

Cortando bolo, *pizza* e *grissini*

José Antonio Salvador

Resumo

Nos processos que levam à aprendizagem matemática destacamos o Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas que permitam descobrir padrões, fazer conjecturas e demonstrações explorando diferentes conteúdos. Nesse trabalho investigamos a resolução do problema sobre quantos pedaços de um bolo obtemos com $n = 0, 1, 2, \dots$ cortes planos e problemas relacionados. A riqueza deste problema permite a exploração de diversos conteúdos matemáticos como geometria, seqüências, tabelas, gráficos, primeiras e segundas diferenças, padrões, indução matemática, equações discretas, contagem, arranjos e combinações, grafos e obtenção de coeficientes de polinômios usando resolução de sistemas lineares. Tal abordagem pode contribuir para rever, adquirir e ampliar o conhecimento dos estudantes de uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática ou mesmo do Ensino Médio.

Palavras-chave: Resolução de problemas matemáticos; Cortes planos de um bolo; Padrões; Sequências.

Abstract

In the processes that lead to mathematical learning we highlight the Teaching of Mathematics through Problem Solving which allows us to discover patterns, make conjectures and demonstrate, by exploring different contents. In this paper we investigate the problem of how many pieces of cake we get to make with $n = 0, 1, 2, \dots$ flat cuts. The richness of this problem allows to explore the various contents such as geometry, sequences, tables, graphs, first and second differences, pattern, mathematical induction, discrete equations, counting, arrangements and combinations, graphs and obtaining polynomial coefficients using resolution of linear systems. This approach can help to revise, acquire and undergrad students' knowledge of a subject in mathematics or even high school students'.

Keywords: Linear cuts of a cake; Mathematical problem solving; Mathematical patterns; Sequences.

1. Introdução

Num primeiro momento podemos apresentar a figura de um bolo aos estudantes de uma aula de matemática para despertar a curiosidade. Que perguntas eles fariam? Poderiam imaginar questões sobre vários conteúdos matemáticos, desde o tamanho ou peso do bolo, porcentagens dos ingredientes, nutrientes, calorias, tempo de preparo, custo, divisão, cortes em um certo número de pedaços etc.

Neste trabalho exploramos o problema de determinar quantos pedaços de bolo podemos obter com $n = 0, 1, 2, \dots$ cortes planos, que é equivalente a quantas regiões n planos divide o espaço.

Ao orientarmos pequenos grupos de licenciandos ou estudantes do Ensino Médio conduzimos ao entendimento do problema, facilitando com questionamentos para que eles agilizem os seus conhecimentos prévios e que possam descobrir novos.

A princípio, observamos que a maioria deles entende o problema, mas apresenta dificuldades para resolver, exceto quando tentam visualizar e desenhar os cortes em posições particulares, como paralelos ou tendo uma mesma interseção.

No processo de discussão podemos revisar os conceitos relacionados, como plano, espaço, posições relativas de como os planos estão dispostos etc. Questionando sobre o que queremos obter: o número mínimo ou máximo de partes, quais são as possibilidades e que estratégias utilizar. Tentativas e erros, adivinhação, análise geométrica, testando casos iniciais para $n = 0, 1, 2$ cortes no bolo esboçando figuras são as ideias iniciais que geralmente aparecem. Também se podem organizar os dados iniciais obtidos numa tabela e analisá-la, fazer gráficos, procurar padrões, estabelecer uma relação de recorrência e obter uma função discreta, resolvê-la com as condições iniciais. A dificuldade de solucionar o problema para a maioria leva-nos a sugerir uma estratégia de resolver um problema análogo, entendendo primeiro um caso mais simples que pode ser útil na busca da solução, conforme [6] e outros pesquisadores da arte de resolver problemas sugerem.

Um problema investigativo mais simples pode ser o de encontrar o (maior) número de partes em que n , $n \in \mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais) cortes retilíneos divide uma *pizza* grande e fina, conhecido como *Pizza* de Steiner (equivalente ao problema de quantas regiões n retas dividem um plano) mais fácil de visualizar e de fazer tentativas, experimentos, conjecturas, erros e acertos.

Mais elementar ainda, o problema equivalente em uma dimensão é sobre quantas partes obtém-se com n quebras de um *grissini* (palito fininho e comprido de pão), ou equivalente, em quantas regiões n pontos divide um segmento de reta (ou uma reta).

Como sabemos, a ênfase da metodologia de resolução de problemas desde as ideias iniciais de compreensão dos mesmos deve ser dada ao processo de resolução, à checagem de cada passo da solução a princípio provisória, e testá-la dispendo-se a submeter os resultados ou conclusões a uma revisão minuciosa.

Descobrimo uma fórmula de recorrência para os problemas em uma dimensão (*grissini*), duas dimensões (*pizza* grande e fina) ou três dimensões (bolo), podemos questionar um problema mais geral sobre qual é o maior número de partes que n objetos k -dimensionais, $k \in \mathbb{N}$, corta um objeto de uma dimensão superior $(k + 1)$ -dimensional.

Nesse sentido, visamos a construção de conceitos e resultados matemáticos através de situações estimuladoras e desafiadoras que percorremos desde a abordagem preliminar do problema: o entendimento do enunciado; a interpretação matemática com linguagem adequada; compreensão dos dados do problema; o que está sendo solicitado; quais as habilidades necessárias para busca da resolução; que conhecimentos prévios poderão ser mobilizados para a resolução do mesmo - se é que ele tem solução; ou a partir de sua resolução? etc. Será que a partir do resultado obtido podemos checar ou demonstrar a solução encontrada, etc.

Poderíamos ainda expressar nosso sentimento indicando se achamos fácil ou difícil, se gostamos ou não, e também dos conceitos e resultados revisitados ou adquiridos com a resolução do problema.

Abordaremos aqui desde o problema da quebra de um *grissini*, dos cortes lineares de uma plana fina e finalmente o de cortes planos de um bolo.

2. Quebrando um *grissini* n vezes

Consideramos inicialmente o problema mais simples que consiste em obter o maior número de pedaços ao quebrar um *grissini* fino e comprido n vezes, $n \in \mathbb{N}$.

Para descobrir o padrão com n quebras de um *grissini* propomos considerar a relação que associa a cada número natural n de pontos sobre um segmento de reta ou sobre uma reta, o número de pedaços ou regiões $r(n)$ obtidas.

De fato, pode-se testar inicialmente para $n = 0$ (zero quebra do *grissini*) e obter $r(0) = 1$ (parte), ou seja, deixa uma única região linear. Se tivermos $n = 1$ quebra, obtemos $r(1) = r(0) + 1 = 1 + 1 = 2$, ou seja, uma quebra divide-o em duas partes. Ou seja, um ponto sobre uma linha reta divide-a em duas regiões.

Com $n = 2$ (duas quebras), em quaisquer posições do *grissini*, obtemos 3 partes, ou seja, $r(2) = r(1) + 1 = 2 + 1 = 3$.

Podemos construir uma tabela com os valores iniciais para cada passo, conforme Tabela 1, de modo que facilita a descoberta de um padrão;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...	$n-1$	n
$r(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	$n+1$
$\Delta r(n)$	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	

Tabela 1: n quebras de um *grissini*, $r(n)$ (partes) e $\Delta r(n)$ (diferença)

$$r(n) = r(n - 1) + 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

E fazer a observação de que a diferença primeira

$$\Delta r(n) = r(n) - r(n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dos valores de $r(n)$ é constante igual a 1, e, portanto, a sequência $r(n)$ é uma PA (progressão aritmética) com primeiro termo $r(0) = 1$ e razão igual a 1, conforme sugere a Tabela 1.

A cada quebra de um *grissini* (não importando o local) obtemos sempre uma parte a mais representada pela função discreta linear $r(n) = 1 + n$, com $n \in \mathbb{N}$, cujas propriedades e o gráfico afim discreto podem ser explorados como mostra a Figura 1.

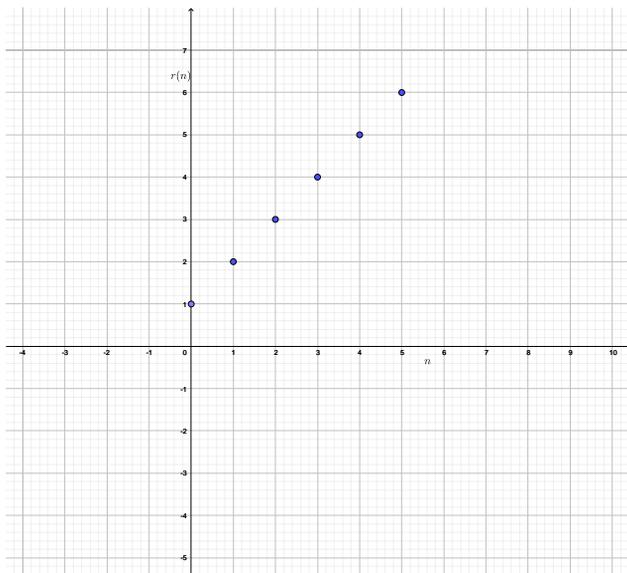


Figura 1: Número de partes de um *grissini* cortado em n pontos

Podemos provar diretamente, calculando a solução da equação discreta linear de primeira ordem não homogênea $r(n + 1) = r(n) + 1$ com a condição inicial $r(0) = 1$, para obter

$$r(n) = 1 + n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

partes de um *grissini* quebrando em n pontos.

Certamente podemos provar de outras maneiras, como pelo Método da Indução Matemática ou, mesmo, contando o número máximo de pedaços obtidos usando combinação,

$$r(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n$$

em que $\binom{n}{i}$ é o número binomial de ordem n e classe $i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, ou seja, o número de subconjuntos distintos com i elementos tomados de um conjunto com n elementos.

3. Cortes retilíneos de uma pizza

Entendido o caso dos *grissinis*, pensamos em quantas partes obtemos com n cortes retilíneos numa enorme *pizza* considerada plana. Devemos agora considerar vários casos, dependendo das posições relativas dos cortes retilíneos paralelos, concorrentes num mesmo ponto, alguns paralelos e outros concorrentes ou no caso mais geral, cortes concorrentes não se cruzando mais do que dois deles num mesmo ponto conforme Figura 2.

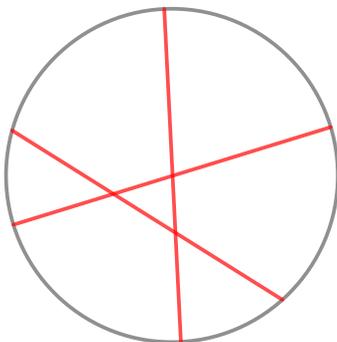


Figura 2: *Pizza* cortada retilinearmente três vezes

3.1. Cortes paralelos

Cortes paralelos numa *pizza* é um problema análogo ao caso das quebras de um *grissini*; para $n \in \mathbb{N}$ cortes paralelos temos que $p_p(n)$ é o número de partes (regiões) que a *pizza* fica dividida

$$p_p(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.2. Cortes concorrentes num mesmo ponto

Se todos os n cortes retilíneos distintos forem concorrentes no mesmo ponto central, como geralmente se corta uma *pizza* circular, podemos elaborar tabela e gráficos com $n = 0, 1, 2, \dots$ cortes retilíneos *versus* $p_{cmp}(n)$, representando o número de regiões que os n cortes concorrentes no mesmo ponto gera,

$$p_{cmp}(n) = 2n, n \in \mathbb{N},$$

conforme a Figura 3.

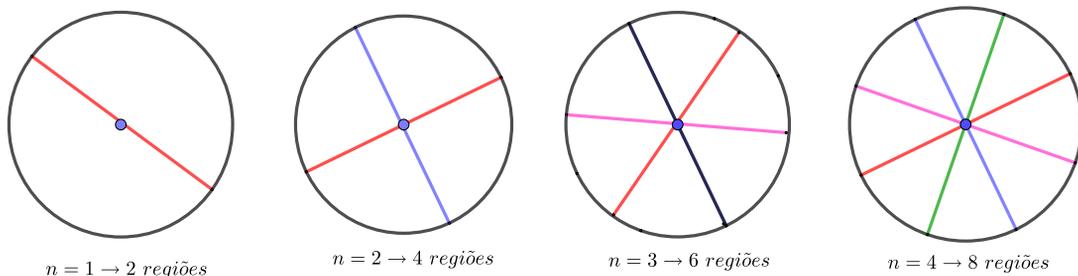


Figura 3: Número de regiões de uma *pizza* com n cortes retos concorrendo em um mesmo ponto

Cortes mais gerais também podem ser explorados como vários concorrentes num mesmo ponto e alguns não, ou mesmo com todos concorrentes dois a dois em pontos distintos.

3.3. Cortes gerais de uma *pizza*

Consideremos agora o caso mais geral com n cortes lineares de uma *pizza* não tendo dois paralelos e nem três deles concorrentes num mesmo ponto para obtermos o máximo de regiões, conforme Figura 4, mostrando quatro cortes e 11 partes.

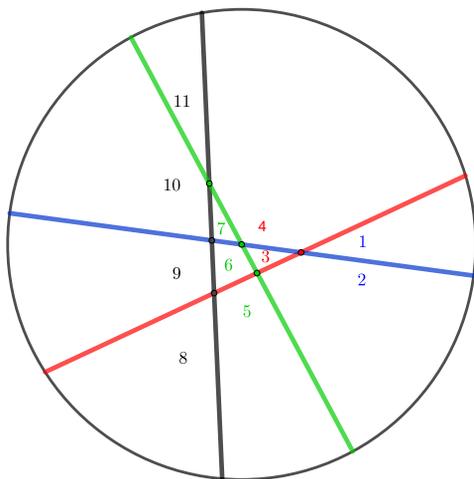


Figura 4: Quatro cortes retilíneos dividindo uma *pizza* em 11 pedaços

Observamos que o n -ésimo corte, não paralelo a nenhum dos $n - 1$ cortes anteriores e não cruzando as interseções já existentes, cortará todos os anteriores em $n - 1$ pontos distintos e acrescentará mais n partes convexas, que podem ser contadas passo a passo de modo que podemos descobrir o padrão:

$$\begin{aligned}
 p(0) &= 1, \\
 p(1) &= p(0) + 1 = 1 + 1 = 2, \\
 p(2) &= p(1) + 2 = 2 + 2 = 4, \\
 p(3) &= p(2) + 3 = 4 + 3 = 7, \\
 &\vdots \\
 p(n) &= p(n - 1) + n, \quad n \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Para encontrar a função discreta $p(n)$ explicitada em função de $n, n \in \mathbb{N}$, solução da equação (2), propomos explorar vários conteúdos matemáticos como alguns que citaremos a seguir.

3.4. Operando com as relações de $p(n), n \in \mathbb{N}$

Somando membro a membro todas as relações anteriores dadas pela equação discreta (2), para $n = 0, 1, 2, \dots$ obtemos:

$$p(0) + p(1) + \dots + p(n-1) + p(n) = 1 + (p(0) + 1) + (p(1) + 2) + \dots + (p(n-2) + n-1) + (p(n-1) + n)$$

Simplificando a expressão anterior, o número máximo de regiões do plano cortadas por n retas é:

$$p(n) = 1 + \underbrace{(1 + 2 + \dots + n)} = 1 + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2 + n + 2}{2}, n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Observamos que, cada n cortes, o número de partes $p(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ é igual a 1 mais um número triangular $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, o que nos dá margem para explorar os números figurados. Também $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ representa a soma dos n primeiros naturais, o que pode ser mostrado de várias maneiras.

3.5. Tabela e gráficos

As primeiras tentativas para resolver o problema geralmente são de ilustração gráfica dos primeiros cortes e regiões levando à construção de gráficos, planilhas e a obtenção da sequência de partes da *pizza* 1, 2, 4, 7, 11, ... correspondentes a $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ cortes retilíneos obtidos da equação (2) com a condição inicial $p(0) = 1$.

Neste caso, o número n de cortes gerais forma uma progressão aritmética (PA) associada ao número $p_3(n)$ de regiões da *pizza* cortadas por eles, que é uma outra PA de segunda ordem, ou seja, uma sequência em que as diferenças primeiras $\Delta p_3(n)$ entre seus termos consecutivos formam uma PA, exatamente igual a $r(n)$ e, conseqüentemente, as diferenças segundas $\Delta^{(2)}p_3(n)$ são constantes, conforme mostra a Tabela 2.

n (cortes)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$p_1(n)$ (retas paralelas distintas)	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\Delta p_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$p_2(n)$ (<i>pizza</i> : retas concorrentes num mesmo ponto)	1	2	4	6	8	10	12	14	...
$\Delta p_2(n)$ (Diferença primeira)	1	2	2	2	2	2	2	2	...
$p_3(n)$ (retas concorrentes em pontos distintos)	1	2	4	7	11	16	22	29	...
$\Delta p_3(n) = r(n)$ (Diferenças primeira)	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\Delta^{(2)}p_3(n)$ (Diferenças segunda)	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Tabela 2: n (cortes distintos dividindo a *pizza*), $p(n)$ (partes) e $\Delta p(n)$ (diferenças)

Vemos graficamente como as partes vão aumentando quadraticamente como mostra a Figura 5 a seguir.

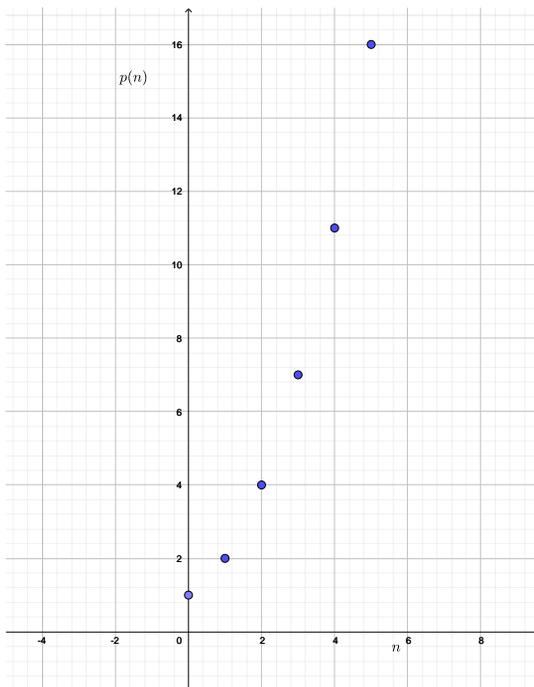


Figura 5: Máximo de partes $p(n)$ de uma *pizza* com n cortes retílineos

3.6. Usando o princípio da indução matemática

Para demonstrar que a proposição $p(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ estabelecida para cada número natural n é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos usar Indução Matemática, que é uma técnica de demonstração direta, adequadas proposições que poderão ser válidas para todos números naturais. A Indução Matemática sobre n pode ser usada neste caso de acordo com os seguintes passos:

a) Verificamos inicialmente a Base da Indução (**BI**), o primeiro passo indutivo de que a proposição dada é válida para um primeiro número natural n_0 . De fato, verificamos que para $n_0 = 0$ temos $p(0) = 1$ (com zero corte temos a *pizza* inteira), o que é válido.

b) Admitamos em seguida a Hipótese de Indução (**HI**) de que $p(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ é uma propriedade válida para um certo valor de $n \in \mathbb{N}, n > n_0$.

c) Para concluir que $p(n)$ é válida para todo número natural, verificamos se ela também vale para o próximo número natural $n + 1$. Para isso, observamos que o $(n + 1)$ –ésimo corte deve atravessar todos os n cortes anteriores por fora das regiões limitadas, produzindo no máximo outras $n + 1$ regiões distintas, de modo que

$$\underbrace{[1 + (1 + 2 + \dots + n)]}_{\text{HI}} + n + 1 \stackrel{\text{HI}}{\cong} \underbrace{[1 + \frac{n(n+1)}{2}]}_{\text{HI}} + n + 1 =$$

$$= 1 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

que é exatamente a proposição para $n+1$. Assim, a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.7. Usando o princípio da contagem

Para obtermos a relação do número máximo de partes da *pizza* percebemos que, a partir do terceiro corte retilíneo, um novo corte retilíneo dividirá todas as partes em duas, com exceção das regiões existentes correspondentes à interseção de todas as outras duas a duas. Novas partes são obtidas duplicando o número de partes anteriores e subtraindo a quantidade de combinações duas a duas dos cortes anteriores que já existiam, ou seja:

$$p(n) = 2 p(n-1) - \binom{n-1}{2} = 2 p(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

E também, conforme em Pitombeira (2009), podemos escrever o que equivale ao número máximo de regiões do plano cortado por n retas usando combinação como

$$p(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + \binom{n+1}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Além disso, a solução do problema das partes da *pizza* com n cortes, $n \in \mathbb{N}$ com contagem e indução pode ser vista considerando um arranjo A de n retas dividindo um plano em $p(A)$ regiões convexas, conforme [1].

Se as retas forem todas paralelas, temos $p(A) = n+1$ regiões ilimitadas (como no caso das quebras de um *grissini* ou dos n pontos dividindo uma reta).

Suponhamos que nem todas as retas sejam paralelas, de modo que o conjunto C dos pontos de interseções de retas de A contidos numa circunferência não é vazio. Seja um ponto de interseção $P \in C$ e r_P a quantidade de retas de A que se interceptam em P . Por Indução Matemática sobre $n \geq 3$ retas mostramos que:

$$p(A) = 1 + n + \sum_{P \in C} (r_P - 1) \tag{4}$$

De fato; considerando a base de indução

(BI) Se tivermos só uma reta, $n = 1$ então $C = \emptyset$, pois não há outra reta para interceptá-la, temos $p(A) = 1 + 1 = 2$ partes.

Observemos que para $n = 2$ retas temos $p(A) = 1 + 2 + (2 - 1) = 4$, o que também condiz com a situação em que temos duas retas concorrentes num ponto P do plano, dividindo-o em 4 regiões ilimitadas.

Adotamos agora a hipótese de indução

(HI) Supomos que a fórmula (4) $p(A) = 1 + n - 1 + \sum_{P \in C} (r_P - 1)$ seja válida para $n-1, n \geq 3$ retas cortando o plano.

Para verificarmos que a mesma é válida para todo n natural, consideremos um arranjo A com $n \geq 3$ retas. Ao retirarmos desse arranjo uma de suas retas, ficamos com um arranjo A' com $n - 1$ retas, em que vale (4).

Ao reintroduzirmos nesse arranjo mais uma reta r_L , e a deslizamos de um lado para o outro do plano, de modo que ela não cruze nenhuma das regiões limitadas já existentes, ela encontrará as k retas existentes criando $k + 1$ novas regiões.

Chamando de C_L o conjunto dos k pontos em que r_L encontra as outras k retas, temos:

$$p(A') = 1 + (n - 1) + \sum_{P \in C - C_L} (r_P - 1) + \sum_{P \in C_L} (r_P - 2)$$

logo,

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A') + n = 1 + (n - 1) + \sum_{P \in C - C_L} (r_P - 1) + \sum_{P \in C_L} (r_P - 2) + k + 1 \\ &= 1 + (n - 1) + \sum_{P \in C - C_L} (r_P - 1) + \sum_{P \in C_L} (r_P - 1) - k + k + 1 = \\ &= 1 + n + \sum_{P \in C} (r_P - 1), \end{aligned}$$

e, assim, a fórmula (4) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observamos, ainda, que a quantidade de regiões ilimitadas num arranjo de n retas gerais é $2n$, pois cada reta divide a região do plano em duas partes. Para ver isso, consideramos uma grande circunferência que contenha todos os pontos de cruzamento das retas. As retas não se interceptam fora da circunferência e como cada uma delas intercepta a circunferência em $2n$ pontos conforme Figuras 3 e 4, seus prolongamentos produzem a quantidade de regiões ilimitadas que são iguais a $2n$.

Se A um arranjo de n retas em um plano em posição geral. Indicaremos por $p(n)$ a quantidade de regiões determinadas pelas n retas. Notemos que $p(1) = 2$, $p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(3) = 2 + 2 + 3 = 7$, e assim por diante. Sempre que aumentamos uma reta, acrescentamos tantas regiões quantas são as retas, de modo que:

$$p(n) = 2 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

Podemos também provar por indução matemática seguindo o mesmo procedimento anterior. Ao reintroduzirmos a reta r_L num arranjo com n retas, criamos $n + 1$ novas regiões, de modo que

$$p(n + 1) = p(n) + n + 1 = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2) + n + 1 = \frac{1}{2}[(n + 1)^2 + (n + 1) + 2], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observação: Se um arranjo A tem n retas em posição geral, o conjunto C

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

pontos, e para cada $P \in C$ temos $r_P = 2$. Logo, a fórmula da solução (4) realmente é:

$$p(A) = 1 + n + \sum_{P \in C} (r_P - 1) = 1 + n + \sum_{P \in C} 1 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

3.8. Usando grafos

A teoria dos grafos é bastante usada no estudo das relações entre objetos de um determinado conjunto. Grafos são estruturas do tipo $G(V, A)$, em que V é um conjunto não vazio de objetos denominados vértices e A arestas, subconjuntos de pares não ordenados de V .

O número máximo de regiões do plano dividido por n retas acontece quando elas estão em posição geral e a configuração em que possuem o número máximo de pontos de intersecção entre elas, assim, podemos pensar num grafo plano G para determinar o número $p(n)$ de regiões em que elas dividem o plano. De fato, seja um círculo grande contendo em seu interior todos os pontos de intersecção das n retas. Para cada duas das n retas dadas, há um ponto de intersecção e vice-versa. Logo, o número dos pontos de intersecção, todos situados no interior do nosso círculo, é $\frac{n(n-1)}{2}$ mais os $2n$ pontos em que as n retas interceptam a circunferência, considerados como vértices do grafo G .

Temos, assim, o número de vértices do grafo G dado por:

$$V = \frac{n(n-1)}{2} + 2n$$

As arestas de G podem ser identificadas como os $2n$ arcos de circunferência com extremidades nos pontos onde as n retas a cortam, mais os segmentos de reta interiores, que ligam os pontos de intersecção de retas.

Cada uma das n retas possuem $n+1$ vértices, sendo $n-1$ deles correspondente a intersecção de cada uma com as outras $n-1$ retas mais os 2 pontos em que ela corta a circunferência. Assim, n segmentos formam n arestas do grafo G sobre cada uma das n retas dadas, de modo que as n^2 arestas de G são interiores e as $2n$ arestas que estão sobre a circunferência, totalizando $A = n^2 + 2n$ arestas.

Considerando a fórmula de Euler $V - A + F = 2$ conforme [3], para um grafo com V vértices e A arestas e decompondo o plano em $F = p(n)$ regiões, o número máximo $p(n)$ de regiões em que as n retas dividem o plano é igual ao número de regiões determinadas pelo grafo G menos a região exterior ao círculo:

$$V - A + p(n) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{n(n-1)}{2} + 2n\right) - (n^2 + 2n) + p(n) = 1 \Leftrightarrow p(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

o que concorda com a solução (3) da equação (2).

3.9. Usando sistema linear

Como os n cortes retilíneos dividem a *pizza* bidimensional em $p(n)$, $n \geq 1$ pedaços planos, podemos supor que a função discreta $p(n)$ representando o número máximo de pedaços seja uma função polinomial de segunda ordem, $p(n) = b_2n^2 + b_1n + b_0$ em que os coeficientes b_0 , b_1 e b_2 devem ser determinados.

De fato, usando os primeiros termos de $p(n)$, para $n = 0, 1, 2$, obtemos o sistema de equações

lineares de Vandermonde

$$\begin{cases} p(0) = 1 = b_2 0^2 + b_1 0 + b_0 \\ p(1) = 2 = b_2 1^2 + b_1 1 + b_0 \\ p(2) = 4 = b_2 2^2 + b_1 2 + b_0 \end{cases} \quad (5)$$

que pode ser explorado matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e, cuja solução, pode ser obtida introduzindo ou revisando os métodos de resolução de sistemas lineares, que é: $b_0 = 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$ e $b_2 = \frac{1}{2}$. Assim, segue o resultado desejado:

$$p(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.10. Equação discreta com uma condição inicial

A equação discreta linear não homogênea de primeira ordem $p(n) = p(n-1) + n$, $n \geq 1$ com a condição inicial $p(0) = 1$ pode ser resolvida como a soma de uma solução da equação homogênea associada mais uma solução particular da equação não homogênea:

a) Encontramos uma solução $p_h(n)$ da equação discreta homogênea associada $p(n) = p(n-1)$, fazendo $p_h(n) = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos, então, $\lambda^n = \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \lambda^{n-1}(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

Assim qualquer combinação de $\lambda = 1$ será uma solução da equação homogênea, o que nos dará uma constante como solução geral, $p_h(n) = a_0 * 1$, $a_0 \in \mathbb{N}$.

b) Encontrando uma solução particular da equação não homogênea do tipo:

$$p_{nh}(n) = (a_2 n + a_1)n$$

com a_i , $i = 1, 2$ constantes a serem determinadas, já que uma constante é solução da equação homogênea e a parte não homogênea é um polinômio de grau em n . Substituindo $p_{nh}(n)$ na equação geral, obtemos: $(a_2 n + a_1)n = (a_2(n-1) + a_1)(n-1) + n$ que nos dá $a_2 = \frac{1}{2} = a_1$. Portanto $p(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, e com a condição de que $p(0) = 1$, concluímos que $a_0 = 1$ e a solução desejada fica $p(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Assim, ao abordarmos o problema do corte da *pizza* podemos aprofundar os estudos de cada conteúdo envolvido, desde definições, e a formalização dos resultados relacionados.

4. Cortando bolo com n cortes

Após explorar os problemas mais simples, abordamos o problema de encontrar quantas partes $E(n)$ obtemos de um bolo com n cortes planos.

Para $n = 0$ corte, temos uma parte inteira $E(0) = 1$.

Um corte retilíneo contínuo, para $n = 1$ temos o bolo dividido em duas partes $E(1) = 2$.

Com dois ou mais cortes planos no bolo, o problema já não apresenta uma resposta única, pois depende da posição relativa dos cortes planos, ou seja, como eles se dispõem: paralelos, concorrentes e como eles se cruzam entre si, como no caso do espaço cortado por n planos.

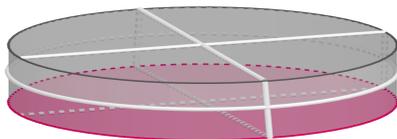


Figura 6: Dois cortes planos verticais e um corte horizontal dividindo um bolo

Se fizermos dois ou três cortes planos paralelos teremos $E(2) = 3$, $E(3) = 4$, ... partes, que é um caso análogo aos das quebras do *grissini* ou dos cortes paralelos de uma *pizza* plana.

Se os cortes planos forem concorrentes tendo uma reta em comum, teremos $E(2) = 4$ partes ou regiões, que é o número máximo de regiões que divide o bolo neste caso.

Se dois cortes planos forem paralelos e o outro concorrente com os dois anteriores, teremos o bolo dividido em 6 regiões.

Às vezes aparece em desafios e diversões matemáticas sobre a pergunta qual é o maior número de pedaços que podemos obter ao dividir um bolo com 3 cortes apenas.

É fácil ver que dois cortes verticais (ortogonais) passando pelo centro corta o bolo em 4 partes, e um corte ortogonal a eles passando horizontalmente pelo meio do bolo, leva-nos a obter 8 pedaços conforme Figura 6. Analogamente aos três planos concorrentes num mesmo ponto, teremos 8 regiões, como acontece com os planos cartesianos triortogonais que dividem o espaço tridimensional em 8 octantes.

Observemos que os primeiros termos do número máximo de regiões $E(n)$ podem ser descobertos por tentativas de visualização, mas obter a função $E(n)$ para um número grande n de cortes planos no bolo fica cada vez mais difícil.

Geralmente começamos visualizando as configurações, calculando o número de regiões em que o bolo é dividido por n cortes planos distintos e tabelando os pares $(n, E(n))$ para alguns valores iniciais de n , como $n = 0, 1, 2, 3$. Para o caso geral, consideramos um número n de cortes planos do bolo cuja interseção, três a três, seja unicamente um ponto distinto de todas as outras interseções para obtermos o número máximo de pedaços.

4.1. Descobrimo um padrão para as regiões

O número máximo de partes do bolo obtido com n cortes planos, no caso geral, pode ser obtido segundo o padrão:

$$\begin{aligned}
 E(0) &= 1, \\
 E(1) &= E(0) + 1 = 1 + 1 = 2, \\
 E(2) &= E(1) + 1 + 1 = 4, \\
 E(3) &= E(2) + 1 + 3 = 8, \\
 &\vdots \\
 E(n) &= E(n-1) + 1 + \frac{(n-1)n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Assim, o número máximo de partes obtidas com $n + 1$ cortes planos gerais é dado por (6), ou seja, é igual ao número de regiões cortadas por n planos mais 1 e mais o número triangular de ordem n , $\frac{(n-1)n}{2}$.

A função discreta $E(n)$ pode ser explorada com vários conteúdos matemáticos, como no caso dos cortes retilíneos da *pizza* ou das quebras do *grissini*, como descreveremos a seguir.

4.2. Uso de Tabelas e Gráficos

Sendo $E_p(n)$ o número de pedaços obtidos com n cortes planos paralelos no bolo, E_{cmr} como com n cortes planos concorrentes passando numa mesma reta, e $E(n)$ o número de partes obtidas com n cortes planos gerais, não paralelos nem passando pela mesma reta e nem mais do que três deles se interceptando num mesmo ponto. Podemos construir os primeiros termos das sequências como na Tabela 3 desenhando e tentando visualizar, ou usando o padrão (6).

n (planos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$E_p(n)$ (planos paralelos)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\Delta E_p(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$E_{cmr}(n)$ (planos concorrentes na mesma reta)	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	...
$\Delta E_{cmr}(n)$	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...
$E(n)$ (planos gerais)	1	2	4	8	15	26	42	64	93	130	...
$\Delta E(n) = p(n)$	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	...
$\Delta_2 E(n) = r(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\Delta_3 E(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Tabela 3: n (cortes planos distintos dividindo o bolo) \times $E(n)$ (partes ou pedaços obtidos)

Observamos na Tabela 3 que a diferença $\Delta E(n)$ é exatamente igual a $p(n)$ o número máximo de regiões do plano cortado por n retas, $\Delta_2 E(n)$ é uma progressão aritmética de razão igual a 1 e $\Delta_3 E(n)$ é constante.

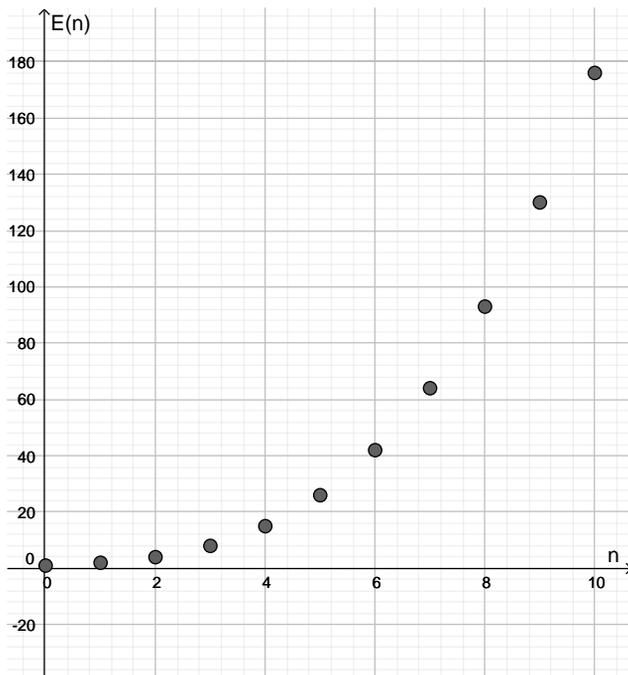


Figura 7: Número de regiões do espaço cortadas por n planos

E a representação gráfica da função discreta $E(n) = E(n-1) + 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$ pode ser vista para alguns valores iniciais de n na Figura 7.

4.3. Usando Sistema Linear

Suponhamos que a relação entre o número n de cortes planos de um bolo e o respectivo número máximo de partes $E(n)$ obtidas seja uma função polinomial do terceiro grau do tipo:

$$E(n) = c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0$$

Utilizando os valores iniciais, fáceis de serem obtidos, exploramos o sistema linear de Vandermonde correspondente:

$$\begin{cases} E(0) = c_0 = 1 \\ E(1) = c_31^3 + c_21^2 + c_11 + c_0 = 2 \\ E(2) = c_32^3 + c_22^2 + c_12 + c_0 = 4 \\ E(3) = c_33^3 + c_23^2 + c_13 + c_0 = 8 \end{cases} \quad (7)$$

Resolvendo o sistema linear (7) obtemos os valores dos coeficientes: $c_0 = 1, c_1 = \frac{5}{6}, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{6}$ e, portanto, a função discreta solução:

$$E(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{6}5n + \frac{6}{6} \approx 0,17n^3 + 0,83n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

que gera a sequência solução dos números de pedaços possíveis: 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64, 93, 130, 176, 232.

4.4. Usando Combinação

Outro modo de obter uma relação equivalente para o número de partes do bolo é considerar que, a partir do quarto corte plano, um novo plano dividirá todas as partes em duas, com exceção das regiões correspondentes à interseção de todas as outras partes combinadas três a três, análogo ao que ocorreu no problema dos cortes retilíneos da *pizza* plana.

Para isso, duplicamos o número de partes anteriores e subtraímos a quantidade de combinações três a três dos cortes planos que já existiam, ou seja:

$$E(n) = 2 E(n-1) - \binom{n-1}{3} = 2 E(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} = \binom{n+1}{3} + n + 1$$

que nos dá a sequência de pedaços conforme vamos aumentando os cortes planos: 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, ...

Usando a relação binomial de Stifel [3], o número máximo $E(n)$ de pedaços de um bolo obtidos por n cortes planos também pode ser escrito como

$$E(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

de modo análogo ao mostrado por [5].

4.5. Equação discreta com uma condição inicial

A equação discreta linear não homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes

$$E(n) = E(n-1) + 1 + \frac{(n-1)n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

com a condição inicial $E(0) = 1$ pode ser resolvida encontrando uma solução da equação discreta homogênea associada $E(n) = E(n-1)$ que será uma constante a_0 , mais uma solução particular da equação não homogênea (7), que supomos do tipo:

$$E_p(n) = (a_3 n^2 + a_2 n + a_1)n$$

com $a_i, i = 1, 2, 3$ constantes a serem determinadas. Substituindo na equação geral essa solução particular, obtemos

$$a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n = a_3 (n-1)^3 + a_2 (n-1)^2 + a_1 (n-1) + 1 + \frac{(n-1)n}{2}$$

E, simplificando, fica

$$a_3(-3n^2 + 3n - 1) + a_2(-2n + 1) + a_1 + 1 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = 0$$

Colocando em evidência os coeficientes das parcelas polinomiais de mesmo grau de n , obtemos um polinômio nulo:

$$\left(-3a_3 + \frac{1}{2}\right) n^2 + \left(3a_3 - 2a_2 - \frac{1}{2}\right) n + (-3a_3 + a_2 + a_1 + 1) = 0.$$

Portanto, igualando os seus coeficientes a zero, obtemos os valores das constantes $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_2 = 0$ e $a_1 = \frac{5}{6}$, e portanto a solução geral será do tipo:

$$E(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + a_0$$

que usando a condição inicial $E(0) = 1$ dá-nos $a_0 = 1$ e a solução encontrada é a desejada

$$E(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1.$$

5. Relação do problema numa dimensão com o de outra menor

É interessante observarmos que podemos escrever a relação de recorrência para o número máximo de pedaços $p(n-1)$ de uma *pizza* bidimensional (2D) cortada retilinearmente $n-1$ vezes com o do número máximo de partes de um *grissini* unidimensional (1D) $r(n-1)$ quebrado $n-1$ vezes para obtermos o número máximo de pedaços $p(n)$ da *pizza*. Da mesma forma podemos obter as partes $E(n)$ de um bolo tridimensional (3D) cortados por n planos com as partes cortadas por $n-1$ cortes planos anteriores mais o número de partes da *pizza* (2D) cortada retilinearmente por $n-1$ cortes.

5.1. Relacionando as partes da *pizza* (2D) com as partes do *grissini* (1D)

Observamos inicialmente que podemos relacionar o número máximo de regiões (bidimensional) $p(n)$ de uma *pizza* com as partes unidimensionais de *grissinis* escrevendo o número máximo de pedaços de *pizza* como:

$$p(n) = p(n-1) + n, \quad \Leftrightarrow \quad p(n) = p(n-1) + r(n-1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{com} \quad p(0) = 1 \quad \text{e} \quad r(0) = 1.$$

em que $r(n-1)$ é o número máximo de regiões que $n-1$ quebras faz num *grissini*, como visto na seção 3.

5.2. Relacionando as partes do bolo (3D) com as da *pizza* (2D)

Os primeiros valores das partes $E(n)$ de um bolo podem ser descobertos imaginando o n -ésimo corte retilíneo deslizando no bolo sobre os $n-1$ cortes retilíneos anteriores e relacionando com o número $p(n-1)$ de $n-1$ cortes retilíneos de uma *pizza* conforme seção 3. De fato,

$$E(n) = E(n-1) + 1 + \frac{(n-1)n}{2}$$

pode ser reescrita como:

$$E(n) = E(n-1) + p(n-1) \quad \text{com} \quad E(0) = 1 \quad \text{e} \quad p(0) = 1. \quad (8)$$

Que também nos dá a sequência do número máximo de regiões do bolo com n cortes planos é $1, 1 + 1 = 2, 2 + 2 = 4, 4 + 4 = 8, 8 + 7 = 15, 15 + 11 = 26, \dots$ e,

$$E(n) = \frac{(n-1)^3 + 5(n-1) + 6}{6} + \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2} = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{6}5n + \frac{6}{6}, n \in \mathbb{N}.$$

Conhecidas as fórmulas de recorrência para o número máximo de pedaços ao cortar linearmente uma *pizza* plana e o bolo tridimensional em n partes, podemos questionar e lançar um problema mais geral sobre qual é o maior número de partes que n objetos $(k-1)$ -dimensionais, $k \in \mathbb{N}$, corta um objeto de uma dimensão superior k -dimensional no sentido de generalizar a equação (8) e incentivá-los a continuar explorando.

6. Conclusão

No processo de resolução de problemas em grupos, a maioria dos estudantes costuma apresentar dificuldades iniciais como no problema dos cortes de um bolo. Algumas vezes é necessário orientá-los na procura de um modo mais fácil para resolver o problema de modo a começar com um problema relacionado mais simples conforme sugere Verificamos que o problema de cortes de um *grissini* e de uma *pizza* foram mais fáceis de serem abordados e entendidos, dado que as primeiras ideias que surgem para a maioria dos grupos de estudantes são as tentativas de visualização geométrica.

Considerar as suposições e tentativas iniciais de visualização geométrica, de relacionar cada passo com o anterior para a descoberta de padrões e a investigação usando diferentes conteúdos matemáticos contribui para o resgate dos conhecimentos prévios, o desenvolvimento do raciocínio lógico e ampliar os horizontes de conhecimento defendidos por [4] e outros pesquisadores da resolução de problemas no ensino de matemática.

Na arte de resolver o problema dos cortes planos de um bolo, percebemos a riqueza da exploração de vários conteúdos matemáticos que a princípio poderiam ser apresentados ou revistos isoladamente, o que torna o processo de exploração matemática interessante, vislumbrando a abordagem da resolução de problemas no ensino, de forma integradora relacionada a vida social e familiar recomendado nos parâmetros curriculares da BNCC (Brasil, 2018) [2], nos projetos pedagógicos dos cursos de graduação em Matemática.

Referências

- [1] Bjorner, A. e Stanley, R. P., *A Combinatorial Miscellany*, Disponível in <http://www-math.mit.edu/~rstan/papers/comb.pdf>
- [2] Brasil, *Base Nacional Comum Curricular*, Ensino Médio, Brasília, MEC/Secretaria da Educação Básica (2018).
- [3] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Morgado, A. C. e Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio*, Vol 2., 6ª Edição, Rio de Janeiro, SBM, (1999)
- [4] Onuchic, L. R.; Allevato, N. S. G. *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas*. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005.

- [5] Pitombeira, J. B., *RPM - Revista do Professor de Matemática*. Disponível em <http://rpm.org.br/cdrpm/10/10.htm> acesso em: 05 de abril de 2019
- [6] Polya, G., *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. (How to solve it: a new aspect of mathematica method)*. Heitor Lisboa de Araújo (Trad.). Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- [7] Salvador, J. A., *Cortar bolo, pizza e palitos de pão explorando conteúdos matemáticos, IV Serp e I Sirp*, 2017. Disponível em <http://igce.rc.unesp.br/Home/Departamentos47/educacaomatematica/gterp/resumos-publicados-iv-serp-e-i-sirp.pdf> acesso em: 5 de abril de 2019.

José Antonio Salvador
DM - CCET - UFSCar
<salvador@dm.ufscar.br>

Recebido: 15/11/2019
Publicado: 22/01/2020

Métodos de Euler e Runge-Kutta de 4^a ordem por meio de um *applet* do Geogebra

Flank David Morais Bezerra

Manoel Wallace Alves Ramos

Resumo

Neste artigo mostramos a construção de um *applet* criado a partir do uso de ferramentas do *software Geogebra* para apresentar os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta de 4^a ordem. O *applet* fornece soluções numéricas aproximadas para um problema de valor inicial associado a EDOs, que são obtidas a partir dos métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta de 4^a ordem.

Palavras-chave: método de Euler; método de Runge-Kutta; *applet*; geogebra; métodos numéricos; equações diferenciais.

Abstract

In this paper show the construction of an *applet* created from the use of *Geogebra software* tools to present the numerical Euler's methods and fourth order Runge-Kutta's method. The *applet* provides approximate numerical solutions to an initial value problem associated to ODEs, as well as displays the graphs of the solutions that are obtained from the numerical Euler's methods and fourth-order Runge-Kutta's method.

keywords: Euler's method; Runge-Kutta's method, *applet* ; geogebra; Numerical methods; differential equations.

1. Introdução

O primeiro método para calcular uma solução aproximada de uma EDO, a partir de uma condição inicial, foi desenvolvido por Leonhard Euler. O método de Euler desempenha um papel de destaque no ensino e na base metodológica para explicar os métodos para obter uma primeira aproximação na solução de EDOs. Generalizações do método de Euler foram desenvolvidas por Carl Runge, Karl Heun e Martin Wilhelm Kutta. Tais pesquisadores contribuíram para a formulação dos, hoje bastante conhecidos, métodos de Runge-Kutta. Assim, os métodos de Euler e Runge-Kutta formam o bloco dos procedimentos de passo simples (ou passo único), isto é, métodos em que para se obter o valor aproximado y_{n+1} é necessário apenas conhecer o seu antecessor y_n .

Neste artigo, apresentamos os métodos numéricos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de 4^a ordem. Também propomos um *applet*, criado no *software Geogebra*, que fornece as soluções

numéricas de um PVI a partir dos métodos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de 4ª ordem.

Sobre a estrutura do artigo. Na Seção 2, lembramos o método de Euler. Na Seção 3 abordamos o método de Euler melhorado. Na Seção 4 tratamos do método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Na Seção 5 propomos um *applet* que gera soluções numéricas de um PVI utilizando os métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem. Na Seção 6, mostramos em 12 passos a construção do *applet*.

Considere o problema de valor inicial (PVI) seguinte

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

em que y é uma função real na variável $x \in \mathbb{R}$ e $y' = dy/dx$. Os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta são utilizados para encontrar soluções aproximadas de PVI's do tipo (1). A principal referência para a elaboração das Seções 2, 3, e 4 foi [2]. Informamos que todos os cálculos e gráficos do trabalho foram feitos utilizando o *software Geogebra*.

2. O método de Euler

Descrevemos o método: suponha que queremos aproximar a solução do PVI (1) em $x = x_1 = x_0 + h$, em que h é pequeno e é chamado de passo. A ideia por trás do método de Euler é usar a reta tangente à curva da solução do PVI através de (x_0, y_0) para obter tal aproximação.

Sabemos que a equação da reta tangente a uma curva em (x_0, y_0) é dada por $y(x) = y_0 + m(x - x_0)$, em que m é a inclinação da curva em (x_0, y_0) . Da equação (1), temos que $m = f(x_0, y_0)$, então

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \quad (2)$$

Fazendo $x = x_1$ na equação (2) encontramos a aproximação de Euler para a solução exata em x_1 , ou seja, $y_1(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$, que pode ser escrita como $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$.

Suponha que desejamos encontrar uma aproximação para a solução exata do PVI (1) em $x_2 = x_1 + h$. Podemos usar a mesma ideia, só que agora tomamos a reta tangente à curva da solução de (1) em (x_1, y_1) . Neste caso, a inclinação da reta tangente é $f(x_1, y_1)$, então a equação da reta tangente é $y(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$. Fazendo $x = x_2$ temos a aproximação desejada $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, em que $h = x_2 - x_1$. Continuando esse procedimento, determinamos uma sequência de aproximações $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, $n = 0, 1, \dots$ para a solução do PVI (1) nos pontos $x_{n+1} = x_n + h$. Dessa forma, o método de Euler para uma aproximação da solução do PVI (1) através dos pontos $x_{n+1} = x_0 + nh$, ($n = 0, 1, \dots$) é dado por

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Exemplo 1. Considere o PVI $y' = x - y - 1$, $y(0) = 1$. Usando o método de Euler com $h = 0.1$ e $h = 0.05$, obtemos uma solução aproximada para o PVI em $[0, 1]$ com 5 casas decimais. Os valores da solução aproximada estão apresentados na Tabela 1. Ainda na Tabela 1, apresentamos a solução exata do PVI $y(x) = 3e^{-x} + x - 2$ e o **erro absoluto** que é definido por $|y(x_n) - y_n|$.

Comparando os valores das aproximações apresentados na Tabela 1, vemos que o menor passo levou a uma melhor aproximação. Na verdade, quando aplicamos o método de Euler com $h = 0.05$, o

Tabela 1: Resultados do método de Euler com $h=0.1$ e $h=0.05$ aplicado ao PVI do Exemplo 1.

		y_n Euler		Erro absoluto		
n	x_n	$h = 0.1$	$h = 0.05$	Solução exata	$h = 0.1$	$h = 0.05$
1	0.1	0.8	0.8075	0.81451	0.01451	0.00701
2	0.2	0.63	0.64352	0.65619	0.02619	0.01267
3	0.3	0.487	0.50528	0.52245	0.03545	0.01718
4	0.4	0.3683	0.39026	0.41096	0.04266	0.02070
5	0.5	0.27147	0.29621	0.31959	0.04812	0.02338

erro absoluto foi praticamente reduzido a um quarto na comparação do erro com $h = 0.1$. O erro absoluto definido no Exemplo 1 e apresentado nas tabelas deste trabalho é um erro de truncamento local. Para saber mais sobre erros decorrentes de métodos numéricos, veja a referência [1].

No Exemplo 1 vimos que reduzir o tamanho do passo pela metade ocasionou uma redução considerável do erro absoluto. Podemos continuar reduzindo o tamanho do passo até chegar a uma precisão razoavelmente boa, porém a quantidade de cálculos necessários será muito grande. Note que, se tomarmos $h = 0.001$ no Exemplo 1, precisamos de 1000 passos para atravessar o intervalo $[0, 1]$. Veremos na Seção 3 uma derivação do método de Euler, em que é possível obter melhor precisão para o PVI, que a do método de Euler, para o mesmo tamanho de passo.

3. Método de Euler melhorado

O método de Euler melhorado é um exemplo do que chamamos de **método preditor-corretor**. A ideia é usar a fórmula do método de Euler para obter uma primeira aproximação para a solução $y(x_{n+1})$ do PVI (1). Denotaremos aproximação por y_{n+1}^* , então $y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$. Agora, melhoramos (ou corrigimos) tal aproximação aplicando mais uma vez o método de Euler. Mas desta vez, usamos as médias das inclinações das curvas das soluções através de (x_n, y_n) e (x_{n+1}, y_{n+1}^*) . Ou seja, $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)]$.

Dessa forma, o método de Euler melhorado para encontrar soluções próximas da solução exata do PVI (1) nos pontos $x_{n+1} = x_0 + nh$ ($n = 0, 1, \dots$) é:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)], \quad (4)$$

em que $y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$, $n = 0, 1, \dots$

esta

Exemplo 2. Aplicando o método de Euler melhorado com $h = 0.1$ para encontrar uma solução aproximada do PVI $y' = x - y - 1$, $y(0) = 1$, no intervalo $[0, 1]$, obtemos os valores descritos na Tabela 2.

Analisando os resultados da Tabela 2, vemos que o método de Euler melhorado tem captado, pelo menos, uma casa decimal de precisão quando $h = 0.1$. Isto é um indicativo de que o erro de truncamento local no método de Euler melhorado comporta-se com ordem h^3 , enquanto que o comportamento do erro no método de Euler tem ordem h^2 .

Tabela 2: Resultados dos métodos de Euler e Euler melhorados com $h=0.1$ aplicado ao PVI do Exemplo 2.

n	x_n	y_n ($h=0.1$)			Erro absoluto	
		Euler	Euler melhorado	Solução exata	Euler	Euler melhorado
1	0.1	0.8	0.815	0.81451	0.01451	0.00049
2	0.2	0.63	0.65708	0.65619	0.02619	0.00088
3	0.3	0.487	0.52365	0.52245	0.03545	0.00120
4	0.4	0.3683	0.41241	0.41096	0.04266	0.00145
5	0.5	0.27147	0.32123	0.31959	0.04812	0.00164

4. Runge-Kutta de 4ª ordem

Dentre todos os métodos de Runge-Kutta, o de 4ª ordem é o mais conhecido e utilizado. Ele também é conhecido como **método clássico de Runge-Kutta**. O método de Runge-Kutta de 4ª ordem mais popular, de acordo com Butcher [2], é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4],$$

em que

$$\begin{aligned} c_1 &= f(x_n, y_n), \\ c_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}c_1\right), \\ c_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}c_2\right), \\ c_4 &= f(x_n + h, y_n + hc_3). \end{aligned}$$

Esse método tem erro de truncamento local proporcional a h^5 . Assim, é duas ordens de grandeza mais preciso do que o método de Euler melhorado, e três ordens de grandeza mais preciso que o método de Euler.

Exemplo 3. Aplicando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $h = 0.1$ para encontrar uma solução aproximada do PVI $y' = x - y - 1$, $y(0) = 1$, no intervalo $[0, 1]$, obtemos os valores descritos na Tabela 3. Analisando a Tabela 3, descobrimos o motivo do método de Runge-Kutta de 4ª ordem ser tão popular. Pois, se desejamos uma solução com precisão de 5 casas decimais, os resultados da Tabela 3 mostram-nos que não é necessário reduzir o tamanho do passo. A comparação do erro absoluto nas Tabelas 2 e 3 ilustra a eficiência do método de Runge-Kutta sobre os métodos de Euler e Euler melhorado.

Tabela 3: Resultados do método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $h = 0.1$ aplicado ao PVI do Exemplo 3.

n	x_n	y_n	Solução exata	Erro absoluto
1	0.1	0.81451	0.81451	0.00000
2	0.2	0.65619	0.65619	0.00000
3	0.3	0.52246	0.52245	0.00001
4	0.4	0.41096	0.41096	0.00000
5	0.5	0.31959	0.31959	0.00000

Diversos outros conceitos podem ser utilizados no estudo de métodos numéricos para EDO. Por exemplo, conceitos como convergência, estabilidade e consistência são importantes na análise do comportamento do método. Não exploramos tais conceitos neste artigo, contudo indicamos a referência [2].

5. Applet no Geogebra para soluções numéricas de PVIs

Realizar cálculos, de forma manual, dos métodos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de 4ª ordem é tedioso e oneroso. Contudo, esses métodos podem ser implementados, através de rotinas, em diversos *softwares*, tais como *Maple*, *Matlab*, *Maxima* e *Mathematica*.

No entanto, é necessário ter noções de programação para a implementação de tais métodos nos referidos *softwares*. Nesta seção é apresentado um *applet* que de forma interativa e dinâmica fornece a solução exata de um PVI, bem como as soluções numéricas pelo método de Euler, método de Euler melhorado e pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem. O *applet* também exibe o erro absoluto e a poligonal da solução aproximada para cada método. Além disso, é possível escolher qual solução se quer exibir ou até mesmo todas elas. O *applet* foi criado no software de geometria dinâmica *Geogebra 5.0* e está disponível em <https://geogebra.org/m/xTz9CaRY>. De acordo com Deitel [3], *applet* é um software que é executado no contexto de outro programa. Geralmente, os *applets* apresentam algum tipo de interface para usuário e possuem a vantagem de serem executados diretamente em uma página *web*. De modo geral, *applets* são programas leves, necessitam de pouco tempo para carregar no computador, *notebook*, *smartphone* ou *tablet* e são de fácil utilização.

Ao iniciar os estudos e pesquisas, para a elaboração deste trabalho, referente aos métodos de Euler, Euler melhorado e ao método de Runge-Kutta de 4ª ordem, percebemos a necessidade de uma ferramenta didática, interativa, dinâmica e com uma interface agradável, que pudesse colaborar para o ensino e aprendizagem de tais métodos. Foi então que surgiu a ideia de se criar um *applet* no software *Geogebra*, uma vez que o *Geogebra* permite a construção de *applets* dispensando conhecimentos prévios de programação, é de fácil manipulação e configuração e dispõe de uma página *web* onde os *applets* ficam hospedados. Na Seção 6 mostraremos como o *applet* intitulado *Métodos numéricos para EDO* (Fig. 1) foi construído. A vantagem de conhecer como é feita a construção do *applet* é poder fazer modificações que forem convenientes para quem quer utilizá-lo no ensino de métodos numéricos para EDOs de primeira ordem. Ou seja, do *applet* apresentado neste trabalho podem derivar diversas outras versões mais sofisticadas.

No *applet* da Fig. 1, um usuário entra com uma EDO de primeira ordem $y' = f(x, y)$ e uma condição inicial (x_0, y_0) , então ao clicar *Enter* a solução exata do PVI surgirá na janela de visualização.

O usuário pode optar por visualizar a solução aproximada do PVI pelo método de Euler, Euler melhorado ou Runge-Kutta de 4ª ordem. Além disso, ele pode escolher o tamanho do passo h . Como resposta, o usuário visualizará a poligonal, com dez passos, do método selecionado e uma tabela contendo as soluções aproximadas, as soluções exatas e os erro absolutos. Escolhemos exibir dez passos, por acreditar que, didaticamente, essa quantidade seja suficiente para o entendimento da relação existente entre os métodos e o tamanho do passo h . Durante a construção do *applet* é possível alterar a quantidade de passos que se quer exibir.

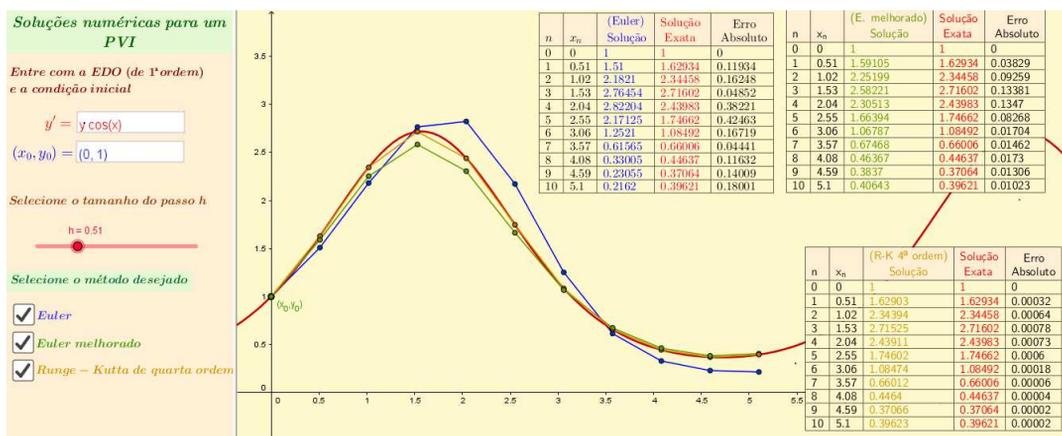


Figura 1: Applet: Métodos numéricos para EDO. Disponível em <https://geogebra.org/m/xTz9CaRY>.

6. Construção do *applet*

Nesta seção apresentaremos o roteiro para a construção do *applet* em 12 passos.

Passo 1 - Criando ponto inicial e controle deslizante. Ao abrir o *Geogebra*, na barra de *menus*, selecione a opção *Exibir* e em seguida a opção *Planilha* (Fig. 2).

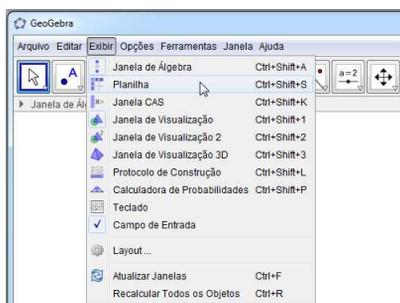


Figura 2: Exibindo a planilha.

Após a planilha aparecer, clique com o botão direito do *mouse* em qualquer célula; em seguida, clique na opção  **Opções da Planilha ...** e depois desmarque a opção **Exigir "=" Antes dos Comandos**. Agora, digite na célula A2 o ponto $(0, 1)$, como na Fig. 3.

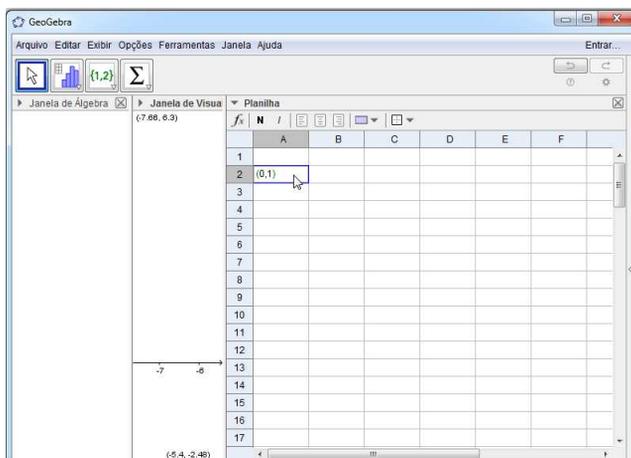


Figura 3: Criando o ponto inicial.

Após clicar *Enter* o ponto A2 surgirá nas janelas de visualização e de álgebra. Logo, na barra de ferramentas, clique na ferramenta  *Controle Deslizante*. Ao clicar em qualquer lugar da janela de visualização, surgirá uma caixa para a configuração do controle deslizante. Configure o controle deslizante de acordo com a Fig. 4. Após clicar *OK*, o controle deslizante aparecerá na janela de visualização (Fig. 5).

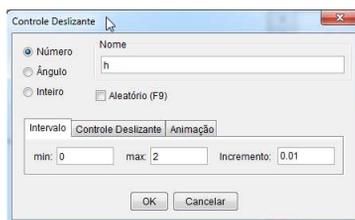


Figura 4: Configurando o controle deslizante.

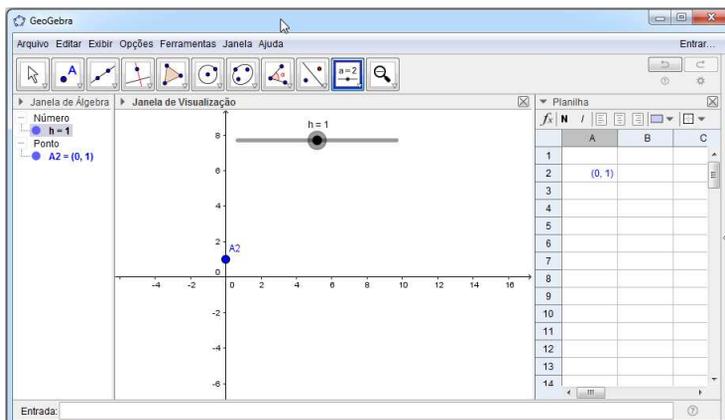


Figura 5: Controle deslizante h .

Passo 2 - Obtendo a solução exata do PVI. No Campo de Entrada, digite a EDO $y' = y * \cos(x)$. Logo, digite $g(x) = ResolverEDO[y', A2]$. A solução exata $g(x)$ aparecerá na janela de álgebra e seu gráfico surgirá na janela de visualização, como na Fig. 6. Escolhemos a EDO $y' = y * \cos(x)$ por conveniência, contudo na construção pode ser usada qualquer outra EDO de primeira ordem.

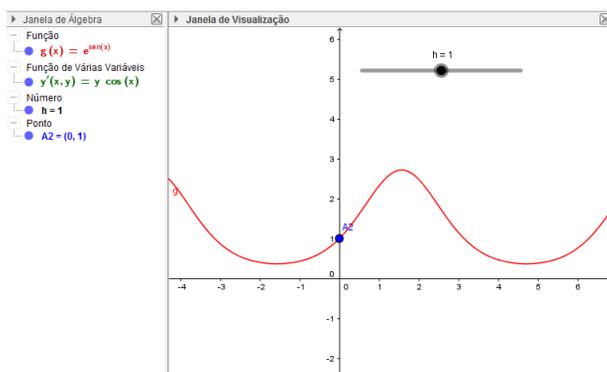


Figura 6: Solução exata.

Passo 3 - Implementando o método de Euler. Com o controle deslizante fixado em $h = 0,51$, digite na célula A1 da planilha a palavra *Pontos*. Na célula A3, entre com a fórmula do método de Euler $(x(A2) + h, y(A2) + h * y'(x(A2), y(A2)))$ (Fig. 7).

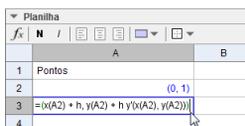


Figura 7: Método de Euler.

Clique na alça de preenchimento (canto inferior direito) da célula A3 e arraste até a célula A12. Note que uma sequência de pontos surgirá na janela de visualização (Fig. 8).

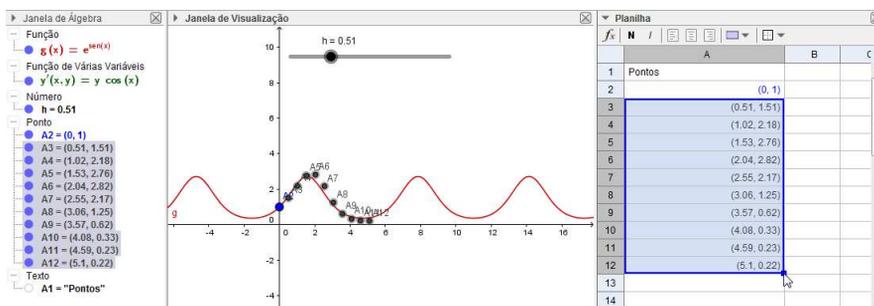


Figura 8: Pontos do método de Euler.

Selecione da célula A2 até a célula A12, clique o botão direito do *mouse* e clique na opção **Exibir Rótulo**, para que os rótulos dos pontos na janela de visualização desapareçam. Clicando no botão direito do *mouse* nas células selecionadas, clicando em *Propriedades*, e em seguida na aba *Cor*, é possível escolher a cor dos pontos. Os procedimentos para esconder o rótulo e para escolher a cor são realizados de igual forma para qualquer objeto do *Geogebra*. Escolhemos a cor azul para os pontos A2, A3, ..., A12. Agora, digite no campo de entrada o comando $CaminhoPoligonal[A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12]$. Esse comando cria uma poligonal dos pontos A2, A3, ..., A12. Depois mude a cor do caminho poligonal para a mesma cor dos pontos, veja Fig. 9.

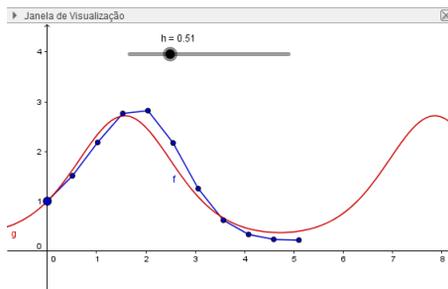


Figura 9: Poligonal do método de Euler.

Ao mover o controle deslizante podemos notar que a poligonal de Euler muda conforme os valores de h se alteram.

Passo 4 - Criando a tabela do método de Euler. Na planilha, nomeie a célula B1 de n e nas células B2:B12 digite 0, 1, ..., 10, respectivamente. Logo, nomeie a célula C1 de x_n e na célula C2 digite $x(A2)$. Logo após, clique na alça de preenchimento da célula C2 e arraste até a célula C12. Nomeie a célula D1 como *Euler solução* e na célula D2 digite $y(A2)$. Logo após, clique na alça de preenchimento da célula D2 e arraste até a célula D12. Entre com o texto *Solução exata* na célula E1, na célula E2 digite a fórmula $g(x(A2))$, em seguida, estenda a fórmula para as demais células da coluna E até a célula E12. Digite o texto *Erro absoluto* na célula F1, e na célula F2 digite a fórmula $|D2 - E2|$. Logo após, estenda a fórmula até a célula F12. Assim, criamos uma tabela que apresenta a solução numérica do PVI (pelo método de Euler), a solução exata e o erro absoluto para 10 valores de x definidos a partir do ponto inicial A2 e do tamanho do passo h ; veja Fig. 10.

f_x	n	t	<input type="checkbox"/>				
	A	B	C	D	E	F	
1	Pontos	n	x_n	Euler solução	Solução exata	Erro Absoluto	
2	(0, 1)	0	0	1	1	0	
3	(0.51, 1.51)	1	0.51	1.51	1.62934	0.11934	
4	(1.02, 2.1821)	2	1.02	2.1821	2.34458	0.16248	
5	(1.53, 2.76454)	3	1.53	2.76454	2.71602	0.04852	
6	(2.04, 2.82204)	4	2.04	2.82204	2.43983	0.38221	
7	(2.55, 2.17125)	5	2.55	2.17125	1.74662	0.42463	
8	(3.06, 1.2521)	6	3.06	1.2521	1.08492	0.16719	
9	(3.57, 0.61565)	7	3.57	0.61565	0.66006	0.04441	
10	(4.08, 0.33005)	8	4.08	0.33005	0.44637	0.11632	
11	(4.59, 0.23055)	9	4.59	0.23055	0.37064	0.14009	
12	(5.1, 0.2162)	10	5.1	0.2162	0.39621	0.18001	
13							

Figura 10: Tabela do método de Euler.

Note que alteramos as cores dos elementos da colunas D e E. Além disso, centralizamos todos os elementos das células preenchidas, selecionando-as e clicando em centralizar . O número de casas decimais dos valores da tabela também podem ser escolhidos; para isso, veja Fig. 11. Apresentamos os valores com 5 casas decimais.

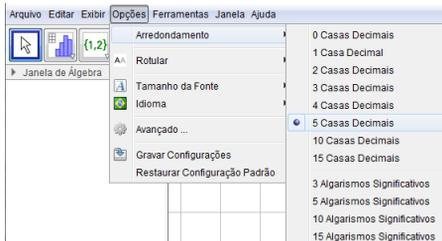


Figura 11: Arredondamento.

Passo 5 - Implementando o método de Euler melhorado. O objetivo nesse passo é criar a poligonal do método de Euler melhorado. Na célula H2, digite $A2$. Na célula H3, entre com a fórmula do método de Euler $(x(H2) + h, y(H2) + h * y'(x(H2), y(H2)))$. Logo, na célula I1 digite o texto *pontos*, na célula I2 digite $A2$ e na célula I3 entre com a fórmula do método de Euler melhorado $(x(H2) + h, y(H2) + h/2 * (y'(x(H2), y(H2)) + y'(x(H3), y(H3))))$ (Fig. 12).

H	I
	Pontos
(0, 1)	(0, 1)
(0.51, 1.51)	$(x(H2) + h, y(H2) + h/2 * (y'(x(H2), y(H2)) + y'(x(H3), y(H3))))$

Figura 12: Fórmula do método de Euler melhorado.

Agora, na célula H4 digite a fórmula de Euler atualizada $(x(H3) + h, y(I3) + h * y'(x(H3), y(I3)))$ e na célula I4 a fórmula de Euler melhorado atualizada $(x(H4) + h, y(I3) + h/2 * (y'(x(H3), y(I3)) + y'(x(H4), y(H4))))$ (Fig. 13).

H	I
	Pontos
(0, 1)	(0, 1)
(0.51, 1.51)	(0.51, 1.59105)
(1.02, 2.29923)	$(x(H4), y(I3) + h/2 * (y'(x(H3), y(I3)) + y'(x(H4), y(H4))))$

Figura 13: Fórmula do método de Euler melhorado atualizada.

Logo após, clique na célula H4 e arraste até a célula H5, faça o mesmo com as células I4 e I5 (Fig. 14 e 15). Repita esse processo com as células da coluna H e da coluna I, nesta ordem, até as células H12 e I12, respectivamente.

Ao final do procedimento teremos os valores da Fig. 16.

H	I
	Pontos
(0, 1)	(0, 1)
(0.51, 1.51)	(0.51, 1.59105)
(1.02, 2.29923)	(1.02, 2.25199)
(1.53, 2.85308)	

H	I
	Pontos
(0, 1)	(0, 1)
(0.51, 1.51)	(0.51, 1.59105)
(1.02, 2.29923)	(1.02, 2.25199)
(1.53, 2.85308)	(1.53, 2.58221)

Figura 14: De H4 para H5.

Figura 15: De I4 para I5.

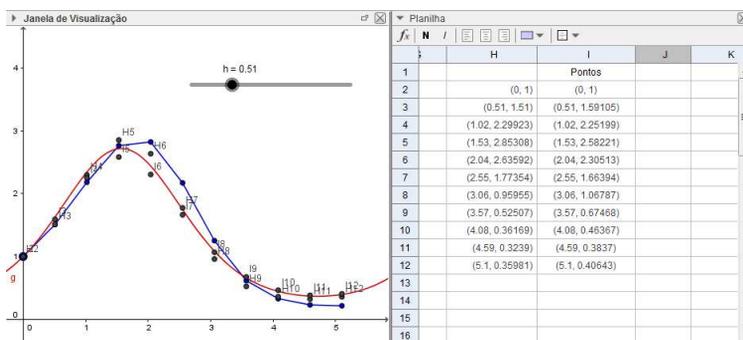


Figura 16: Método de Euler melhorado.

Note que os pontos H2:H12 também surgem na janela de visualização. No entanto, só queremos que os pontos I2:I12 apareçam, uma vez que eles são os pontos do método de Euler melhorado.

Sendo assim, selecione da célula H2 até H12, clique com o botão direito do *mouse* na seleção e clique na opção **Exibir Objeto**, para que os pontos H2:H12 desapareçam da janela de visualização. Daí, esconda o rótulo dos pontos I2:I12, assim como fizemos com os pontos A2:A12. Logo, mude a cor dos pontos I2:I12 para a cor verde. Para criar a poligonal do método de Euler melhorado, digite no campo de entrada *CaminhoPoligonal*[I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12]. Logo após, esconda o rótulo do caminho poligonal e altere sua cor para verde. Com isso, teremos a Fig. 17.

P	Q	R	S	T
Pontos	k_1	k_2	k_3	k_4
A2	$y(x(P2), y(P2))$	$y(x(P2) + h/2, y(P2) + Q2 h/2)$	$y(x(P2) + h/2, y(P2) + R2 h/2)$	$y(x(P2) + h, y(P2) + S2 h)$

Figura 19: Definindo os parâmetros.

Logo, na célula P3 digite a fórmula do método de Runge-Kutta de 4ª ordem $(x(P2) + h, y(P2) + (h/6) * (Q2 + 2 * R2 + 2 * S2 + T2))$ (Fig. 20).

P
Pontos
(0, 1)
$(x(P2)+h,y(P2) + h/6 (Q2 + 2R2 + 2S2 + T2))$

Figura 20: Fórmula do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Para obter os parâmetros k_1, k_2, k_3, k_4 da linha 3, clique na célula Q2 e arraste até a célula Q3, faça o mesmo para as células R2, S2, e T2. Depois que os valores de k_1, k_2, k_3, k_4 da linha 3 forem obtidos, faremos o mesmos procedimento para encontrar os valores das células P4, Q4, R4, S4 e T4, ou seja, clique na célula da linha de cima e arraste. Realizando esse procedimento em todas as linhas até a linha 12, na ordem P, Q, R, S e T, obtêm-se os valores da Fig. 21.

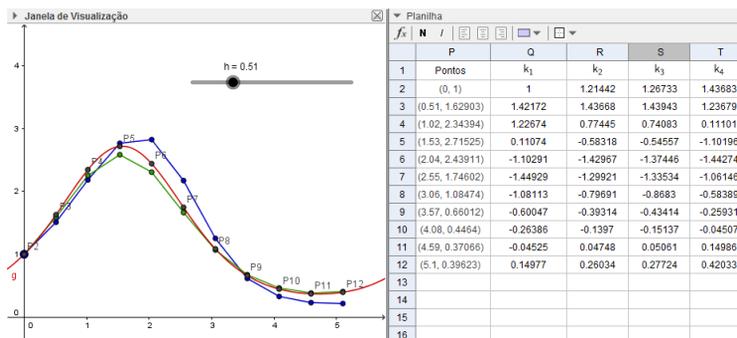


Figura 21: Pontos do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Agora, assim como fizemos no método de Euler e no método de Euler melhorado, esconda os rótulos dos pontos P2:P12 e altere sua cor para marrom.

Para criar a poligonal do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, digite no campo de entrada *CaminhoPoligonal*[P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P12]. Logo após, esconda o rótulo do caminho poligonal e altere sua cor para marrom. Assim, teremos a construção da Fig. 22.

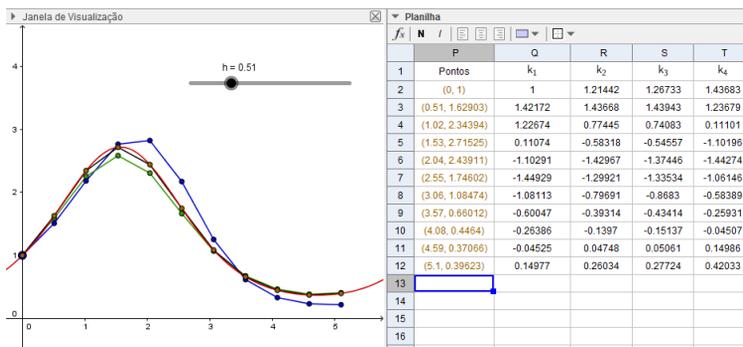


Figura 22: Poligonal do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Passo 8 - Criando a tabela do método de Runge-Kutta. De forma análoga à construção das tabelas do método de Euler e do método de Euler melhorado, nomeie a célula U1 de n e nas células U2:U12 digite 0, 1, ..., 10, respectivamente. Logo, nomeie a célula V1 de x_n e na célula V2 digite $x(P2)$. Logo após, clique na alça de preenchimento da célula V2 e arraste até a célula V12. Nomeie a célula W1 como *R-K solução* e na célula W2 digite $y(P2)$.

Logo após, clique na alça de preenchimento da célula W2 e arraste até a célula W12. Entre com o texto *Solução exata* na célula X1, na célula X2 digite a fórmula $g(x(P2))$; em seguida, estenda a fórmula para as demais células da coluna X até a célula X12. Digite o texto *Erro absoluto* na célula Y1, e na célula Y2 digite a fórmula $|W2 - X2|$. Logo após, estenda a fórmula até a célula Y12. Assim, criamos uma tabela que apresenta a solução numérica do PVI (pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem), a solução exata e o erro absoluto (Fig. 23).

	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	Pontos	k_1	k_2	k_3	k_4	n	x_n	R-K1 solução	Solução exata	Erro absoluto
2	(0, 1)	1	1.21442	1.26733	1.43683	0	0	1	1	0
3	(0.51, 1.62903)	1.42172	1.43668	1.43943	1.23679	1	0.51	1.62903	1.62934	0.00032
4	(1.02, 2.34394)	1.22674	0.77445	0.74083	0.11101	2	1.02	2.34394	2.34458	0.00064
5	(1.53, 2.71525)	0.11074	-0.58318	-0.54557	-1.10196	3	1.53	2.71525	2.71602	0.00078
6	(2.04, 2.43911)	-1.10291	-1.42967	-1.37446	-1.44274	4	2.04	2.43911	2.43983	0.00073
7	(2.55, 1.74602)	-1.44929	-1.29921	-1.33534	-1.06146	5	2.55	1.74602	1.74662	0.0006
8	(3.06, 1.08474)	-1.08113	-0.79691	-0.8683	-0.58389	6	3.06	1.08474	1.08492	0.00018
9	(3.57, 0.66012)	-0.60047	-0.39314	-0.43414	-0.25931	7	3.57	0.66012	0.66006	0.00006
10	(4.08, 0.4464)	-0.26386	-0.1397	-0.15137	-0.04507	8	4.08	0.4464	0.44637	0.00004
11	(4.59, 0.37066)	-0.04525	0.04748	0.05061	0.14986	9	4.59	0.37066	0.37064	0.00002
12	(5.1, 0.39623)	0.14977	0.26034	0.27724	0.42033	10	5.1	0.39623	0.39621	0.00002

Figura 23: Poligonal do método de Euler melhorado.

Note que alteramos as cores dos elementos da colunas W e X.

Passo 9 - Transferindo as tabelas para a janela de visualização. Neste passo, vamos transferir as tabelas da planilha para a janela de visualização. Selecione da célula B1 até a célula F12; em seguida, clique com o botão direito do *mouse* e selecione a opção *Criar*, depois clique na opção *Tabela* (Fig. 24). Dessa forma, a tabela selecionada aparecerá na janela de visualização.

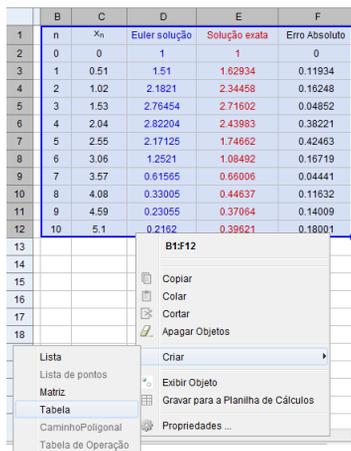


Figura 24: Transferindo a Tabela.

Repita o procedimento para as tabelas que vão da célula J1 até a célula N12, e da célula U1 até a célula Y12. Dessa forma, as tabelas do método de Euler, do método de Euler melhorado e do método de Runge-Kutta de 4ª ordem irão surgir na janela de visualização, como na Fig. 25.

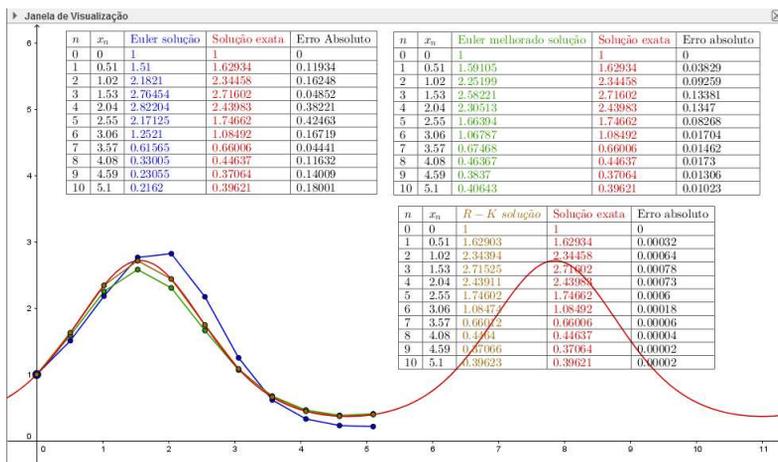


Figura 25: Tabelas na janela de visualização.

Passo 10 - Abrindo outra janela de visualização e criando textos. Abriremos uma outra janela de visualização e nela inseriremos textos. Na barra de menus, clique em *Exibir* e depois na opção **Janela de Visualização 2**. Uma nova janela de visualização surgirá. Logo, clique no controle deslizante com o botão direito do mouse, logo depois, clique em *Propriedades*, clique na aba *Avançado*, desmarque a opção *Janela de Visualização* e marque a opção *Janela de visualização 2*.

Seguindo esses passos, o controle deslizante desaparece da janela de visualização e aparece na janela de visualização 2. Para criar textos, selecione a ferramenta  **Texto** na barra de ferramentas. Logo, clique na janela de visualização 2. A caixa da Fig. 26 surgirá. Digite o texto da Fig. 26, marque a opção **Fórmula LaTeX** e logo depois clique em *OK*. O texto *Soluções numéricas para um PVI* aparecerá na janela de visualização 2. Marcar a opção *Fórmula LaTeX*, na caixa de texto, permite que textos e fórmulas sejam digitados usando os mesmos comandos com sintaxe do LaTeX. Para configurar o texto, alterando cor, tamanho e tipo da fonte, clique com o botão direito do *mouse* em cima do texto e selecione a opção *Propriedades*.

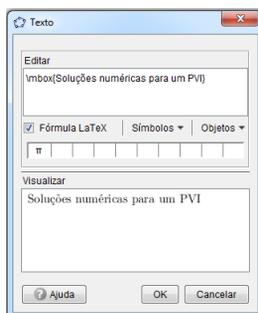


Figura 26: Caixa de texto.

Todos os textos do *applet*, já configurados e posicionados convenientemente, foram criados da mesma forma e estão na Fig. 27.

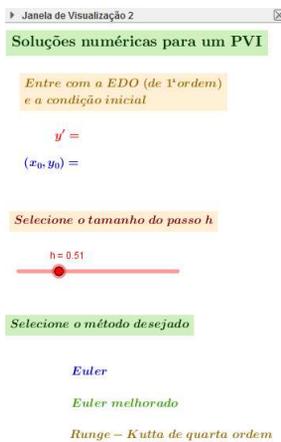


Figura 27: Textos do *applet*.

Vale lembrar que em todos os textos é marcada a opção *Posição absoluta na tela*, clicando sobre

os mesmos com o botão direito do *mouse* e selecionando esta opção.

Passo 11 - Campos de entrada, poligonais e tabelas. Vamos criar dois campos de entrada: um para a EDO e outro para a condição inicial. Na barra de ferramentas, selecione a ferramenta

 Campo de Entrada. Logo, clique em qualquer local da janela de visualização 2. A caixa da Fig. 28 aparecerá. Digite y' como legenda para o campo de entrada e vincule o objeto $y'(x, y) = y \cos(x)$, como mostra a Fig. 28

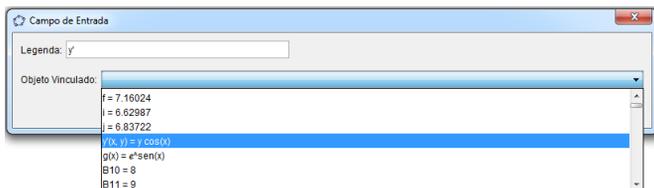


Figura 28: Configurando o campo de entrada.

Ao criar o campo de entrada na janela de visualização, clique nele com o botão direito do *mouse* e selecione a opção *Propriedades*, na aba *Básico*; desmarque a opção *Exibir Rótulo*, e, na aba *Estilo*, digite 10 para o comprimento do campo de texto. Também é possível configurar a cor da fonte e a cor de fundo do campo de entrada na aba *Cor*.

Crie outro Campo de entrada, da mesma forma que o anterior, com a legenda (x_0, y_0) e vinculado ao objeto A2. Aplique as mesmas configurações do campo de entrada anterior a esse segundo campo. Logo, posicione-os conforme a Fig. 29.

Soluções numéricas para um PVI

Entre com a EDO (de 1ª ordem)
e a condição inicial

$$y' = y \cos(x)$$

$$(x_0, y_0) = (0, 1)$$

Figura 29: Campos de entrada.

Agora, para criar as caixas que permitem a exibição (ou não) das poligonais e tabelas, selecione a

ferramenta  Caixa para Exibir / Esconder Objetos e clique em qualquer local da janela de visualização 2. Ao clicar na janela de visualização 2, surgirá uma caixa na qual podem-se escolher os objetos que se deseja exibir/esconder. De acordo com a Fig. 30, digite *Euler* para a legenda e Selecione os objetos: *CaminhoPoligonal* f , os pontos A2:A12 e o texto2 que corresponde à tabela do método de Euler.

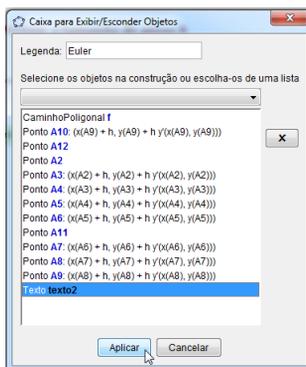


Figura 30: Exibindo/escondendo a poligonal e a tabela do método Euler.

Ao clicar em *Aplicar* a caixa que Exibe/esconde a poligonal, e a tabela do método de Euler aparecerá na janela de visualização 2. Logo, esconda o rótulo da caixa e a posicione de acordo com a Fig. 31.



Figura 31: Caixa para Exibir/esconder a poligonal e a tabela do método Euler.

Quando a caixa estiver marcada, a poligonal e a tabela do método de Euler serão exibidas na janela de visualização. Crie mais duas caixas de acordo com as Fig. 32 e 33, em seguida, oculte os rótulos dessas caixas e as posicione de acordo com a Fig. 34.

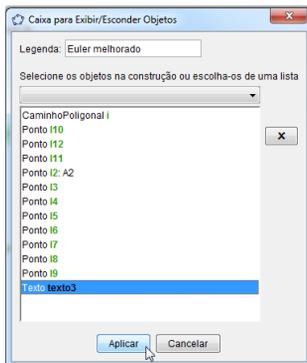


Figura 32: Exibindo/escondendo a poligonal e a tabela do método Euler melhorado.

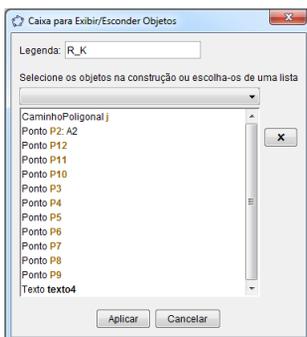


Figura 33: Exibindo/escondendo a poligonal e a tabela do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Selecione o método desejado

- Euler
- Euler melhorado
- Runge – Kutta de quarta ordem

Figura 34: Caixa para Exibir/esconder as poligonais e as tabelas dos métodos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de 4ª ordem.

Assim, clicando com o botão direito do *mouse* em qualquer local da janela de visualização, e selecionando a opção *Propriedades*, é possível alterar a cor de fundo da janela. Da mesma forma, pode-se alterar cor, fonte, tamanho, localização etc ... de qualquer objeto das janelas de visualização. Sendo assim, é possível configurar a interface do *applet* de diversas formas. A versão final, do *applet* apresentado neste trabalho é a da Fig. 1.

Passo 12 - Disponibilizando o *applet* na *web*. Após a finalização do *applet*, para que seja possível disponibilizá-lo na *web*, é necessário criar uma conta no *site* oficial do *Geogebra* em <https://accounts.geogebra.org/user/create/expiration/129600/clientinfo/website>. Logo após, na barra de *menus* do arquivo da construção do *applet*, clique em *Arquivo*; em seguida, selecione a opção *Exporta* e clique em  Planilha Dinâmica como Página WEB (html) ... Ctrl+Shift+W. Ao abrir a janela da Fig. 35, edite o título e as descrições do *applet*.

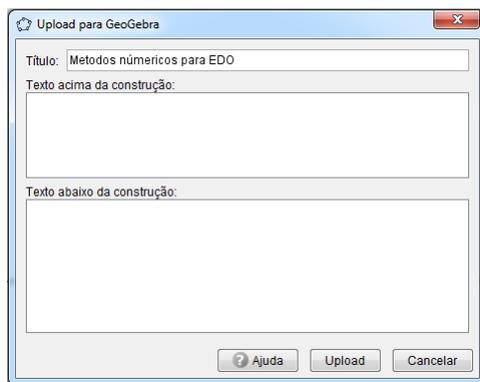


Figura 35: *Upload* do *applet*.

Ao clicar em *Upload*, o *applet* será, de fato, criado e estará disponível na *web*, no *site* de materiais do *Geogebra*. Para fazer modificações no *applet* criado, basta abrir a construção (arquivo .ggb), proceder às alterações necessárias e salvá-las. Essas modificações aparecerão, automaticamente, quando o *applet* for aberto, uma vez que o mesmo está associado à construção feita no *Geogebra*. No *applet* é possível realizar ações diversas, mas, ao fechá-lo, esse retornará ao seu estado original. Contudo, qualquer usuário pode fazer o *download* do arquivo .ggb, do *applet*, e assim, modificá-lo ou melhorá-lo.

Referências

- [1] Arenales, S.; Darezzo, A. *Cálculo Numérico: Aprendizagem com Apoio de Software*. São Paulo: Thomson Learning, 2008.
- [2] Butcher, J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2^a ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.
- [3] Deitel, H. M.; Deitel, P. J. *Java, como programar*. 8^a ed. São Paulo: Pearson, 2010.

F flank David Morais Bezerra
Universidade Federal da Paraíba,
Departamento de Matemática,
João Pessoa, PB, 58051-900, Brasil.
<flank@mat.ufpb.br>

Manoel Wallace Alves Ramos
Instituto Federal da Paraíba,
João Pessoa, PB, 58051-900, Brasil.
<wallace.ifpb@gmail.com>

Recebido: 29/10/2019
Publicado: 27/01/2020

O sonho de Lagrange

José Carlos Magossi

Resumo

É comum dizer que os cursos de Cálculo são por demais teóricos e, desse modo, geram insatisfação em seus estudantes. O objetivo deste artigo é indicar que, dentre os vários motivos que acarretam essas dificuldades e desagrado, aqueles voltados ao não entendimento da *aritmética da matemática*, frase de Felix Klein no século XIX, são os mais relevantes. Tal alegação fundamenta-se na percepção das dificuldades erigidas no decorrer do árduo processo histórico que culminou com o rigor na matemática. Entende-se que dificuldades semelhantes podem ocorrer com estudantes que ascendem à Universidade sem um preparo adequado ao manuseio dessa *nova aritmética*. Neste artigo exibem-se exemplos *divisores de águas* entre a aritmética do colégio e a aritmética presente em cursos de Cálculo. Estima-se que o estudante, ao ser-lhe esclarecido que o curso de Cálculo está alicerçado nessa nova aritmética, possa dirimir esforços do pensamento voltado à aritmética do colégio para lançá-lo na compreensão do processo de aritmética da matemática. Caso contrário, ele pode entender que, no curso de Cálculo, a aritmética do colégio, além de necessária, seja também suficiente.

Palavras-chave: Aritmetização da matemática; Lagrange; Cálculo; Infinitésimos; *Continuum*; Funções.

Abstract

It is common to say that Calculus courses are too theoretical and thus they cause dissatisfaction in their students. The aim of this article is to indicate that, among the various reasons that cause these difficulties and displeasure, those related to misunderstanding the *arithmetizing of mathematics*, phrase coined by Felix Klein in the XIX century, are the most relevant. This claim is based on the perception of the difficulties erected in the course of the arduous historical process that culminated with rigor in mathematics. We think that similar difficulties may occur with students ascending to the University without adequate preparation for handling this *new arithmetic*. In this article we show examples that can be seen as *water divisors* between High School arithmetic and the arithmetic present in Calculus courses. We estimate that, when it is clarified to the student that the course of Calculus is based on this *new arithmetic*, he can so settle efforts of thought focused on the mathematics of High School to launch it in understanding the process of the arithmetizing of mathematics. Otherwise he may understand that, in the course of Calculus, the High School arithmetic is not only necessary, it is also sufficient.

Keywords: Arithmetizing of mathematics, Lagrange, Calculus, Infinitesimals, *Continuum*, Functions.

1. Introdução

Os estudantes tomam contato, logo que iniciam seus estudos em matemática, com as regras básicas de soma, subtração, divisão e multiplicação para números inteiros. Uma simples inspeção nos conteúdos matemáticos dos colégios será suficiente para identificar os assuntos em que residem suas dificuldades com essas operações. Tais dificuldades de aprendizado produzem, na comunidade científica, inúmeros artigos com fins de indicar metodologias que facilitem o entendimento dessas operações em detrimento, por exemplo, de uma possível tarefa de decorar a tabuada. Um pouco à frente nesse roteiro escolar reside ainda uma dificuldade maior, as operações com frações. Uma fração é um número ou são dois números? Representa razão ou variação? Estes são alguns questionamentos presentes em sala de aula. Isso se estende até o ensino médio, período em que os estudantes estão prestes a ingressar em cursos universitários. Ao ingressar em tais cursos, naqueles que contenham como disciplinas obrigatórias os “famosos” cursos de Cálculo, haverá outra dificuldade, ainda da aritmética, mas não com números inteiros ou frações, mas com o que se chama, *grosso modo*, de *quantidades infinitamente pequenas*¹, abreviada nesse artigo por *q.i.p.* Essa aritmética é a que suporta, em termos técnicos, as ferramentas matemáticas de grande parte dos desenvolvimentos tecnológicos modernos, tais como as equações diferenciais, equações integrais, séries e transformadas de Fourier etc. Mesmo com todas as indicações da relevância tecnológica, educativa e de raciocínio, da matemática presente nos cursos de Cálculo, há ainda indicativos de insatisfação. Pode-se dizer que há, de modo geral, uma leitura de desconexão entre matemática e realidade. Talvez isso seja fruto do árduo processo de transformação e solidificação da matemática ao longo dos séculos XVII, XVIII e XIX. Pelo sim ou pelo não, o fato é que há um cenário fragmentado nos cursos de Cálculo que faz com que os estudantes sintam-se desconfortáveis. A história da matemática mostra-nos o quão árduo foi, e em alguns casos ainda é, a passagem do período pré-Cálculo - ² diga-se, antes da invenção do conceito de *derivadas* - para o período do Cálculo, motivada pela *intuição geométrica*, e também a passagem do período do Cálculo para o período das análises Matemáticas, com a invenção do conceito de *limites* e aprimoramento do conceito de *funções*. Os termos “derivadas”, “intuição geométrica”, “limites” e “funções” não são os únicos fatores que acarretaram transformações matemáticas naquele período, mas servem como elemento norteador para lançar uma luz sobre as dificuldades presentes nos cursos de Cálculo.

Uma observação cautelosa mostra-nos os equívocos dos cientistas em optar por “demonstrações” matemáticas fundamentadas em intuição geométrica, descobrindo-se apenas *a posteriori* que o rigor dedutivo deveria predominar se se quer evitar inconsistências [39]. As profundas discussões sobre *q.i.p.*, infinitésimos, indivisíveis, estrutura do *continuum* etc., [41, 1], atingem um ponto de consenso no final do século XIX com o surgimento do conjunto dos números reais, em que a estrutura do *continuum* revela-se num sistema lógico dedutivo com a inserção de axiomas de completude.

(...) Nesse contexto seria interessante e importante saber das várias análises a que foi submetida a noção de continuum ao longo dos séculos (e milênios) ([31], p214).
(Tradução do autor).

Com fins de elucidar as transformações relativas às *q.i.p.*, propõe-se, neste artigo, uma divisão

¹Para mais detalhes sobre esse termo, no sentido extensivo, consultar, por exemplo, [1, 2].

²O termo “pré-Cálculo” é utilizado aqui como sinônimo de um período histórico e não como a pretensa disciplina, pretensão pré-requisito, que comumente se diz preparatória para ingressar em cursos de Cálculo.

histórica com três períodos, caracterizados, aproximadamente, pelas datas de 1684 – 1687, 1807 – 1823 e 1902, como marcadores de época. Os anos de 1684 e 1687 caracterizaram o surgimento do Cálculo. O ano de 1807, (mês de dezembro), foi o ano em que Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) entregou ao *Institut de France*, [25], Paris, seu manuscrito sobre a solução do problema de Condução de Calor³. Os anos de 1821 e 1823, [16, 17], foram os anos da publicação do conceito de *limites* por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). E, finalmente em 30 de junho de 1902, a data da defesa de doutorado de Henri Léon Lebesgue (1875-1941), que pode ser vista como um marco no desenvolvimento de uma genuína teoria da integração e medida [34]⁴.

Entende-se que houve o período pré-Cálculo (antes de 1684 e 1687), o período do Cálculo, até 1807, e o período da solidificação da Análise Matemática, até 1902. De 1902 aos dias atuais, muitos desenvolvimentos matemáticos ocorreram, o que é impossível detalhar num texto como este. Neste artigo, apontamos que em tais períodos, o foco reside no problema da aritmética, não numa aritmética de números inteiros, mas sim numa aritmética de *q. i. p.*, ou seja, em linguagem moderna: uma aritmética de números reais. Convém reforçar que o objetivo neste artigo é indicar as bruscas mudanças no pensar sobre o *conceito de infinito e infinitésimos* que, de uma forma ou outra, impactaram não somente o pensamento humano dos séculos XVII, XVIII e XIX, mas também impactam o pensamento e o raciocínio daqueles que ingressam em cursos de Cálculo. É possível, então, caracterizar, de modo sucinto, conforme a proposta deste artigo, as principais “ferramentas” matemáticas utilizadas nos períodos citados acima:

- Da Grécia antiga até 1684-1687 as “ferramentas” matemáticas utilizadas eram, *grosso modo*, Régua e Compasso. A geometria de Euclides, exposta no livro *Os Elementos*, de Euclides [8], reúne um dos principais tratados de matemática.
- De 1684 até 1807-1823 as “ferramentas” matemáticas eram fundamentadas fortemente em derivadas e integrais, de Newton-Leibniz. Esse foi um período de intuição e geometria. *O Cálculo* descoberto por Newton e Leibniz era a principal vertente matemática.
- De 1807-1823 até 1902, o conceito de limites estabelece-se como uma importante “ferramenta” matemática. O período do rigor. *A Análise Matemática* solidifica-se e os fundamentos da matemática são revistos.
- De 1902 até os dias de hoje há uma pluralidade de novos desenvolvimentos matemáticos, mas ainda o conceito de limites mostra-se como uma ferramenta indispensável na matemática.

Na Grécia antiga, por exemplo, já se discutiam as magnitudes além daquelas inteiras e fracionárias. Pitágoras questiona a existência do número $\sqrt{2}$. Euclides mostra a impossibilidade de esse número ser expresso como uma razão entre dois números inteiros, com denominador diferente de zero; ou seja, não é um número que pertence ao conjunto das frações. Euclides publica uma série de livros, *Os Elementos*, [8], nos quais enuncia seu método axiomático-dedutivo, amplamente utilizado em quase todos os círculos de estudiosos em matemática. O axioma das paralelas, que consta nos *Elementos de Euclides*, mostra indicativos de como o trato com o *infinito* pode gerar controvérsias. Ainda em sua época, dúvidas sobre *q. i. p.* em geometria persistiam. Por exemplo, *se um segmento de reta é composto de partes muito pequenas (mas positivas), em número infinito, então sua soma,*

³O qual originou o que se chama hoje em dia de Séries de Fourier.

⁴Essa data é utilizada apenas para marcar um período, pois Lebesgue publicou seus resultados ao longo do final do século XIX e início do XX [35, 27, 3, 45].

uma soma infinita, vai ultrapassar o tamanho do referido segmento. Por outro lado, se esse mesmo segmento é formado de partes infinitamente pequenas (mas de tamanho nulo), então sua soma vai ser nula e não representará o segmento. Isso mostra as inconsistências acerca de somar q.i.p. Além disso, há também os paradoxos de Zenão de Eleia (que viveu por volta de 450 A.C. [12, 1]), que revelam como um dos precursores dos processos relacionados ao infinito [42]. Em linguagem atual, a ideia de Zenão era a de que é impossível ir, por exemplo, de um ponto A até um ponto B qualquer. Para chegar a B é preciso passar pela metade do caminho, digamos C , e daí, para ir de C até B , é preciso passar pela metade do caminho restante, e assim sucessivamente. Nesse caso, levando-se em conta que sempre há uma mínima parte a percorrer (uma metade), jamais se atinge o ponto B . Zenão utiliza em sua argumentação um raciocínio que pode muito bem ser comparado, guardadas as devidas proporções, aos raciocínios do século XIX. Também, pode-se citar O. Toeplitz (1881-1940) ao dizer de Arquimedes, após seu livro *O método* ter sido descoberto por J. L. Heiberg (1854-1928), em 1906, na cidade de Constantinopla:

Neste trabalho Arquimedes não fornece nenhuma nova prova, apenas quer mostrar por quais métodos de raciocínio ele tem encontrado todos os seus grandes resultados; (...). O método dos indivisíveis, que ele, no entanto, lida com uma ousadia e segurança instrutiva que deixa Cavalieri muito para trás ([42], p61). (Tradução do autor).

Nota-se a força das ideias de q.i.p., nesse caso sob a forma de *indivisíveis*, as quais desde há muito tempo “esboçava caminhos” para emergir. Essas discussões, com formatos diferentes [1], avançam até o período da descoberta do Cálculo. De modo revolucionário, se assim se pode dizer, I. Newton (1643-1727) e G. Leibniz (1646-1716) abordam esse problema de forma singular. Eles caracterizam essas q.i.p. como sendo quantidades (sem dimensão) menores do que qualquer outra quantidade, mas ainda diferente de zero.

(...) como uma quantidade menor do que qualquer quantidade finita e, ainda, diferente de zero ([31], p214). (Tradução do autor).

Com isso, abrem-se espaços para desenvolvimentos matemáticos fundamentados no recém-descoberto “Cálculo”. De modo quase imediato, novas “tecnologias” surgem, tais como a construção de telescópios, o conceito de velocidade instantânea na Física, inclinação de curvas, lei da gravitação, máximos e mínimos de funções etc., ([26], p.81). Além da explosão do surgimento do Cálculo, fortes desenvolvimentos surgem no patamar das técnicas de derivação, de integração e de suas aplicações. Inúmeros teoremas e suas interações com o mundo real são estabelecidos. No entanto, com o passar do tempo as fronteiras dessa abordagem, dessa relação teoria-prática, começam a dar sinais de “fadiga,” haja vista que as demonstrações dos teoremas eram fundamentadas principalmente em evidências, numa factível prática e na intuição geométrica.

Já estava latente nos ares da época que a ausência de uma caracterização precisa do que sejam os infinitésimos promovia dúvidas em demonstrações matemáticas, pois a intuição e a geometria não eram suficientes para *demonstrações* de teoremas matemáticos, principalmente para aqueles associados à convergência de séries, continuidade, números reais, reta real etc.. Algo mais seria

necessário. Não basta dizer que $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ vale 2 apenas por indicar que essa multiplicação representa a área de um quadrado⁵ de lado $\sqrt{2}$.

De modo análogo, não basta dizer que a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

vale 1, pois há uma leitura geométrica de fácil entendimento. Isto é, essa soma pode ser lida, de modo intuitivo, como a representação da área de um quadrado de lado 1 que foi dividido em 2 partes (regiões) iguais e retirada uma parte dela: $\frac{1}{2}$. Depois, divide-se o quadrado em 4 partes iguais e retira-se uma parte de quatro, $\frac{1}{4}$, e assim sucessivamente, subdivide-se o quadrado em 2^n partes iguais e retira-se uma parte de 2^n partes, ou seja, $\frac{1}{2^n}$. Intuitivamente, essa soma vale 1, que é a área do quadrado, pois vão-se retirando partes cada vez menores, mas ainda pertencentes ao quadrado de área 1. Com um terceiro exemplo, seja uma reta r que liga o ponto A ao ponto B . Seja também uma reta s transversal a ela. Intuitivamente é de bom senso supor que a reta s corta a reta r em algum ponto, mas qual a certeza disso? Esse problema foi discutido por Bernard Bolzano (1781-1848) [40] e deu origem ao que se chama hoje em dia de *Teorema do Valor Intermediário*.

Em todos os três exemplos acima as dúvidas advêm do **significado** de que se atribuem ao **significante** *quantidades infinitamente pequenas*. No primeiro exemplo, o problema está relacionado à multiplicação de um número com infinitas casas decimais por ele mesmo, caso em que a aritmética tradicional não se aplica. No segundo exemplo, de modo análogo, indica-se uma soma de infinitos termos, contrária à noção de soma que é definida para um número finito de termos. Já no terceiro exemplo, a dúvida reside na existência, ou não, de um ponto de interseção entre duas retas, condição possível, desde que não haja “furos” nas retas envolvidas. Isso indica a presunção de que as retas em questão contenham, como seus pontos, o conjunto de números reais⁶. *Grosso modo*, caso exista tal “reta real”, haverá um ponto de interseção entre as retas r e s ; caso contrário, os “furos” podem não garantir a interseção. Com base nessas argumentações e em muitas outras possíveis, os problemas com a falta de rigor começam a surgir, e os matemáticos voltam-se para as questões de fundamentos da matemática⁷.

E assim, no final do século XVIII, à medida que as limitações das antigas técnicas tornaram-se cada vez mais evidentes, uma atenção séria às questões dos fundamentos tornou-se a preocupação de trabalho dos matemáticos ([38], pviii). (Tradução do autor).

Richard Dedekind (1831-1916) inquieta-se com a falta de precisão na matemática ao lecionar cursos de Cálculo em Zurich. Em seu livro de 1858, [20], *Essays on the theory of numbers-Continuity and Irrational Numbers-The Nature and Meaning of Numbers*, escreve sobre sua insatisfação com o desenvolvimento do Cálculo no decorrer de suas aulas:

⁵Um quadrado justaposto por quatro triângulos retângulos iguais, de área $\frac{1}{2}$, catetos com valor 1 e hipotenusa, lado do quadrado, igual a $\sqrt{2}$.

⁶Nota-se que esses questionamentos surgiram bem antes o do conjunto \mathbb{R} dos números reais tal como conhecemos hoje em dia.

⁷No artigo *Les fondements des mathématiques*, Morris Kline elucida essa problemática [32].

Ao discutir a noção da abordagem de uma magnitude variável para um valor limite fixo, (...) tive de recorrer à evidências geométricas. (...) Para meu próprio sentimento de insatisfação (...). Eu deveria encontrar uma base puramente aritmética e perfeitamente rigorosa para os princípios da análise infinitesimal ([20], pp1-2). (Tradução do autor).

As inquietações de Newton e Leibniz acerca do Cálculo, do conceito de infinitésimos, levam a Academia de Berlin, em 1784, a propor, por sugestão de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), um prêmio para o melhor trabalho matemático que explicasse os fundamentos do Cálculo. Havia certo consenso entre os matemáticos de que eles estavam clamando por algo “que ainda não existia”. O prêmio, seguindo os dizeres do comitê de avaliação, “o melhor dos piores”, foi atribuído a Simon L’Huiller (1750-1840) pelo trabalho *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, de 1787 ([23], p.233), mas ele não explicou o porquê de muitos teoremas verdadeiros serem deduzidos de suposições contraditórias ([23], pp40-42)⁸. Isso justifica a dificuldade em aceitar, e compreender, as **q.i.p.**, e grandes, “o infinito,” presentes no Cálculo. Diante de uma “grave” situação na matemática, Lagrange abraça um projeto pessoal que consistia em eliminar os infinitésimos do Cálculo e reduzi-lo à Álgebra. Lagrange, por conta de suas aulas na École Polytechnique, em Paris, refletiu seriamente sobre a utilização de infinitésimos como parte dos fundamentos da matemática⁹ ([23], p43). Lagrange considerava que infinitésimos, de um modo geral, não eram rigorosos, mas, pelas dificuldades matemáticas encontradas, acaba por abandonar seu projeto de reduzir o Cálculo à Álgebra. No entanto, conforme consta em [23], mesmo Lagrange não tendo tido sucesso em seu programa de reduzir o Cálculo à Álgebra, ele deixou as condições necessárias e a importância vital da questão do rigor, para que Cauchy pudesse fazê-lo.

Coube então a A. L. Cauchy, quando em seu curso de Análise em 1821-1823 na École Polytechnique, Paris, introduzir o conceito de *limites* e dessa forma dar início a uma rigorosa fundação da Análise Matemática.

Com o operador *limites* no Cálculo há a revelação de uma nova aritmética. Se Lagrange e seus contemporâneos tiveram dificuldades para entender as **q.i.p.** no Cálculo, tendo sido Cauchy aquele que abriu as portas para uma compreensão eficaz, por que então estudantes iniciantes em cursos universitários deveriam compreendê-los com apenas uma aritmética de colégio como pré-requisito? Por isso se diz do *Sonho de Lagrange*, do sonho de indicar, talvez com vistas ao ensino, tal como se preocuparam, cada um com seu propósito, Lagrange e Cauchy, uma maneira clara para compreender as sutilezas de uma nova aritmética, uma aritmética com infinitésimos, com **q.i.p.**, e grandes. Ou seja, estima-se que, ao clarear a diferença entre os processos de aritmética básica de colégio, com números inteiros, e os processos de aritmética, com **q.i.p.**, presentes em cursos de Cálculo, haverá melhorias nos processos de ensino-aprendizagem. O aluno finaliza o ensino médio tendo adquirido um instrumental matemático, *grosso modo*, pertencente ao século XVII, e ao iniciar a Faculdade depara-se com uma matemática do século XVIII, mas como ferramental do século XX. Desse modo, é didático clarear ao aluno sobre as dificuldades em se trabalhar, no sentido manual-operacional, com uma aritmética de **q.i.p.**, mesmo tendo ele vivenciado operações, no

⁸O trabalho de L’Huiller, *Principiorum Calculi Differentialis et Integralis Expositio Elementaris*, de 1795, pode ser encontrado no site <https://archive.org/details/principiorumcal00huigoog/> (Acessado às 17:15 do dia 28 de setembro de 2019).

⁹Os questionamentos de Lagrange propiciam a formulação de perguntas pertinentes ao tema discutido neste artigo: Seria a presença da álgebra no Cálculo, de certa forma, uma facilitador do ensino, muito mais do que o manuseio de infinitésimos? Por conta de suas aulas, haveria Lagrange refletido sobre isso?

colégio, com a aritmética de números inteiros. É preciso ir além de simples manipulações de números inteiros, além das transformações de “conceitos intuitivos” do Cálculo para “conceitos rigorosos” da Análise Matemática.

2. A época do rigor matemático

A prática, intuição e geometria dominavam o período imediato ao surgimento do Cálculo, mas a ocorrência de imprecisões na matemática fez com que houvesse um movimento em direção aos fundamentos da matemática. Como consequência, a Análise Matemática solidificou-se e o Cálculo afastou-se dos aspectos intuitivos para se pautar em processos aritméticos como meio de responder às insatisfações científicas da época. Na sequência histórica, após Cauchy, outros matemáticos trabalharam nos fundamentos da matemática, tais como: K. Weierstrass (1815-1897), G. Cantor (1845-1918), E. Heine (1821-1881), E. Borel (1871-1956), C. Méray (1835-1911), B. Bolzano (1781-1848), R. Dedekind (1831-1916), P. Cousin (1867-1933) e H. Lebesgue (1875-1941), para dizer de alguns [26, 24, 12, 36, 29, 41]. Na trilha desses desenvolvimentos, R. Dedekind constrói o conjunto de números reais e caracteriza uma reta “real” composta unicamente por números reais e possibilita com isso as definições e construções rigorosas de teoremas, comuns em cursos de Cálculo. Surgem então demonstrações rigorosas, inclusive para aqueles teoremas que, anteriormente, eram “demonstrados” via intuição geométrica. O final do século XIX e início do XX foi marcado pelo desenvolvimento da precisão na matemática, ou seja, pela migração matemática da era da intuição para a era das demonstrações precisas fundamentadas na aritmética. Esse período, fértil em termos matemáticos, foi caracterizado por Felix Klein (1849-1925) como o período da *arimetização da matemática* [30, 39].

Proponho, portanto, na presente ocasião explicar a minha posição em relação a uma importante tendência matemática que tem como seu expoente principal Weierstrass, cujo octagésimo aniversário recentemente comemoramos. Eu me refiro à arimetização da matemática ([30], p241). (Tradução do autor).

A ideia de Klein é mostrar com essa frase que uma nova aritmética surgia, qual seja, a aritmética de *q. i. p.*, uma aritmética dos infinitésimos¹⁰. Os cientistas desse período, além de Newton e Leibniz, trataram os infinitésimos de modo único [2], bem diferente do modo como as *q. i. p.* vinham sendo abordadas desde então por B. Cavalieri (1598-1647), Galileu Galilei (1564-1642), J. Wallis (1616-1703) etc. [1, 12]. Isso produz uma aritmética cujos objetos diferem daqueles cotidianamente utilizados no ginásio e colégio, em que a aritmética insere-se no escopo de operações com números inteiros e frações. Ao construir os números reais, R. Dedekind deixa o caminho livre para que novas construções e desenvolvimentos ocorram. Assim, o conjunto dos números reais, juntamente com as quatro operações, satisfazendo os axiomas de corpo e de completude, caracteriza-se como o *sistema de número reais* [5].

No entanto, essa caracterização do sistema de números reais não deu-se apenas por instabilidades nas demonstrações matemáticas alicerçadas na intuição geométrica. O trabalho de Fourier sobre Condução de Calor pode ser caracterizado como um “divisor de águas” [13]. Graças aos problemas

¹⁰Foi com a busca por uma aritmética desse tipo, mesmo que incipiente, que se deu o surgimento do Cálculo por Newton e Leibniz, uma consequência indireta das investigações originadas na Grécia antiga.

“abertos”, deixados no trabalho de Fourier, a matemática foi, por assim dizer, “convidada” a se tornar mais sólida [42].

O fim das interrogações presentes no trabalho de Fourier de 1807 se deu com os trabalhos de H. Lebesgue [27], em particular com sua tese de doutorado [34] em 1902. Nela, Lebesgue exhibe uma *teoria de medida e integração*, a qual responde às interrogações presentes no trabalho de Fourier. É evidente que, com isso, novas tecnologias surgem e a matemática solidifica-se. O período após 1902 utiliza dessas novas ferramentas para inovações tecnológicas e também para responder ainda a outros problemas decorrentes dessas novas ferramentas. É o caso da teoria da integração, a qual indica novos métodos de integração que abrangem uma classe maior de funções [33, 28, 22], e também impacta propostas pedagógicas voltadas às melhorias nos processos de ensino-aprendizagem¹¹. Essas discussões acabam sendo interessantes, pois estão em consonância com um dos motivos que podem também ser ditos como motivadores da transição da era da intuição para a era do rigor: *o ensino do Cálculo* [24, 36, 29].

Os séculos XVIII, XIX e XX caracterizaram-se, sob a ótica da matemática, por períodos de grandes mudanças e solidificação da matemática, e contêm as datas que, neste artigo, indicam divisores de água no desenvolvimento da matemática focada numa aritmética que se alterou significativamente em três períodos históricos. O esclarecimento dos aspectos históricos, dos desenvolvimentos tecnológicos, da evolução dos conceitos matemáticos é uma condição essencial nas propostas pedagógicas associadas ao ensino de Cálculo e quiçá da Análise Matemática.

É um fato histórico que o **ensino** foi considerado com uma séria preocupação tanto de A. Cauchy como de R. Dedekind e de F. Klein, entre outros [11, 24, 36, 29, 41]. Assim, não é redundante alertar, diante do exposto em parágrafos anteriores, que melhorias no ensino de Cálculo podem advir de esclarecimentos sobre a aritmetização da matemática. Com isso, estima-se que o aluno visualizará a diferença entre o mundo de *realidades discretas* e o mundo da matemática imerso em quantidades *incomensuráveis*, em infinitésimos.

O ensino do Cálculo sob a ótica de intuição e geometria é pedagogicamente viável, mas com os desenvolvimentos atuais, com as tecnologias, com os *softwares*, em muitos casos, faz-se necessário tratar o Cálculo tanto com rigor como com intuição geométrica.

3. Exemplos ilustrativos

No que se segue, expõem-se exemplos matemáticos que marcam a diferença entre uma aritmética presente em cursos colegiais e a aritmética presente em cursos de Cálculo. O objetivo é mostrar que o **pensar** sobre infinitésimos deve ser esclarecido aos estudantes. Nos poucos exemplos que se seguem mostra-se que o pensar matemático, se desprovido de contexto em que a gênese do conceito é explorada, pode facilmente gerar dúvidas e dificultar a compreensão dos conceitos próprios do Cálculo.

¹¹Ver texto de Eric Schechter no endereço <https://math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/>, que diz sobre as integrais de Kurzweil-Henstock, e também sobre a divulgação dessas integrais no endereço <https://math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/letter/> (acessado no dia 28 de setembro de 2019 às 18:26).

3.1. Aritmética de quantidades infinitamente pequenas

A palavra *aritmética*, em dicionários e enciclopédias, relaciona-se aos números e às operações com eles. A expressão $2 + 3 = 5$ é vista como uma igualdade em que a quantidade expressa por $2 + 3$ é igual à quantidade expressa pelo número 5. No entanto, o que acontece com expressões tais como

$$0,9 + 0,99 + 0,999 + 0,9999 + \dots,$$

que representam uma “soma” de infinitos números, a qual pode ser a resposta para a pergunta:

$$1 = 0,999\dots ?$$

Ou ainda, somas do tipo $\pi + e$, ou a multiplicação $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$, as quais o resultado poderia ser obtido, em tese, no sentido tradicional, após operar com números com infinitas casas decimais. Como não se tem como realizar operações matemáticas em um número infinito de passos, uma leitura imediata revela uma *incerteza* acerca do resultado das expressões acima.

Felix Klein, ao escolher a frase “arimetização da matemática” [30], contempla o pensamento matemático que está presente nas demonstrações matemáticas via epsilons (ε 's) e deltas (δ 's). Isso se opõe àquelas demonstrações caracterizadas pela intuição geométrica, as quais, às vezes, eram expostas em poucas palavras de bom senso [39]. A essência dessas sutilezas presentes nessa nova aritmética pode ser observada no seguinte exemplo da famosa série harmônica. Ela é uma “soma infinita” de termos do tipo $\frac{1}{n}$, ou seja,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Há inúmeras demonstrações de sua divergência ([5], pp96-97), ou seja, de que essa “soma infinita” cresce indefinidamente. Por exemplo, com 10.000 termos tem-se o valor aproximado de 9,78; com 100.000 termos tem-se o valor aproximado de 12,09. Ao estudar séries numéricas, depara-se com a série p - harmônica, uma versão estendida na qual a série harmônica é um caso particular.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \quad (1)$$

É clássico e demonstrado na literatura, que, se $p = 1$, a série harmônica é divergente; se $p > 1$ a série converge, e para $0 < p < 1$ a série diverge. A exemplificação da presença das **q.i.p.** pode facilmente ser observada ao se trabalhar com valores de p muito próximos de 1. Sabe-se que, se p é muito próximo de 1, mas ainda maior do que 1, a série é então convergente.

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = k, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{R}.$$

Isso é muito estranho e muito esclarecedor do estudo dessas **q.i.p.** Se $p = 1 + 10^{-10000000}$, diga-se, um número maior do que 1, e muito, muito próximo mesmo de 1, a “soma infinita” (1) tem um valor fixo, ou seja, é convergente. Mas, para $p = 1$ a soma “explode para infinito,” diverge. Haverá dificuldades de entendimento desse raciocínio sobre somas infinitas se se pautar apenas na aritmética de colégio que ele, o estudante, conhece ao chegar à universidade.

3.2. Conjuntos

Logo nas primeiras aulas de um curso de Cálculo o foco são conjuntos numéricos. Os conjuntos dos números Naturais \mathbb{N} , Inteiros \mathbb{Z} , Racionais \mathbb{Q} , Irracionais \mathbb{I} e Reais \mathbb{R} , que de certa forma já são de conhecimento dos estudantes. No entanto não são exploradas no ginásio e colégio as particularidades do trato com conjuntos infinitos. Há dúvidas quanto à pergunta: qual conjunto tem mais elementos, o conjunto dos números pares P ou o conjunto \mathbb{N} ? Em conversas com estudantes, observa-se que, em uma primeira análise, dizem que dois conjuntos infinitos têm sempre o mesmo número de elementos. Numa segunda análise, dizem que \mathbb{N} tem mais elementos que P . Numa terceira análise, a resposta é que são iguais, não porque são infinitos, mas porque é possível “grudar” cada número com seu múltiplo de 2. Esse já é um primeiro sinal de dificuldade com uma aritmética (de “coisas infinitas”) diferente daquela tratada no colégio. Nota-se a importância em esclarecer, de modo didático, as ideias iniciais, clássicas, sobre conjuntos, enumerabilidade, contagem, cardinalidade etc. Conforme exposto em [19], página 4, Galileo Galilei foi um dos pioneiros na elaboração de uma proposta do *infinito* tal como nos tempos atuais. Mesmo para Galileo, era um paradoxo dizer que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados de números naturais têm o mesmo número de elementos.

O livro *Computability and Logic*, de G. S. Boolos (1940-1996) e R. C. Jeffrey (1926-2002) [10], traz boas explicações sobre esses assuntos nos capítulos iniciais. De extrema importância é indicar o norte histórico associado ao surgimento de um conceito. Neste caso, os trabalhos de Georg Cantor são relevantes, pois não só indicam a parte histórica relativa a conjuntos, como também preanunciam a relação entre conjuntos e a participação do pesquisador G. Cantor nos fundamentos da Análise Matemática [6]. A teoria de conjuntos de Cantor foi criada no período histórico em que se investigavam problemas relacionados a conjuntos infinitos. Cantor estudava séries infinitas e procurava resolver os problemas deixados por J. Fourier em suas séries. As descobertas de Cantor dos conjuntos infinitos [6] foram significativas não só para os fundamentos da Matemática, mas também para o surgimento da teoria de integrais de H. Lebesgue [3]. Ao se clarear esse assunto e citar exemplos do porquê do surgimento de uma aritmética com conjuntos infinitos, torna-se possível compreender com mais facilidade os assuntos que se apresentam na sequência do cronograma, ementa, de um curso de Cálculo. Isso elimina uma tentativa muito comum de associar a matemática que se aprende com situações do mundo real, uma constante busca por uma “matemática aplicada”. Em alguns casos isso pode não funcionar. Por exemplo, questionar o conceito de infinito no mundo em que se vive pode ser mais enroscado do que expor as razões do surgimento dessa aritmética do infinito.

Um exemplo que não se apresenta no colégio e que pode ser esclarecedor sobre conjuntos infinitos é o de determinar uma função que seja bijetora e que enumere todos os pares de números inteiros. Como ela é bijetora, existe a função inversa, que associa um número inteiro com um par de números inteiros, algo novo para os estudantes. O entendimento de uma função com essas características, e de sua inversa, auxilia no esclarecimento sobre enumerabilidade de conjuntos.

Exemplo 1. ([18], pp40-41 e p73) Se g é uma função bijetora de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em \mathbb{N} dada por

$$g(a, b) = 2^a(2b + 1) - 1,$$

então sua inversa g^{-1} é dada por

$$g^{-1}(x) = \left((x + 1)_1, \frac{1}{2} \left(\frac{(x + 1)}{2^{(x+1)_1}} - 1 \right) \right),$$

onde a notação $(x + 1)_1$ vem da função

$$(x)_y = \begin{cases} A, & \text{se } x, y > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases},$$

onde A é o expoente de p_y na fatoração de números primos¹² de x .

3.3. Funções

Um dos principais conceitos em matemática, o conceito de funções, é normalmente apresentado, em cursos de Cálculo, logo após a exposição de conjuntos numéricos. Esse conceito alterou-se ao longo da história da matemática; o que se entendia por funções no século XVII não é o mesmo que se entendia por funções no século XIX, nem o mesmo que se entende por funções nos dias de hoje. Dessa forma, não é de espantar que a sala de aula capte também o eco de tais instabilidades.

Entende-se, com base no desenvolvimento da matemática, que ao aluno devem ser fornecidas as ferramentas matemáticas, didáticas, necessárias à compreensão das diversas fases de transformação de um conceito. Principalmente a diferença entre o conceito de função no sentido geométrico e o conceito de função no sentido computacional. Segundo o matemático O. Toeplitz,

(...) Todo o século XIX foi necessário para desenvolver completamente ambas – função e expressão computacional – em conjunção com e independentemente uma da outra, cada uma de acordo com sua peculiaridade. Os pesquisadores de hoje têm ambas à sua disposição. Utilizam-nas separadamente ou em mútua interpenetração. Para o estudante, no entanto, é difícil mantê-las separadas; os livros que ele estuda não lhe dão ajuda suficiente, porque tendem mais a confundir em vez de aguçar a diferença ([42], p132). (Tradução do autor).

Dizer de uma função como sendo uma *regra* que associa elementos de um conjunto de partida (domínio) a elementos de um conjunto de chegada (contradomínio) exhibe um método computacional para calcular os valores de uma determinada função, aquela sujeita a uma regra. O sentido geométrico indica as funções vistas como curvas contínuas, suaves etc.

No entanto, os problemas começaram a surgir quando Fourier, em seu trabalho *La théorie analytique de la chaleur (1822)*, expõe funções que não são aquelas tradicionalmente estudadas no século XIX. São funções que carecem de uma análise cuidadosa, em que o sentido computacional e geométrico interagem. Isso vai exigir uma reformulação¹³ do conceito de funções, o que culmina com a preocupação com os fundamentos da matemática [32].

¹²Nesse caso p_y é o y -ésimo número primo. Por exemplo, $p_0 = 0, p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$

¹³O conceito de funções é um dos pontos que impactaram os fundamentos da Análise Matemática. Entre vários motivos que exigiram uma completa clarificação do conceito de função, podem-se citar os trabalhos de Fourier [13, 43, 27, 42].

Precisamente o que Fourier quis dizer com uma função arbitrária nunca ficou totalmente claro. Certamente ele queria admitir todas as funções que aparecem em problemas físicos (a configuração inicial de uma corda esticada, por exemplo), incluindo muitas que não poderiam ser dadas por uma única equação (ou expressão). Foi P. G. Dirichlet (continuando as investigações de Fourier) que deu a definição moderna de uma função (...) ([38], pxi). (Tradução do autor).

Nota-se que, historicamente, os cientistas passaram por períodos de incertezas, as quais podem também, de modo semelhante, estar presentes nos egressos do colégio, pois esses estão acostumados com o conceito de funções exposto no sentido geométrico ou calculado via algum processo computacional. Mas, para avançar em cursos de Cálculo, tal como deu-se com o avanço da matemática, torna-se necessário o pensar sobre o conceito de função de modo mais abrangente.

A função de J. P. G. L. Dirichlet (1805-1859) ([26], p203) é um exemplo mais sofisticado de funções, pois é difícil, se não impossível, de ser esboçada no papel com lápis e régua.

Exemplo 2 (Função de Dirichlet). Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in [0, 1]$ um elemento $f(x)$ definido como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é um número irracional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é um número racional} \end{cases},$$

Outro exemplo é a função proposta por A. L. Cauchy (1789-1857) em 1821 ([26], p203), que produz uma infinidade de oscilações ao redor da origem.

Exemplo 3 (Função de Cauchy). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in [0, 1]$ um elemento $f(x)$ definido como:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Tão intrigante quanto as funções de Dirichlet e de Cauchy está a função que estabelece uma bijeção entre o conjunto \mathbb{R} dos números reais e uma parte dele.

Exemplo 4 (O todo e a parte). A função bijetora de números reais, $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, +1[$, associa a cada $x \in]-1, 1[$ um e um único elemento

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \in \mathbb{R}.$$

Como essa função é bijetora, ela estabelece uma correspondência biunívoca entre o intervalo aberto $] - 1, 1[$ e o conjunto dos números reais, ou seja, o número de elementos de \mathbb{R} é o mesmo que o número de elementos de uma parte própria dele, o intervalo $] - 1, 1[$. Isso pode gerar dúvidas ao pensar que o todo, o conjunto \mathbb{R} , é “igual” a uma parte do todo, $] - 1, 1[$, situação nada intuitiva.

Nota-se, nos exemplos anteriores, que se está diante de funções que diferem daquelas estudadas no ensino médio¹⁴. É preciso indicar as raízes que possibilitam a construção de uma matemática apropriada ao Cálculo. Com isso, começa-se a preparar para a aritmetização da matemática, conforme proposto por Felix Klein.

¹⁴No caso das funções expostas nessa seção, aconselha-se que sejam utilizados *softwares de matemática* para auxiliar em seus desenhos. Isso facilitará a visualização do comportamento dessas funções.

3.4. Limites

No livros de Cálculo, nos capítulos iniciais, expõe-se o conceito de limites, normalmente seguindo a ordem de exposição: conjuntos, limites, derivadas e integrais. É uma exposição contrária ao desenvolvimento histórico, haja vista que o conceito de limites começou a ser esboçado por A. L. Cauchy em seu curso na École Polytechnique, Paris, França, [16, 17], quando já havia desenvolvimentos sobre os conceitos de integrais e derivadas ([26], pv).

Segundo Judith V. Grabiner, a utilização do rigor em limites com ε 's e δ 's deu-se primeiramente com Cauchy e depois com K. W. T. Weierstrass [24]. Isso justifica talvez o fato de o assunto limites ocorrer logo no início, nos livros de Cálculo. Mais ainda, segundo F. Klein, ao dizer da importância de limites no teorema do valor médio no Cálculo, escreve:

(...) nós julgamos Cauchy como o fundador do cálculo infinitesimal exato no sentido moderno ([31], p213). (Tradução do autor).

Mas o conceito de limites é abordado, normalmente, nos cursos de Cálculo como se os conceitos de derivadas e integrais fossem “construídos” a partir deles. O que não deixa de ser verdade, pois não há como dizer dos trabalhos de limites de Cauchy sem dizer de continuidade, derivadas e integrais. No entanto, não foi assim na história da matemática, pois derivadas e integrais já existiam antes de Cauchy. Cauchy reformulou apropriadamente esses conceitos com base no conceito de limites.

Os livros [26, 36, 29, 41] contêm discussões sobre a origem desses desenvolvimentos e indicam, por exemplo, que a evolução desse conceito deu-se, entre outros motivos, pela preocupação pedagógica. Frase cunhada também por outros autores, como H. Lebesgue.

Henri Lebesgue, por outro lado, acreditava que Cauchy tinha iniciado seu programa de rigor na matemática principalmente por razões pedagógicas, (...) ([38], px). (Tradução do autor).

O contexto histórico tem sua importância, pois facilita a visualização das dificuldades da construção de novos conceitos. Por exemplo, do conceito de limites tem-se, ainda com Cauchy, o conceito de continuidade, que vai avançar graças à associação entre a “reta real” e o conjunto dos números reais, feita por Dedekind em 1878. A exposição do conceito de limites sem uma contextualização histórica pode gerar um cenário fragmentado, sem uma razão de existência. O conceito de limites e a ideia de aproximação estão muito ligados.

Exemplo 5. O conceito de *vizinhança*, no domínio dos números reais, indica a ideia de aproximação. Ao se analisar o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2},$$

percebe-se que há alguns problemas com relação ao valor $x = 2$ pois, nesse caso, o numerador de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ tende a zero e o denominador também tende a zero. Para analisar esse limite, deve-se analisar o que acontece na vizinhança do número 2, ou seja, para valores de $\delta > 0$ tais que

$x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$ e $x \neq 2$. Se for possível fatorar o numerador e o denominador por $(x - 2)$, então se tem como saber o que acontece na vizinhança de 2. Mais ainda, se for possível retirar “qualquer vestígio” de $(x - 2)$, da expressão $\frac{x^2-4}{x-2}$ será possível entender o que acontece na vizinhança de $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Ou seja, a análise dá-se na vizinhança de $x = 2$, em valores infinitamente próximos de 2. Novamente, os resultados foram obtidos com raciocínio voltado às **q.i.p.**

O conceito de limites é importante, seja para um curso de Cálculo, seja para um curso de Análise, em que as noções de aproximação e aritmética de **q.i.p.** são parte integrante. É conveniente o entendimento do porquê do surgimento de limites, antes de iniciar os “truques” e operações com *limites*. Estima-se, assim, que expressões tais como, para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a - b| < \varepsilon \Rightarrow a = b,$$

sejam mais fáceis de entender.

3.5. Derivadas

O conceito de *derivadas* é *um divisor de águas* na matemática, cujo ponto divisor é o surgimento do **Cálculo**. As implicações das descobertas de I. Newton e G. Leibniz revolucionaram a matemática. Seu surgimento advém da identificação, por parte de Newton e Leibniz, da definição do que eles entendiam, cada um a seu jeito, por **q.i.p.** Isso indica uma releitura singular, da parte deles, de um assunto que vinha sendo discutido desde a Grécia antiga [12, 1], e que em suas mãos impôs uma “revolução” na matemática. No entanto, ao iniciar um curso de Cálculo, toma-se contato com o conceito de derivadas definido a partir de limites. Não se quer dizer que as definições, tais como são apresentadas nos livros, estejam equivocadas. O que se quer dizer é que o contexto histórico deva ser explicado, para que seja possível perceber os motivos dessa “revolução”, pois Newton e Leibniz sequer conheciam o conceito de limites¹⁵, que surgiu mais de um século após a descoberta do Cálculo¹⁶. Se não se aprender com a história da matemática [44], corre-se o risco, no ensino de derivadas, de levantar questionamentos que podem gerar mais confusões que esclarecimentos. Interessantes são, por exemplo, as argumentações do filósofo George Berkeley (1685-1753) sobre os infinitésimos, numa época em que o conceito de limites ainda não havia sido inventado, [7]. O estudo da proposição de G. Berkeley, entre outras, é extremamente rico do ponto de vista educativo, haja vista que se abre espaço para importantes reflexões sobre a existência dos infinitésimos.

¹⁵Não se quer com isso dizer que as “origens” desse conceito não possam se relacionar com o “quociente de Newton”, por exemplo, mas que, tal como é apresentado nos livros, esse conceito difere, em muito, das ideias daquela época. Por exemplo, as ideias presentes nos livros, tais como conjuntos de Cantor, integrais de Riemann, ponto de acumulação, ponto interior etc., não existiam naquela época.

¹⁶Esse é um ponto de extrema importância no Cálculo. Há a “revolução científica,” relacionada à descoberta do conceito de derivadas e integrais (sem utilizar limites) por Newton e Leibniz. Mas há também uma outra “revolução científica” relacionada ao conceito de limites (que reescreve os conceitos de derivadas e integrais), desenvolvido por Cauchy. É muito bem possível dizer que não há matemática sem essas duas revoluções. Ambas as revoluções configuram leituras particulares das **q.i.p.**

Por exemplo, para a função x^2 , com base nos limites seguintes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \Rightarrow \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h}}_{h \neq 0} \Rightarrow \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} (2x+h)}_{h \neq 0 \text{ e } h \rightarrow 0} = 2x,$$

conclui-se que a derivada de x^2 é $2x$. Convém, no entanto, explicar que $h \neq 0$ e que $2x+h \neq 2x$, mas $2x+h$ tende a $2x$ quando h se torna infinitamente pequeno.

A partir de cenários como esse, as discussões sobre problemas mais sofisticados podem ser iniciadas. Um exemplo clássico é o de uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto.

Exemplo 6. A função exposta por K. Weierstrass,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

onde b é um inteiro ímpar e a é tal que $0 < a < 1$ e $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ é uma função no sentido preciso da definição, mas não é possível desenhá-la com lápis e papel (sua construção não é intuitiva) [21, 43]. Além disso, é uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto.

3.6. Integrais

Sob a ótica histórica, o conceito de integral é investigado desde a Grécia antiga, quando cientistas como Arquimedes, Kepler, Cavalieri, Viviani, Fermat, Gregory St.Vincent, Guldin, Gregory, Barrow ocupavam-se com a computação de áreas, superfícies e volumes. A meta era determinar um número que representasse, por exemplo, a área de uma determinada região [26]. Se a região é regular, os métodos clássicos poderiam ser utilizados, tal como os estudantes os utilizam no colégio, com as fórmulas da área de um triângulo, quadrado, círculo, trapézio etc. No entanto, para figuras não regulares, os métodos tradicionais falhavam, sendo necessária a busca por novos processos. É clássico dizer do *método da exaustão* que é o método que consistia na inserção do maior número possível de figuras regulares, na parte interna da região cuja área se pretende calcular, de modo que sua soma levaria a uma aproximação da área da região pretendida. Essas inserções produziam resultados aceitáveis para os padrões da época. Em alguns casos fórmulas “mágicas” eram descobertas, como a de Arquimedes, que identificou como computar a área de um segmento parabólico ([12], p.100), ou seja, a área de uma parábola é $\frac{4}{3}$ da área de um triângulo com mesma base e altura.

Com a invenção do Cálculo, descobre-se também que integral é o processo inverso de derivada. Isso simplifica a busca por áreas, volumes e superfícies. A fórmula¹⁷

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

indica a área da região situada entre a curva $y = f(x)$ e $y = 0$, limitada entre $x = a$ e $x = b$, desde que $f(x) > 0$, por exemplo. Mas, para obter o resultado da integral acima, na época de Newton

¹⁷A notação $\int_a^b f(x)dx$ foi introduzida por J. B. J. Fourier no século XIX.

e Leibniz, fazia-se necessário encontrar uma função F , denominada de primitiva¹⁸ de f , para que o cálculo $F(b) - F(a)$ pudesse ser realizado. Assim, a matemática “heurística” do século XVIII reduz-se, no caso de integrais, à busca por primitivas de funções. Mais ainda, o Cálculo resume-se à palavra *Calculus*, de origem algorítmica. Newton e Leibniz inventam um processo sistemático para calcular inclinação de curvas, taxas de variação, áreas de regiões etc. No entanto, como a história mostrou, eles não sabiam por que esses algoritmos funcionavam [9]. Essa compreensão veio somente no final do século XIX, com a revisão dos fundamentos da matemática [32].

Como nem todas as funções $f(x)$ têm primitivas, nem todas as integrais podem ser calculadas. Sabe-se que uma grande parte das funções elementares, tais como funções polinomiais, funções logarítmicas, exponenciais, trigonométricas etc. são integráveis no sentido de Newton e Leibniz e possuem primitivas, mas funções como e^{-x^2} , $|x|$, não possuem primitivas. Isso significou que novos métodos precisariam ser investigados para que se almejasse aumentar a classe das funções integráveis.

Esclarecer tais incertezas é importante, pois é clássico que resolver uma integral não é simplesmente procurar por uma primitiva. A. Cauchy introduziu o conceito de integrais a partir de limites de somas¹⁹, sem estabelecer, em sua definição, referência às primitivas. Com isso Cauchy expõe sua classe de funções integráveis, mas lança mão das q.i.p. em seus limites. Ou seja, é com essas quantidades, diga-se “infinitésimos”, que Cauchy impõe uma *revolução científica* na matemática ao abordar o conceito de integrais sem relacioná-lo às derivadas e com a utilização de limites. Assim, integrais e derivadas podem ser definidas de modo independente umas das outras, mas acabam por se inter-relacionar via Teorema Fundamental do Cálculo [27, 13, 14]. Cauchy utiliza apenas de funções contínuas em sua definição, mas foi B. Riemann quem aprimorou os trabalhos de Cauchy e forneceu uma primeira abordagem rigorosa sobre a teoria de integração [27].

Convém exibir as definições de função integrável no sentido de Cauchy e no sentido de Riemann para indicar, seguindo o propósito deste artigo, a relevância de uma aritmética de números reais. Utiliza-se da cor vermelha para marcar a diferença entre ambas as definições, e para marcar também a presença das q.i.p. nessas definições. Convém alertar que as definições na sequência são atuais, modernas, mas carregam a ideia conceitual da época de Cauchy e de Riemann.

Definição 1. ([5], pp199-200) Se $I = [a, b]$ é um intervalo fechado limitado em \mathbb{R} , então uma **partição** de I é um conjunto finito, ordenado, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ de pontos em I , tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Os pontos de \mathcal{P} são usados para dividir $I = [a, b]$ em subintervalos disjuntos

$$I_1 = [x_0, x_1] \quad I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Representa-se uma partição de $[a, b]$ por

$$\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n.$$

¹⁸Uma função F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ é dita ser uma primitiva (ou antiderivada) de f em $[a, b]$.

¹⁹Com seu conceito de limites, Cauchy vai além da proposta grega de métodos de exaustão. De certo modo os gregos introduziam figuras regulares à “exaustão”, ou seja, em um número finito, mas que sejam exauridas. Cauchy indica como introduzir figuras regulares à exaustão infinita, no limite. Isso pode indicar uma significativa diferença de pensamento entre os processos gregos e o processo *ad infinitum* de Cauchy.

Se $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ é uma partição de I , então uma **etiqueta** é um ponto $t_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Uma **partição etiquetada** é um conjunto de pares ordenados

$$\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n.$$

Definição 2. Se $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ é uma partição de $[a, b]$, então a **soma de Cauchy** de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente a \mathcal{P} é o número

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Definição 3. Uma **função contínua** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **Cauchy integrável** em $[a, b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se \mathcal{P} é uma partição de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta_\varepsilon$, então

$$|S(f; \mathcal{P}) - L| < \varepsilon.$$

Definição 4. ([5], p200) Se $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ é uma partição etiquetada, então a **soma de Riemann** de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente a $\dot{\mathcal{P}}$ é o número

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definição 5. ([5], p201) Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **Riemann integrável** em $[a, b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição etiquetada de $[a, b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, então

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon.$$

Grosso modo, as alterações entre as definições de Cauchy e de Riemann, além de em Riemann não haver a exigência de função contínua, residem na mudança entre escolher o ponto da esquerda, x_{i-1} , de cada intervalo I na partição \mathcal{P} de Cauchy, para a escolha de um ponto t_i qualquer em cada Intervalo I de uma partição etiquetada $\dot{\mathcal{P}}$ de Riemann. É uma diferença sutil, uma diferença própria do universo das q.i.p. Uma alteração que age também na classe de funções integráveis. Com a definição de Cauchy é possível integrar funções descontínuas em um número finito de pontos, já com a definição de Riemann, torna-se possível integrar funções com um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade.

A classe de funções integráveis, na época de Riemann e até final do século XIX, era inadequada para resolver os problemas deixados por Fourier. H. Lebesgue vai além, introduz um conceito diferente para expandir a classe de funções integráveis, o conceito de medida [3]. No entanto, na época de sua publicação, os trabalhos de Lebesgue foram vistos, inicialmente, com algumas ressalvas pela comunidade acadêmica. O problema é que, nele, as funções descontínuas e aquelas que não têm derivadas, objetos principais nos trabalhos de Lebesgue, eram consideradas como “monstruosidades,” e pairavam dúvidas se essas funções poderiam ser consideradas como objetos matemáticos ([19], p.115). Seria abuso de linguagem dizer que Lebesgue buscou o ápice das q.i.p., e mesmo assim, inicialmente, foi questionado. Mas a história mostrou que grande parte das funções em matemática são funções “esquisitas”, tais como as funções de Cauchy no exemplo 3, ou a função de Dirichlet no exemplo 2, ou ainda aquelas funções que são contínuas e não são diferenciáveis em nenhum ponto, tal como no exemplo 6. A partir daí, com uma teoria de medida e integração, ele

expande a classe das funções integráveis, no final do século XIX e início do XX [27], e resolve os problemas deixados por Fourier, ao analisar problemas de convergência em integrais. Mas, ainda assim, algumas funções falhavam no quesito integrabilidade, o que fez com que J. Kurzweil e R. Henstock [28, 33, 22, 4] desenvolvessem uma nova teoria de integração²⁰, a qual integra uma classe maior de funções, inclusive algumas funções não integráveis, no sentido de Lebesgue. Interessante é que ainda não há uma teoria completa de integração e há ainda problemas abertos a serem resolvidos²¹.

4. Conclusões

O presente artigo destina-se ao ensino de Cálculo tal como exposto em muitos textos sobre ensino, como em [15]. A pedagogia aqui exposta vincula-se não somente à exposição dos aspectos históricos presentes na gênese do descobrimento de um determinado conceito matemático, mas também à contextualização da matemática exposta, evitando as situações em que os fragmentos predominem, conduzindo o leitor a interrogações e incertezas. Pode-se dizer, em breves palavras, segundo as ideias neste artigo, que ensinar Cálculo é ensinar a operacionalizar com uma aritmética de quantidades infinitamente pequenas e entender o funcionamento dos algoritmos presentes no *Calculus*. Neste texto utilizaram-se alguns exemplos que se entende possam ser esclarecedores para a compreensão dessa *nova* aritmética, mas há, com certeza, uma gama de outros exemplos que podem igualmente ser utilizados com o mesmo propósito. Espera-se que, com os dizeres deste artigo, possa haver uma compreensão das nuances dos cursos de Cálculo, e, com isso, ocorram melhorias na captação de conceitos matemáticos e a conseqüente obtenção de resultados educacionais favoráveis ao aprendizado.

É possível perceber também o quanto a matemática e o pensamento científico alteraram-se com a introdução das q.i.p. na matemática. Em síntese, a aritmética do colégio é necessária para o acompanhamento de cursos de Cálculo, mas ela não é suficiente, pois urge que uma aritmética de q.i.p. se faça presente.

Referências

- [1] Alexander, Amir. *Infinitesimal - A teoria matemática que mudou o mundo*. Jorge Zahar Editor Ltda, Rio de Janeiro, 2014.
- [2] Bair, J., Błaszczyk, P., Ely, R., Henry, V., Kanovei, V., Katz, K. U., Katz, M.G., Kutateladze, S.S., McGaffey, T., Schaps, D.M., Sherry, D., Shnider, S. “*Is mathematical history written by the victors?*” *Notices of the AMS*, 60(7), 886-904.
- [3] Bartle, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.
- [4] Bartle, R. G. “*A Modern Theory of Integration*”. Graduate Studies in Mathematics, Volume 32. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.
- [5] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R. *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition, Wiley India Edition, New Delhi, 2011.

²⁰O livro de Jean Mawhin [37] trata de integrais de Henstock-Kurzweil, ou Gauge integrais, como também são conhecidas.

²¹<https://math.vanderbilt.edu/schectex/cc/gauge/> (acessado no dia 28 de setembro de 2019 às 18:26).

- [6] Belna, Jean-Pierre. *Cantor*. Figuras do Saber. Tradução Guilherme João de Freitas Teixeira, Revisão Técnica Michel Paty. Editora Estação Liberdade, São Paulo, 2011.
- [7] Berkeley, G. *The analyst: or a discourse addressed to an infidel mathematician. Wherein it is examined whether the object, principles, and inferences of modern analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious mysteries and points of faith*. London: printed for J. Tonson, 1734.
- [8] Bicudo, Irineu. *Os Elementos - Euclides*. Tradução de Irineu Bicudo. Editora Unesp, Rio Claro, 2009.
- [9] Boas Jr., R. P. "Calculus as an experimental science." *The American Mathematical Monthly*, v. 78, n. 6, pp.664-667, 1971.
- [10] Boolos, G. S.; Jeffrey, R. C. *Computability and Logic*. Third Edition, Reprinted, Cambridge University Press, 1999.
- [11] Bottazzini, Umberto. *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag, Inc., 1986.
- [12] Boyer, C. B. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide (IME/USP), 9a Reimpressão. Ed. Edgard Blücher Ltda, 1991. (original: *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc. 1968)
- [13] Bressoud, David M. *A radical approach to real analysis*. Vol. 2. Mathematical Association of America, 2007.
- [14] Bressoud, David M. *A radical approach to Lebesgue's theory of integration*. Cambridge University Press, 2008.
- [15] Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. "Teaching and Learning of Calculus". In: *Teaching and Learning of Calculus*. Springer International Publishing, 2016. pp.1-37.
- [16] Cauchy, Augustin Louis. *Cours d'analyse (Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. 1^{re} partie: analyse algébrique*. Paris, 1821.
- [17] Cauchy, Augustin Louis. *Calcul infinitésimal (Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal)*. Vol. 1. Imprimerie Royale, Paris, 1823.
- [18] Cutland, N. *Computability*. Cambridge, London. 1980.
- [19] Van Dalen, D.; Monna, A.F. *Sets and integration - An outline of the development*. Wolters-Noordhoff Publishing. Groningen, The Netherlands. 1972.
- [20] Dedekind, Richard. *Essays on the theory of numbers-Continuity and Irrational Numbers-The Nature and Meaning of Numbers*, The Open Court Publishing Company, 1901 (first publication). Dover Publications, 1963, 2010.
- [21] Gelbaum, B.R., Olmsted, J. M. H. *Counterexamples in Analysis*. Dover Publications, New York, 1964.
- [22] Gordon, Russell A. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. No. 4. American Mathematical Society, 1994.
- [23] Grabiner, Judith V. *The Origin of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover Publications, Inc., New York, 1981.

- [24] Grabiner, Judith V. “Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 91, pp.185-194, 1983.
- [25] Fourier, Joseph. *Théorie analytique de la Chaleur*, Firmin-Didot père et fils, Paris, 1822. Facsimile, Ed. Jacques Gabay, Paris, 1988. Em inglês, *The Analytical Theory of Heat*. Dover Publications. Tradução de Alexander Freeman em 1878. Originalmente publicado em 1822, 2003.
- [26] Hairer, E.; Wanner, G. *Analysis by Its History*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [27] Hawkins, T. *Lebesgue’s theory of integration. Its origins and development*. 2nd edition, Chelsea Pub. Co., New York, 1975.
- [28] Henstock, Ralph. *Theory of integration*. Butterworths, 1963.
- [29] Jahnke, H. N., *A History of Analysis*, History of Mathematics, Volume 24, American Mathematical Society, 2003.
- [30] Klein, Felix. *Ueber Arithmetisierung der Mathematik. Göttinger Nachrichten* (Geschäftliche Mittheilungen), 1895, p.82. (The arithmetizing of mathematics. Miss Maddison’s translation in the Bulletin, 2d series, vol. 2, p.241, 1896), 1895
- [31] Klein, Felix. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry*. Dover Publications, New York, 2004.
- [32] Kline, Morris. *Les fondements des mathématiques. La recherche*, v. 54, pp.200-208, 1975.
- [33] Kurzweil, Jaroslav. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*. Czechoslovak Mathematical Journal 7.3: 418-449, 1957.
- [34] Lebesgue, Henri Léon. *Intégrale, Longueur, Aire*. 134f. Le Grade de Docteur és Sciences Mathématiques (30 de junho de 1902), Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1902.
- [35] Lebesgue, H. L. *Measure and the Integral*. San Francisco, Holden-Day, 1966.
- [36] Lützen, Jesper, *The foundation of analysis in the 19th century*. Hans Niels Jahnke, (ed.), *A History of Analysis*, chap. 6, Amer. Math. Soc., 2003, pp.155-195.
- [37] Mawhin, Jean. *Analyse: fondements, techniques, évolution*. De Boeck Université, Brussels, 1992. Second edition, 1997.
- [38] Phillips, Esther R. *A Introduction to Analysis and Integration Theory*. Dover Publications, New York, 1984.
- [39] Pierpont, James. *On the arithmetization of mathematics*. Bulletin of the American Mathematical Society, v. 5, n. 8, pp.394-406, 1899.
- [40] Russ, S. B. *A translation of Bolzano’s paper on the Intermediate Value Theorem*. *Historia Mathematica*, v.7, n.2, pp.156-185, 1980.
- [41] Schubring, Gert. *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-19th Century France and Germany*. Springer-Verlag, 2005.
- [42] Toeplitz, Otto. *The Calculus — A Genetic Approach*. Chicago University Press, Chicago, 2007.
- [43] Van Vleck, E. B. *The Influence of Fourier series on the development of mathematics*. *Science* 39, 113-124, 1914.
- [44] Weil, A. 1978. “History of Mathematics: Why and How?” *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki. Vol. 1, 227-236.

- [45] Wilcox, H. J., Myers, D. L. *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*. Dover Publications, New York, 1978.

José Carlos Magossi
Faculdade de Tecnologia - FT
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
<magossi@ft.unicamp.br>

Recebido: 04/11/2019
Publicado: 03/02/2020

Sobre um novo método de inversão de matrizes de Vandermonde para solução de recorrências lineares homogêneas de ordem superior

Lucas S. C. de Sá

Elen V. P. Spreafico

Resumo

Este artigo apresenta um estudo sobre a resolução de recorrências lineares homogêneas de ordem superiores cujo polinômio característico associado possui raízes simples, abordando o método tradicional e um novo método já publicado envolvendo o que advém das sequências de Fibonacci generalizadas, na obtenção direta da inversa da matriz de Vandermonde, matriz essa dada no sistema linear associado a recorrência. Apresentaremos como aplicação a resolução de problemas existentes na literatura com recorrências de ordem 2 associados, fazendo um comparativo de ambos os métodos de resolução.

Palavras-chave: Relação de Recorrências; Termo Geral; Sequências de Fibonacci Generalizadas; Aplicações.

Abstract

This article presents a study on the resolution of homogeneous linear recurrences of higher order whose associated characteristic polynomial has simple roots, addressing the traditional method and a new method already published involving results of generalized Fibonacci sequences, in obtaining the inverse of the Vandermonde matrix, associated with the recurrence. We will present as an application the solution of problems existing in the literature, associated with recurrences of order 2, making a comparison of both methods.

Keywords: Linear Recurrence; Vandermonde Matrix; Generalized Fibonacci Sequences; General Term of Sequences.

1. Introdução

A palavra recursão remete ao século 19, no desenvolvimento formal de funções. Datado em 1888, a recursão teve uso por Dedekind [5] para obter funções que precisava na formalização analítica dos conceitos de número natural. Em 1923, Skolem utilizou a ideia de recursão para definir funções básicas na lógica. A ideia de sequências em que termos posteriores são deduzidos a partir dos anteriores existe desde a antiguidade, fato nótório nos métodos de indução e aproximação.

Desde 1600 tem-se como ideia clara sequências de inteiros definidas através de recursão, as relações de recorrência de inteiros. Com o processo de formalização da linguagem matemática no fim do século 19 e começo do século 20, elas puderam ser exploradas, e ainda continuam sendo estudadas.

Resolver uma recorrência consiste em encontrar uma função ou família de funções que dependam somente de n satisfazendo a recorrência. Na literatura existem vários métodos de resolução de uma recorrência levando em conta suas características: ordem linear, não linear, homogênea e não homogênea. Os casos mais básicos são as recorrências advindas das progressões aritméticas e geométricas, essas vistas no ensino básico.

O fato mais interessante é que, dadas as condições iniciais, a resolução de uma recorrência de ordem superior recai na resolução de um sistema linear associado à matriz de Vandermonde. Diante desse fato, neste artigo retomamos o método tradicional e apresentamos um método diferente do tradicional que resolve o sistema linear através da obtenção direta dos termos da matriz inversa de Vandermonde, e, assim, resolve o sistema.

Inicialmente introduzimos as sequências de Fibonacci generalizadas e discorreremos sobre ambos os métodos, tradicional e novo, este que chamaremos método BenTaher-Rachidi, para resolução de uma recorrência linear homogênea de ordem superior com polinômio característico associado com raízes simples. Em seguida são apresentadas aplicações com resolução de exemplos de recorrência linear de ordem 2 em ambos os métodos para um comparativo.

2. Aspectos Teóricos

Nesta seção, alguns conceitos fundamentais de relação de recorrência são apresentados, como também os métodos mais tradicionais de resolução e um novo método que não é amplamente divulgado na literatura, e que será chamado de método de BenTaher-Rachidi. Mais detalhes a respeito desses métodos podem ser encontrados nas referências [2] e [4].

Definição 1 (Sequência de Fibonacci generalizada). Dadas as constantes a_0, a_1, \dots, a_{r-1} , com $a_{r-1} \neq 0$, e V_0, V_1, \dots, V_{r-1} no corpo dos números reais ou complexos, a sequência $(V_n)_{n \geq 0}$ ao ser representada pela relação de recorrência linear homogênea de ordem r ,

$$V_{n+1} = a_0 V_n + \dots + a_{r-1} V_{n-r+1}, \quad (1)$$

para $n \geq r - 1$, é chamada de **sequência generalizada de Fibonacci** [1].

Exemplo 1.

a) A relação de recorrência de ordem 2 com coeficientes $a_0 = 1, b_0 = 1$ e $V_0 = 1, V_1 = 3$ é descrita por $V_{n+1} = V_n + V_{n-1}$ e é conhecida como **sequência de Lucas**.

b) A relação de recorrência de ordem 2 com coeficientes $a_0 = 1, b_0 = 1$ e $V_0 = 1, V_1 = 1$ é descrita por $V_{n+1} = V_n + V_{n-1}$ e é conhecida como **sequência de Fibonacci**.

Ambos os exemplos citados anteriormente são sequências generalizadas de Fibonacci. Note que apesar das duas sequências serem descritas pela mesma relação de recorrência, a constante V_1 é diferente em cada caso, gerando sequências distintas.

Definição 2 (Polinômio característico). Dada uma relação de recorrência homogênea de ordem r , $V_{n+1} = a_0 V_n + \dots + a_{r-1} V_{n-r+1}$, o polinômio,

$$p(z) = z^r - a_0 z^{r-1} - \dots - a_{r-2} z - a_{r-1}, \quad (2)$$

é chamado de **polinômio característico** da relação de recorrência V_n com raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ e respectivas multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_s .

Exemplo 2.

a) O polinômio característico da relação de recorrência homogênea de ordem dois, $V_{n+1} = -V_n + 2V_{n-1}$, é dado por $p(z) = z^2 + z - 2$ e apresenta como raízes $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$, ambos com multiplicidade um, $m_1 = m_2 = 1$.

b) O polinômio característico da relação de recorrência homogênea de ordem três, $V_{n+1} = -V_n + 5V_{n-1} - 3V_{n-2}$, é dado por $p(z) = z^3 + z^2 - 5z + 3$ e apresenta como raízes $\lambda_1 = 1$, com multiplicidade dois, $m_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, com multiplicidade um, $m_2 = 1$.

Note que a ordem da recorrência sempre coincide com o grau do polinômio.

Métodos de resolução de uma recorrência

Resolver uma recorrência consiste em encontrar uma função ou família de funções que dependam somente de n e satisfaçam a relação de recorrência em questão.

As recorrências lineares homogêneas podem ser resolvidas por diferentes métodos. Nesse artigo, a primeira abordagem consiste em determinar as raízes do polinômio característico e suas constantes através de um sistema linear, método clássico esse frequentemente estudado nos cursos de matemática. Essa abordagem será referida como método tradicional, em comparativo com o novo método apresentado no artigo [4], nomeado aqui de método de BenTaher-Rachidi.

2.1. Método tradicional

Para resolver relações de recorrência linear como a apresentada em (1), é amplamente utilizada a fórmula,

$$V_n = \sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \beta_{i,j} n^j \right) \lambda_i^n, \tag{3}$$

para $n \geq 0$, em que $\beta_{i,j}$ são coeficientes determinados através de um sistema linear de r equações que se utiliza como condição de contorno os coeficientes $(V_j)_{0 \leq j \leq r-1}$, e s é a quantidade de raízes distintas do polinômio característico da recorrência dada.

Exercício 1. *Determine uma expressão para a relação de recorrência $V_{n+1} = -2V_n + 3V_{n-1}$, sabendo que $V_0 = 1$ e $V_1 = 3$.*

Solução:

O polinômio característico da recorrência será dado por $p(z) = z^2 + 2z - 3$, com $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 1$ e ambos com multiplicidade um, $m_1 = m_2 = 1$.

Utilizando a fórmula 3, obtemos as equações

$$\begin{cases} V_n = \beta_{1,0} \lambda_1^n + \beta_{2,0} \lambda_2^n \\ V_n = \beta_{1,0} (1)^n + \beta_{2,0} (-3)^n. \end{cases}$$

Montando o sistema linear utilizando as condições de contorno $V_0 = 1$ e $V_1 = 3$, obtemos

$$\begin{cases} \beta_{1,0} + \beta_{2,0} = 1 \\ \beta_{1,0} - 3\beta_{2,0} = 3 \end{cases}$$

Ao resolver o sistema linear, $\beta_{1,0} = \frac{3}{2}$ e $\beta_{2,0} = -\frac{1}{2}$. Com isso, a solução da recorrência é dada pela família $V_n = \frac{3}{2} - \frac{(-3)^n}{2}$.

2.2. Método BenTaher-Rachidi

Note que o sistema linear a ser resolvido para determinar as constantes $\beta_{i,j}$, para os casos em que o polinômio característico da recorrência (1) apresenta apenas raízes simples, é dado por,

$$\begin{cases} \beta_{1,0} + \beta_{2,0} + \dots + \beta_{r,0} = V_0 \\ \lambda_1\beta_{1,0} + \lambda_2\beta_{2,0} + \dots + \lambda_r\beta_{r,0} = V_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{r-1}\beta_{1,0} + \lambda_2^{r-1}\beta_{2,0} + \dots + \lambda_r^{r-1}\beta_{r,0} = V_{r-1}. \end{cases} \quad (4)$$

Definição 3 (Matriz de Vandermonde). Dada uma matriz quadrada em que cada coluna (ou linha) é uma progressão geométrica onde o primeiro termo é 1, esse tipo de matriz é chamado de **matriz de Vandermonde**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_m^m \end{bmatrix}.$$

Com isso, o sistema linear (4) pode ser escrito como $Ax = b$, em que A é uma matriz de Vandermonde, x é o vetor das incógnitas $\beta_{i,0}$ e b é vetor das condições de contorno da recorrência.

No artigo de BenTaher-Rachidi [4] é mostrada uma técnica para encontrar os coeficientes $\beta_{i,0}$, e conseqüentemente a solução da recorrência (1), sem necessidade de recorrer à resolução de um sistema linear para os casos em que A é uma matriz de Vandermonde. Com isso, a solução de uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico tenha apenas raízes simples é dada pela equação,

$$V_n = \sum_{i=1}^r \frac{1}{p'(\lambda_i)} \left(\sum_{p=0}^{r-1} \frac{A_p}{\lambda_i^{p+1}} \right) \lambda_i^n, \quad (5)$$

para $n \geq r$, onde $A_p = a_{r-1}V_p + \dots + a_pV_{r-1}$.

Note que essa abordagem não requer a resolução de um sistema linear como é exigido ao utilizar o método tradicional.

Exercício 2. Determine uma expressão para a relação de recorrência $V_{n+1} = 3V_n - 2V_{n-1}$, sabendo que $V_0 = 1$ e $V_1 = 2$.

Solução:

O polinômio característico da recorrência será dado por $p(z) = z^2 - 3z + 2$, com $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ e ambos com multiplicidade um, $m_1 = m_2 = 1$. Com isso é possível aplicar o método BenTaher-Rachidi e a solução da recorrência será dada pela fórmula (5),

$$V_n = \frac{1}{p'(\lambda_1)} \left(\frac{A_0}{\lambda_1^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_1^{1+1}} \right) \lambda_1^n + \frac{1}{p'(\lambda_2)} \left(\frac{A_0}{\lambda_2^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_2^{1+1}} \right) \lambda_2^n.$$

Precisamos determinar as constantes A_p e $p'(\lambda_i)$. De fato,

$$A_0 = a_1 V_0 + a_0 V_1 \Rightarrow A_0 = -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \Rightarrow A_0 = 4$$

$$A_1 = a_1 V_1 \Rightarrow A_1 = -2 \cdot 2 \Rightarrow A_1 = -4.$$

Derivando o polinômio $p(z)$, $p'(z) = 2z - 3$, logo $p'(1) = -1$ e $p'(2) = 1$. E, portanto, substituindo na equação obtida de (5), obtemos $V_n = 2^n$.

3. Aplicações

Nesta seção são abordados dois problemas conhecidos que podem ser descritos por recorrência, e ambos são solucionados utilizando os dois métodos, mostrando que é possível chegar na mesma solução independentemente do método utilizado.

Problema 1 (Sequência de Fibonacci) *Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?*

O problema descrito pode ser visto como apresentado na figura 1.

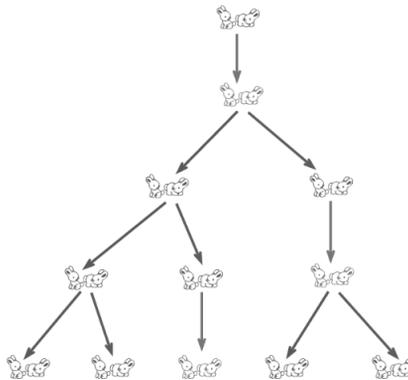


Figura 1: Representação do problema 1 ao se passar 4 meses [3].

Chamando de F_n a quantidade de pares de coelhos ao se passarem n meses, pode-se afirmar que $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

Para $n \geq 2$, note que o problema em questão pode ser modelado por uma relação de recorrência. No n -ésimo mês terá um total de F_n coelhos, sendo que todos os recém-nascidos não poderão reproduzir no mês seguinte, ou seja, somente os coelhos nascidos no mês anterior, F_{n-1} , poderão reproduzir.

Dessa forma, no mês seguinte o total de coelhos será igual à quantia de coelhos existentes no mês n mais a quantia de coelhos que nasceram dos coelhos já vivos no mês $n - 1$, sendo possível gerar a recorrência,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Assim, o problema em questão pode ser simplesmente resolvido calculados os termos da recorrência até que se encontre o número de coelhos ao se passarem doze meses, F_{12} .

Montando a sequência, $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots)$, percebe-se que $F_{12} = 233$, ou seja, podem ser gerados um total de 233 coelhos dentro de um ano.

Podemos generalizar a solução desse problema obtendo uma fórmula fechada para F_n ao resolver sua relação de recorrência pelos métodos apresentados previamente.

a) Método tradicional:

O polinômio característico da expressão acima será dado por $p(z) = z^2 - z - 1$, que apresenta como raízes $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e respectivas multiplicidades $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Sendo assim, a relação de recorrência ao se utilizar a fórmula (3) será dada por

$$F_n = \beta_{1,0}\lambda_1^n + \beta_{2,0}\lambda_2^n,$$

faltando determinar as constantes $\beta_{1,0}$ e $\beta_{2,0}$.

Resolvendo o sistema linear,

$$\begin{cases} \beta_{1,0} + \beta_{2,0} = 1 \\ \lambda_1\beta_{1,0} + \lambda_2\beta_{2,0} = 1, \end{cases}$$

obtêm-se, $\beta_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ e $\beta_{2,0} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Com isso, a solução da recorrência é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

b) Método BenTaher-Rachidi:

Utilizando o mesmo polinômio característico que o apresentado no item *a*), derivando p obtemos o polinômio $p'(z) = 2z - 1$ e podemos calcular $p'(\lambda_1)$ e $p'(\lambda_2)$.

Utilizando as condições de contorno podemos calcular $A_1 = a_1V_1$ e $A_2 = a_1V_2 + a_2V_1$, onde $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$, dados pelos coeficientes da relação de recorrência. Com isso, utilizando a fórmula (5), a recorrência é dada por,

$$F_n = \frac{1}{p'(\lambda_1)} \left(\frac{A_0}{\lambda_1^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_1^{1+1}} \right) \lambda_1^n + \frac{1}{p'(\lambda_2)} \left(\frac{A_0}{\lambda_2^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_2^{1+1}} \right) \lambda_2^n.$$

Substituindo os valores obtidos previamente e manipulando a equação, é possível escrever a recorrência como

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right],$$

obtendo o mesmo resultado que quando utilizado o método tradicional.

Problema 2 (Análise combinatória) *Quantas são as seqüências de n termos, todos pertencentes a $\{0,1,2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?*

Note que esse problema não é facilmente solucionado utilizando apenas as ferramentas mais simples de análise combinatória, no entanto ele pode ser modelado por uma recorrência como mostrado em seguida.

Seja S_{n+1} o total de seqüências de $n+1$ termos que satisfaz as condições dadas do problema. Dada uma seqüência de n termos, sempre é possível gerar uma seqüência de $n+1$ termos adicionando o algarismo 1 ou 2 no início da seqüência. Com isso, pelo princípio multiplicativo, é possível gerar $2 \cdot S_n$ seqüências.

Suponha agora que as seqüências de $n+1$ termos são iniciadas com o algarismo 0. Como o problema não permite que se tenha dois algarismos 0 em seqüência, o seguinte deve ser 1 ou 2, seguido de $n-1$ algarismos. E, pelo princípio multiplicativo, podem ser formadas $2 \cdot S_{n-1}$ seqüências.

Por fim, utilizando o princípio aditivo, modelamos o problema pela relação de recorrência,

$$S_{n+1} = 2S_n + 2S_{n-1}.$$

Para resolver essa relação de recorrência, que é de ordem 2, precisam-se determinar duas condições de contorno. Para isso, basta resolver os casos S_1 e S_2 , que são facilmente encontrados ao se montar seus espaços amostrais.

Ao se utilizar um termo, as seqüências que satisfazem o enunciado são (0), (1), (2), ou seja, $S_1 = 3$. Já para as seqüências de dois termos, o espaço amostral é dado por (01), (02), (10), (11), (12), (20), (21), (22), ou seja, $S_2 = 8$.

Com isso, é possível resolver utilizando os métodos apresentados previamente.

a) Método tradicional:

O polinômio característico da expressão acima será dado por $p(z) = z^2 - 2z - 2$ que apresenta como raízes $\lambda_1 = 1 - \sqrt{3}$ e $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$ e respectivas multiplicidades $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$. Note que para $n = 0$ o problema não faz sentido, com isso vamos alterar a fórmula (3) de forma que possam ser utilizados S_1 e S_2 como condição de contorno. Assim, a equação é dada por

$$S_n = \beta_{1,1}\lambda_1^n + \beta_{2,1}\lambda_2^n,$$

faltando determinar as constantes $\beta_{1,1}$ e $\beta_{2,1}$.

Resolvendo o sistema linear,

$$\begin{cases} \lambda_1\beta_{1,1} + \lambda_2\beta_{2,1} = 1 \\ \lambda_1^2\beta_{1,1} + \lambda_2^2\beta_{2,1} = 1, \end{cases}$$

obtêm-se $\beta_{1,1} = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$ e $\beta_{2,1} = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$.

Com isso, a solução da recorrência é dada por,

$$S_n = \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\right)(1-\sqrt{3})^n + \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)(1+\sqrt{3})^n.$$

b) Método BenTaher-Rachidi:

Utilizando o mesmo polinômio característico que o apresentado no item *a*), derivando p obtemos o polinômio $p'(z) = 2z - 2$ e podemos calcular $p'(\lambda_1)$ e $p'(\lambda_2)$.

Utilizando as condições de contorno $V_0 = S_1 = 3$ e $V_1 = S_2 = 8$ para calcular $A_1 = a_1 V_1$ e $A_0 = a_1 V_0 + a_0 V_1$, onde $a_0 = 2$ e $a_1 = 2$, são dados pelos coeficientes da relação de recorrência:

$$A_0 = a_1 V_0 + a_0 V_1 \Rightarrow A_0 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \Rightarrow A_0 = 22,$$

$$A_1 = a_1 V_1 \Rightarrow A_1 = 2 \cdot 8 \Rightarrow A_1 = 16.$$

Com isso, utilizando a fórmula (5), a recorrência é dada por

$$V_n = \frac{1}{p'(\lambda_1)} \left(\frac{A_0}{\lambda_1^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_1^{1+1}} \right) \lambda_1^n + \frac{1}{p'(\lambda_2)} \left(\frac{A_0}{\lambda_2^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_2^{1+1}} \right) \lambda_2^n.$$

Substituindo os valores obtidos previamente e manipulando a equação, é possível escrever a recorrência como

$$V_n = \left(\frac{9 - 5\sqrt{3}}{6} \right) (1 - \sqrt{3})^n + \left(\frac{9 + 5\sqrt{3}}{6} \right) (1 + \sqrt{3})^n.$$

Note que a equação obtida utilizando a fórmula de BenTaher-Rachidi é válida para $n \geq 0$, enquanto a fórmula obtida no item *a*) só faz sentido para $n \geq 1$. Apesar das fórmulas aparentarem levemente diferentes, pode-se provar que $V_n = S_{n+1}$. De fato,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} \right) (1 - \sqrt{3})^{n+1} + \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \right) (1 + \sqrt{3})^{n+1}, \\ \Rightarrow S_{n+1} &= \left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} \right) (1 - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})^n + \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \right) (1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})^n, \\ \Rightarrow S_{n+1} &= V_n = \left(\frac{9 - 5\sqrt{3}}{6} \right) (1 - \sqrt{3})^n + \left(\frac{9 + 5\sqrt{3}}{6} \right) (1 + \sqrt{3})^n, \\ &\Rightarrow S_{n+1} = V_n. \end{aligned}$$

Logo, ambas são soluções da mesma recorrência, como esperado.

4. Considerações finais

Como visto, os dois métodos são simples de ser aplicados e podem ser utilizados para resolver problemas de recorrências lineares homogêneas de qualquer ordem superior com raízes simples. Apesar do método de BenTaher-Rachidi não ser ensinado em cursos de matemática, seu uso para solução de recorrências como as vistas é tão simples quanto o método tradicional, exigindo apenas

conhecimento da derivada e outras operações básicas de polinômios, tornando-se uma alternativa para a resolução tradicional amplamente divulgada na literatura.

O mesmo comparativo pode ser descrito para os casos onde as raízes possuem multiplicidade. No entanto, o método BenTaher-Rachidi torna-se mais complexo, o que não o faz muito interessante senão manipulado computacionalmente. Somente um fato a ser discutido ainda é se, computacionalmente, o novo método BenTaher-Rachidi pode ser aplicado com resultados melhores que os já vistos na literatura. Utilizando exemplos clássicos, a resposta para essa pergunta parece não ser positiva, mas isso não retira o fato de o novo método ser uma alternativa interessante aos cálculos clássicos.

Referências

- [1] Alves, F. R. V. “*Sequência Generalizada de Fibonacci e Relações com o Número Áureo*”. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 2, nº 6, p. 30-36, 2015.
- [2] Carvalho, C. P. C., Morgado, A. C. O. *Matemática Discreta*. Sociedade Brasileira de Matemática, Brasil, 2015.
- [3] Pinho, A. *O problema dos coelhos*. <https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos>, acesso em 28/04/2019.
- [4] Taher, R. B., Rachidi, M. “*Solving some generalized Vandermonde systems and inverse of their associate matrices via new approaches for the Binet formula*”. *Applied Mathematics and Computation* Volume 290, 1 November 2016, Pages 267-280 , v. 290, p. 267-280, 2016.
- [5] Wolfram, S. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Champaign, IL, 2002. <https://www.wolframscience.com>, acesso em 24/04/2019.

Lucas S. C. de Sá
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
<lucas.zth@gmail.com>

Elen V. P. Spreafico
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Instituto de Matemática
<elen.spreafico@ufms.br>

Recebido: 17/06/2019
Publicado: 03/02/2020

Um método alternativo para o cálculo de determinantes

Jadielson Silva de Oliveira

Luiz Antônio da Silva Medeiros

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma relação surpreendente entre o determinante de uma matriz A de ordem $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ com um determinante de uma matriz de ordem 2, cujas entradas consistem de menores da matriz A . Essa relação permite estabelecer um método alternativo ao Desenvolvimento de Laplace para o cálculo do determinante de A . Um caso particular dessa relação pode ser enunciando da seguinte forma: se $A = [a_{i,j}]$ é uma matriz de ordem n e $m_{i,j}$ é o **menor** da matriz A associado ao ij -ésimo elemento $a_{i,j}$ de A , então vale a seguinte relação:

$$\det(A) \cdot \det(\Delta) = \det \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,n} \end{bmatrix},$$

onde Δ é a submatriz de A , de ordem $n - 1$, obtida de A eliminando-se a primeira e última linhas e primeira e última colunas de A .

Palavras-chave: Determinante. Menor. Matriz.

Abstract

In this work, we present a surprising relationship between the determinant of a matrix A of order $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ with a determinant of a matrix of order 2, whose entries consist of minors of matrix A . This relationship allows the establishment of an alternative method to Laplace's development to calculate the determinant of A . A particular case of this relationship can be stated as follows: if $A = [a_{i,j}]$ is a matrix of order n and $m_{i,j}$ is the **minor** of matrix A associated with the ij -th element of A , then the following relation holds:

$$\det(A) \cdot \det(\Delta) = \det \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,n} \end{bmatrix},$$

where Δ is the submatrix of A , of order $n - 1$, obtained from A by eliminating the first and last lines and first and last columns of A .

Keywords: Determinant. Minor. Matrix.

1. Introdução

A busca pela excelência no ensino e aprendizagem nas escolas de educação básica tem sido objeto de muita reflexão. Visando um ensino de qualidade e a melhoria dos índices escolares brasileiros, o governo estabelece diretrizes pedagógicas para os professores a partir de uma Base Nacional Comum Curricular [2] e propõe algumas orientações pedagógicas descritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais [3].

Entre as estratégias descritas nesses documentos para o ensino de matemática, destacamos o uso de tecnologias como recurso potencializador da aprendizagem. Os computadores, por exemplo, podem ser utilizados para trabalhar habilidades tais como formular hipóteses, estabelecer e validar conjecturas, prever resultados, distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos e produzir argumentos convincentes.

Segundo os PCNs, o computador deve ser considerado uma ferramenta que pode auxiliar no ensino e aprendizado da matemática, onde a ênfase está na formação e construção do conhecimento, em que “se aprende a conhecer, aprendendo a fazer e refletindo sobre esse fazer”.

“O uso do computador é, ao mesmo tempo, uma ferramenta e um instrumento de mediação. É uma ferramenta porque permite ao usuário realizar atividades que, sem ele, seriam muito difíceis ou mesmo impossíveis. É um instrumento de mediação na medida em que possibilita o estabelecimento de novas relações para a construção do conhecimento e novas formas de atividade mental. O uso do computador possibilita a interação e a produção de conhecimento no espaço e no tempo: A incorporação de computadores no ensino não deve ser apenas a informatização dos processos de ensino já existentes, pois não se trata de aula com “efeitos especiais”. O computador permite criar ambientes de aprendizagem que fazem surgir novas formas de pensar e aprender”¹ (PCN, pp. 146 e 147)

Diante dessa perspectiva, em [4] utilizamos o computador para analisar alguns padrões envolvendo matrizes e determinantes. Para tanto, fizemos uso do *software* máxima¹, que permite a manipulação algébrica e simbólica de variáveis. Como resultado obtivemos uma relação surpreendente envolvendo o determinante de uma matriz, ao qual denominamos *método alternativo para o cálculo de determinantes* e passamos a descrever na próxima Seção.

2. Método Alternativo para o Cálculo de Determinantes

Quando pensamos em uma matriz quadrada, logo a associamos ao cálculo do seu determinante. Um número que indica se a matriz é ou não invertível e ajuda a obter soluções de sistemas lineares, bem como sua classificação quanto ao número de soluções. Além disso, o determinante está associado ao cálculo de área de figuras planas [6] e cálculo de volumes de sólidos tridimensionais [5] ou [7], sendo portanto um tema bem atraente do ponto de vista de pesquisa escolar.

Apesar de o determinante de uma matriz estar associado a aplicações práticas, inclusive com interpretações geométricas compreensíveis, o tema não atrai empatia dos alunos por envolver cálculos enormes e cansativos e aplicações desprovidas de significados. Pior ainda, são apresentadas várias

¹<http://maxima.sourceforge.net/>

técnicas para se calcular o determinante de matrizes de ordens 3 que não servem para matrizes de ordem superiores, o que pode induzir o aluno ao erro.

Diante do exposto e almejando utilizar o computador em sala de aula para desenvolver atividades de investigação científica com um *software* capaz de manipular expressões simbólicas, deparamo-nos com uma propriedade de determinantes surpreendente. Para compreender essa propriedade, vamos considerar um caso particular, $n = 3$.

Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Quando selecionamos as submatrizes de A , de ordem 2, que destacam os “cantos” da matriz A , e observamos as quatro submatrizes, notamos um elemento em comum (Figura 1), o elemento $a_{2,2}$. O que gostaríamos de investigar é como esse elemento relaciona-se com os determinantes dessas quatro submatrizes.

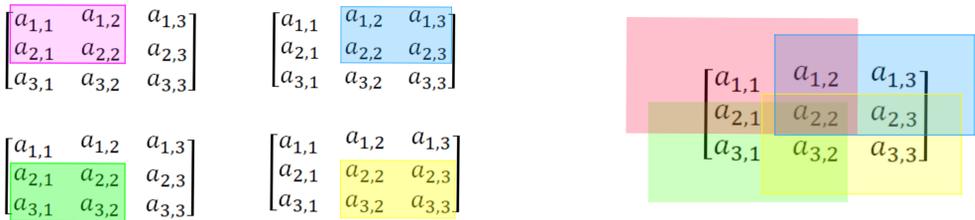


Figura 1: Submatrizes de ordem 2 que destacam os “cantos” da matriz A .

Ao definirmos as matrizes

$$M_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{1,2} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$M_{2,1} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{2,2} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

e operarmos com os seus determinantes, percebemos que a expressão

$$\det(M_{1,1}) \cdot \det(M_{2,2}) - \det(M_{1,2}) \cdot \det(M_{2,1}) \tag{2}$$

pode ser expressa como

$$a_{2,2} \cdot (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}). \tag{3}$$

Ora, a equação (2) é exatamente o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} \det(M_{1,1}) & \det(M_{1,2}) \\ \det(M_{2,1}) & \det(M_{2,2}) \end{bmatrix},$$

enquanto que o fator multiplicativo do termo $a_{2,2}$ em (3) é o determinante da matriz A . Ou seja,

$$\det(M) = a_{2,2} \cdot \det(A). \quad (4)$$

A igualdade (4) não só é interessante do ponto de vista de que podemos calcular o determinante de A se $a_{2,2} \neq 0$, mas porque o método estende-se a matrizes de ordens mais elevadas, permitindo estabelecer um método mais natural do que aquele conhecido como “regra de Sarrus”. Além disso, através das propriedades de determinantes que envolvem permutações de linhas e colunas da matriz, o método torna-se viável quando ao menos um elemento da matriz é não nula (uma submatriz tem determinante não nulo).

Além disso, a propriedade estabelece que para obter o determinante de uma matriz de ordem n são necessários apenas quatro determinantes de ordem $(n-1)$ e um determinante de ordem $(n-2)$, bem menor do que os n determinantes de ordem $n - 1$ utilizados pelo Desenvolvimento de Laplace em relação a uma linha ou coluna da matriz.

3. Resultados principais

Dado $n \in \mathbb{N}$ um número natural, escrevemos I_n para representar o conjunto dos números naturais compreendidos entre 1 e n , ou seja, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Se I é um subconjunto de I_n , o conjunto $I_n \setminus I$ representará a diferença entre os conjuntos I_n e I , isto é

$$I_n \setminus I = \{x : x \in I_n \text{ e } x \notin I\}.$$

No que segue, sejam $I, J \subset I_n$, subconjuntos distintos, com $n - 1$ elementos ordenados de forma crescente e considere $K = I \cap J$. Para cada $I, J \subset I_n$, como definido anteriormente, considere a matriz $A = [a_{i,j}]$ de ordem n e as seguintes submatrizes,

$$M_{I,I} = [(a_{i,j})]_{i \in I, j \in I}$$

$$M_{I,J} = [(a_{i,j})]_{i \in I, j \in J}$$

$$M_{J,I} = [(a_{i,j})]_{i \in J, j \in I}$$

$$M_{J,J} = [(a_{i,j})]_{i \in J, j \in J}$$

$$M_{K,K} = [(a_{i,j})]_{i,j \in K}$$

Por exemplo, se $I = \{1, 2, \dots, n - 1\}$, $J = \{2, \dots, n\}$ então, $K = I \cap J = \{2, \dots, n - 1\}$. Além disso,

$$M_{I,J} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

e

$$M_{K,K} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Com essa notação, estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 1.

$$\det(A) \cdot \det(M_{K,K}) = \begin{vmatrix} \det(M_{I,I}) & \det(M_{I,J}) \\ \det(M_{J,I}) & \det(M_{J,J}) \end{vmatrix} \quad (5)$$

Demonstração. Desde que

$$\det \begin{bmatrix} \det(M_{I,I}) & \det(M_{I,J}) \\ \det(M_{J,I}) & \det(M_{J,J}) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \det(M_{J,J}) & \det(M_{J,I}) \\ \det(M_{I,J}) & \det(M_{I,I}) \end{bmatrix},$$

ou seja, permutar I com J não altera o determinante de M ; para o caso $n = 3$, temos apenas três casos a considerar:

Caso 1. $I = \{1, 3\}$, $J = \{1, 2\}$ e $K = \{1\}$.

Caso 2. $I = \{1, 3\}$, $J = \{2, 3\}$ e $K = \{3\}$.

Caso 3. $I = \{1, 2\}$, $J = \{2, 3\}$ e $K = \{2\}$.

Os comandos abaixo representam os comandos executados no *software* máxima e seus respectivos resultados possíveis para o Caso 1, com adaptações na notação para facilitar a leitura do texto.

$A : matrix([a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}], [a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}], [a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad (A)$$

$MII : matrix([a_{1,1}, a_{1,3}], [a_{3,1}, a_{3,3}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad (MII)$$

$MIJ : matrix([a_{1,1}, a_{1,2}], [a_{3,1}, a_{3,2}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \quad (MIJ)$$

$MJI : matrix([a_{1,1}, a_{1,3}], [a_{2,1}, a_{2,3}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{bmatrix} \quad (MJI)$$

$MJJ : matrix([a_{1,1}, a_{1,2}], [a_{2,1}, a_{2,2}]);$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad (MJJ)$$

deltaii : determinant(MII);

$$a_{1,1} a_{3,3} - a_{1,3} a_{3,1} \quad (\text{deltaii})$$

deltaij :determinant(MIJ);

$$a_{1,1} a_{3,2} - a_{1,2} a_{3,1} \quad (\text{deltaij})$$

deltaji: determinant(MJI);

$$a_{1,1} a_{2,3} - a_{1,3} a_{2,1} \quad (\text{deltaji})$$

deltajj : determinant(MJJ);

$$a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} \quad (\text{deltajj})$$

$delta : \text{expand}(a_{1,1} * \text{determinant}(A) - \text{determinant}(\text{matrix}([\text{deltaii}, \text{deltaij}], [\text{deltaji}, \text{deltajj}])))$;

$$0 \quad (\% \text{ o19})$$

Como $delta = 0$, segue que $\det(M_{K,K}) \cdot \det(A) - \det(M) = 0$. Os demais casos são tratados de maneira análoga. Para o caso geral necessitamos do resultado seguinte, cuja demonstração o leitor pode consultar em [1].

Teorema 2. *Seja M a matriz de menores de uma matriz quadrada A de ordem n . Para cada submatriz quadrada de ordem k ; $M_k = [M_{i,j}]$, de M , defina δ_k como o determinante da submatriz de A de ordem $(n - k)$, tomando os complementos das posições de linha/coluna que foram usadas em M_k , e $1 \leq k \leq n$, isto é:*

$$\delta_k = \det([a_{p,q}]), \quad 1 \leq p, q; \quad p \neq i, q \neq j.$$

Então,

$$\det(M_k) = [\det(A)]^{k-1} \cdot \delta_k. \quad (1)$$

Demonstração do Caso Geral Considere os conjuntos $I, J \subset I_n$, com $I \neq J$ e seja $K = I \cap J$. Considere $i_0 \in I_n \setminus I$ e $j_0 \in I_n \setminus I$ elementos arbitrários, fixados.

Considerando $m_{i,j}$ o “menor” da matriz A associado ao elemento $a_{i,j}$, isto é, $m_{i,j}$ é o determinante da submatriz de A , eliminando a i -ésima linha e j -ésima coluna de A . Observe que :

(i) $\det(M_{I,I}) = m_{i_0,i_0}$

(ii) $\det(M_{I,J}) = m_{i_0,j_0}$

(iii) $\det(M_{J,I}) = m_{j_0,i_0}$

(iv) $\det(M_{J,J}) = m_{j_0,j_0}$

$$(v) K = I_n \setminus \{i_0, j_0\}$$

$$(vi) \delta_2 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i_0-1} & a_{1,i_0+1} & \cdots & a_{1,j_0-1} & a_{1,j_0+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_0-1,1} & \cdots & a_{i_0-1,i_0-1} & a_{i_0-1,i_0+1} & \cdots & a_{i_0-1,j_0-1} & a_{i_0-1,j_0+1} & \cdots & a_{i_0-1,n} \\ a_{i_0+1,1} & \cdots & a_{i_0+1,i_0-1} & a_{i_0+1,i_0+1} & \cdots & a_{i_0+1,j_0-1} & a_{i_0+1,j_0+1} & \cdots & a_{i_0+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_0-1,1} & \cdots & a_{j_0-1,i_0-1} & a_{j_0-1,i_0+1} & \cdots & a_{j_0-1,j_0-1} & a_{j_0-1,j_0+1} & \cdots & a_{j_0-1,n} \\ a_{j_0+1,1} & \cdots & a_{j_0+1,i_0-1} & a_{j_0+1,i_0+1} & \cdots & a_{j_0+1,j_0-1} & a_{j_0+1,j_0+1} & \cdots & a_{j_0+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i_0-1} & a_{n,i_0+1} & \cdots & a_{n,j_0-1} & a_{n,j_0+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Com essa notação, observamos que, das definições de $M_{K,K}$ e δ_k , tem-se a igualdade $M_{K,K} = \delta_k$. Aplicando o Teorema 2 para $k = 2$, obtemos

$$\det(A) \cdot \det(M_{K,K}) = [\det(A)]^{2-1} \cdot \delta_2 = \det \begin{pmatrix} m_{i_0,i_0} & m_{i_0,j_0} \\ m_{j_0,i_0} & m_{j_0,j_0} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \det(M_{I,I}) & \det(M_{I,J}) \\ \det(M_{J,I}) & \det(M_{J,J}) \end{pmatrix},$$

onde δ_2 é o determinante da matriz A eliminando-se a linha i_0 e a coluna j_0 . \square

Corolário 3.1. Se $A = [a_{i,j}]$ é uma matriz de ordem n , $m_{i,j}$ é o **menor** da matriz A associado ao ij -ésimo elemento de A e Δ é a submatriz de A , eliminando-se a primeira e última linhas e a primeira e última colunas de A , então vale a seguinte relação:

$$\det(A) \cdot \det(\Delta) = \det \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Basta considerar $I = \{1, 2, \dots, n-1\}$ e $J = \{2, 3, \dots, n\}$ e aplicar o Teorema 1. \square

4. Exemplos

Nesta secção, exemplificamos o emprego da fórmula (5) para o caso $n = 3$ e $n = 4$.

Exemplo 1. Calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando o Corolário do Teorema 1, temos

$$\begin{aligned} \det(A) \cdot a_{2,2} &= \det \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,n} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \det(A) \cdot (2) &= \det \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = -12. \end{aligned}$$

Logo, $\det(A) = \frac{-12}{2} = -6$.

Exemplo 2. Calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como visto acima, para calcular o determinante desse tipo de matriz devemos escolher subconjuntos $I, J \subset \{1, 2, 3\}$ tais que o elemento a_{k_0, k_0} com $k_0 \in I \cap J$ seja não nulo. Como o elemento $a_{22} = 0$ e $a_{1,1} \neq 0$, escolhemos $I = \{1, 2\}$ e $J = \{1, 3\}$ de maneira que $K = \{1\}$. Formamos então as matrizes

$$M_{I,I} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, M_{I,J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, M_{J,I} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } M_{J,J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perceba que $M_{K,K} = [a_{11}] = [1]$. Assim,

$$\det(A) = \frac{\det \begin{pmatrix} \det(M_{I,I}) & \det(M_{I,J}) \\ \det(M_{J,I}) & \det(M_{J,J}) \end{pmatrix}}{\det(M_{K,K})} = \frac{\det \begin{pmatrix} -15 & -3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}}{1} = 30 - 21 = 9.$$

Exemplo 3. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Como o determinante da submatriz central de ordem é diferente de zero, é natural escolher $I = \{1, 2, 3\}$ e $J = \{2, 3, 4\}$, de sorte que $K = \{2, 3\}$. Dessa forma, temos

$$M_{I,I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, M_{I,J} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, M_{J,I} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } M_{J,J} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando a fórmula (5), obtemos

$$\det(A) = \frac{\det \begin{pmatrix} \det(M_{I,I}) & \det(M_{I,J}) \\ \det(M_{J,I}) & \det(M_{J,J}) \end{pmatrix}}{\det(M_{K,K})} = \frac{\det \begin{pmatrix} -24 & -7 \\ -38 & 10 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{-506}{-22} = 23.$$

5. Conclusão

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma experiência de aprendizagem que se baseia na utilização do computador, mais especificamente do *software* máxima, viabilizando estudos qualitativos tais como compreender e estabelecer proposições, criar e testar conjecturas, de maneira a promover novas formas de pensar e saber.

Apesar do resultado principal desse artigo derivar de um Teorema, sua descoberta deu-se de forma completamente independente, e a relação obtida é apresentada sob um novo viés, diferente da abordagem apresentada em [1]. Neste sentido, o computador ajudou a criar um ambiente de aprendizagem autônomo, dinâmico, de investigação científica, onde os agentes tornaram-se participantes ativos do próprio conhecimento.

Acreditamos que o modelo proposto, visto como dispositivo prático, é uma alternativa ao método de Laplace e bem mais interessante de se trabalhar em sala de aula do que os dispositivos práticos, a exemplo da regra de Sarrus, uma vez que sua utilização não se restringe às matrizes de ordem 3. Acreditamos ainda que a Propriedade (5) estabelecida no trabalho pode ser generalizada pelo Teorema 2 para subconjuntos $I \subset I_n$ de dimensão menor do que $n - 1$.

Agradecimentos

Agradecemos a todo corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática (Profmat) da Universidade Federal de Campina Grande, pelo esforço em ensinar com zelo e qualidade, especialmente aos professores Alcônio Saldanha de Oliveira, Daniel Cordeiro de Moraes Filho e Victor Augusto Giraldo, pelas dicas valiosas na construção desse trabalho.

Referências

- [1] Ajibade, A. O.; Rashid, M. A.; *A strange property of the determinant of minors. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 38, nº 6, (2007), pp. 852-858.
- [2] Brasil: *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCEIEF110518_Versão_final_site.pdf>. Acesso em 04 Maio 2019.
- [3] Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Ministério da Educação. 1999.
- [4] Oliveira, J. S. *Investigações com o Máxima no Cálculo de Determinantes*. Universidade Federal de Campina Grande, 2019. Disponível em: <<http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>>. Acesso em: 13 de agosto de 2019.
- [5] Poole, D. *Linear Álgebra. A modern introduction*. Tradução: Martha Salerno Monteiro [et alli]. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2004.
- [6] Santos, F. B. *Interpretação Geométrica do Determinante 2×2 e de suas Propriedades com Aplicações na Geometria Analítica*. Universidade Federal de Dourados, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=37519>. Acesso em: 13 de agosto de 2019.
- [7] Winterle, P. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

Jadielson Silva de Oliveira
EREM - Rodolfo Paiva, São Bento do Una-PE.
<jadielson_so@outlook.com>

Luiz Antônio da Silva Medeiros
Universidade Federal de Campina Grande
<medeiros@ufcg.edu.br>

Recebido: 26/09/2019

Publicado: 12/02/2019

Flexágonos

Nara Bobko 

Patrícia Massae Kitani 

William John Hirt 

Resumo

Este trabalho aborda os flexágonos, dispositivos poligonias planos construídos através de dobraduras de papel que podem ser manipulados de maneira intrigante. Os flexágonos possuem um grande potencial como material concreto no ensino de geometria, pois são ricos em conceitos matemáticos, lúdicos, de baixo custo e de fácil construção. Apesar disso, ainda são pouco difundidos entre os professores de matemática no Brasil. considerando isso, este trabalho visa divulgar e explorar os flexágonos. Para tal, o trabalho apresentará um pouco da sua história, a construção e manipulação de alguns flexágonos e, por fim, sugestões de aplicação no ensino.

Palavras-chave: Flexágonos; Polígonos; Ensino de Geometria.

Abstract

This work deals with flexagons, a flat polygon device built through paper folds that can be intriguingly manipulated. Flexagons have great potential as a concrete material in the teaching of geometry because they are rich in mathematical concepts, playful, low cost and easily constructed. Despite this, they are still little known among math teachers in Brazil. In view of this, this work aims to disseminate and to exploit flexagons. To this end, the work will present some of its history, the construction and manipulation of some flexagons and, finally, suggestions for its application in teaching.

Keywords: Flexagons; Polygons; Geometry Teaching.

1. Introdução

Flexágonos são objetos maleáveis com formato de um polígono regular, feitos através de determinadas dobraduras (e uma colagem) em uma tira de papel. Apesar da semelhança com os origamis, o grande diferencial dos flexágonos é o fato de o polígono resultante ser flexível, permitindo, a partir de movimentos manipulativos, alternar faces deixando duas sempre visíveis e as restantes ocultas. É um objeto fascinante, de baixo custo e que pode ser utilizado pelos professores para auxiliar no ensino de geometria.

No Brasil, os flexágonos ainda são pouco conhecidos. Talvez isso ocorra porque a maioria da literatura matemática envolvendo esses objetos estejam em outro idioma. Uma das principais

referências sobre flexágonos é o livro *Hexaflexagons, Probability Paradoxes, and the Tower of Hanoi*, de Martin Gardner [4].

Segundo Martin Gardner [4], quem construiu o primeiro flexágono foi Arthur H. Stone, que na época tinha 23 anos e era um estudante de matemática. Stone era inglês e em 1939 mudou-se para os Estados Unidos. Para aproveitar o fichário inglês, cortou as folhas de papel americanas que eram maiores que as inglesas. Dobrando as tiras que sobraram, acabou formando um hexágono que, mediante certa manipulação, fazia surgir uma nova face hexagonal. Posteriormente, tal dispositivo recebeu o nome de Trihexaflexágono. Intrigado com essa descoberta, Stone analisou o Trihexaflexágono e conseguiu construir uma outra dobradura hexagonal que escondia quatro faces, além das duas que já ficavam à mostra (Hexahexaflexágono). Em pouco tempo os flexágonos tornaram-se a atração entre seus colegas, na Universidade de Princeton. Até um comitê dos flexágonos foi formado. Tal comitê era composto por Stone e Bryant Tuckerman, estudantes de matemática; Richard P. Feynman (Nobel de física de 1965), na época estudante de física; e John W. Tukey, professor de matemática. Eles construíram vários tipos de flexágonos e estudavam as propriedades matemáticas envolvidas. Descobriram inclusive como montar flexágonos com quantas faces desejassem. Todavia, esse comitê desapareceu com a Segunda Guerra Mundial. Apesar dessa popularidade na Universidade de Princeton, os flexágonos tornaram-se mundialmente conhecidos apenas na década de 50, através de um artigo de Martin Gardner, na *Scientific American* [3].

Para nomear cada tipo de flexágono, adotou-se o seguinte padrão: o primeiro prefixo refere-se ao número de faces existentes, e o segundo prefixo indica o formato do polígono regular resultante. Por exemplo, o primeiro flexágono feito por Stone é o Trihexaflexágono pois possui formato hexagonal e apresenta três faces (Figura 1). Outro exemplo é o Hexahexaflexágono, que tem seis faces (entre visíveis e ocultas) todas com formato de um hexágono. Existem flexágonos que não seguem a forma hexagonal, como é o caso do Tetratetraflexágono que possui quatro faces quadradas. Além dessa nomenclatura de acordo com o número de faces e o formato da face, classificam-se os flexágonos como regular e não regular. Os regulares são aqueles feitos a partir de uma tira de papel, como o Trihexaflexágono, o Hexahexaflexágono e o Nonahexaflexágono. Caso contrário é dito não regular. O Tetrahexaflexágono e o Tetratetraflexágono, que apresentaremos mais adiante, e cuja disposição dos triângulos, ou quadrados, não formam uma tira. Apesar do termo flexágono ter surgido com Stone, existe relato de que tais dobraduras já eram conhecidas no Japão como “byoubugai” [6].

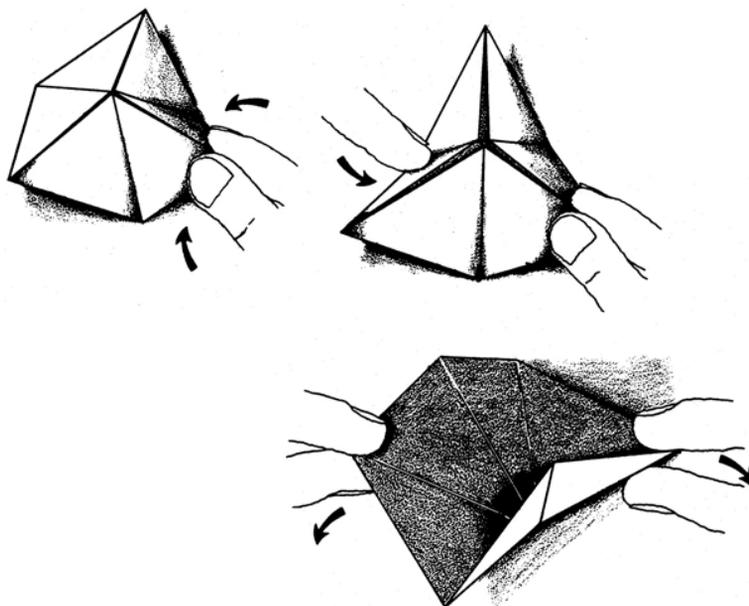


Figura 1: Trihexaflexágono. Fonte: Gardner [4].

2. Construindo o Trihexaflexágono

Para facilitar a descrição das dobraduras necessárias para a montagem dos flexágonos, utilizaremos uma notação proveniente dos Origamis. Chamaremos de dobra em “vale” quando o vinco desce e os lados sobem (indicado nos diagramas por uma linha tracejada). Chamaremos de dobra “montanha” quando o vinco sobe e os lados descem (indicado nos diagramas por uma linha composta de traços e pontos). A Figura 2 ilustra essas nomenclaturas.

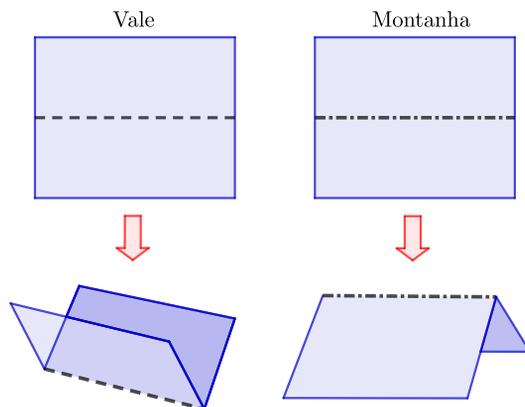


Figura 2: Dobra em vale e dobra em montanha.

Para a construção do Trihexaflexágono, iniciemos construindo um molde como na Figura 3.

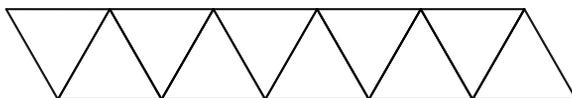


Figura 3: Molde do Trihexaflexágono.

Este molde é formado por 10 triângulos equiláteros em cada lado. Para quem está construindo pela primeira vez, sugerimos colorir os triângulos do molde como na Figura 4.



Figura 4: Molde do Trihexaflexágono colorido.

Dobrando a tira em vale e em montanha como na Figura 5, formaremos um hexágono regular no qual todos os triângulos de mesma cor estão numa mesma face hexagonal. Por fim, deve-se colar as partes identificadas com a palavra “cola”. Para facilitar a visualização, indicamos na Figura 5, juntamente com as cores, letras: A para o azul, B para vermelho e C para amarelo.

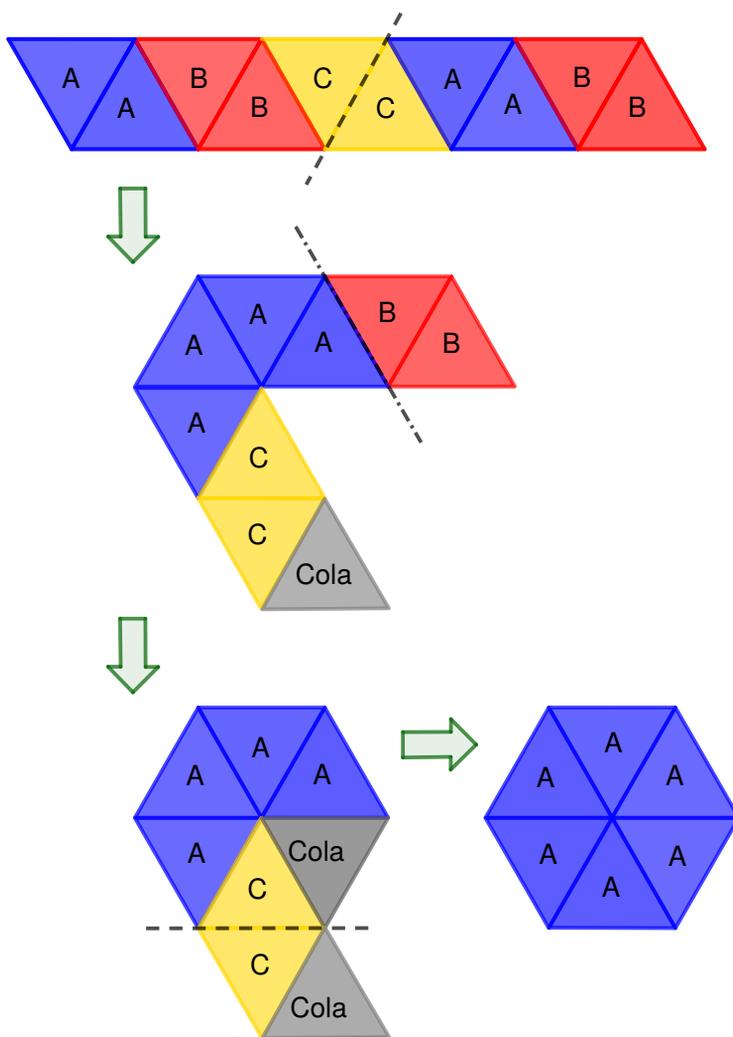


Figura 5: Dobras do Trihexaflexágono.

Finalizado as dobraduras (e a colagem), teremos o Trihexaflexágono com duas faces aparentes: uma face azul (A) e outra face vermelha (B). Ao flexionarmos, processo que será detalhado a seguir, a face de cor amarela (C) irá aparecer. Se continuarmos flexionando, entraremos em um ciclo em que as faces irão se repetir sempre na mesma ordem.

3. Como Flexionar?

Vamos entender primeiramente o funcionamento do Trihexaflexágono e em seguida explicaremos brevemente como os movimentos dos flexágonos podem ser analisados num diagrama. Cada face do Trihexaflexágono possui três fendas que atravessam internamente o flexágono da frente para

o verso. Cada fenda está localizada em uma das arestas dos triângulos que formam o hexágono. Dobrando o hexágono de forma a evidenciar suas fendas (empurrando as arestas em que estão as fendas para cima e as demais para baixo), é possível abrir uma nova face (esse movimento é chamado de flexão), como mostra a Figura 6.

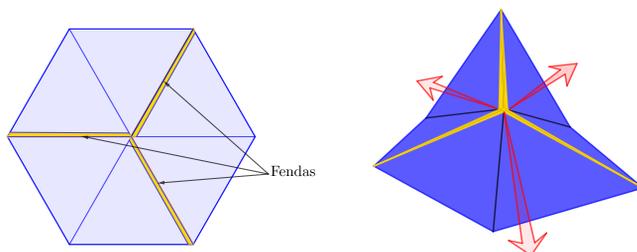


Figura 6: Flexão.

Assim, com a cor azul na frente e a cor vermelha no verso, realizando a flexão, uma face amarela emerge na frente enquanto a azul é levada para o verso. Após cada flexão, as fendas continuarão a existir, então, podemos realizar flexão após flexão. Ao repetir o movimento, percebe-se um ciclo no qual se repete o padrão azul-amarela-vermelha ou vermelha-amarela-azul, dependendo da face escolhida para começar a flexão. A Figura 7 ilustra esses movimentos. O leitor que desejar, poderá ainda acessar uma construção do GeoGebra que representa a flexão do Trihexaflexágono (diponível em www.ggbm.at/ry5vnhqy). Salientamos que se não for possível realizar esses movimentos, é porque algum engano foi cometido na construção.

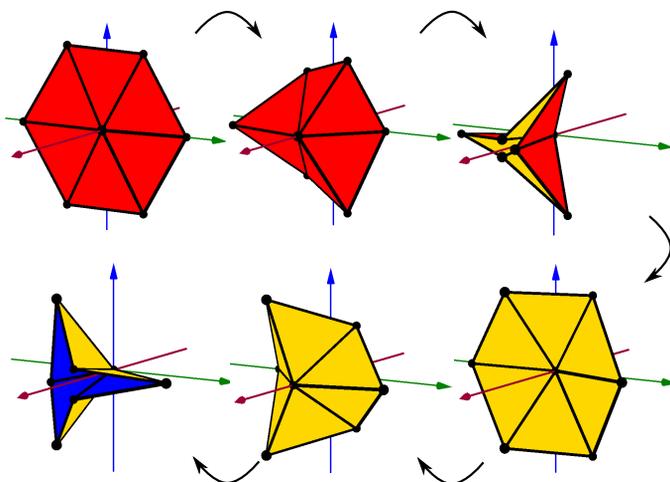


Figura 7: Movimento realizado pelo Trihexaflexágono.

Estes movimentos podem ser representados através de um mapa, conhecido também por diagrama

de Tuckerman, conforme mostra a Figura 8. Neste mapa, os pontos coloridos (ou nomeados por A, B e C) representam cada uma das faces do flexágono, enquanto as setas orientadas indicam a sequência com que as faces serão reveladas quando se flexiona num mesmo sentido. O ponto de origem da seta indica a face que está no verso, e o ponto onde a seta chega indica a face da frente. Existem outras formas de representar o diagrama de Tuckerman, mas adotaremos a que aparece em (GARDNER, 1988). Esse diagrama ilustra o caminho mais simples de encontrar todas as faces.

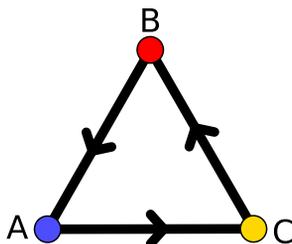


Figura 8: Diagrama de Tuckerman do Trihexaflexágono.

Note que o Trihexaflexágono possui no total dezoito triângulos, contando os da frente e do verso e excluindo os triângulos usados para colar, formando assim três faces com seis triângulos cada. Os mesmos seis triângulos sempre aparecem juntos; por exemplo, quando um triângulo azul aparece, os outros cinco azuis aparecem juntos com ele, nunca aparecendo triângulos de cores diferentes numa mesma face hexagonal.

Para que o dispositivo tenha quatro faces hexagonais em vez de somente três, devemos adicionar seis novos triângulos, como indicado na Figura 9. Observe que não basta acrescentar seis triângulos no molde do Trihexaflexágono, e sim uma nova disposição dos triângulos deverá ser feita. Serão vinte e quatro triângulos coloridos (mais dois para a colagem) que, com as dobras certas, ficarão distribuídos de seis em seis, formando um flexágono com quatro faces, o Tetrahexaflexágono.

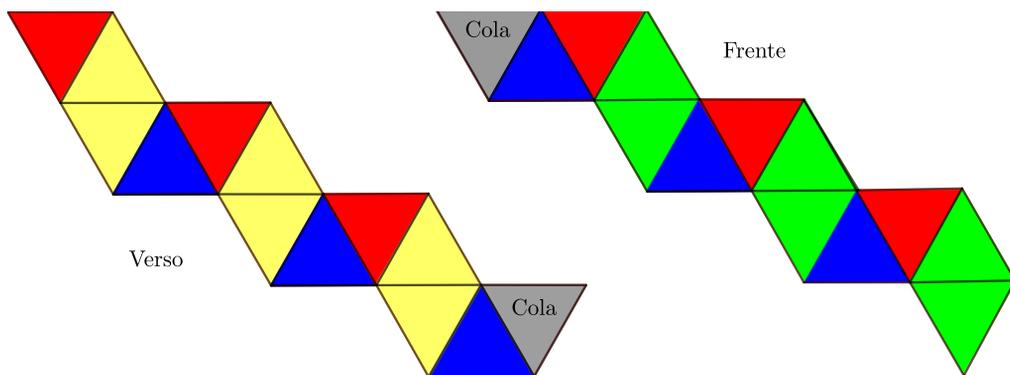


Figura 9: Molde do Tetrahexaflexágono.

Quando se adiciona uma nova face também se adiciona um conjunto de três novas fendas capazes de revelar, no movimento de flexão, esta nova face. Um conjunto de fendas, porém, não possibilita encontrar todas as faces, se levarmos em conta o sentido da flexão. Por exemplo, ao começar uma flexão com a cor amarela (C) na frente e a cor azul (A) no verso, temos um conjunto de fendas que revelam a face vermelha (B) e um outro conjunto que revela a face verde (D). Se escolhermos encontrar a face vermelha, ficamos com um hexágono com vermelho na frente e amarelo no verso. A partir da face vermelha não temos um conjunto de fendas que nos leve até a face verde, o único caminho (mantendo o sentido da flexão) nos levará até a face azul. Veja essa descrição no diagrama de Tuckerman do Tetrahexaflexágono (Figura 10).

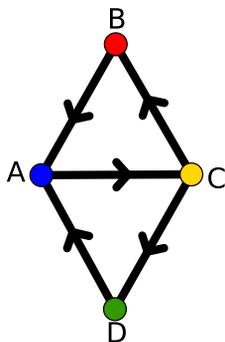


Figura 10: Diagrama de Tuckerman do Tetrahexaflexágono.

Agora vejamos um exemplo do diagrama de Tuckerman para o caso do Hexahexaflexágono (Figura 11). Neste caso as faces azul (A), amarela (C) e vermelha (B) possuirão duas opções de flexões, enquanto as faces verde (D), laranja (F) e rosa (E) possuirão apenas uma. Existe um ciclo principal formado pelas cores azul, amarela e vermelha apresentando sempre duas opções. Realizando a flexão e saindo do ciclo principal entramos num ciclo secundário fornecendo sempre uma única opção para realizar a próxima flexão. Os ciclos secundários são três: azul(A)-verde (D)-vermelho(B), amarelo(C)-rosa(E)-azul(A) e vermelho(B)-laranja(F)-amarelo(C).

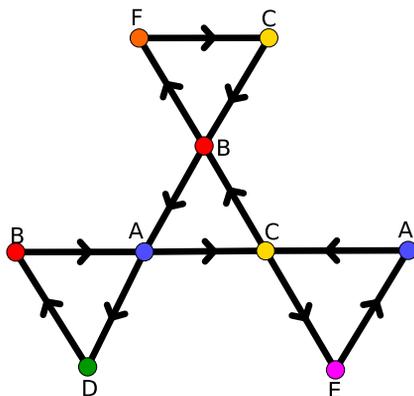


Figura 11: Diagrama de Tuckerman do Hexahexaflexágono.

Por exemplo, estando o Hexahexaflexágono com a face vermelha no verso e a face azul na frente, podemos optar por uma face amarela ou verde. Optando pela face verde, ficamos com verde na frente e azul no verso, e a próxima opção será somente a face vermelha. Por fim, estando com a face vermelha na frente e com a verde no verso, o único caminho disponível nos levará à face azul, fechando um ciclo. Para um dado flexágono, existe mais de um molde. Mudando o molde, muda-se também o diagrama de Tuckerman.

Além das formas hexagonais, existem outras formas geométricas para os flexágonos, como por exemplo o Tetratetraflexágono, cuja face é um quadrado (Figura 12). Um estudo mais detalhado dos hexaflexágonos, visando tanto à sua construção quanto à sua análise, pode ser encontrado em *The Mathematics of Pleated Folding*, de Nishiyama, Y. [6].

Na teoria, é possível fazer flexágonos com muitas faces. Todavia, levando em conta que o papel tem gramatura, quanto mais faces, mais difícil será para realizar as dobraduras e flexionar.

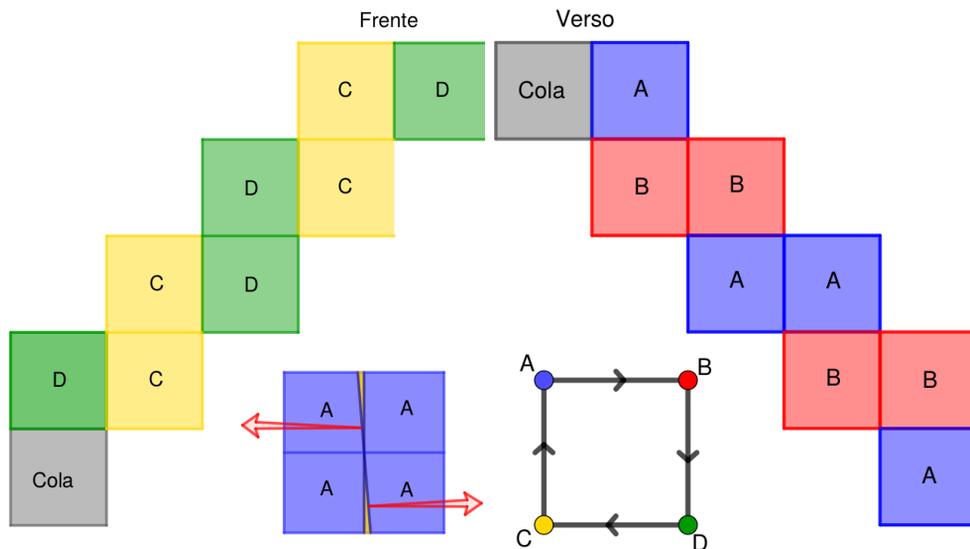


Figura 12: Tetratetraflexágono: Molde, Fendas de Abertura e Diagrama de Tuckerman.

O leitor que tiver interesse poderá encontrar outros moldes de flexágonos, bem como instruções de montagem no Livro Digital *Flexágonos* [1], disponível na plataforma GeoGebra.

4. O uso de flexágonos no ensino

Por serem ricos em conceitos matemáticos, os flexágonos podem ser utilizados como um material concreto lúdico atuando como um facilitador de aprendizagem. A manipulação e os movimentos realizados com tais formas propiciam a visualização em três dimensões (como destacado na Figura 7) e a observação de padrões sequenciais (diagramas de Tuckerman). Essas são habilidades essenciais da matemática que devem ser desenvolvidas na Educação Básica. Além disso, seja durante a confecção dos flexágonos ou na manipulação após pronto, os alunos podem observar e explorar várias conceitos matemáticos (polígonos, ângulos, soma de ângulos, lados, faces, perímetro, área, frações, entre outros).

Na sua construção, o professor pode apresentar a régua, o compasso, o jogo de esquadros e o transferidor. Pode-se ensinar como utilizá-los visto que muitos alunos concluem o ensino médio sem saber manipular esses materiais. Uma alternativa é trabalhar em conjunto com a disciplina de Artes. Caso não seja o foco ou a série apropriada, pode-se trabalhar diretamente com um molde pronto e iniciar uma atividade, como trabalhar frações. No entanto, quando o próprio aluno constrói desde o início, a atividade se torna mais rica e prazerosa. É necessário também que a construção seja exata, senão a flexão acabará por se tornar difícil e poderá rasgar o flexágono. Por exemplo, na construção do Trihexafluxágono, reforce que o hexágono deve ser regular e, portanto, os triângulos que formam o molde devem ser equiláteros. Se, no final, a face hexagonal não se formou corretamente, use-o como exemplo para concluir que o triângulo não era equilátero. Ainda na sua construção, as retas paralelas e concorrentes podem ser abordadas.

No Trihexaflexágono, o professor pode perguntar aos alunos quais polígonos eles conseguem visualizar em uma das faces. São eles: triângulo, hexágono, paralelogramo, losango e trapézio. Pode-se reforçar as propriedades de cada um desses polígonos, além de estudar áreas e perímetros.

Ao trabalhar ângulos, uma sugestão seria nomear cada um dos ângulos dos triângulos que formam o Hexaflexágono e a partir disso trabalhar com soma de ângulos de polígonos. Também é possível trabalhar com os conceitos de ângulos alternos, colaterais, correspondentes e opostos pelo vértice. Os alunos podem classificar cada um dos ângulos que foram nomeados. Estabelecida a classificação, os alunos podem flexionar e verificar se a classificação mantém-se após a flexão.

Além do Ensino Fundamental, é possível sua aplicação na Licenciatura em Matemática, na disciplina de Construções Geométricas. Os alunos devem construir com exatidão cada triângulo e/ou traçar retas paralelas perfeitas. Inicialmente a sua construção pode ser feita somente com régua e compasso. Após a fixação dos traçados somente com régua e compasso, pode-se permitir o uso de esquadros. Faça uma reflexão com os alunos e discuta quais conteúdos podem ser trabalhados em sala de aula. Assim, alunos que serão os futuros professores de matemática terão uma ferramenta a mais para usarem quando estiverem na prática.

Apresentamos aqui apenas algumas sugestões de aplicações no ensino. Mas muitas outras abordagens podem ser realizadas. O leitor que tiver interesse poderá acessar propostas detalhadas de atividades didáticas que utilizam Flexágonos na dissertação *Explorando Geometria com auxílio de flexágonos*, de Willian J. Hirt [5].

5. Conclusão

O uso de materiais concretos é um grande aliado no ensino de geometria. Existem vários materiais para ensinar geometria e apresentamos aqui mais uma opção para os professores trabalharem em sala de aula. Pode ser trabalhado em vários níveis de ensino, do fundamental à graduação. Os flexágonos são objetos curiosos, enriquecem o trabalho em grupo, aumentam a motivação até mesmo de um aluno desanimado, trabalha com a destreza manual, além de envolver vários conceitos matemáticos em um único material. Para essa atividade, utilizam-se somente materiais de baixo custo, tornando sempre possível sua aplicação.

Referências

- [1] Bobko, N., Kitani, P. M. e Hirt, W. J. *Flexágonos*. Livro Virtual disponível na Plataforma GeoGebra. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/m/ggk5gwkj>>. Acesso em: 13 de dezembro de 2019.
- [2] Conrad, A. S. *The theory of the flexagon*, RIAS, 1960.
- [3] Gardner, M. *Flexagons*. *Scientific American*, 195(6), 162-168. 1956.
- [4] Gardner, M. *Hexaflexagons, Probability Paradoxes and the Tower of Hanoi*. Cambridge: Cambridge University Press, (pp. 1-15), 2008.
- [5] Hirt, W. J. *Explorando Geometria com auxílio de flexágonos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba). 2019.
- [6] Nishiyama, Y. “*The Mathematics of Pleated Folding*”. *Osaka Keidai Ronsyu*, v. 58, n^o 6, pp. 253-261, 2008.

[7] PooK, Les. *Flexagons inside out*. Cambridge University Press, 2003.

Nara Bobko
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<narabobko@utfpr.edu.br>

Patrícia Massae Kitani
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<kitani@utfpr.edu.br>

William John Hirt
Colégio Técnico Industrial de Araucária
<william_hirt@hotmail.com>

Recebido: 17/12/2019
Publicado: 28/02/2020

Movimento *maker*: Um incentivo ao estudo da geometria e a interdisciplinaridade

Barbara Batista dos Santos de Andrade 

Luiz Carlos de Andrade 

Resumo

Este artigo analisa como a construção de protótipos variados com materiais de baixo custo e recicláveis feitos por alunos do Ensino Médio do Colégio Estadual Rio de Areia, escola da rede pública estadual localizada no município de Saquarema-RJ, contribui para a consciência ambiental. Analisa também como o movimento *maker*, movimento que defende a ideia de do indivíduo fabricar, construir, reparar e alterar objetos com as próprias mãos, utilizando-se da colaboração entre grupos, desenvolve competências e habilidades favorecendo o aprendizado em diversas áreas do conhecimento. Com a manipulação dos materiais, é explorada a conexão entre a Geometria e o cotidiano do aluno, aproveitando-se do tema para apresentar sugestões de como se chegar a algumas fórmulas de áreas de figuras planas com uma linguagem simples e de forma intuitiva, sem o rigor das demonstrações matemáticas, alcançando o entendimento de todos os alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Geometria; Matemática; Movimento *maker*; Interdisciplinaridade.

Abstract

This article analyzes how the construction of varied prototypes with low cost and recyclable materials made by high school students from the Rio de Areia State School, a public school located in Saquarema-RJ, contributes to environmental awareness. It also analyzes how the maker movement, a movement that defends the idea of the individual making, building, repairing and altering objects with their own hands, using collaboration between groups, develops competences and skills favoring learning in various areas of knowledge. With the manipulation of materials, the connection between Geometry and the student's daily life is explored, taking advantage of the theme to present suggestions on how to arrive at some formulas of flat picture areas with simple and intuitive language, without accuracy of mathematical demonstrations, reaching the understanding of all high school students.

Keywords: Geometry; Mathematics; Motion maker; Interdisciplinarity.

1. Introdução

Utilizar materiais de baixo custo permitindo ao aluno manuseá-los, fazer medições e aguçar o sentimento de cooperação em grupo facilita a interdisciplinaridade. Este artigo apresenta um pouco dos ganhos que se podem obter com os principais impactos da cultura *maker* na educação, que, de acordo com Pinto [4], é a democratização do conhecimento.

Desta forma, ao mesmo tempo em que é desenvolvida a interdisciplinaridade, os estudantes têm a oportunidade de colocar em prática que, outrora, seriam limitados ao papel e caneta.

Valorizar a cultura maker tem duas grandes vantagens no processo de ensino-aprendizagem. A primeira delas é o abandono de práticas retrógradas que tornam a educação enfadonha para os alunos, principalmente das séries iniciais, as quais devem ser especialmente estimulantes.

Depois, mirando o Ensino Médio, é uma oportunidade de despertar, nos alunos, interesses e habilidades indispensáveis ao mercado de trabalho, como liderança, proatividade e condições técnicas para lidar com a tecnologia. (Pinto, 2018)

A cultura *maker* promove a grande oportunidade de a escola explorar interdisciplinaridade, permitindo o diálogo entre as disciplinas de forma significativa. Mesmo com a falta de verba para a montagem de um laboratório de robótica, com criatividade é possível levar em frente um projeto utilizando materiais de baixo custo e com materiais recicláveis como papelão, elásticos, palitos de picolé, plásticos, entre outros.

De acordo com os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) [2], a interdisciplinaridade não dilui as disciplinas, ela faz com que a individualidade de cada uma se sobressaia, une as disciplinas a partir compreensão de múltiplos fatores que intervêm sobre a realidade trabalhando as linguagens necessárias para a constituição de conhecimentos.

Para Freire [1], as decisões que vão sendo tomadas através de um leque de opções constroem a autonomia do aprendizado, propiciando autonomia ao sujeito no processo de construção do conhecimento. Desta forma, se faz necessária a busca por metodologias que apresentem aos estudantes a valorização do raciocínio lógico para uma tomada de soluções em diferentes situações que envolvam conceitos matemáticos.

O presente artigo foi organizado em seções da seguinte forma: Na segunda seção, algumas disciplinas e conteúdos que podem ser trabalhados; na terceira e quarta, alguns protótipos construídos e os conteúdos matemáticos explorados; na quinta, as considerações finais com a descrição do ganho pedagógico que alunos e professores podem alcançar em toda a elaboração de um projeto.

Este artigo busca, com a utilização da cultura *maker*, além de melhorar a relação aluno/escola, aluno/aluno e professor/aluno propiciando conhecimentos diferentes dos utilizados em uma aula tradicional, desmistificar a ideia de que a Matemática é só números e que não pode interagir com diferentes disciplinas no processo de aprendizagem.

2. Interdisciplinaridade

O movimento *maker* utilizado no ambiente escolar como estimulador da pesquisa e do conhecimento, permite que várias disciplinas trabalhem em conjunto.

Nesta seção, apresentamos sugestões de algumas disciplinas que podem ser envolvidas no projeto com a cultura *maker*.

2.1. Física

A disciplina de Física trabalha hidrostática com o uso dos fluidos, nas seringas que movem o braço mecânico (Figura 1a). Forças com as roldanas e polias, como as que movem os robôs (Figura 1b). A eletricidade, por exemplo, a utilizada para fazer funcionar o sinal de trânsito (Figura 1c) e o princípio de funcionamento de motores, como o protótipo construído com pilha, ímã, fio de cobre e alfinete (Figura 1d).

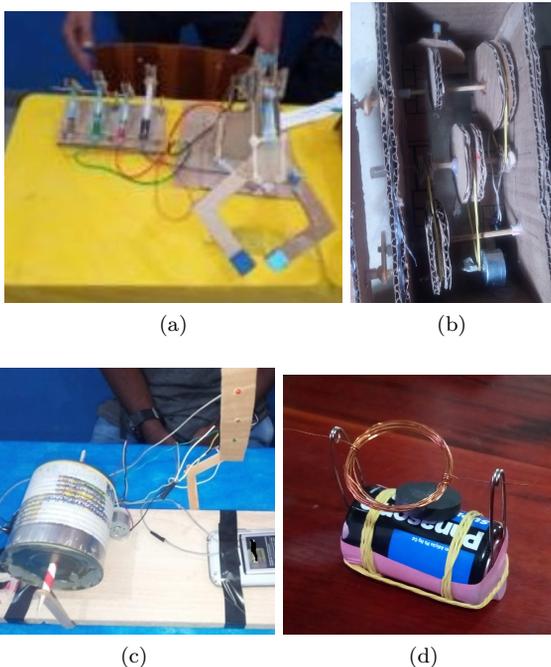


Figura 1: Física

2.2. História

A disciplina de História pode trabalhar com pesquisas sobre o movimento *maker* e etapas da história sobre a revolução industrial, aproveitando as máquinas e robôs, entre outros protótipos construídos.

Os alunos podem se reunir em grupos para apresentar à comunidade escolar os assuntos pesquisados, como os *stands* montados em salas de aulas observados na sequência ilustrada na Figura 2.

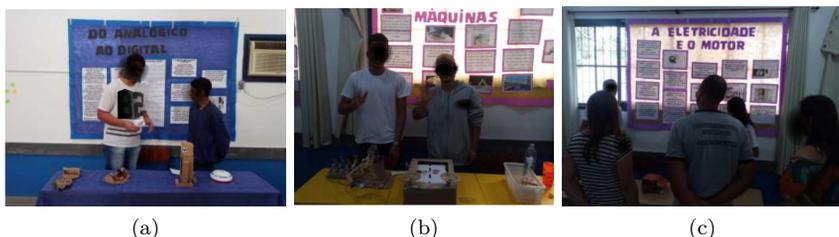


Figura 2: Apresentação das pesquisas históricas

2.3. Biologia

A disciplina de Biologia, além do tema sustentabilidade com energias limpas como a gerada por energia eólica (Figura 15a), e a utilização de materiais recicláveis nos protótipos construídos, pode trabalhar o corpo humano, como tendões (fios) e articulações, utilizando a mão de papelão (Figura 3b). Pode também aproveitar o uso da seringa, líquido colorido e fina mangueira utilizados no braço mecânico para simular a circulação sanguínea (Figura 3b).

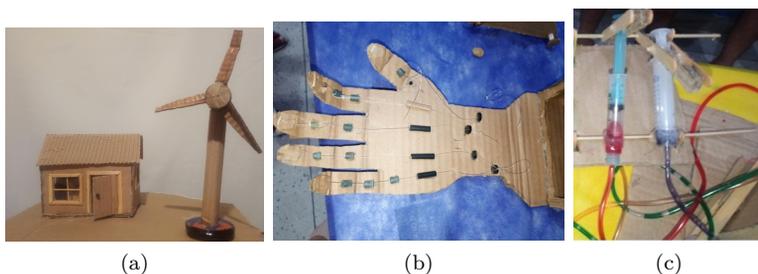


Figura 3: Biologia

2.4. Matemática

A Matemática, principalmente a Geometria Plana, trabalha aproveitando-se das formas geométricas que se apresentam em cada protótipo construído.

Atividades diversificadas podem ser aplicadas durante todo o processo da construção e pesquisa para a elaboração do projeto, tais como:

- Medições e áreas dos retângulos e triângulos que compõem partes dos protótipos.

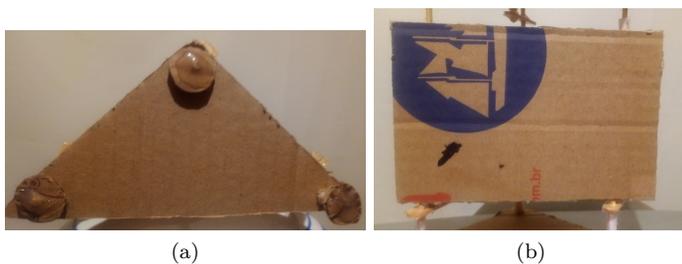


Figura 4: Partes dos protótipos

- Medições e área de círculo, divisão angular na circunferência e polígonos regulares inscritos na circunferência.

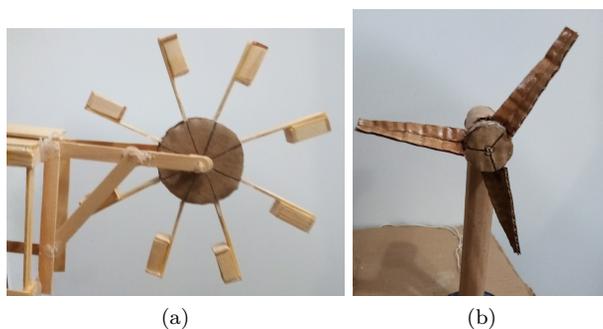


Figura 5: Círculos e divisão angular

- Identificação de alguns objetos que lembram sólidos geométricos que aparecem no projeto, como cilindros e prismas.

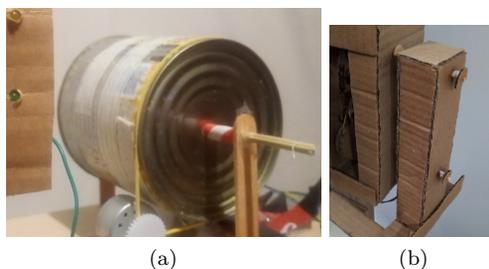


Figura 6: Cilindros e prismas

3. Robôs

Robôs que utilizam papelão, palitos, elásticos, canudos e pequenos motores são estratégias excelentes para introdução de conceitos geométricos e manipulação de materiais com formatos das figuras planas que costumam ser desenhadas no quadro da sala de aula.

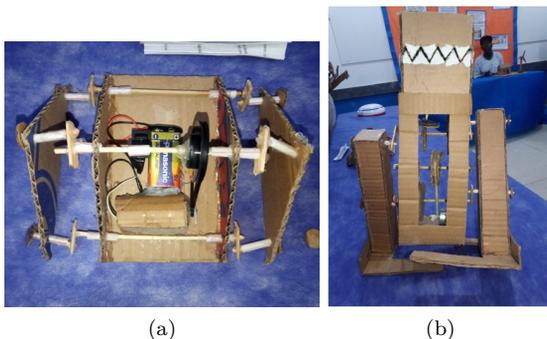


Figura 7: Robôs com materiais de baixo custo

3.1. Conceitos Explorados

Utiliza-se a construção dos robôs para rever alguns conceitos geométricos como a classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos, condição de existência dos triângulos, medições, formas simples de se chegar às fórmulas de áreas de retângulos, triângulos e círculos, além da tomada de decisões em grupo, aguçando o raciocínio lógico.

3.1.1 Retângulos

Um retângulo é uma figura geométrica plana convexa de quatro lados, cujos ângulos são todos congruentes ou ainda, um retângulo é um paralelogramo (com lados opostos paralelos) que possui todos seus ângulos internos medindo 90° .

Assim, dado um quadrilátero $ABCD$ de ângulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} , temos que

$$ABCD \text{ é retângulo} \iff \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}.$$

A Figura 8 ilustra um retângulo de lados $\overline{AB} = \overline{DC} = b$ e $\overline{AD} = \overline{BC} = h$.

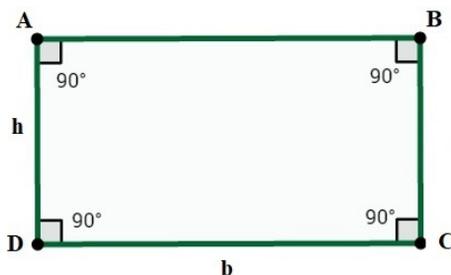


Figura 8: Retângulo $ABCD$

Área de retângulo

Considere o quadrado, retângulo de lados congruentes, da Figura 9a como uma unidade de área (u.a.). Preenchendo a parte interna do retângulo $ABCD$ com quadrados de uma unidade de área (Figura 9b), o retângulo $ABCD$ fica preenchido com 104 quadrados, ou seja, sua área é de 104 u.a..

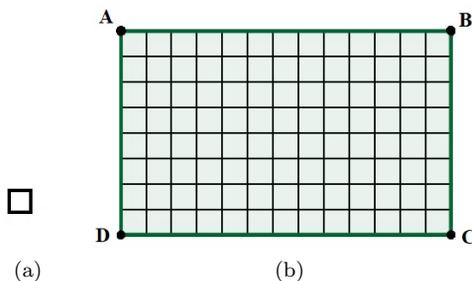


Figura 9: Área do retângulo

Nota-se, ainda, que para se obter a quantidade de 104 unidades de área basta encontrar o produto entre a quantidade de quadrados no lado AB e a quantidade de quadrados no lado DC do retângulo $ABCD$. Dessa forma teremos

$$8 \times 13 = 104 \quad u.a.$$

Logo, a área de um retângulo A_{ret} é dada pelo produto do comprimento de dois lados que concorrem em um mesmo vértice, comumente chamados de base b e de altura h , como ilustrado na Figura 8.

Temos então que

$$A_{ret} = b \times h \quad u.a.$$

3.1.2 Triângulos

É a figura geométrica formada pela união de três pontos não colineares pertencentes a um plano; dessa forma, por três segmentos de reta.

Assim, dados três pontos A , B e C , não colineares, os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} formam uma figura geométrica chamada triângulo ABC , denotado por $\triangle ABC$.

• Elementos de um triângulo

No triângulo ABC ilustrado na Figura 10, temos:

Vértices: os pontos A , B e C são os vértices do $\triangle ABC$.

Lados: os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são os lados do triângulo ABC .

Ângulos internos: os ângulos \widehat{BAC} ou \widehat{A} , \widehat{ABC} ou \widehat{B} e \widehat{ACB} ou \widehat{C} são os ângulos internos do triângulo ABC .

Altura: é a menor distância entre um vértice do triângulo e o lado oposto a esse vértice ou ao seu prolongamento, comumente chamada de base do triângulo. Na Figura 10, $\overline{BH} = h$ é uma das alturas, e o lado $\overline{AC} = b$ é a base relativa a h .

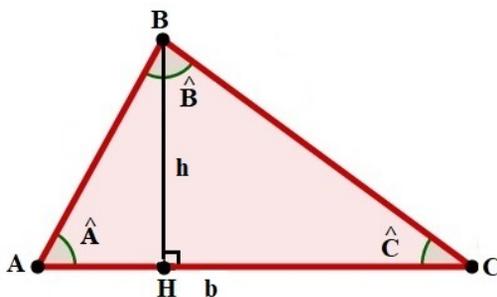


Figura 10: Triângulo ABC

• Classificação dos triângulos

Os triângulos podem ser classificados de acordo com seus lados ou seus ângulos.

a) Quanto aos lados:

Triângulo Equilátero. Um triângulo é equilátero se, e somente se, possuir todos os lados congruentes, ou seja, iguais.

Triângulos Isósceles. Um triângulo é isósceles se, e somente se, pelo menos dois de seus três lados forem congruentes.

Triângulo Escaleno. Um triângulo é escaleno se, e somente se, dois lados quaisquer não forem congruentes.

b) Quanto aos ângulos:

Triângulo Retângulo. Um triângulo é retângulo se possui um ângulo reto, ou seja, medindo 90° .

Triângulo Obtusângulo. Um triângulo é obtusângulo se possui um ângulo obtuso (medindo mais que 90°) e dois ângulos agudos (medindo menos que 90°).

Triângulo Acutângulo. Em um triângulo acutângulo, os três ângulos são agudos.

• Área de triângulo

A forma mais usual de se encontrar a área A_{tri} de um triângulo é calculando a metade do produto entre o comprimento da base b e o comprimento de uma da altura h e relativa a essa base.

Para chegar à conclusão, a área de um triângulo é dada por

$$A_{tri} = \frac{b \times h}{2} \quad u.a.$$

Veremos alguns casos:

I - Triângulo Retângulo

Dado um triângulo retângulo ABC , forma-se um retângulo $ADBC$, com $BC = b$ e $AC = h$, como observado na Figura 11.

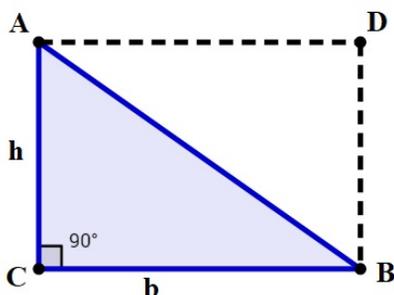


Figura 11: Área do triângulo retângulo

Dessa forma, a área A_{ADBC} do retângulo $ADBC$ é dada pelo produto dos lados BC e AC , e como o triângulo ABC tem metade da área do retângulo, então a área A_{ABC} do triângulo retângulo é dada por

$$A_{ABC} = \frac{BC \times AC}{2} = \frac{b \times h}{2} \quad u.a.$$

II - Triângulo Acutângulo

Dado um triângulo acutângulo ABC , traçando-se a altura $AD = h$ relativa ao lado $BC = b$, formam-se dois triângulos retângulos ACD e ABD como observado na Figura 12.

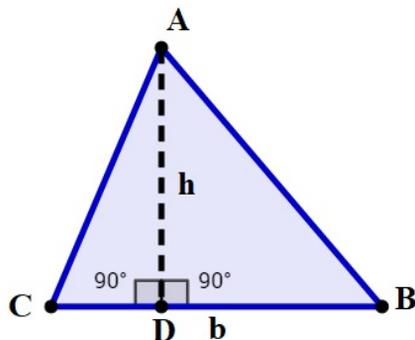


Figura 12: Área do triângulo acutângulo

Assim, a área A_{ABC} do triângulo ABC é dada pela soma das áreas A_{ACD} e A_{ABD} dos triângulos retângulos ACD e ABD . Como já observado no item I, temos que

$$A_{ACD} = \frac{CD \times AD}{2} \quad e \quad A_{ABD} = \frac{BD \times AD}{2} \quad u.a.$$

Logo,

$$A_{ABC} = A_{ACD} + A_{ABD} = \frac{CD \times AD}{2} + \frac{BD \times AD}{2} = \frac{CD \times AD + BD \times AD}{2} = \frac{(CD + BD) \times AD}{2}$$

Como $CD + BD = BC = b$ e $AD = h$, substituindo, teremos que a área do triângulo ABC é dada por

$$A_{ABC} = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{b \times h}{2} \quad u.a.$$

III - Triângulo Obtusângulo

Dado um triângulo obtusângulo ABC , traçando-se a altura $AD = h$, onde o ponto D é a interseção de h com o prolongamento do lado $BC = b$, obtêm-se os triângulos retângulos ABD e ACD , como observado na Figura 13.

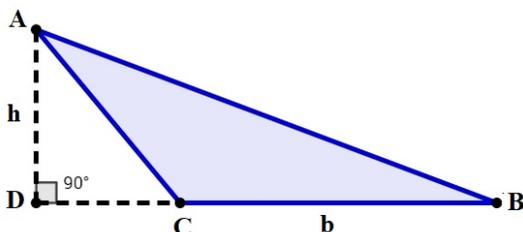


Figura 13: Área do triângulo obtusângulo

As áreas A_{ABD} e A_{ACD} dos triângulos retângulos ABD e ACD são dadas por

$$A_{ABD} = \frac{BD \times AD}{2} \quad e \quad A_{ACD} = \frac{CD \times AD}{2} \quad u.a.$$

A área A_{ABC} do triângulo obtusângulo ABC é dada pela diferença entre as áreas A_{ABD} e A_{ACD} , ou seja,

$$A_{ABC} = A_{ABD} - A_{ACD} = \frac{BD \times AD}{2} - \frac{CD \times AD}{2} = \frac{(BD - CD) \times AD}{2} \quad u.a.$$

Como $BD - CD = BC = b$ e $AD = h$, segue que a área A_{ABC} é dada por

$$A_{ABC} = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{b \times h}{2} \quad u.a.$$

Dos itens I, II e III, conclui-se que a fórmula para se calcular a área A_{tri} de um triângulo qualquer é dada por

$$A_{tri} = \frac{b \times h}{2} \quad u.a.$$

Onde b é a base do triângulo e h a altura relativa a essa base.

• Condição de existência de um triângulo

Para que se possa construir um triângulo é necessário que a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o módulo da diferença entre essas medidas.

Assim, em um triângulo ABC com lados de medidas a , b e c , temos necessariamente

$$a < b + c \quad e \quad b < a + c \quad e \quad c < a + b$$

Observe as ilustrações da Figura 14.

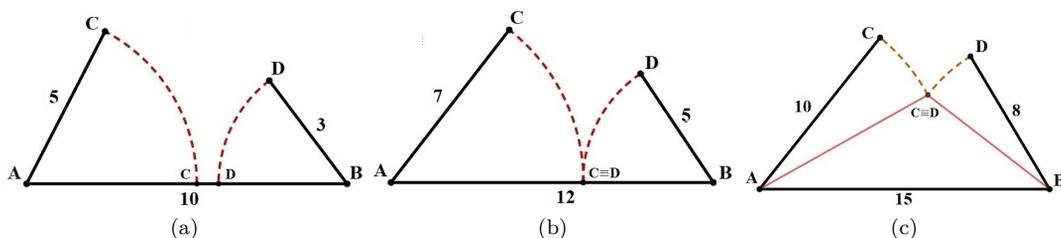


Figura 14: Condição de existência de triângulos

Vamos analisar alguns dos casos apresentados nas ilustrações.

I - Na Figura 14a temos $AB = 10$, $AC = 5$ e $BD = 3$. Verificando, temos que

$$5 < 10 + 3 \quad (V); \quad 3 < 10 + 5 \quad (V); \quad 10 < 5 + 3 \quad (F)$$

II - Na Figura 14b temos $AB = 12$, $AC = 7$ e $BD = 5$. Verificando, temos que

$$7 < 12 + 5 \quad (V); \quad 5 < 12 + 7 \quad (V); \quad 12 < 7 + 5 \quad (F)$$

III - Na Figura 14c temos $AB = 15$, $AC = 10$ e $BD = 8$. Verificando, temos que

$$8 < 15 + 10 \quad (V); \quad 10 < 15 + 8 \quad (V); \quad 15 < 10 + 8 \quad (V).$$

Assim, o único caso em que é possível formar um triângulo é apresentado no item III.

4. Moinho de Água e Energia Eólica

Nesta seção são construídos pelos alunos dois protótipos, um moinho movido a água e um que simula a captação de energia utilizando o catavento. Para a construção, são utilizados papelão, palitos, canudos, garrafa plástica, um pequeno motor, lâmpada de led e fios.

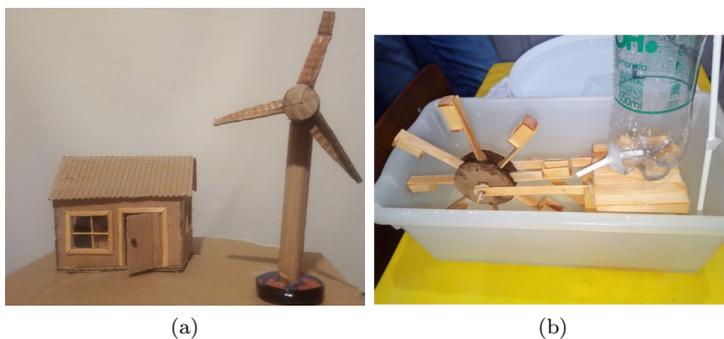


Figura 15: Energias sustentáveis

4.1. Conceitos explorados

A construção de um moinho movido a água e de um modelo de captação de energia eólica é muito proveitosa para utilizar conceitos geométricos de circunferências, círculos e divisão angular da circunferência com polígonos regulares.

4.1.1 Círculo e circunferência

Dados um ponto O do plano e um número real $R > 0$, uma circunferência de centro O e raio R é o conjunto dos pontos desse plano, tal que a distância até o ponto O é igual a R , Figura 16a, e o círculo de centro O e raio R é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a O é menor ou igual a R , Figura 16b.

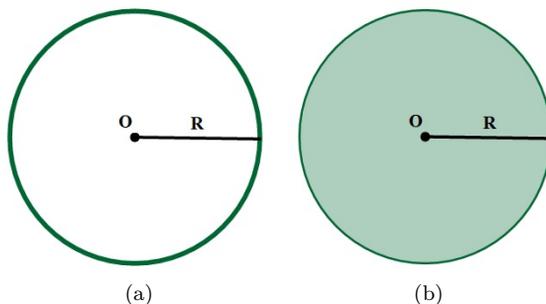


Figura 16: Círculo e circunferência

• Comprimento da circunferência

O quociente entre o comprimento de uma circunferência (C) pela medida do seu diâmetro (D), que é o dobro da medida do raio (R), é sempre um valor aproximadamente igual a 3,141592....

Esse número real 3,141592... corresponde, em matemática, à letra grega π (lê-se "pi"). Segundo Eves [3], a letra grega π foi usada pela primeira vez como representação do quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência em 1707, pelo matemático galês William Jones (1675 - 1749), mas o matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783) popularizou o π e suas relações com o círculo somente em 1737.

Assim,

$$\frac{C}{D} = 3,141592... \implies \frac{C}{2R} = \pi.$$

Logo, o comprimento de uma circunferência qualquer é dado por

$$C = 2\pi R \quad u.m.$$

• Área do círculo

Para verificarmos uma fórmula para calcular a área de um círculo vamos utilizar um processo simples de forma intuitiva que pode ser apresentado aos alunos do ensino médio.

Considere uma circunferência C de centro O e raio R e vamos obter uma fórmula para calcular sua área A_c .

Considere um quadrado Q de lado a inscrito na circunferência C . A área do quadrado Q pode ser determinada calculando as áreas de 4 triângulos congruentes de base a e altura h , ver Figura 17a. Assim, a área A_Q do quadrado Q é

$$A_Q = 4 \frac{ah}{2} = \frac{4ah}{2} \quad u.a.$$

Agora, considere um pentágono regular P inscrito na circunferência C , ver Figura 17b. Utilizando o mesmo processo para o quadrado Q , a área do pentágono será

$$A_Q = 5 \frac{ah}{2} = \frac{5ah}{2} \text{ u.a.}$$

Novamente, utilizando agora um hexágono regular H , ver Figura 17c, sua área do hexágono será

$$A_Q = 6 \frac{ah}{2} = \frac{6ah}{2} \text{ u.a.}$$

Em todos os casos descritos é importante notar que $4a$, $5a$ e $6a$ são os perímetros dos respectivos polígonos inscritos.

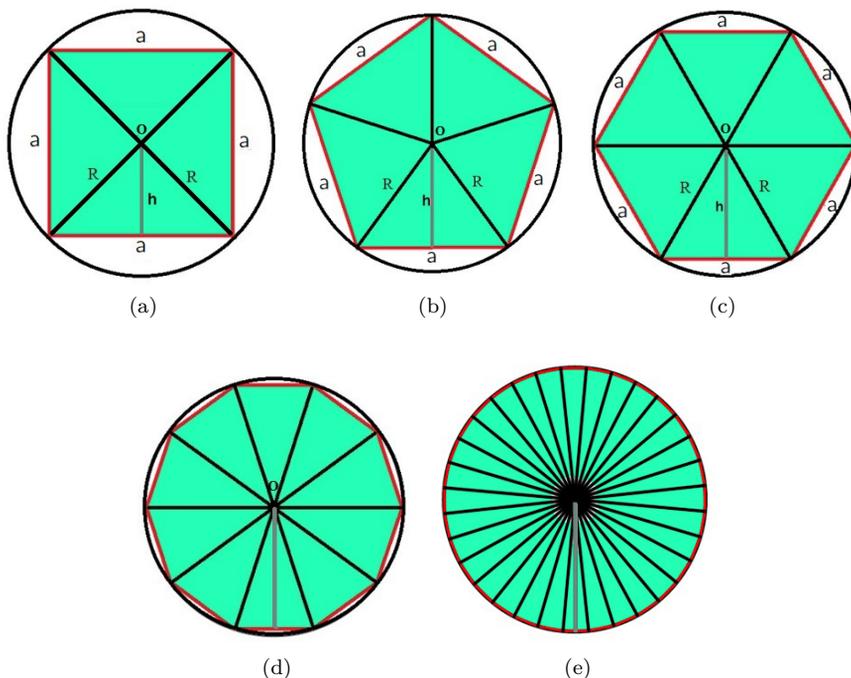


Figura 17: Polígonos Inscritos

Podemos notar, na sequência ilustrada na Figura 17, que quanto maior a quantidade de lados que o polígono tiver, mais ele estará se aproximando de um círculo. Dessa forma, considerando um polígono de n lados, então, $n \cdot a$ será o perímetro desse polígono; e seguindo o raciocínio anterior, se a quantidade n de lados for muito grande, a área A_n do polígono será muito próxima da área A_C do círculo.

Assim, a área desse polígono de n lados será

$$A_n = \frac{nah}{2} \text{ u.a.}$$

Logo,

$$A_n = A_c = \frac{nah}{2} \quad u.a.$$

Intuitivamente podemos perceber também que o comprimento da altura h dos triângulos será muito próximo do comprimento do raio R do círculo, e que o perímetro na do polígono aproximase do perímetro (comprimento) da circunferência $2\pi R$, ou seja,

$$na = 2\pi R$$

Fazendo as substituições teremos

$$A_c = \frac{nah}{2} = \frac{2\pi R R}{2} \quad u.a.$$

Logo, a área do círculo é dada por

$$A_c = \pi R^2 \quad u.a.$$

5. Considerações Finais

Ficou evidente o quanto a aprendizagem criativa através do movimento *maker* pode contribuir para o Ensino da Matemática e ajudar na interação com as diversas outras áreas do conhecimento. É possível dizer, a partir das observações feitas durante todo o processo de construção do projeto, que quando os alunos criam seus próprios protótipos, ficam mais engajados no aprendizado e a busca do conhecimento torna-se espontânea, o que dificilmente se encontra de forma tão ativa em uma aula tradicional.

O ganho na absorção dos conteúdos e a modificação positiva que se tem na relação entre os entes envolvidos no projeto é enorme e, com certeza, trará uma aceitação maior por parte dos alunos em outras atividades educacionais que lhes forem propostas futuramente.

Agradecimentos

Agradecimento à equipe gestora, professores, alunos e funcionários do Colégio Estadual Rio de Areia.

Referências

- [1] Freire, P. *Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 2002.
- [2] Brasil. Ministério da Educação *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino médio*. Brasília, 1999.
- [3] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 5a. ed. São Paulo: Unicamp, 2011.

- [4] Pinto, D. O. *O que é cultura maker e qual sua importância na educação?*. Pedagogia 2018. Disponível em: <<https://blog.lyceum.com.br/o-que-e-cultura-maker/>>. Acesso em: 29 de setembro de 2019.

Barbara Batista dos Santos de Andrade 
Colégio Estadual Rio de Areia
<babysaqu@gmail.com>

Luiz Carlos de Andrade 
Colégio Estadual Rio de Areia
<luizsaqu@gmail.com>

Recebido: 15/11/2019
Publicado: 03/03/2020

Criptografia como ferramenta no ensino da matemática

Cintia K. Rosseto

Suetônio de A. Meira

Resumo

O presente trabalho trata a Criptografia como ferramenta de ensino nas aulas de Matemática, tendo em vista que o ensino da matemática está cada vez mais comprometido, principalmente por conta do desinteresse dos alunos e da grande defasagem com a qual chegam ao Ensino Fundamental II. Diante disso, propomos a utilização de temas que tragam significado à aprendizagem e cativem o estudante. A criptografia pode ser abordada em vários conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio, como funções e matrizes, assuntos abordados no presente trabalho. Pretendemos, com a utilização da Criptografia no ensino dos conteúdos matemáticos, proporcionar sentido ao conteúdo estudado, de forma que a aprendizagem torne-se significativa para o aluno. Apresentaremos alguns modelos de atividades que abordam o tema criptografia e poderão ser desenvolvidas durante o ensino de funções, no 9º ano do E.F. e 1º ano do E.M., e, no ensino de matrizes, no 2º ano do E.M.

Palavras-chave: Criptografia; Funções; Aprendizagem.

Abstract

The present work treats Cryptography as a teaching tool in Mathematics classes, considering that the teaching of mathematics is increasingly compromised, mainly due to the lack of interest of the students and the large gap with which they arrive in Elementary School II. In view of this, we propose the use of themes that bring meaning to learning and captivate the student. The cryptography can be approached in several contents of Elementary and High School, like functions and matrices, subjects approached in the present work. We intend, with the use of Cryptography in the teaching of mathematical contents, to provide meaning to the content studied so that learning becomes meaningful for the student. We will present some models of activities that address the topic of cryptography and can be developed during the classes of functions, in the 9th year of E.S. and 1st year of H.S. and in the classes of matrices, in the 2nd year of H.S.

Keywords: Cryptography; functions; learning.

1. Introdução

A criptografia está presente em diversas situações do nosso cotidiano. Com o advento da era digital, tudo ao nosso redor passou a utilizar algum tipo de código para proteção, sejam os códigos de barras utilizados em supermercados até troca de mensagens no celular.

A palavra criptografia tem origem grega, *kryptos* significa oculto e *graphos*, escrever. É a ciência que estuda maneiras de esconder o significado da mensagem, de modo que somente quem possui a chave consegue ter acesso ao seu conteúdo.

Os professores de matemática possuem papel substancial na melhoria dos dados referentes à qualidade no ensino dessa disciplina, dando aos alunos condições para que, vista muitas vezes com certo repúdio, torne-se atrativa. Nesse sentido, esse trabalho tem sua contribuição na tentativa de melhorar a relação entre os alunos e a matemática, partindo de conceitos aplicados dentro da temática da criptografia.

No ensino da matemática, a inserção do estudo da criptografia torna-se uma ferramenta de suma importância pois, além de um assunto interessante, é muito abrangente, uma vez que envolve diversos conteúdos tratados no ensino fundamental e médio, servindo como meio de instigar o aluno e tornar as aulas atrativas e significativas.

“A falta de aplicações para os temas estudados em classe é o defeito mais gritante do ensino da Matemática em todas as séries escolares.” (Lima, Elon Lages, 2007, pag. 144)

Um dos desafios encontrados pelos professores de matemática é fazer com que os alunos não só aprendam os conteúdos, mas se interessem em aprendê-los. Como forma de atenuar os obstáculos encontrados no ensino-aprendizagem em matemática, o presente trabalho visa a proposta de atividades utilizando a temática da criptografia. Para tanto, foram abordados conteúdos como funções, aplicadas entre os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, da Escola Municipal Profa. Soledade Domingues Iglêsias, em Lucélia-SP.

Essas aprendizagens só serão possíveis na medida em que o professor proporcionar um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias. (PCN, 1997, pag. 41)

2. Material e Métodos

(...) o ensino da Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (PCN, 1997, pag. 31)

O padrão de desenvolvimento do ensino e aprendizagem da Matemática deve ser a abordagem de assuntos que despertem a curiosidade e que desencadeiem um processo que permita a construção de novos conhecimentos. O tema Criptografia pode ser utilizado como gerador de atividades didáticas que permitem aprofundar, fixar, revisar e exercitar os conteúdos matemáticos desenvolvidos nos ensinos Fundamental e Médio.

Apresentamos algumas atividades que abordam Criptografia e conteúdos estudados nas aulas de Matemática. Tais atividades devem ser realizadas em grupo, com orientação prévia do professor.

Seguem modelos de atividades:

- Cifra de Substituição

Um dos primeiros sistemas de criptografia conhecido foi elaborado pelo general Júlio César. O sistema monoalfabético, conhecido como Cifra de César, consistia em substituir cada letra do alfabeto seguindo um padrão bem determinado. Acredita-se que Júlio César substituía cada letra, pela terceira letra que se segue no alfabeto.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Assim, por exemplo, codificando a mensagem CRIPTOGRAFIA, temos FULSWRJUDILD.

Usando a Cifra de César podemos desenvolver atividades que podem ser aplicadas na introdução do estudo das funções.

O mesmo princípio pode ser utilizado deslocando-se diferentes quantidades de casa (chave), criando assim 26 possibilidades de substituições. Para facilitar o desenvolvimento das atividades, propomos a utilização dos discos giratórios, permitindo que os alunos criem e troquem mensagens criptografadas com os demais grupos.

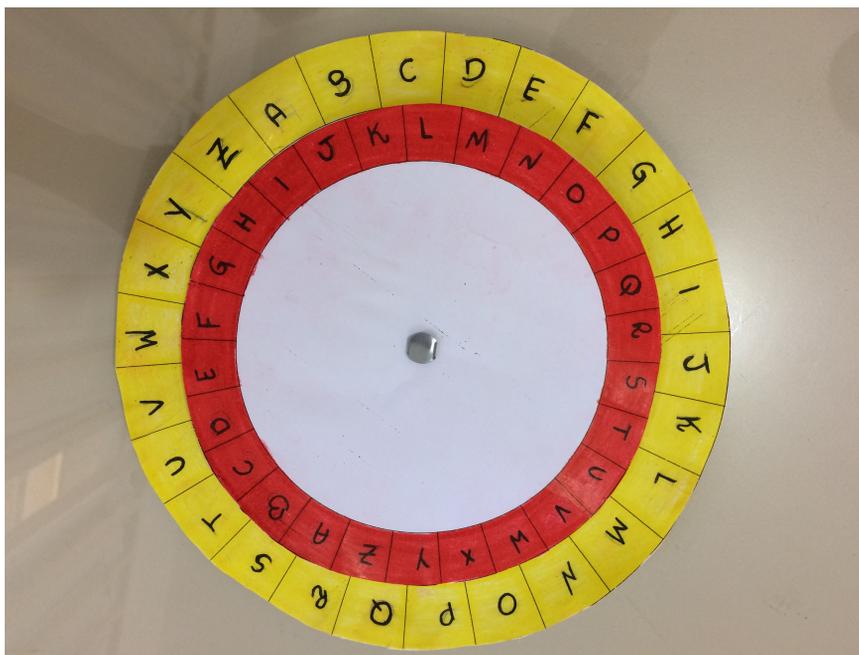


Figura 1: Disco giratório.

• Criptografia e Funções

O método de codificação deve ser perfeitamente eficaz, ou seja, o receptor deve ser capaz de transformar a informação codificada na informação original, sem ambiguidade ou falta de informação. Para isso, algumas propriedades devem ser seguidas nessas situações:

- i. ao codificar duas informações distintas, elas não podem ser transformadas em uma mesma informação codificada, pois o receptor teria dúvidas ao codificá-la;
- ii. uma informação, ao ser codificada, não pode produzir duas informações diferentes;
- iii. toda informação deve ter uma forma codificada, ou seja, toda e qualquer informação deve ser possível de ser transmitida, evitando informações incompletas.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36

Para que ocorra a codificação, cada informação deve ser transformada em uma única informação codificada e deve aceitar o processo inverso; portanto, devemos encontrar uma transformação bijetiva f . Como f é inversível, podemos garantir a revelação das informações.

Usaremos a função afim $f(x) = ax + b$. Essa função é sempre bijetiva sobre sua imagem e, por isso, admite inversa sobre sua imagem.

O método consiste em pegar uma informação e convertê-la em números através de uma função bijetiva e, pela aplicação de sua inversa, transformar esses números novamente na informação original.

Primeiramente, vamos associar cada letra do alfabeto a um número, como na tabela anterior.

Agora, escolhemos uma função $f(x)$ que receberá o valor da letra que queremos transmitir e gerar outro valor através de $f(x)$. Suponhamos que f seja a função $f(x) + 3x + 2$, que é chamada de função cifradora.

Escolhemos a palavra MENSAGEM que, ao passar pela função cifradora, será transformada na sequência de números 67 43 70 85 31 39 43 67. Esta é a mensagem que o receptor receberá.

$M \rightarrow 23$	$f(23) = 3 \times 23 - 2 = 67$
$E \rightarrow 15$	$f(15) = 3 \times 15 - 2 = 43$
$N \rightarrow 24$	$f(24) = 3 \times 24 - 2 = 70$
$S \rightarrow 29$	$f(29) = 3 \times 29 - 2 = 85$
$A \rightarrow 11$	$f(11) = 3 \times 11 - 2 = 31$
$G \rightarrow 17$	$f(17) = 3 \times 17 - 2 = 49$
$E \rightarrow 15$	$f(15) = 3 \times 15 - 2 = 43$
$M \rightarrow 23$	$f(23) = 3 \times 23 - 2 = 67$

O receptor, ao receber a mensagem codificada, realizará a operação inversa, que nesse caso é $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$, recompondo a mensagem original.

$f^{-1}(67) = \frac{67+2}{3} = 23$	$23 \rightarrow M$
$f^{-1}(43) = \frac{43+2}{3} = 15$	$15 \rightarrow E$
$f^{-1}(70) = \frac{70+2}{3} = 24$	$24 \rightarrow N$
$f^{-1}(85) = \frac{85+2}{3} = 29$	$29 \rightarrow S$
$f^{-1}(31) = \frac{31+2}{3} = 11$	$11 \rightarrow A$
$f^{-1}(49) = \frac{49+2}{3} = 17$	$17 \rightarrow G$
$f^{-1}(43) = \frac{43+2}{3} = 15$	$15 \rightarrow E$
$f^{-1}(67) = \frac{67+2}{3} = 23$	$23 \rightarrow M$

Quanto mais complexo for o código, mais difícil a mensagem fica para ser decifrada.

- Cifras de Hill

As cifras de Hill, baseadas em transformações matriciais utilizando um sistema poligráfico, foram inventadas por Lester S. Hill em 1929.

Atribuiremos um número a cada letra do alfabeto da seguinte forma:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

Codificaremos a frase VAMOS CODIFICAR e para isso devemos transformar pares sucessivos de texto em texto cifrado. Devemos escolher uma matriz quadrada; para facilitar escolheremos uma matriz 2×2 .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Agruparemos letras sucessivas de texto em pares, substituindo cada letra por seu valor numérico. Caso tenha um número ímpar de letras, acrescentaremos uma letra fictícia para completar o último par.

V	A	M	O	S	C	O	D	I	F	I	C	A	R
22	1	13	15	19	3	15	4	9	6	9	3	1	18

Converteremos cada par sucessivo p_1 e p_2 de letras de texto em um vetor-coluna.

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

e formaremos o produto Ap (vetor cifrado).

A matriz cifradora deve ser invertível módulo 26.

$$\text{Usaremos a matriz } \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para cifrar o par VA efetuaremos o produto matricial

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 116 \\ 47 \end{bmatrix}$$

Sempre que ocorrer um inteiro maior do que 25, ele será substituído pelo resto da divisão desse inteiro por 26.

$$\text{Assim, } \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 116 \\ 47 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

que fornecerá o texto cifrado LU.

Os cálculos para os demais vetores cifrados são

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 155 \\ 71 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 25 \\ 19 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 113 \\ 47 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 \\ 42 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 21 \\ 16 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 36 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 27 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 113 \\ 56 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

A mensagem transmitida será LUYSIUUPCJKAID.

Para decifrar devemos multiplicar cada vetor cifrado pelo inverso de A , que será obtido da seguinte forma:

$$A^{-1} = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})^{-1} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \pmod{26}$$

onde $(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})^{-1}$ é o recíproco do resíduo de $(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \pmod{26}$.

Para auxiliar os cálculos abaixo, forneceremos a tabela de recíprocos módulo 26.

a	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
a^{-1}	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

Assim,

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3$$

$$A^{-1} = 3^{-1} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -54 \\ -18 & 45 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

Os cálculos para decifrar os vetores cifrados são

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 516 \\ 495 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 481 \\ 561 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 513 \\ 471 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 405 \\ 472 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 243 \\ 214 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 107 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 148 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

Os equivalentes alfabéticos desses vetores são VA MO SC OD IF IC AR que fornecem a mensagem "vamos codificar".

- Cifra de Vigenère

CIFRA DE VIGNÈRE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Figura 2: Cifra de Vignère.

A cifra de Vignère é uma versão simplificada da cifra de substituição polialfabética, inventada em 1465, por Leon Battista Alberti, conhecido como pai da criptologia ocidental. Recebeu esse nome em homenagem a Blaise de Vignère, diplomata e criptógrafo francês, mas o primeiro registro foi descrito por Giovan Batista Belaso em *La cifra del Signore Giovan Batista Belaso*, de 1553.

A cifra de Vignère usa não apenas um, e sim 26 alfabetos cifrados distintos para criar a mensagem cifrada. Além da tabela, Vignère inseriu palavras-chave utilizadas na codificação e na decodificação da mensagem.

Como exemplo, considere que a palavra-chave seja GATO e que a mensagem seja VAMOS ATACAR. Repetiremos a chave até acabarem as letras da mensagem, da seguinte forma:

Chave	G	A	T	O	G	A	T	O	G	A	T
Mensagem	V	A	M	O	S	A	T	A	C	A	R

Para codificarmos a mensagem procuraremos na Figura 2 a interseção da chave (linha) com a mensagem (coluna). Assim,

Chave	G	A	T	O	G	A	T	O	G	A	T
Mensagem	V	A	M	O	S	A	T	A	C	A	R
Codificado	B	A	E	C	Y	A	M	O	I	A	R

3. Resultados e Discussão

O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano, e das conexões que ele percebe entre os diferentes temas matemáticos. (PCN, 1997, pag. 38)

A criptografia como ferramenta de ensino é de grande valia, conseguimos relacionar Matemática e História, mostramos aplicações no dia a dia, ressaltamos a importância da Matemática, e, principalmente, cativamos os alunos.

Os alunos envolvidos nas atividades demonstraram mais entusiasmo durante as aulas, maior dedicação e uma melhora significativa no rendimento escolar. A repercussão das atividades resultou na criação da Oficina de Criptografia, que permitiu a participação de alunos dos demais anos.

As atividades foram executadas no segundo e terceiro bimestres. Nesse período, percebemos uma melhora no desempenho escolar dos estudantes, como mostra a tabela a seguir

	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre
9º ano B	6,4	7,2	7,3
9º ano E	5,6	6,1	6,8

4. Conclusão

Partindo dos resultados preliminares, podemos concluir que os alunos envolvidos obtiveram melhor rendimento nas aulas, além do ganho cultural.

Usando a criptografia como ferramenta no ensino, atribuímos significado ao conceito estudado, de forma que o aluno sinta-se motivado a aprendê-lo. Assim, ressaltamos a importância de inserir o uso de assuntos ligados à realidade do aluno, que estimulem o empenho dos mesmos nas aulas, contribuindo de forma significativa para sua aprendizagem.

Referências

[1] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. MEC-SEF. 1997.

- [2] COUTINHO, Severino Collier. *Números Inteiros e Criptografia RSA* 1^a ed. Rio de Janeiro. Impa. 2014.
- [3] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. Coleção Profmat. 1^a ed. Rio de Janeiro. SBM. 2014.
- [4] LIMA, Elon Lages; *et al.* *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 1. 10^a ed. Rio de Janeiro. SBM. 2010.
- [5] LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino*. 3^a ed. Rio de Janeiro. SBM. 2007.
- [6] SINGH, Simon. *O Livro dos Códigos*. trad. Jorge Calife. 4^a ed. Rio de Janeiro. Record. 2004.

Cintia K. Rosseto
Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" - Unesp
<cintia.kohori@gmail.com>

Suetônio de A. Meira
Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" -Unesp
<toni.meira@gmail.com>

Recebido: 27/12/2020
Publicado: 11/03/2020

Metodologia baseada em recursos computacionais para a introdução de limites no Ensino Médio

Helena Corrêa Ribeiro

André Fabiano Steklain Lisbôa

Resumo

O presente artigo tem como objetivo apresentar uma metodologia de ensino baseada em Recursos Computacionais para a introdução do conceito de limite no ensino médio, utilizando os *softwares Geogebra* e *Maxima*. Este trabalho faz parte de uma proposta mais ampla de resgatar o ensino do Cálculo no âmbito escolar, utilizando a tecnologia como uma ferramenta facilitadora no processo ensino-aprendizagem. As ferramentas utilizadas servem para visualização dos conceitos e cálculo algébrico, duas situações que impõem obstáculos ao aprendizado de cálculo pelos estudantes.

Palavras-chave: Cálculo; recursos computacionais; ensino médio.

Abstract

The goal of this paper is to present a teaching methodology based on computational resources in order to introduce the concept of limit in high school using the *softwares Geogebra* and *Maxima*. This work is part of a broader project to rescue the teaching of Calculus in high school using technology as a facilitating tool in the teaching-learning process. These tools are mainly used for the visualization of concepts and algebraic calculations, two situations that impose obstacles to the learning of calculus at this level.

Keywords: Calculus; computational resources; high school.

1. Introdução

O Cálculo é uma ferramenta básica para todos os profissionais que atuam na área de Ciências Exatas. Nos dias atuais profissionais que atuam em áreas diversas, como Ciências Biológicas, Ciências da Saúde e até Ciências Humanas, acabam por utilizar essas ferramentas em seu cotidiano. Mesmo profissionais com formação em nível técnico eventualmente necessitam de Cálculo.

Apesar de ser necessário, o índice de reprovação nas disciplinas de Cálculo são tradicionalmente grandes nas instituições de ensino superior brasileiras. Segundo Silva e Souza (2014):

Sabe-se que o cálculo é de fundamental importância para os cursos de matemática, engenharia, física, ciências da computação, entre outros. Sendo assim, devemos levá-lo mais a sério, porque os alunos desses cursos entram nas universidades sem estar devidamente preparados, causando, então, um índice alarmante de desistências e reprovações. (Silva e Souza, 2014)

Vários artigos relatam também a grande evasão dos cursos que incluem disciplinas de Cálculo no currículo. Em geral, tais números são associados aos altos índices de reprovação nessas disciplinas. A evasão é ocasionada por um conjunto de fatores. Um deles é a dificuldade em operações básicas de matemática. Segundo Rezende (2003):

...as dificuldades de aprendizagem relacionadas à operação de limite estão associadas muito mais às suas dificuldades em manipulações algébricas (fatoração de polinômios, relações trigonométricas, simplificações algébricas, “produtos notáveis” etc) do que à sua interpretação analítica (Rezende, 2003).

Ainda para Frescki e Pigatto (2009), é necessário um conhecimento prévio sólido de manipulações algébricas, operações e funções por parte dos alunos para que o ensino do cálculo tenha sucesso. Estudos recentes (Sadler e Sonert, 2018) têm demonstrado que, de fato, o domínio da matemática preparatória para Cálculo possui um impacto maior do que o ensino de Cálculo no Ensino Médio na *performance* dos estudantes em Cálculo no Ensino Superior. Isso mostra que o ensino de Cálculo como disciplina não pode substituir o ensino dos fundamentos matemáticos necessários. Por outro lado, como já dissemos, o Cálculo está cada vez mais presente em áreas que tradicionalmente não possuem essa disciplina nos respectivos currículos de ensino. Os profissionais que atuam nessas áreas acabam por utilizar as ferramentas do Cálculo, porém, sem ter um contato prévio com a disciplina.

Uma maneira de conciliar essas duas visões aparentemente antagônicas passa por uma maneira de tratar as dificuldades dos estudantes envolvendo operações matemáticas. Uma abordagem tradicional do ensino de Cálculo no Ensino Médio acaba passando obrigatoriamente pela etapa em que os estudantes precisam efetuar essas operações. Se os estudantes apresentarem dificuldades com as operações conseqüentemente deixarão de absorver o conteúdo de Cálculo.

Um modo de contornar essa dificuldade é através da utilização de recursos computacionais. *softwares* gratuitos oferecem a possibilidade de efetuar não somente cálculos numéricos, mas permitem também tratar dinamicamente o gráfico das funções e fazer cálculos algébricos de dificuldade moderada. Nesses *softwares* algumas operações básicas do Cálculo, como a derivação e a integração, podem ser efetuadas automaticamente, sem a necessidade de o estudante empreender esforço nessas operações.

A ideia deste trabalho é utilizar tais recursos para fornecer uma introdução ao Cálculo ao estudante do Ensino Médio. Através desta abordagem ele fica livre da necessidade de saber de antemão todo o ferramental algébrico e teórico do Cálculo e, ao mesmo tempo, é introduzido, de maneira intuitiva, aos diferentes conceitos. As operações matemáticas em si deverão ser tratadas separadamente. A utilização de *softwares* faz com que os estudantes possam construir seus próprios problemas e interagir com as soluções, deixando as operações matemáticas por conta do *software*. Os estudantes podem então continuar os estudos da matemática preparatória tendo como um dos objetivos a aprendizagem do Cálculo, independentemente da área que for seguir. Para aqueles que não forem seguir áreas em que o Cálculo faz parte do currículo, esta introdução pode ser útil caso exista a necessidade de utilizá-la posteriormente.

Este trabalho é dividido da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos um breve histórico sobre o ensino de Cálculo no Brasil. Na Seção 3 introduzimos os recursos computacionais como ferramentas no ensino de matemática. Na Seção 4 a definição de limite é explorada com a utilização do *Geogebra*.

Na Seção 5 o *wxMaxima* é utilizado para explorações adicionais no cálculo de limites. Finalmente, na Seção 6 apresentamos nossa conclusões.

2. O ensino de cálculo no Ensino Médio brasileiro

O ensino no Brasil remonta o ano de 1549, sendo conduzido por pouco mais de duzentos anos pelos padres jesuítas. Segundo Miorim (1998), nessa época a educação era baseada na tradição clássico-humanista, sendo a matemática pouco estudada. A partir de 1722 foram criadas as aulas régias originadas da reforma pombalina. Essas aulas consistiam no ensino de disciplinas isoladas na forma de aulas avulsas, sem qualquer planejamento escolar. Disciplinas como Aritmética, Álgebra e Geometria eram introduzidas nas aulas régias. A matemática não se difundiu nessa época no Brasil, pois poucos alunos inscreviam-se nessas aulas. De um modo geral, as ciências exatas e naturais não eram vistas com bons olhos, e a formação do ensino secundário ainda era humanista.

O Primeiro Movimento Internacional para a modernização do ensino de matemática, teve início por volta de 1870. Criou-se a Comissão Internacional para o Ensino de Matemática, que propiciou a publicação de artigos voltados a tal área. Uma das maiores preocupações era com o ensino secundário, onde a matemática era ensinada em descompasso com o ensinado nas universidades. Entre as propostas para modificar o ensino secundário, estava a implementação do Cálculo ao currículo.

Em 1890, no Brasil República, Benjamin Constant, então ministro da Instrução, Correios e Telégrafos, deu origem a uma profunda reforma na educação. Houve a extinção da educação clássico-humanista, para a introdução de uma formação científica. A reforma seguiu a filosofia de Augusto Comte, o positivismo, na qual a matemática passava a ser de fundamental importância. O ensino secundário passou a ter sete anos, e o Cálculo Diferencial e Integral foi inserido no currículo, seguindo, em parte, a sugestão do Primeiro Movimento Internacional, pois era voltado apenas ao estudo de mecânica geral. A Reforma enfrentou diversas manifestações contrárias, e o ensino brasileiro passaria por várias reformas até 1930, sem que houvesse grandes mudanças. O ensino secundário continuava sendo considerado apenas como uma preparação para os cursos de medicina, direito e engenharia.

Em 1931, Francisco Campos dividiu o ensino secundário em dois ciclos. O primeiro era o ensino fundamental, com cinco anos de duração, e o segundo, complementar, com apenas dois anos. O ensino da matemática deixava de ter como objetivo apenas o desenvolvimento do raciocínio lógico. Ela começava a ser ensinada também com foco na aplicação em diversas áreas do conhecimento. Em relação à divisão do ensino secundário, na quarta e quinta série do ciclo fundamental, conceitos básicos de Cálculo Infinitesimal foram introduzidos. Na parte complementar o Cálculo fazia parte de dois programas, do pré-politécnico e do pré-médico, ficando de fora apenas do pré-jurídico. De acordo com Miorim (1998):

A proposta também trazia uma visão mais moderna dos conteúdos matemáticos, sugerindo a eliminação de “assuntos de interesse puramente formalístico”, de “processos de cálculos desprovidos de interesse didático” e introduzindo o conceito de função e noções de cálculo infinitesimal”(Miorim, 1998).

O ensino do Cálculo na educação básica resistiu à reforma de Capanema em 1942, onde o ensino básico passou por uma reestruturação. O ensino secundário passou a ser dividido em dois ciclos

paralelos, o Clássico e Científico. Nesta divisão estudantes que queriam seguir para a universidade cursavam o Clássico e os estudantes que queriam trabalhar após o ensino secundário, cursavam o Científico, o qual por sua vez era dividido em três cursos: Industrial, Comercial e Agrícola. O Cálculo ficou restrito ao Científico, sendo ensinado na terceira série derivadas, algumas aplicações e problemas de máximos e mínimos.

O Movimento Matemática Moderna na Europa e Estados Unidos ganhou força após a Segunda Guerra Mundial. Segundo Pinto (2005), esse movimento atingiu “não somente as finalidades do ensino, como também os conteúdos tradicionais da Matemática, atribuindo uma importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos”. Os seus efeitos chegaram ao Brasil no início da década de 60. A álgebra e o estudo da teoria dos conjuntos, com toda sua simbologia, foram priorizados. O Cálculo foi então excluído da educação básica, por não haver mais espaço no currículo, inchado pelo rigor e formalismo agora exigidos e ditos como modernos para o ensino da matemática. Assim, o que havia de mais moderno na matemática foi retirado da educação básica. Para Ávila (1991):

Portanto, descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. Incurreram os reformistas naquele erro de recusar a pedra angular, aquela que seria a mais importante na construção do edifício... (Ávila, 1991)

Desde então, no Brasil, questões de Cálculo não são mais cobradas em vestibulares, e o mesmo foi abandonado como conteúdo a ser abordado no ensino médio e passou a ser exclusividade de cursos superiores.

3. Recursos Computacionais na Matemática

Os recursos computacionais estão cada vez mais presentes nas salas de aula, e ao ignorá-los corre-se o risco de “tornar a escola tão anacrônica em relação à vida exterior a seus muros a ponto de ter um efeito inócuo na formação dos alunos” (Giraldo, Caetano e Mattos, 2012). Contudo, a utilização indiscriminada dessas ferramentas pode impactar o ensino de forma negativa.

Para que essa metodologia seja bem-sucedida é preciso relacionar os conceitos e propriedades aprendidos normalmente de forma estanque em sala de aula com outras representações que podem ser fornecidas pela utilização dos recursos computacionais. Essa interação, segundo Giraldo, Caetano e Mattos (2012), reforça a ideia de que experiência concreta e o pensamento abstrato não precisam adquirir um caráter antagônico. As próprias limitações de cada recurso, como erros de arredondamento, podem ser exploradas de forma a aprofundar a discussão, sendo uma valiosa ferramenta pedagógica.

Neste trabalho iremos utilizar dois recursos computacionais (*softwares*) diferentes para a exploração dos conceitos de Cálculo. Os dois *softwares* utilizados serão o *Geogebra* e o *wxMaxima*, sendo o último uma interface gráfica para o *Maxima*. Cada um dos *softwares* utilizados servirá para um propósito específico dentro de cada tópico. Trataremos de ambos nas subseções seguintes.

3.1. Geogebra

O *Geogebra* é um *software* livre de geometria dinâmica, álgebra e cálculo. Pode ser instalado também nos principais sistemas operacionais ou utilizado *online* através do site <http://geogebra.org>. Esse programa é de fácil exploração pelo usuário, pois possui uma interface mais amigável e intuitiva, sendo bastante difundido entre os professores de matemática. A Figura 1 mostra um exemplo de interface do programa.

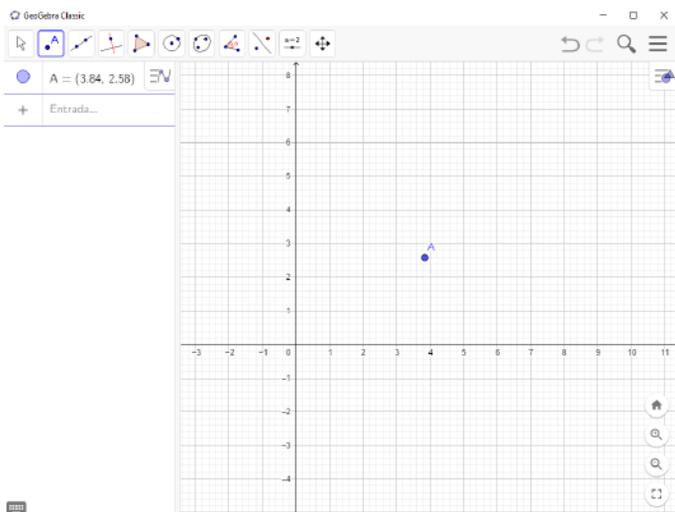


Figura 1: Tela do *Geogebra*. Os objetos e medidas podem ser construídos a partir de comandos ou acessados pelos botões na parte superior.

Em geral o *Geogebra* é utilizado para explorações envolvendo geometria plana (embora existam versões voltadas à geometria espacial). Ele inclui uma série de ferramentas para a exploração de funções reais, incluindo o cálculo de algumas derivadas e integrais. O resultado fornecido pelo *Geogebra* para essas duas operações é sempre numérico, o que não impede que possa ser utilizada para fornecer uma interpretação geométrica de tais operações.

3.2. Maxima

O *Maxima* (Vodopiec, 2018; Wikipedia, 2019) é um *software* classificado como *Sistema de Computação Algébrica e Simbólica* (SCAS). Isso significa que o programa é capaz de realizar cálculos numéricos e simbólicos, além de produzir gráficos em duas ou três dimensões. Existem *softwares* comerciais nessa mesma categoria que possuem recursos mais avançados. No entanto escolas públicas em geral não têm condições de arcar com o custo da aquisição e manutenção. O *Maxima* é um *software* livre, o que significa que pode ser instalado gratuitamente nos principais sistemas operacionais.

O *Maxima* é capaz de resolver equações e sistemas de forma simbólica, bem como operar com matrizes, construir gráficos a partir de funções, e calcular derivadas e primitivas de várias funções,

o que permite utilizá-lo para efetuar operações algébricas necessárias ao Cálculo Diferencial e Integral, objetivo principal deste trabalho.

Trabalhar com o *Maxima* pode ser difícil no início, pois é necessário operar com uma série de comandos específicos, sendo, de certo modo, uma linguagem de programação. As versões mais novas do *Maxima* possuem uma interface gráfica mais amigável. Neste trabalho utilizaremos uma versão de interface gráfica chamada *wxMaxima*. A interface do *wxMaxima* está apresentada na Figura 2. O usuário inexperiente com os comandos pode se orientar pelo *menu* na parte superior deste programa, que oferece as ferramentas para fazer os cálculos desejados. Com um planejamento adequado da aula, o professor certamente terá sucesso em introduzir o uso do *software*.

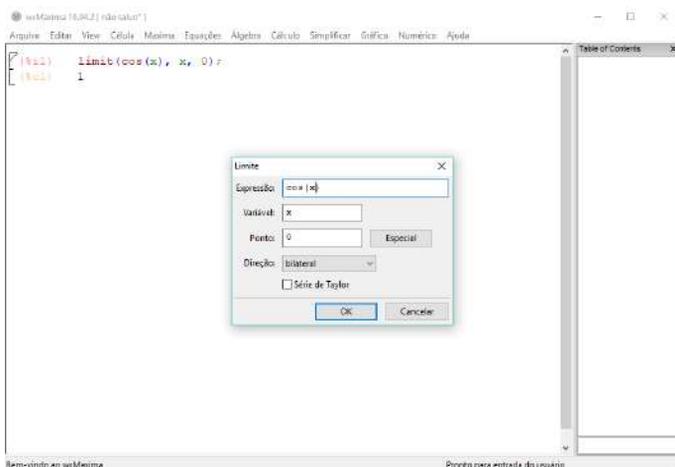


Figura 2: Tela do *wxMaxima*. O limite pode ser calculado utilizando um comando direto ou acessando o *menu* na barra da parte superior.

4. Limites com o uso do *Geogebra*

O conceito de limite de uma função real não é abordado no Ensino Médio pois o seu entendimento depende de um formalismo que é considerado avançado para o nível dos estudantes nessa etapa de formação. O conceito de ponto de acumulação de um conjunto, fundamental para a definição formal de limite, é bastante abstrato. Por exemplo, em um espaço topológico temos a seguinte definição:

Definição 1. Um ponto P é um ponto de acumulação ou ponto limite de um conjunto X se, para toda vizinhança de P , existe ao menos um ponto de X diferente de P .

Apesar de o conceito de vizinhança ser abstrato, ele pode ser ilustrado para subconjuntos de \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 através do *Geogebra*, conforme ilustrado na Figura 3. Nessa atividade a vizinhança de um ponto é definida como o disco centrado nesse ponto. O conjunto X é definido como toda a região na cor bege, incluindo o ponto isolado D . O controle deslizante na parte superior direita permite controlar o raio de todas as vizinhanças. Neste caso percebe-se que o ponto $A \in X$, por exemplo, é ponto de acumulação, pois toda vizinhança de A , excluindo-se o próprio A , possui pontos de X . O ponto $D \in X$, ao contrário, apesar de pertencer ao conjunto, não é ponto de

acumulação, pois existe uma vizinhança tal que, excluindo-se D , não possui nenhum ponto de X . De maneira análoga temos pontos como o B , que não pertence a X e não é ponto de acumulação. Por último, existem pontos como o ponto C , que não pertence ao conjunto (está na fronteira de um conjunto aberto) mas é ponto de acumulação, pois toda vizinhança de C possui pontos de X . Essa construção é bastante simples e possui uma vantagem sobre uma figura estática, permitindo ao estudante interagir com a construção, mudando o raio dos discos através do controle deslizante. Dessa maneira o estudante pode perceber, por exemplo, que mesmo para pontos que não são de acumulação, existem vizinhanças que englobam pontos de X sendo o raio r suficientemente grande. Note que essa construção não substitui o formalismo envolvido, sendo meramente uma ilustração do conceito.

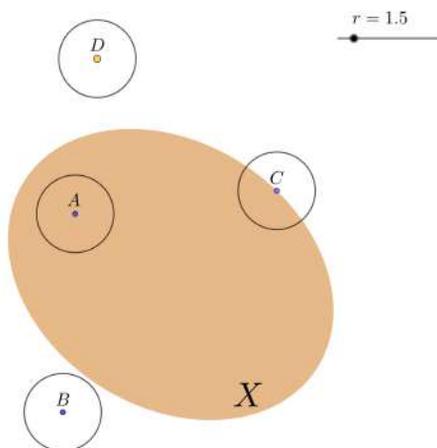


Figura 3: Figura do *Geogebra* contendo material sobre pontos de acumulação. O conjunto X é definido pelos pontos de cor bege, incluindo o ponto D . O controle deslizante refere-se ao raio do círculo ao redor de cada ponto. Nesse caso, os pontos A e C são pontos de acumulação, mas não os pontos B e D .

A definição formal de limite normalmente é um conceito de difícil assimilação pelos estudantes. É possível trabalhar com uma definição intuitiva como a fornecida por Stewart (2016):

Definição 2. Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

e dizemos

“o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a ℓ ”,

se pudermos tomar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de ℓ (tão próximos de L quanto quisermos), tomando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a .

O problema dessa definição é que não ficam claros os conceitos *arbitrariamente próximo* e *suficientemente próximo*. Para um estudante interessado apenas nas ferramentas do Cálculo, tal noção

é suficiente para que ele possa prosseguir no estudo das técnicas para obtenção de limites. Para o aluno de ensino médio interessado no conceito, essa definição pode causar alguma confusão. Tomemos a definição precisa, dada por Stewart (2016):

Definição 3. Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a , exceto possivelmente o próprio a . Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a , é ℓ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

se, para todo número $\varepsilon > 0$, houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Apesar de mais abstratos, os conceitos *arbitrariamente próximo* e *suficientemente próximo* ficam claros com a introdução dos números ε (um número positivo qualquer) e δ (um número adequado ao comportamento da função). O aluno de ensino médio em geral não possui o grau de capacitação necessário para demonstrar a existência de um determinado limite. A visualização deste conceito, porém, pode ser produtiva para este aluno.

Dado a um ponto de acumulação do domínio da função f , seja L um número real. Vamos usar o *software* para testar se o limite de $f(x)$, quando x tende a a é ℓ . Pela Definição 3 devemos ter $0 < |x - a| < \delta$. Isto é equivalente a escrever

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

ou seja, que x pertence ao intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$, com exceção do ponto a . De maneira análoga temos $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, o que significa que $f(x)$ está no intervalo aberto $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Vamos primeiramente trabalhar com uma função contínua, isto é tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Escolhemos a função quadrática $f(x) = x^2$ por ser simples e ao mesmo tempo exibir a dependência de δ com o ponto a . A construção pode ser visualizada na Figura 4. Marcamos o ponto $A = (a, 0)$ no eixo x e o ponto $L = (0, \ell)$. Os valores ε e δ são controlados através de controles deslizantes. Dado um $\varepsilon > 0$, construímos os pontos auxiliares $(0, \ell \pm \varepsilon)$ e traçamos duas retas perpendiculares ao eixo y passando por tais pontos. Essas duas retas são fronteiras, portanto, do intervalo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. De maneira análoga construímos os pontos auxiliares $(a \pm \delta, 0)$, que são fronteira do intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$. Sabendo que uma função contínua sempre possui um valor máximo e um valor mínimo em um intervalo fechado, o *Geogebra* permite avaliar o valor máximo e mínimo dessa função no intervalo $[a - \delta, a + \delta]$. Vamos denotar esses valores $Max_f(a, \delta)$ e $Min_f(a, \delta)$, respectivamente. Com estes valores podemos então avaliar a variação da função f quando x assume os valores permitidos dentro do intervalo $[a - \delta, a + \delta]$. Para mostrar visualmente a variação de f no intervalo construímos um retângulo cujos vértices são os pontos cujas coordenadas são $(a \pm \delta, Max_f(a, \delta))$ e $(a \pm \delta, Min_f(a, \delta))$. A função f terá limite ℓ para x tendendo a a se, para qualquer valor de ε o retângulo gerado puder ser encaixado entre as duas retas escolhendo δ suficientemente pequeno. Nessa primeira construção os controles referentes aos valores ε e δ são independentes para permitir ao estudante explorar esses intervalos, tentando encontrar manualmente um valor de δ para cada ε .

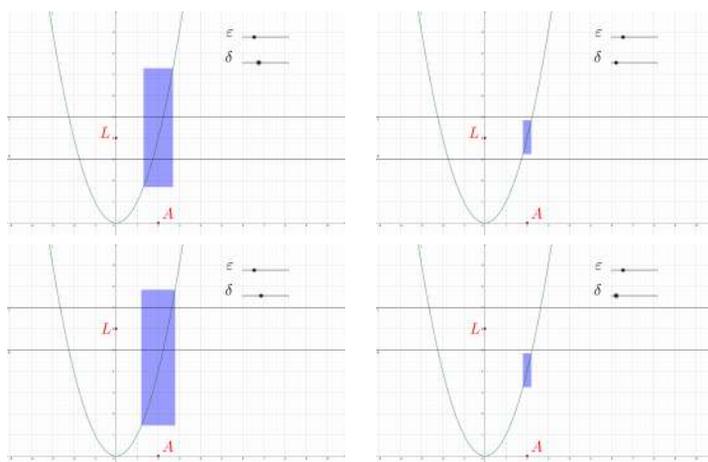


Figura 4: Visualização do conceito de limite utilizando o *Geogebra* para a função $f(x) = x^2$. O estudante pode explorar δ independentemente para verificar se a condição de limite é satisfeita para diferentes valores de ϵ . Temos que $\ell = 4$ é limite de $f(x) = x^2$ quando x tende a 2. No primeiro caso (acima, à esquerda) o parâmetro δ não é pequeno o suficiente para que a variação de f esteja totalmente contida no intervalo $(4 - \epsilon, 4 + \epsilon)$. Conforme, porém, o segundo caso (acima, à direita) o parâmetro δ pode sempre ser reduzido de forma a atender o requerimento. Temos que $\ell = 6$ não é limite de $f(x) = x^2$ quando x tende a 2. No terceiro caso (abaixo, à esquerda) podemos tomar δ grande o bastante tal que alguns valores de f estejam no intervalo $(6 - \epsilon, 6 + \epsilon)$. No entanto, para pequenos valores de ϵ , conforme o quarto caso (abaixo, à direita) a variação de f nunca está totalmente dentro desse intervalo, não importando o valor de δ .

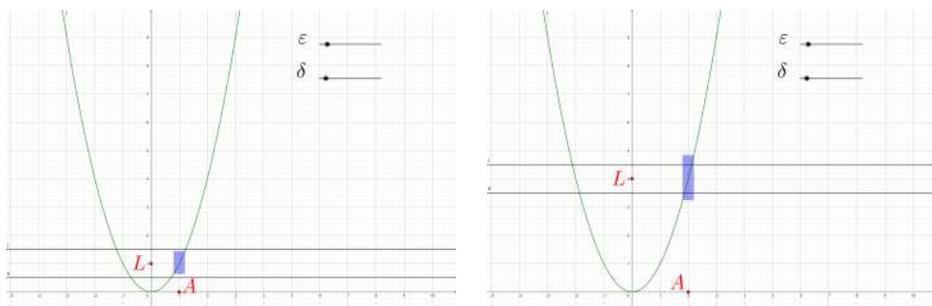


Figura 5: Dependência de δ para $f(x) = x^2$. No primeiro caso (à esquerda) temos que o limite para x tendendo a $a = 1$ é $\ell = 1$ e, para $\epsilon = 0,5$ é suficiente tomar $\delta = 0,2$. No segundo caso (à direita) temos que o limite para x tendendo a $a = 2$ é $\ell = 4$, mas para $\epsilon = 0,5$ o valor $\delta = 0,2$ não é suficiente para termos $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Para demonstrar que $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$, dado $\epsilon > 0$, basta tomar δ conforme a expressão

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{1 + 2|a|} \right\}. \quad (1)$$

Se $|x - a| < \delta$ vale a seguinte identidade:

$$|x + a| = |x - a + 2a| \leq |x - a| + |2a| < \delta + 2|a|. \quad (2)$$

Portanto temos, finalmente,

$$|x^2 - a^2| = |x - a||x + a| < \delta(1 + 2|a|) \leq \epsilon, \quad (3)$$

o que finaliza a demonstração.

A demonstração pode ser difícil para um aluno do Ensino Médio seguir, porém ela carrega alguns aspectos interessantes. O primeiro aspecto é o fato da dependência de δ do ponto a ficar explícita através da Equação 1. Essa dependência pode ser visualizada através do *Geogebra* fixando ϵ e δ . Para diferentes valores a , o valor δ utilizado pode não ser suficientemente pequeno para o retângulo ficar contido entre as linhas, como mostra a Figura 5. Outro aspecto interessante é que o valor δ necessário é fornecido na demonstração como função de ϵ e a . Esse valor pode ser implementado no *Geogebra* de forma a termos um valor δ fornecido automaticamente para ϵ e a dados. O resultado pode ser visto na Figura 6.

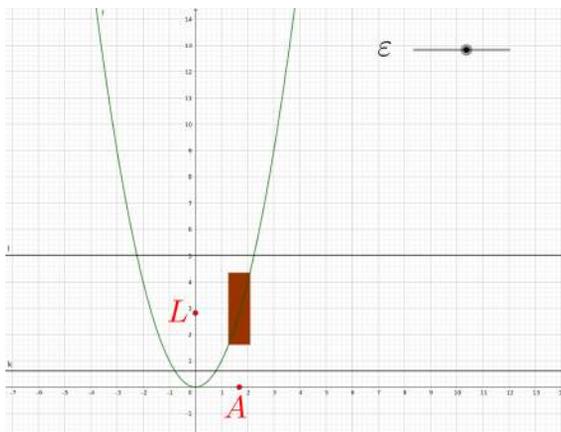


Figura 6: Visualização da demonstração de que $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$. O valor de δ dado através da Equação 1 pode ser reduzido para facilitar a visualização do conceito, que envolve uma desigualdade restrita. Nesse caso escolhemos trabalhar com 80% de tal valor, mas qualquer redução é válida, desde que o número permaneça positivo.

É preciso tomar alguns cuidados nessa construção. Entre os principais está o fato de que os intervalos envolvidos na definição de limite são *abertos*, e a função não precisa estar necessariamente definida em a . Por isso é importante utilizar tal construção com vários tipos de função, com características distintas.

Vamos analisar a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ para $x \neq 2$ e $g(2) = 6$. Note que essa função corresponde à mesma função f estudada anteriormente, salvo em $x = 2$, em que g corresponde a um valor diferente. A função g é implementada facilmente no *Geogebra* utilizando o comando *Se*. Conforme pode ser visto na Figura 7, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$, mesmo que $g(2)$ seja 6. Este exemplo é

importante pois mostra que o limite de uma função em um determinado ponto é independente do valor da função nesse ponto. De fato, mesmo que a função não estivesse definida nele definida o limite continuaria a existir.

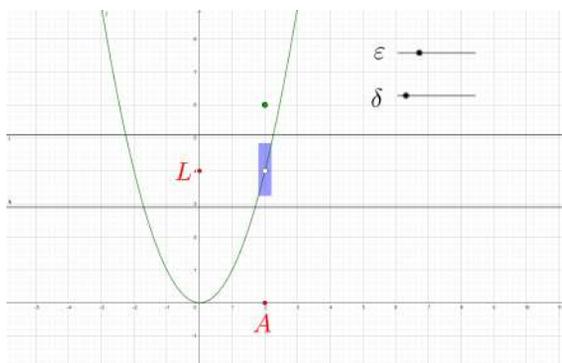


Figura 7: Caso ilustrando o caso de uma função descontínua em que o limite existe. Neste caso tem-se $g(2) = 6$ e $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$.

A seguir, vamos considerar a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Esta função também pode ser implementada no *Geogebra* através do comando *Se*. Temos que $h(0) = 1$ por definição. Vamos verificar o que ocorre no limite de x tendendo a 0. Fazendo $a = 0$ na construção do *Geogebra* verifica-se que a altura do retângulo de variação de h no intervalo $(-\delta, \delta)$ sempre será no mínimo 1. Isso ocorre porque nesse intervalo, não importando o valor $\delta > 0$, existem sempre valores próximos de zero e maiores do que 1, de forma que $Max_h(0, \delta) = 1$ e $Min_h(0, \delta) = 0$. Considerando $\varepsilon = 1/2$, por exemplo, a variação de h estará sempre fora do intervalo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, não importando o valor de ℓ . Isso nos leva a concluir que o limite de $h(x)$ quando x tende a 0 não existe.

A exploração de limites de diferentes funções também é possível com essa construção no *Geogebra*. Fica claro, portanto, a interatividade e flexibilidade fornecidas pela ferramenta computacional em detrimento de exemplos estáticos. É necessário deixar claro ao aluno que a exploração dos casos através da ferramenta computacional é um auxílio à visualização destes conceitos, mas não substitui uma demonstração formal.

5. Limites com o uso do *wxMaxima*

O *wxMaxima* pode ser utilizado de forma complementar para efetivamente calcular limites. A ideia é utilizá-lo para fornecer ao estudante um método de cálculo que permita a reflexão dos resultados que são mostrados na tela. O comando para calcular limites no *wxMaxima* é o *limit*, utilizando como primeiro argumento a função, o segundo a variável e terceiro o valor em que se deseja calcular o limite. Por exemplo, ao calcular o limite da função $f(x) = x^2$ acima quando x tende a 0, temos o resultado abaixo:

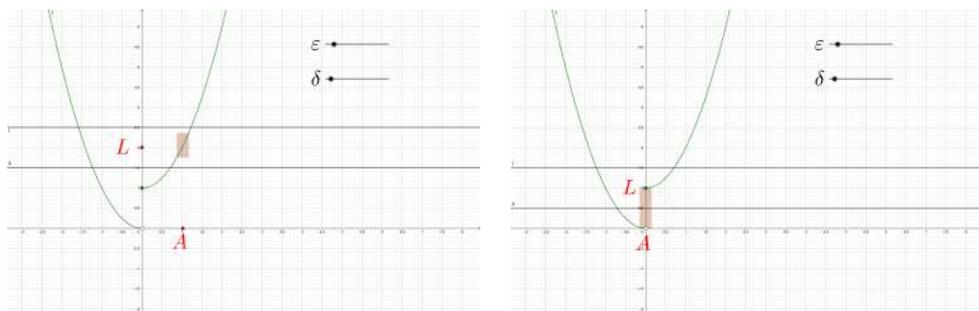


Figura 8: Exploração de uma função descontínua que não possui limite somente no ponto de descontinuidade. Na figura à esquerda, ilustra-se um ponto em que o limite existe e corresponde a $h(x)$. Na figura à direita, ao se utilizar o ponto de descontinuidade ($x = 0$), fica claro que apesar de a função estar definida no ponto ($h(0) = 1$), o limite da função não pode corresponder a esse valor. Usando outros candidatos ao valor do limite pode-se verificar que o mesmo não existe.

```
(%i1) f(x):=x^2;
      limit(f(x),x,0);
```

```
(%o1) f(x) := x^2
```

(%o2) 0 A utilidade do *wxMaxima*, porém, vai além de simplesmente calcular expressões numéricas. Como ferramenta de cálculo algébrico e simbólico, podemos comparar as expressões escritas em termos de variáveis. Por exemplo, no caso anterior, suponha que desejamos saber se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2$. Podemos comparar as expressões utilizando os comandos *is* e *equal* conforme abaixo:

```
(%i2) is(equal(limit(f(x),x,a),a^2));
```

```
(%o2) true Caso substituíssemos  $a^2$  por  $-1$  teríamos
```

```
(%i3) is(equal(limit(f(x),x,a),-1));
```

(%o3) *false* De fato, o limite de f nunca poderá ser um número negativo. Contudo, se tentarmos a expressão a^3 obtemos o seguinte resultado:

```
(%i4) is(equal(limit(f(x),x,a),a^3));
```

(%o4) *unknown* O resultado *unknown* (desconhecido) é interessante, pois pode levar os estudantes à reflexão de como o *software* faz as operações de cálculo e comparação. O *software* não fornece uma negativa neste caso, pois existe pelo menos um caso em que vale a igualdade ($a = 0$). Vamos utilizar agora a função g definida na seção anterior. A função pode ser definida através do seguinte comando:

```
(%i5) g(x):= if x=2 then 6 else x^2;
```

(%o5) $g(x) := \text{if } x = 2 \text{ then } 6 \text{ else } x^2$ Este comando do *wxMaxima* pode ser lido da seguinte

maneira: Se $x = 2$, então $g(x) = 6$, caso contrário, $g(x) = x^2$. Utilizando o comando *limit* é possível obter o limite dessa função e o valor da função no ponto $x = 2$. O limite é diferente do valor do ponto, porém ele existe.

```
(%i6) g(2);
```

```
(%o6) 6
```

```
(%i7) limit(g(x),x,2);
```

(%o7) 4 A função h também pode ser representada no *wxMaxima*. Para isso, faremos uso da função *degrau*, definida por

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (5)$$

No *wxMaxima* essa função é representada por

```
(%i8) s(x):=(1/2)*(x/(abs(x))+1);
```

(%o8) $s(x) := \frac{1}{2} \left(\frac{x}{|x|} + 1 \right)$ A função $h(x)$ pode ser então introduzida através do seguinte comando:

```
(%i9) h(x):=if x=0 then 1 else s(-x)*x^2+s(x)*(x^2+1);
```

(%o9) $h(x) := \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } s(-x)x^2 + s(x)(x^2 + 1)$ Ao executar o comando para que o *wxMaxima* encontre o limite de h quando x tende a 2, recebe-se o resultado correto.

```
(%i10) limit(h(x),x,2);
```

```
(%o10) 5
```

Note, no entanto, que ao tentarmos obter o limite de h para x tendendo a zero obtemos o seguinte resultado.

```
(%i11) limit(h(x),x,0);
```

(%o11) *und* Apesar de não existir o limite, pode-se verificar que $h(0)$ está definido na expressão do *wxMaxima*.

```
(%i12) h(0);
```

(%o12) 1 A expressão *und* é uma abreviação para *undefined* (indefinido). Para entender o significado dessa expressão é necessário entender o significado de *limite lateral*.

Uma função f possui *limite lateral à direita*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad (6)$$

se existe o limite da função considerando apenas valores *à direita de* a , ou seja, $x > a$. Analogamente,

mente, uma função f possui *limite lateral à esquerda*

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad (7)$$

se existe o limite da função considerando apenas valores *à esquerda de a* , ou seja, $x < a$. Para que o limite da função exista, os limites à esquerda e à direita devem existir e ser iguais.

No caso da função h os limites laterais em $x = 0$ existem, conforme é possível verificar pelo *software*. Porém, não são iguais.

```
(%i13) limit(h(x),x,0,plus);
```

```
(%i14) limit(h(x),x,0,minus);
```

```
(%o13) 1
```

```
(%o14) 0
```

A utilização do *wxMaxima* pode abranger as operações de limites e o cálculo de limites de grande dificuldade algébrica. Pode, também, ser utilizado para obter derivadas a partir da definição em uma aula introdutória. Contudo, a utilização os resultados obtidos devem ser sempre investigados quanto à sua validade, evitando aceitá-los sem uma verificação.

6. Conclusões

Neste artigo foi apresentada uma metodologia baseada na utilização de recursos computacionais para a introdução de limites no Ensino Médio. É importante reforçar que essa metodologia não substitui o ensino de Cálculo nos cursos superiores voltados às áreas de exatas. É possível, porém, ilustrar os conceitos através da sua realização utilizando alguns exemplos pré-escolhidos. Esses exemplos permitem que os estudantes absorvam estes conceitos e os confrontem ao aprender o formalismo matemático envolvido. Para os estudantes que não seguirão a área de exatas, a simples exposição aos conceitos pode ser interessante nas suas respectivas áreas de trabalho.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001. Agradecemos ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat.

Referências

- [1] Ávila, G. *O ensino de cálculo no segundo grau*. Revista do Professor de Matemática, n. 18, p. 1–9, 1991.
- [2] Frescki, F. B. e Pigatto, P. *Dificuldades na aprendizagem de cálculo diferencial e integral na educação tecnológica: proposta de um curso de nivelamento*. I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, p. 910–917, 2009.
- [3] Giraldo, V., Caetano, P. e Mattos, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] MAXIMA. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Maxima&oldid=55039853>. Acesso em: 5 mai. 2019.

- [5] Vodopivec, A. *Maxima, a Computer Algebra System*. Versão 18.02.0, 2018. Disponível em <http://maxima.sourceforge.net/>.
- [6] Miorim, M. A. *Introdução a história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998.
- [7] Pinto, N. B. *Marcas históricas da matemática moderna no Brasil*. Revista Diálogo Educacional, v. 5, n. 16, p. 25–38, 2005.
- [8] Rezende, W. M. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [9] Sadler P. e Sonnert G. *The Path to College Calculus: The Impact of High School Mathematics Coursework*. Journal for Research in Mathematics Education, v. 49, n. 3, p. 292-329, 2018.
- [10] Silva, C. R. e Souza, K. R. Q. *Cálculo: Uma proposta possível para o ensino médio*. Revista Panorâmica On-Line, v. 17, p. 81-89, 2014.
- [11] Stewart, J. *Cálculo*. 3ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016, v. 1.

A. Construção Geogebra

Para construção da rotinas utilizadas apresentamos os passos detalhados utilizados no *Geogebra*. Primeiramente vamos construir a rotina de exploração da função f dada por $f(x) = x^2$.

i) Na caixa de entrada, digite a expressão da função:

$$f(x) = x \wedge 2$$

ii) Defina os controles deslizantes ε e δ , tomando o cuidado de escolher o intervalo de definição de ambas positivo.

iii) Defina os pontos A restrita eixo x e L restrito ao eixo y . A abscissa do ponto A fornecerá o valor a , onde será avaliado o limite. A ordenada de L corresponderá ao limite e deve ser encontrado pelo estudante.

iv) Defina, através da caixa de entrada, os pontos

$$\begin{aligned} - A_1 &= (x(A) - \delta, 0), A_2 = (x(A) + \delta, 0), \\ - L_1 &= (0, y(L) - \varepsilon), L_2 = (0, y(L) + \varepsilon), \\ - P &= (x(A_2), y(\text{Maximo}(f, x(A_1), x(A_2)))) \text{ e } R = (x(A_1), y(\text{Minimo}(f, x(A_1), x(A_2))))). \end{aligned}$$

v) Defina, através da caixa de entrada, as retas

$$\begin{aligned} - g &= \text{Perpendicular}(A_1, \text{EixoX}), h = \text{Perpendicular}(A_2, \text{EixoX}), \\ - i &= \text{Perpendicular}(L_1, \text{EixoY}), j = \text{Perpendicular}(L_2, \text{EixoY}), \\ - k &= \text{Perpendicular}(P, \text{EixoY}) \text{ e } l = \text{Perpendicular}(R, \text{EixoY}). \end{aligned}$$

vi) Defina, através da caixa de entrada, os pontos $Q = \text{Intersecao}(g, k)$ e $S = \text{Intersecao}(l, h)$ e defina o retângulo $PQRS$.

Essa construção permite ao estudante selecionar um ponto a (manipulando A) e escolher um candidato a limite da função (manipulando L). Através da manipulação das caixas deslizantes, então o estudante pode verificar se o valor escolhido corresponde realmente ao limite, modificando os valores de ε e verificando se, a partir de certo valor de δ suficientemente pequeno, a variação de f restringe-se ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Note que a função pode ser modificada sem prejuízo da construção. Por exemplo, para construir as funções g e h pode-se utilizar os seguintes comandos:

- $g(x) = Se(x = 2, 6, x^2)$
- $h(x) = Se(x < 0, x \wedge 2, x \wedge 2 + 1)$

O comando Se do *Geogebra* possui a seguinte estrutura. Na primeira entrada coloca-se a condição, na segunda coloca-se o valor a ser retornado se a condição é satisfeita, e na terceira, o que retornar se a condição não é satisfeita. Para incluir mais de uma condição pode-se colocar outros comandos Se nas entradas.

Em exemplos em vez de o estudante poder obter o valor de δ automaticamente. Nesse caso, basta retirar o controle deslizante referente a δ e substituir o valor pela expressão correspondente. Por exemplo, no caso em que $f(x) = x^2$ o valor de δ deve ser menor do que $\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$. No *Geogebra* pode-se implementar

- $\delta = 0.8 * Min(1, \varepsilon / (1 + 2 * x(A)))$

Sendo o valor 0,8 apenas para facilitar a visualização da desigualdade estrita.

É interessante observar também que é possível renomear os pontos e as retas de acordo com a necessidade do professor, clicando com o botão direito do *mouse* e entrando em propriedade. Além disso, para que a imagem fique mais limpa, basta desabilitar os pontos ou retas, basta clicar em cima dos mesmo na parte esquerda da interface do *Geogebra*.

Helena Corrêa Ribeiro
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<helenaribeiro09@hotmail.com>

André Fabiano Steklain Lisbôa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<steklain@utfpr.edu.br>

Recebido: 25/05/2019
Publicado: 18/03/2020

Uma propriedade “esquecida” sobre área de regiões poligonais

Roberto Ribeiro Paterlini 

Resumo

Apresentamos neste texto uma demonstração de que a área de uma região poligonal não depende da forma como ela é repartida em regiões mais elementares. Essa propriedade faz parte da construção do conceito de área em Geometria Elementar, mas nem sempre é destacada nos livros didáticos.

Palavras-chave: Geometria; áreas; áreas de polígonos.

Abstract

We present in this text a demonstration that the area of a polygonal region does not depend as it is broken down into more elementary regions. This property is part of the construction of the concept of area in Elementary Geometry, but is not always highlighted in textbooks.

Keywords: Geometry; area; polygonal area.

1. Introdução

É de conhecimento comum dos estudantes o seguinte método para calcular a área de uma região poligonal: repartimos a região dada em regiões mais elementares, cujas áreas sabemos calcular, e em seguida somamos essas áreas. Isso nos fornece um método geral para o cálculo da área dessas regiões do plano.

Do ponto de vista formal esse método exige uma resposta positiva à seguinte questão: *se uma região poligonal for repartida em regiões triangulares de formas diferentes, a soma das áreas sempre resultará no mesmo valor?*

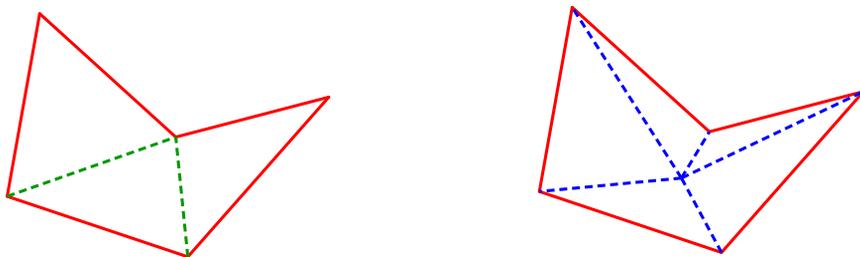


Figura 1: Região poligonal com duas repartições diferentes usando triângulos.

A Figura 1 mostra um exemplo de região pentagonal com duas triangulações diferentes. Veremos que são iguais as somas das áreas dos triângulos em cada triangulação.

Os livros didáticos não trazem, em geral, essa observação. Acredito que o motivo seja não acumular um excesso de resultados técnicos no texto, ficando por conta do professor destacar tal propriedade. Faremos mais abaixo algumas observações adicionais sobre essa questão.

Vejam como se pode argumentar que a área não depende da forma como é repartida a região. Consideramos apenas repartições em triângulos, pois se usarmos retângulos, paralelogramos, trapézios ou outras figuras elementares, essas figuras sempre podem ser repartidas, por sua vez, em triângulos.

2. Um pouco de formalização

Uma *região triangular* é o conjunto de pontos formado por um triângulo e seu interior. Os *lados* da região são os lados do triângulo, e os *vértices* da região são os vértices do triângulo.

Um *complexo triangular* é a reunião de uma quantidade finita e não nula de regiões triangulares em um mesmo plano, de forma que esteja satisfeita a seguinte condição: se duas regiões triangulares intersectam-se, elas o fazem em um vértice comum ou em um lado comum.

Em particular, em um complexo triangular, duas regiões triangulares quaisquer não têm pontos interiores em comum.

Vemos que um complexo triangular K consiste de dois elementos: uma coleção $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ de regiões triangulares satisfazendo à condição dada acima, e o conjunto R de pontos do plano que é a reunião dessas regiões. Podemos usar a notação $K = (R, T)$ para indicar um complexo triangular. Duas coleções diferentes T e T' de regiões triangulares podem definir o mesmo conjunto R de pontos, mas então temos dois complexos diferentes $K = (R, T)$ e $K' = (R, T')$. Na Figura 1 vemos um exemplo de tal situação.

Observamos agora que podemos definir área de complexos triangulares. Dado um complexo triangular K , sua área $a(K)$ é um número real positivo que satisfaz às três condições seguintes:

Ai) Se dois triângulos são congruentes, as regiões triangulares por eles definidas têm a mesma área.

Aii) Se dois complexos K_1 e K_2 não se intersectam ou se sua interseção consiste apenas de vértices e lados de suas triangulações, a área da união $K_1 \cup K_2$ é a soma $a(K_1) + a(K_2)$.

Aiii) A área do quadrado de lado 1 é 1.

A existência da área de complexos triangulares pode ser demonstrada. Uma forma elementar (mas não simples) de fazer isso está exposta no Capítulo 14 de [3], a partir da página 168. Confira também [5], página 63 e seguintes.

Para evitar detalhes técnicos, a maioria dos livros didáticos de Geometria Euclidiana assume a existência da área como um postulado. Como se tratam de noções comuns, parece que os estudantes não têm dificuldade em aceitar as condições *Ai)*, *Aii)* e *Aiii)* mediante uma boa explicação do professor.

Estabelecida a existência da área (por construção ou por postulação), costuma-se seguir a seguinte sequência dedutiva, cujos detalhes podem ser encontrados em livros de Geometria Elementar (confira, por exemplo, [4], a partir da página 205):

a) Demonstrar que a área de qualquer quadrado de lado a é a^2 , para todo número real a positivo.

b) Demonstrar que a área de qualquer retângulo de lados a e b é ab .

c) Demonstrar que, em qualquer triângulo, é invariante o produto de um lado pela altura respectiva, e que sua área é a metade desse valor.

d) Demonstrar que, em qualquer paralelogramo, é invariante o produto de um lado pela altura correspondente, e que sua área é esse valor.

e) Demonstrar que a área de um trapézio qualquer é o produto da semissoma das bases pela distância entre elas.

Além disso vemos que, em geral, a área de um complexo triangular $K = (R, T)$, em que $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, pode ser calculada por

$$a(K) = a(T_1) + a(T_2) + \dots + a(T_n) \quad (1)$$

Entretanto, queremos um pouco mais. Desejamos que a área de um complexo triangular não dependa da particular triangulação. Essa propriedade também costuma ser adotada como postulado ao se assumir que a relação *região* \rightarrow *área* é uma função. Entendemos que aqui a aceitação dos estudantes pode não ser tão tranquila. O que faremos é apresentar um argumento para verificar essa unicidade.

3. Demonstração da propriedade

Consideremos dois complexos triangulares $K = (R, T)$ e $K' = (R, T')$, que definem a mesma região R do plano, mas com duas repartições diferentes em regiões triangulares, digamos, $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ e $T' = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_m\}$. Sabemos que

$$a(K) = a(T_1) + a(T_2) + \dots + a(T_n) \quad (*)$$

e

$$a(K') = a(T'_1) + a(T'_2) + \dots + a(T'_m) \quad (**)$$

Queremos provar que esses dois números são iguais. Para isso consideremos o conjunto C formado pelos seguintes pontos: a) todos os vértices dos triângulos das duas repartições; b) todas as interseções de lados de triângulos das duas repartições, lados cujas retas suportes sejam diferentes. O conjunto C é finito. Escolhemos no plano uma reta ℓ , e consideremos as retas $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_p$ paralelas a ℓ e passando por todos os pontos de C . Vemos uma ilustração na Figura 2, na qual a região tem duas repartições em regiões triangulares, uma marcada com linhas verdes interrompidas e a outra com linhas azuis interrompidas.

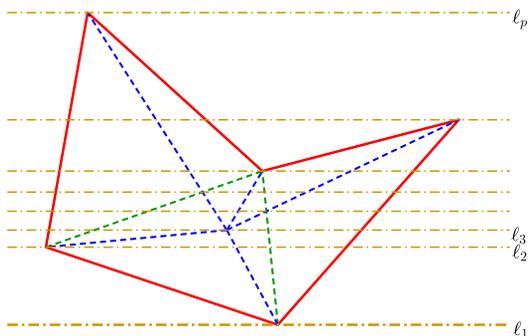


Figura 2: Dissecando uma região com duas repartições.

Considerando os lados dos triângulos das duas repartições e os segmentos que eles determinam nas retas ℓ_i vemos que R fica repartido em regiões triangulares e trapezoidais. Cada trapézio pode ser repartido em dois triângulos com uma de suas diagonais, de forma que R fica repartido com essas regiões triangulares, que chamamos de T''_i , $1 \leq i \leq s$. Consideremos o complexo triangular $K'' = (R, T'')$, cuja área é o número

$$a(K'') = a(T''_1) + a(T''_2) + \dots + a(T''_s) \quad (***)$$

Notemos agora que cada região triangular T_i é a reunião de regiões T''_j , sem repetição, e as fórmulas (*) e (***) dizem-nos que $a(K) = a(K'')$. Do mesmo modo cada região triangular T'_i é a reunião de regiões T''_j , sem repetição, e as fórmulas (**) e (***) dizem-nos que $a(K') = a(K'')$.

Portanto $a(K) = a(K')$, e vemos que a área de um complexo triangular não depende da particular triangulação.

Observamos que um complexo triangular pode ter várias partes, chamadas subregiões conexas. Na Figura 2 representamos um complexo com apenas uma parte. Entretanto o argumento mantém-se também para esses complexos.

4. Como ficam as regiões poligonais?

Todo polígono simples (sem autointerseções), convexo ou não, determina no plano uma região limitada, chamada *interior* do polígono. O polígono e seu interior formam um conjunto que chamamos de *região poligonal*. Uma demonstração desse resultado pode ser lida em [1], a partir da página 103.

Toda região poligonal é um complexo triangular. Uma demonstração dessa propriedade pode ser vista em [2], pág. 35. Juntando esse resultado com o que comentamos anteriormente vemos que a área de uma região poligonal qualquer não depende da forma com que é repartida em regiões mais elementares.

5. Relembrando a fórmula do “cadarço de sapato”

Dado um polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ consideremos em seu plano um sistema de coordenadas cartesianas Oxy . Sejam $A_i = (x_i, y_i)$ as coordenadas dos pontos A_i , $1 \leq i \leq n$. Então o dobro de sua área é o valor absoluto do número

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \dots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - \dots - x_1y_n$$

Essa é a chamada *fórmula do cadarço de sapato*, também conhecida como *fórmula de Gauss*. A demonstração dessa fórmula usa triangulações da região poligonal, de modo que ela não fornece um novo valor. Mais detalhes podem ser lidos em [6].

Reforçamos que qualquer fórmula ou método de cálculo da área de uma região poligonal parte, explícita ou implicitamente, da fórmula (1), e assim a área terá sempre o mesmo valor.

Referências

- [1] André, L. e Aguiar, R. “*Caracterizações de convexidade para polígonos simples*. Professor de Matemática Online,” v.7, n.1, 2019, págs 95 a 121. Disponível em <http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2019/05/atuualiz.art8_vol7_2019_PMO_SBM-1-1.pdf> Acesso em: 7 de janeiro de 2020.
- [2] Lima, E. L. “*Qual é a soma dos ângulos (internos e externos) de um polígono (convexo ou não)?*” Revista do Professor de Matemática, ” n.º 19, págs 31 a 38. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.
- [3] Moise, E. E. *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [4] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar, gênese e desenvolvimento*. Disponível em https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/livro_geo.html Consultado em 04 de março de 2019.
- [5] Shiga, K. e Sunada, T. *A Mathematical Gift, III: The interplay between topology, functions, geometry and algebra*. Providence, Estados Unidos, American Mathematical Society, 2005.

- [6] Victor, C. A. S. “Área de um polígono. Revista do Professor de Matemática,” nº 35, págs 28 a 32. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

Roberto Ribeiro Paterlini
Universidade Federal de São Carlos
<roberto@dm.ufscar.br>

Recebido: 02/01/2020
Publicado: 27/03/2020