New Delhi, 2011.
- [4] Bressoud, David M. *A radical approach to real analysis*. Vol. 2. Mathematical Association of America, 2007.
- [5] Bressoud, David M. *A radical approach to Lebesgue's theory of integration*. Cambridge University Press, 2008.
- [6] Bressoud, David M. *Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus*. The American Mathematical Monthly, v. 118, n. 2, p. 99-115, 2011.
- [7] Burk, Frank. *Lebesgue Measure and Integration - An Introduction*. John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [8] Burk, Frank. *A Garden of Integrals*. Dolciani Mathematical Expositions, 31. The Mathematical Association of America-MAA Press. Washington DC, 2007.
- [9] Cajori, Florian. *A History of Mathematical Notations. Two Volumes Bound as One. I. Notations in Elementary Mathematics. II. Notations Mainly in Higher Mathematics*. Dover Publications, New York, 1993. La Salle, Illinois: Open Court, 1928?29. 1993.
- [10] Cauchy, Augustin-Louis. *Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Vol. 1. Imprimerie royale, 1823.
- [11] Courant, R. , John, F.. *Introduction to Calculus and Analysis I*. Reprinted of the 1989 Edition. Springer-Verlag, Berlin. 1999.
- [12] Cousin, Pierre. *Sur les fonctions de n variables complexes*. Acta Mathematica, 19, pp.1-62, 1895.
- [13] Darboux, G. *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues*. Annales ENS (Vol. 2, No. 4, pp. 57-112), 1875.
- [14] Loomis, Elisha Scott. *The Pythagorean Proposition*. Classics in Mathematics Education Series. 1968.
- [15] Fourier, Joseph. *Théorie analytique de la Chaleur*, Firmin-Didot père et fils, Paris, 1822. Facsimile, Ed. Jacques Gabay, Paris, 1988.
- [16] Gordon, R. A. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. No. 4. American Mathematical Society, 1994.
- [17] Grabiner, Judith V. *The Origin of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover Publications, Inc., New York, 1981.
- [18] Grattan-Guinness, I. *Joseph Fourier and the Revolution in Mathematical Physics*. Journal of the Institute of Mathematics and its Applications, 5, 230-253, 1969.
- [19] Hairer, E., Wanner, G. *Analysis by Its History*. New York, Springer-Verlag, 1996.
- [20] Hawkins, T. *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development*. 2nd edition, Chelsea Pub. Co., New York, 1975.

- [21] Henstock, R. *Theory of integration*. Butterworths, 1963.
- [22] Henstock, Ralph. *Definitions of Riemann type of the variational integrals*. Proceedings of London Mathematical Society, (3), 11: 410-418, 1961.
- [23] Hoare, G.T.Q., Lord, N. J. 'Intégrale, longueur, aire' the Centenary of the Lebesgue Integral. The Mathematical Gazette, Vol. 86, No. 505, pp. 3-27, Mar., 2002.
- [24] Jahnke, H. N., *A History of Analysis*, History of Mathematics, Volume 24, American Mathematical Society, 2003.
- [25] Kuhn, Thomas. *A Estrutura das Revoluções Científicas*. Editora Perspectiva, São Paulo, 1994.
- [26] Kurzweil, J. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*. Czechoslovak Mathematical Journal, 7.3: 418-449, 1957.
- [27] Mawhin, J. *Analyse: fondements, techniques, évolution*. De Boeck Université, Brussels, 1992. Second edition, 1997.
- [28] Phillips, Esther R. *A Introduction to Analysis and Integration Theory*. Dover Publications, New York, 1984.
- [29] Reid, Constance. *Hilbert-Courant*. Springer Science & Business Media, 1986.
- [30] Reid, Constance. *Courant*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [31] Riemann, Bernhard. *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Habilitation thesis, Göttingen, 1854, Werke, p. 227-271.
- [32] Rioul, Olivier e Magossi, José Carlos (2018) *A Local-Global Principle for the Real Continuum*. Studia Logica, Vol. 47, Capítulo 11, pp. 213-240. Special edition of Trends in Logic 47: Contradictions, from Consistency to Inconsistency. Springer International Publishing, 2018.
- [33] Rosentrater, C. R. *Varieties of Integration*. Dolciani Mathematical Expositions. The Mathematical Association of America-MAA Press. Washington DC, 2015.
- [34] Schwartz, L. *Theorie des Distributions*. 3a, Ed. Herman, Paris, 1966.
- [35] Thomson, Brian S., Judith B. Bruckner, and Andrew M. Bruckner. *Elementary real analysis*. CreateSpace, Second edition, 2008.
- [36] Toeplitz, O. *The Calculus — A Genetic Approach*. Chicago University Press, Chicago, 2007.
- [37] Van Vleck, E. B. *The Influence of Fourier series on the development of mathematics*. Science 39, 113-124, 1914.
- [38] Volterra, Vito. *Sui principii del calcolo integrale*. Giornale di Matematiche Battaglini, 19, 333-372, 1881.
- [39] Wilcox, H. J., Myers, D. L. *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*. Dover Publications, New York, 1978.
- [40] Yee, L. P., Výborný, R. *The Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [41] Youshkevitch, A. P. *The concept of function up to the middle of the 19th century*. Archive for History of Exact Sciences. 16 (1): 37-85, 1976.

José C. Magossi e Antônio C. C. Barros
Faculdade de Tecnologia - FT - Unicamp
<magossi@ft.unicamp.br>
<a810088@dac.unicamp.br>

Recebido: 06/06/2019
Publicado: 20/12/2019