

# Trigonometria Indiana: o método das diferenças, as séries de potências do seno, cosseno, e as estimativas de $\pi$ .

Marcos Rodrigues

Nilton Barroso

## Resumo

No presente trabalho apresentamos um resumo da trigonometria indiana a partir do trabalho de Ariabata I e seu método de construção de tabela de seno. Com esse contexto, matemáticos indianos posteriores demonstraram como calcular seno e cosseno usando série de potência sem a utilização do Cálculo de Newton e Leibniz. Por último, descrevemos o método indiano para o cálculo de  $\pi$  através de uma série numérica associada à função arctan.

**Palavras-chave:** Matemática indiana; série de potência; seno; cosseno; pi.

## Abstract

In the following work we present a summary of Indian trigonometry based on the work of Ariabata I and his method of building a sine table. In this context, later Indian mathematicians demonstrated how to calculate sine and cosine using a power series without using Newton and Leibniz Calculus. Finally, we describe the Indian method to calculate  $\pi$  using a numerical series associated with the arctan function.

**Keywords:** Indian mathematics; power series; sine; cosine; pi.

## 1. Introdução

Os primeiros registros da matemática indiana são encontrados em textos religiosos da Era Védica (c. 500 a.C.) que continham manuais para construção de altares em formas geométricas diversas. Como no caso das civilizações da Mesopotâmia e egípcia, no início a matemática na Índia tinha um caráter iminente prático, e era utilizada como ferramenta indispensável para solução dos mais diversos problemas relevantes ao dia a dia das grandes cidades que começavam a surgir: elaboração de calendários precisos necessários para a agricultura e celebração de datas religiosas, construção de edificações, divisão da terra etc. Nos mil anos que se seguiram, mesmo após sucessivas alternâncias de poder, surpreendentemente a produção matemática indiana não foi abandonada. Pelo contrário, foi estimulada e passou por uma significativa transformação conceitual, adotando uma abordagem mais intuitiva e abstrata.

O período clássico da matemática indiana inicia-se na geração de Ariabata I [Āryabhaṭa] <sup>1</sup> (c. 500 d.C) e Brahmagupta [Brahmaguptaḥ] (c. 600 d.C.). Seus trabalhos foram ao mesmo tempo um resumo da matemática conhecida anteriormente e o início de uma nova era para essa disciplina. São eles os responsáveis por abandonar contextos religiosos para desenvolver técnicas de astronomia e trigonometria modernas [2], com destaque para a utilização do nosso atual sistema numérico decimal posicional com nove símbolos para os números 1, 2, 3, ..., 9 e o zero, chamado pelos indianos de *sunya*.

Referências a conceitos geométricos e trigonométricos da matemática grega misturadas à tradição aritmética babilônica são encontrados em textos indianos consolidados. Sabe-se que as expedições persas de Ciro, em cerca de 500 a.C., e gregas de Alexandre, entre 327 e 326 a.C., alcançaram o vale do Indo (noroeste indiano), favorecendo a formação do que poderíamos chamar de uma comunidade científica *internacional* e o intercâmbio de conhecimento entre essas civilizações. Resultados dessa interação podem ser observados na divisão do círculo em 360 unidades (graus) e no uso de funções circulares semelhantes às utilizadas na Grécia em cálculos trigonométricos. Grande parte dessas ideias foram herdadas de trabalhos anteriores a Ptolomeu (c. 100 d.C.), com destaque especial para Hiparco de Rhodes (c. 150 a.C.), considerado o maior astrônomo da antiguidade e o precursor da trigonometria. Apesar de tudo, muito nesse campo ainda é especulação e não está totalmente claro para os historiadores da ciência até que ponto a influência dessas civilizações foi decisiva para o desenvolvimento da matemática indiana.

Hiparco, bem como os astrônomos babilônicos antes dele, supunha um modelo geocêntrico no qual os demais corpos celestes giravam ao redor da Terra em órbitas circulares, com movimento uniforme. Entretanto, ao analisar mais cuidadosamente o movimento do Sol, Hiparco fez novas descobertas. Ele observou que o tempo gasto pelo Sol do equinócio de primavera até o de outono é aproximadamente 186 dias, restando apenas 179 dias para a outra parte da órbita solar ao longo da eclíptica, assim chamada a órbita do Sol em torno da Terra. Isso significaria que, em média, o Sol desloca-se mais lentamente entre março e setembro do que no restante do ano! Como explicar essa observação? Hiparco não estava pronto para romper com a tradição dos movimentos circulares uniformes, e a única forma que encontrou para conciliar tais hipóteses com as observações foi propor que a Terra não ocuparia o centro dessa órbita. Movendo a Terra para uma posição excêntrica, afastando-a do Sol na primavera, Hiparco pôde efetivamente prolongar essa estação.

Mas qual a posição exata da Terra? Para responder essa pergunta Hiparco inventou a primeira função trigonométrica da história: a corda subtendida pelo ângulo, fundando a disciplina que hoje conhecemos como trigonometria; para saber como Hiparco resolveu o problema citado, o leitor interessado pode consultar [7]. Da sua parte, os indianos julgaram mais conveniente o uso da meia-corda para o estudo dos movimentos planetários, a qual chamavam de *ardhajya* ou *jyardha* ou *bhujaya*, e também era abreviada para *jya*<sup>2</sup>. Comparada a nossa atual função seno<sup>3</sup>, vale a relação (veja a Figura 1)

$$jya(\alpha) = \frac{1}{2} \text{crd}(2\alpha) = R \text{sen}(\alpha).$$

Por esse motivo, daqui em diante  $jya(\alpha)$  será escrito como  $\text{sen}_R(\alpha)$ , de tal forma que  $\text{sen}_R(\alpha) = R \text{sen}(\alpha)$ , em que  $\text{sen}$  é o seno atual.

<sup>1</sup>Versão romanizada deste e dos próximos nomes dos indianos pelos padrões ISO 15919 e IAST. Para mais informações sobre o tema o leitor interessado pode consultar [6]

<sup>2</sup>Uma vez que os árabes receberam os trabalhos indianos, eles escreviam este termo como *jb*. Posteriormente eles passaram a chamar *jya* como *jaib*, que significa peitoral, seio. Os europeus, ao terem acesso aos trabalhos árabes, transcreveram *jaib* para *sinus*, que significa litoral, daí a etimologia do termo seno usado hoje em dia.

<sup>3</sup>A atual definição do seno como o cateto oposto sobre a hipotenusa em um triângulo retângulo é devida ao

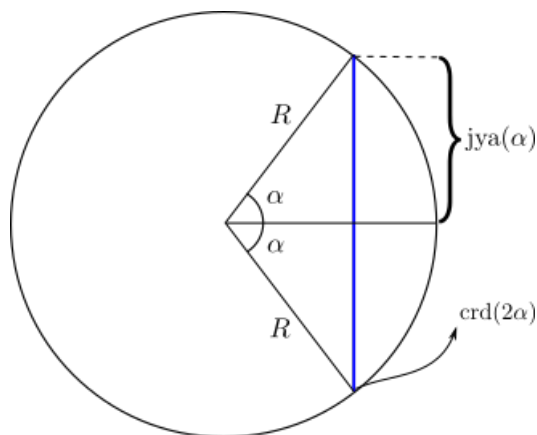


Figura 1: As funções circulares grega e indiana: corda e  $jya$ .

Vale notar que o seno indiano depende tanto do ângulo como do raio do círculo em questão. Em geral, o raio era escolhido de maneira apropriada para facilitar os cálculos. Em trabalhos indianos era muito comum o uso do raio do círculo com valor  $R = 3438$ . A explicação para esse número encontra-se na observação que a circunferência tem  $360 \cdot 60 = 21.600$  minutos. Usando suas estimativas mais acuradas de  $\pi$  (em [1], seção II, estrofe 10, temos  $\pi = 3,1416$ ) igualando  $21.600 = 2\pi R$ , encontravam o valor acima para  $R$ . O uso das mesmas unidades para medir o arco e o raio do círculo <sup>4</sup> garante que uma importante propriedade da função seno vale nesse contexto:  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ , se  $\theta$  é pequeno. Conforme veremos nesse trabalho, essa primeira estimativa é de vital importância para o cálculo das séries de potência do seno e do cosseno.

## 2. Ariabata I e o método das diferenças

Pouco se sabe sobre Ariabata I. É dele o livro *Aryabhatiya*, o mais antigo sobre matemática e astronomia indiana de um autor identificável [4]. Esse livro tem 4 seções e 123 estrofes, escrito dessa forma para ser simples e para facilitar a memorização. Nas estrofes 11 e 12 da segunda seção, ele escreve [1]:

**11.** Divida um quadrante de um círculo [em quantas partes desejar]. Então, dos triângulos [retângulos] e dos quadriláteros, pode-se encontrar tantos  $\text{sen}_R(\theta)$  de arcos iguais quanto se deseja...

**12.** O primeiro  $\text{sen}_R(\theta)$  dividido por ele mesmo e diminuído pelo quociente resulta na segunda diferença de senos. O primeiro  $\text{sen}_R(\theta)$ , diminuído pelos quocientes obtidos dividindo cada um dos  $\text{sen}_R(\theta)$  anteriores pelo primeiro  $\text{sen}_R(\theta)$ , resulta nas diferenças de senos restantes.

matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

<sup>4</sup>Desde os primeiros astrônomos da antiguidade até Isaac Newton no século XVII, o *grau* representava uma medida de comprimento, não de ângulos. Para eles, por exemplo,  $90^\circ$  representava o comprimento do quarto de círculo, não a medida de um ângulo reto.

Na estrofe 11 ele descreve como eram construídos os elementos necessários para o cálculo de sua tabela de senos, considerando a divisão do quadrante em 24 partes iguais. Aqui encontramos mais uma vez a influência de Hiparco, que fazia divisões do quadrante da mesma maneira, considerando, porém, apenas 12 divisões de 450 minutos. É provável que Hiparco tenha sugerido essa divisão porque podemos realizá-la com o mínimo de esforço utilizando apenas a régua e o compasso euclidianos: começamos construindo um triângulo equilátero (primeira proposição dos *Elementos* de Euclides) para obter o ângulo de  $60^\circ$ ; dividindo esse ângulo ao meio, o primeiro quadrante fica dividido em 3 partes iguais ( $3 \times 30^\circ = 90^\circ$ ) e, daí, construindo bissetrizes sucessivamente, é possível dividi-lo em 6 partes iguais, depois 12, depois 24.

Na estrofe 12 ele descreve o método de como obter os senos correspondentes a essas divisões. O primeiro  $\text{sen}_R$  ele assume como o próprio valor do arco em minutos, 225. Para obter o segundo  $\text{sen}_R$ , subtraía 225 de 225, resultando em 0; divida 225 por 225 e o quociente é 1. A soma de 0 e 1 é subtraída de 225 e o resultado é 224. Com isso calculamos a diferença entre o segundo  $\text{sen}_R$  e o primeiro (primeira diferença de senos), logo, o segundo seno é  $225+224=449$ . Continuando, subtraía 224 de 225, resultando em 1. Divida 449 por 225 e o quociente inteiro mais próximo é 2; subtraía  $2+1$  de 225 e a diferença do terceiro para o segundo  $\text{sen}_R$  é 222, logo, o terceiro seno é  $449+222=671$ , e assim por diante.

Ariabata registra os 24 valores de  $\text{sen}_R$  em minutos no livro. Há algumas disparidades caso se siga o método à risca, pois provavelmente ele efetuou algumas correções nos casos dos quocientes aproximados, embora nada no livro indique isso [1, p.29].

$i$	$i\Delta\theta$	$\Delta_i$	$\text{sen}_R(i)$	$\frac{\text{sen}_R(i)}{R}$	$\text{sen}(i)$	$\varepsilon_i = \frac{\text{sen}_R(i)}{R} - \text{sen}(i)$
1	225	225	225	0.065445026	0.065403129	0.00004190
2	450	224	449	0.130599186	0.130526192	0.00007299
3	675	222	671	0.195171611	0.195090322	0.00008129
4	900	219	890	0.258871437	0.258819045	0.00005239
⋮						
21	4725	51	3372	0.980802792	0.98078528	0.00001751
22	4950	37	3409	0.99156486	0.991444861	0.00012000
23	5175	22	3431	0.997963933	0.997858923	0.00010501
24	5400	7	3438	1	1	0

Tabela 1: Tabela de senos de Ariabata.

A partir de *Aryabhatiya*, as próximas gerações de matemáticos realizaram diversos comentários para dar embasamento e também aprimorar a técnica. Entre eles destacam-se Bhaskara I [Bhāskara] (c.500 d.C.), Brahmagupta e Nilakanta [Nīlakaṅṭha] (1444). Será a partir do método desse último que faremos um estudo do método das diferenças.

### 2.1. Construção de tabela trigonométrica pelo método das diferenças

No diagrama 2, os pontos  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 24$  definem ângulos iguais a  $\Delta\theta = 225'$ . Seja  $\text{sen}_R(i) = \text{sen}_R(i\Delta\theta)$  e a diferença  $\Delta_i = \Delta \text{sen}_R(i) = \text{sen}_R(i) - \text{sen}_R(i-1)$ . Com isso, temos que

$$\Delta_{i+1} = \Delta \text{sen}_R(i+1) = \text{sen}_R(i+1) - \text{sen}_R(i) = P_{i+1}A_{i+1} - P_iA_i = CA_{i+1}.$$

Sejam os pontos  $B_i$  o ponto médio do arco  $A_iA_{i-1}$ , ou seja, são os pontos que definem a próxima quantidade de divisões. Com isso observe que  $\triangle OB_{i+1}T_{i+1}$  e  $\triangle A_iCA_{i+1}$  são semelhantes, pois os três pares de lados homólogos são perpendiculares. Pela relação de semelhança e observando que  $A_iA_{i+1} = B_iB_{i+1} = \text{crd}(\Delta\theta) = \text{crd}(1)$ , em que  $\text{crd}(\alpha)$  é a corda definida pelo arco  $\alpha$ . Temos que

$$\frac{CA_{i+1}}{OT_{i+1}} = \frac{A_iA_{i+1}}{OB_{i+1}} = \frac{CA_i}{T_{i+1}B_{i+1}}, \quad (1)$$

de onde obtemos, pela primeira igualdade,

$$\frac{\Delta_{i+1}}{OT_{i+1}} = \frac{\text{crd}(1)}{R},$$

ou seja,

$$\Delta_{i+1} = \frac{\text{crd}(1)}{R} OT_{i+1}.$$

De maneira análoga obtemos

$$\Delta_i = \frac{\text{crd}(1)}{R} OT_i,$$

e, daí,

$$\Delta_i - \Delta_{i+1} = \frac{\text{crd}(1)}{R} (OT_i - OT_{i+1}) = \frac{\text{crd}(1)}{R} T_{i+1}T_i. \quad (2)$$

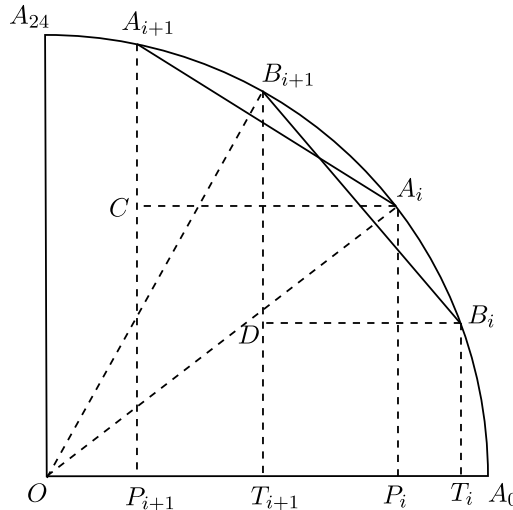


Figura 2: Método das diferenças.

Temos também em (2) que os triângulos  $\triangle B_iDB_{i+1}$  e  $\triangle A_iP_iO$  são semelhantes pelo mesmo motivo explicado anteriormente. Portanto,

$$\frac{B_iD}{B_iB_{i+1}} = \frac{A_iP_i}{A_iO},$$

ou seja,

$$T_{i+1}T_i = B_iD = \frac{\text{crd}(1)}{R} \text{sen}_R(i).$$

Substituindo em (2), vem que

$$\frac{\Delta_i - \Delta_{i+1}}{\text{sen}_R(i)} = \left[ \frac{\text{crd}(1)}{R} \right]^2.$$

Esse resultado mostra que a razão da segunda diferença por seu  $\text{sen}_R$  é constante, o que nos leva a uma fórmula de recorrência. Até que ponto Ariabata estava ciente dessa propriedade, não se sabe. Igualando a expressão do lado esquerdo com ela própria no caso  $i = 1$ , encontra-se a seguinte fórmula fundamental

$$\frac{\Delta_i - \Delta_{i+1}}{\text{sen}_R(i)} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\text{sen}_R(1)},$$

ou, ainda,

$$\Delta_i - \Delta_{i+1} = (\Delta_1 - \Delta_2) \frac{\text{sen}_R(i)}{\text{sen}_R(1)}. \quad (3)$$

Dados os valores de  $\text{sen}_R(1)$  e  $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$  a equação (3) permite calcular todos os 23 senos restantes. De fato, lembrando que  $\text{sen}_R(0) = 0$ , somando as equações

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \text{sen}_R(1) - \text{sen}_R(0), \\ \Delta_2 &= \text{sen}_R(2) - \text{sen}_R(1), \\ \Delta_3 &= \text{sen}_R(3) - \text{sen}_R(2), \\ &\vdots \\ \Delta_{n-1} &= \text{sen}_R(n-1) - \text{sen}_R(n-2), \\ \Delta_n &= \text{sen}_R(n) - \text{sen}_R(n-1) \end{aligned}$$

e cancelando termos semelhantes concluímos que

$$\text{sen}_R(n) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n.$$

Para calcular as diferenças observamos inicialmente que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \text{sen}_R(1) - \text{sen}_R(0) = \text{sen}_R(1), \\ \Delta_2 &= \Delta_1 - \Delta = \text{sen}_R(1) - \Delta, \end{aligned}$$

com as quais já podemos calcular  $\text{sen}_R(2)$  da maneira que foi descrita por Ariabata. Agora, usando (3), calculamos  $\Delta_3$  como

$$\Delta_3 = \Delta_2 - \Delta \frac{\text{sen}_R(2)}{\text{sen}_R(1)} = \text{sen}_R(1) - \Delta \left( \frac{\text{sen}_R(1) + \text{sen}_R(2)}{\text{sen}_R(1)} \right),$$

e com  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  calculamos  $\text{sen}_R(3)$ . Para  $\Delta_4$  temos

$$\Delta_4 = \Delta_3 - \Delta \frac{\text{sen}_R(3)}{\text{sen}_R(1)} = \text{sen}_R(1) - \Delta \left( \frac{\text{sen}_R(1) + \text{sen}_R(2) + \text{sen}_R(3)}{\text{sen}_R(1)} \right).$$

Com  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  e  $\Delta_4$  podemos calcular  $\text{sen}_R(4)$  e assim prosseguimos. Confirmando o resultado usando indução, assumamos que a recorrência vale para  $n$ . Como

$$\Delta_n = \text{sen}_R(1) - \Delta \left( \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \text{sen}_R(k)}{\text{sen}_R(1)} \right),$$

a partir de (3) temos que

$$\begin{aligned} \Delta_n - \Delta_{n+1} &= \Delta \frac{\text{sen}_R(n)}{\text{sen}_R(1)}, \\ \Delta_{n+1} &= \Delta_n - \Delta \frac{\text{sen}_R(n)}{\text{sen}_R(1)} \\ \Delta_{n+1} &= \text{sen}_R(1) - \Delta \left( \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \text{sen}_R(k)}{\text{sen}_R(1)} \right) - \Delta \frac{\text{sen}_R(n)}{\text{sen}_R(1)} \\ \Delta_{n+1} &= \text{sen}_R(1) - \Delta \left( \frac{\sum_{k=1}^n \text{sen}_R(k)}{\text{sen}_R(1)} \right). \end{aligned}$$

Na tabela (1) encontramos um excerto da tabela de senos de Ariabata. As colunas à direita comparam os valores do seno moderno pelos cálculos de Ariabata com aqueles que obtemos com a calculadora moderna.

O método das diferenças virou o padrão indiano para construção de tabelas de  $\text{sen}_R$ , e os matemáticos que vieram após trouxeram várias melhorias e refinamentos. Regra geral, os aprimoramentos consistiam na utilização de métodos de interpolação, isto é, obtenção de novos valores de  $\text{sen}_R$  a partir dos valores já conhecidos. Brahmagupta, por exemplo, enunciou um resultado que em notação moderna pode ser enunciado como:

$$\text{sen}_R(i\Delta\theta + \alpha) = \text{sen}_R(i) + \frac{\alpha}{2\Delta\theta}(\Delta_i + \Delta_{i+1}) - \frac{\alpha^2}{2\Delta\theta^2}(\Delta_i - \Delta_{i+1}),$$

com  $\alpha < \Delta\theta$ . Tal aproximação é um caso particular da fórmula conhecida como interpolação de Newton-Stirling de segunda ordem [2].

Bhaskara I (c.700 d.C), da sua parte, encontrou uma fração racional (quociente de dois polinômios) cujos valores são notavelmente próximos de  $\text{sen}_R$ . Para  $R = 1$ , essa função é dada como

$$p(x) = \frac{4x(180 - x)}{[40500 - x(180 - x)]},$$

em que  $x$  é medido em graus e  $0 \leq x \leq 180$ . Nesse intervalo, a fórmula leva a um erro de no máximo 1%. Podemos ter uma ideia da precisão da fórmula de Bhaskara I observando a Figura 3 onde foram plotadas as funções  $s$  e  $\text{sen}$ . Para mais detalhes sobre o método utilizado por Bhaskara para chegar a sua fórmula veja [7].

Por fim, Vatesvara [Vaṭeśvara] (880 d.C.), utilizando métodos de aproximação, reconstruiu a tabela de Ariabata com 96 valores de  $\text{sen}_R$  utilizando  $R = 3437'44''$ . Esse refinamento no valor de  $R$  implica uma aproximação de  $\pi$  ainda mais precisa que seus antecessores.

Por meio dos trabalhos inovadores de Ariabata e seus conterrâneos, foi possível estabelecer séries de potência para funções trigonométricas conforme discutiremos a seguir. Vale citar que os indianos já trabalhavam com cálculos envolvendo séries convergentes, principalmente no período em que Madhava [Mādhava] (1340 d.C.) iniciou o que se conhece hoje como Escola de Kerala: gerações de cientistas brilhantes que tiveram grande produção de trabalhos astronômicos e matemáticos, antecipando europeus em vários resultados; particularmente as séries numéricas de  $\pi$ , e as séries de potências para o seno e o cosseno. Uma descrição mais detalhada dos resultados da Escola de Kerala é feita em [7].

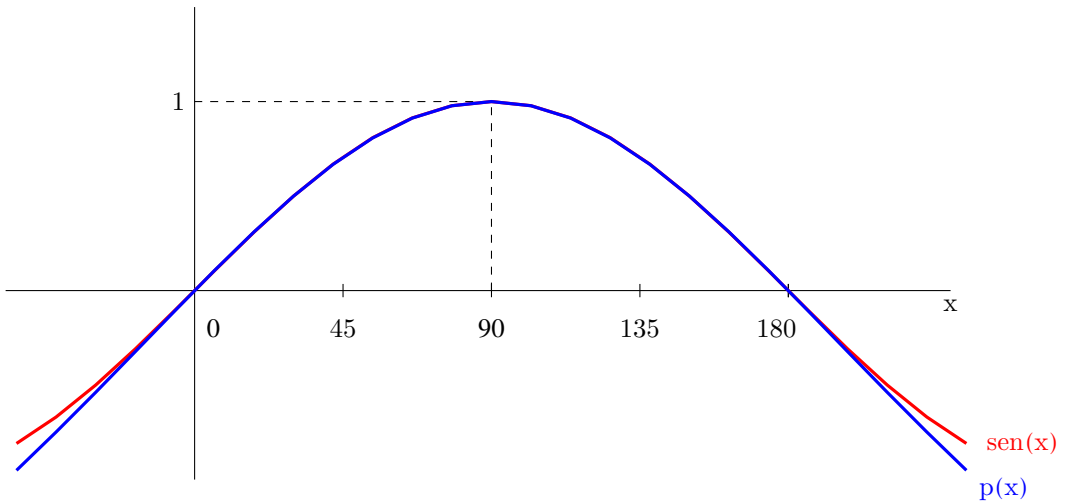


Figura 3: As funções  $\text{sen}(x)$  e  $p(x)$ .

### 3. Séries de potências de seno e cosseno

Seguiremos as ideias descritas no livro *Yuktibhasa* de Jyestadeva [Jyeṣṭhadeva] (1500 d.C.), matemático da 4ª geração da Escola de Kerala. *Yuktibhasa* é um dos primeiro escritos sobre como obter tais séries, embora todo o mérito seja atribuído a Madhava. Nesse ponto tomaremos  $R = 1$ , caso em que  $\text{sen}_R(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$ , e assumiremos que todas as funções trigonométricas envolvidas utilizam medidas angulares em radianos a fim de evitar uma série de constantes adicionais que surgem naturalmente quando utilizamos a função seno indiana.

Em relação à figura 2, note que se definimos  $\angle A_0OA_i = i\Delta\theta = \theta$  e pomos  $\text{sen}(1) = \text{sen}(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$ , a equação (1) pode ser reescrita como

$$\frac{\Delta \text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\Delta\theta}{1} = \frac{\Delta \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)},$$

em que  $\Delta \cos(\theta) = \cos(\theta) - \cos(\theta + \Delta\theta)$ . Nesse momento é preciso observar que foi feita a aproximação  $\cos(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}) \approx \cos(\theta)$ , assim como  $\text{sen}(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}) \approx \text{sen}(\theta)$ . Em seu trabalho, Jyestadeva não deixa claro essa aproximação, porém sua validade não é duvidada à medida que se fazem mais divisões no quadrante, fato que implica  $\Delta\theta \rightarrow 0$ . Da equação anterior obtemos

$$\begin{aligned} \Delta \text{sen}(\theta) &= \cos(\theta)\Delta\theta \\ \Delta \cos(\theta) &= \text{sen}(\theta)\Delta\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Do ponto de vista moderno, as relações acima são aplicações do Teorema do Valor Médio para as funções seno e cosseno. A diferença de sinal que observamos quando comparadas às fórmulas atuais deve-se ao fato de ser a definição de  $\Delta \cos$  invertida em relação com  $\Delta \text{sen}$ , a fim de evitar valores negativos causados pelo decrescimento do cosseno no primeiro quadrante.

Nos trabalhos indianos as séries de potência são obtidas simultaneamente. A aproximação de primeira ordem do seno ( $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ ) é usada para obter a aproximação de segunda ordem do cosseno, que será usada para obter a aproximação de terceira ordem do seno, e assim por diante.



Para isso, considere a Figura 4. Nela temos que  $\theta = n\Delta\theta$ ,  $\text{sen}(i) = A_iP_i$  e  $\text{cos}(i) = OP_i$ . Com isso,

$$1 - \text{cos}(\theta) = A_0P_n = P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots + P_{n-1}P_n,$$

mas  $P_{i-1}P_i = \Delta \text{cos}(i) = \text{sen}(i)\Delta\theta$ , logo,

$$\text{cos}(\theta) = 1 - [\text{sen}(1) + \text{sen}(2) + \dots + \text{sen}(n)] \Delta\theta.$$

Usando a aproximação de primeira ordem  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$  e a igualdade  $\Delta\theta = \frac{\theta}{n}$  vem que

$$\begin{aligned} \text{cos} \theta &= 1 - [\Delta\theta + 2\Delta\theta + \dots + n\Delta\theta] \Delta\theta \\ &= 1 - [1 + 2 + \dots + n] \Delta\theta^2 \\ &\approx 1 - \frac{n^2}{2} \Delta\theta^2 \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!}. \end{aligned} \tag{5}$$

Aqui foi utilizada a aproximação

$$1 + 2 + \dots + n \approx \frac{n^2}{2},$$

Que é válida para  $n$  – número de divisões do quadrante – grande. Essas somas eram conhecidas anteriormente pelos árabes. O matemático egípcio Abu al-Haytham [Abū 'Alī al Ḥasan] (965-1039) mostrou que

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + r(n),$$

em que  $r(n)$  é um polinômio em  $n$  de grau menor do que  $p$ . Da expressão acima é possível concluir que para  $n$  suficientemente grande temos, em geral,

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p \approx \frac{n^{p+1}}{p+1}. \tag{6}$$

A fim de tornar a presente discussão mais completa, interrompemos brevemente a dedução das séries de potência para explicar o método indiano para verificar (6). Inicialmente, defina

$$S_n^{(p)} = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p.$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} nS_n^{(p-1)} &= n(1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + n^{p-1}) \\ &= n^p + n[1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (n-1)^{p-1}] \\ &= n^p + nS_{n-1}^{(p-1)} \\ &= n^p + [(n-1) + 1]S_{n-1}^{(p-1)} \\ &= n^p + (n-1)S_{n-1}^{(p-1)} + S_{n-1}^{(p-1)} \\ &= n^p + (n-1)^p + (n-1)S_{n-2}^{(p-1)} + S_{n-1}^{(p-1)} \\ &= n^p + (n-1)^p + (n-2)^p + (n-3)S_{n-3}^{(p-1)} + S_{n-2}^{(p-1)} + S_{n-1}^{(p-1)}. \end{aligned}$$

Prosseguindo dessa forma chegamos a

$$nS_n^{(p-1)} = S_n^{(p)} + S_{n-1}^{(p-1)} + S_{n-2}^{(p-1)} + \dots + S_2^{(p-1)} + S_1^{(p-1)}. \tag{7}$$

Para  $p = 1$ , essa última equação dá

$$nS_n^{(0)} = S_n^{(1)} + S_{n-1}^{(0)} + S_{n-2}^{(0)} + \dots + S_2^{(0)} + S_1^{(0)},$$

ou seja:

$$\begin{aligned} n^2 &= S_n^{(1)} + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ &= S_n^{(1)} + S_{n-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Supondo que para  $n$  muito grande vale  $S_n^{(1)} \approx S_{n-1}^{(1)}$ , os cientistas indianos concluíram da expressão acima que  $n^2 \approx 2S_n^{(1)}$ , isto é,

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + \dots + n \approx \frac{n^2}{2}.$$

O caso  $p = 2$  era obtido dessa primeira aproximação, mostrando-se inicialmente que para  $n$  grande

$$S_{n-1}^{(1)} + S_{n-2}^{(1)} + \dots + S_2^{(1)} + S_1^{(1)} \approx \frac{S_n^{(2)}}{2},$$

de onde, usando (7), concluíam que

$$n \frac{n^2}{2} \approx S_n^{(2)} + \frac{S_n^{(2)}}{2} = \frac{3}{2} S_n^{(2)},$$

isto é:

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \approx \frac{n^3}{3}.$$

O caso  $p = 3$  era obtido da mesma forma a partir do caso  $p = 2$ , e daí concluíam que, em geral, deveria valer

$$S_n^{(p)} = 1^p + 2^p + \dots + n^p \approx \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Essas fórmulas foram enunciadas de maneira correta em meados do século XIV nos trabalhos de Narayana Pandita [Nārāyaṇa Paṇḍita] (1325). O método explicado acima é encontrado em *Yuktibhasa* escrito por Jyestadeva por volta de 1500.

Finalizado esse interlúdio, seguimos a dedução das séries de potências de seno e cosseno. Seguindo para a aproximação de terceira ordem para o seno a partir da aproximação de segunda ordem para o cosseno, fazendo uma releitura das equações (4) exatamente como descrito na Figura 2, temos

$$\begin{aligned} \Delta \text{sen}(1) &= \cos\left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta \\ \Delta \text{sen}(2) &= \cos\left(2 - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta \\ \Delta \text{sen}(3) &= \cos\left(3 - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta \\ &\vdots \\ \Delta \text{sen}(n) &= \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta \end{aligned}$$

Dessa forma vem que

$$\Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n) = \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \right] \Delta\theta.$$

Usando as aproximações  $\cos\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1$  e  $\cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \approx \cos(n)$  obtemos

$$\Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n) \approx [1 - \cos(n)] \Delta\theta.$$

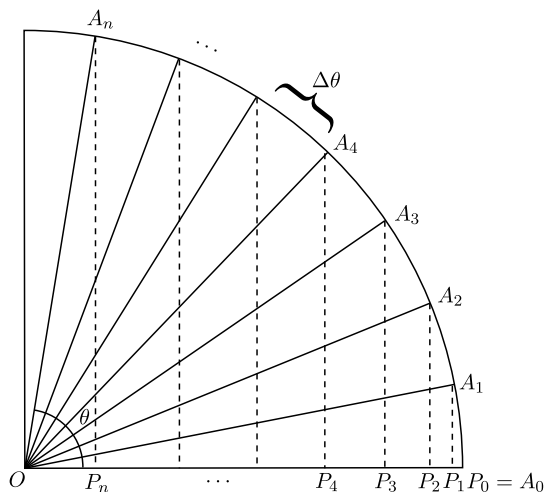


Figura 4: Divisão do quadrante em  $n = 3 \cdot 2^k$  partes.

Por fim, usando (5) obtemos

$$[1 - \cos(n)] \Delta \theta = [1 - \cos(n\Delta \theta)] \Delta \theta = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{n^2}{2} \Delta \theta^2 \right) \right] \Delta \theta = \frac{n^2}{2} \Delta \theta^3.$$

Fazendo o mesmo para as demais diferenças  $\Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(i)$  obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n) &\approx \frac{n^2}{2} \Delta \theta^3, \\
 \Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n-1) &\approx \frac{(n-1)^2}{2} \Delta \theta^3, \\
 \Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n-2) &\approx \frac{(n-2)^2}{2} \Delta \theta^3, \\
 &\vdots \\
 \Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(2) &\approx \frac{2^2}{2} \Delta \theta^3.
 \end{aligned} \tag{8}$$

A soma procurada fica

$$(n-1)\Delta \text{sen}(1) - [\Delta \text{sen}(2) + \Delta \text{sen}(3) + \dots + \Delta \text{sen}(n)] = n\Delta \text{sen}(1) - \sum_{i=1}^n \Delta \text{sen}(i).$$

Lembrando que  $\Delta \text{sen}(1) = \text{sen}(1) - \text{sen}(0) = \text{sen}(1) \approx \Delta \theta$  e

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \Delta \text{sen}(i) &= \Delta \text{sen}(1) + \Delta \text{sen}(2) + \Delta \text{sen}(3) + \dots + \Delta \text{sen}(n-1) + \Delta \text{sen}(n) \\
 &= \left[ \cancel{\text{sen}(1)} - \cancel{\text{sen}(0)} \right] + \left[ \cancel{\text{sen}(2)} - \cancel{\text{sen}(1)} \right] + \left[ \text{sen}(3) - \cancel{\text{sen}(2)} \right] + \dots + \\
 &\quad + \left[ \cancel{\text{sen}(n-1)} - \cancel{\text{sen}(n-2)} \right] + \left[ \text{sen}(n) - \cancel{\text{sen}(n-1)} \right] \\
 &= \text{sen}(n) = \text{sen}(n\Delta \theta) = \text{sen}(\theta),
 \end{aligned}$$

a soma dos lados esquerdos dá

$$n\Delta\theta - \text{sen}(\theta) = \theta - \text{sen}(\theta),$$

Portanto, se somarmos os dois lados de (8) obtemos

$$\theta - \text{sen}(\theta) = [n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2] \frac{\Delta\theta^3}{2} \approx \frac{n^3}{3} \frac{\Delta\theta^3}{2} = \frac{(n\Delta\theta)^3}{3 \cdot 2} = \frac{\theta^3}{3!},$$

de onde obtemos a aproximação de terceira ordem para o seno

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!}. \tag{9}$$

Para chegar à estimativa de segunda ordem do cosseno (5), aplicamos a estimativa de primeira ordem  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ . Jyestadeva acreditava que, ao se aplicar uma estimativa mais acurada, o valor resultante é também mais acurado, fato que o levou a uma recursão no processo de cálculo das suas séries de potência. Usando (9) vem

$$\begin{aligned} 1 - \text{cos}(\theta) &= \left[ \left( \Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} \right) + \left( 2\Delta\theta - \frac{(2\Delta\theta)^3}{3!} \right) + \dots + \left( n\Delta\theta - \frac{(n\Delta\theta)^3}{3!} \right) \right] \\ &= [1 + 2 + \dots + n] \Delta\theta^2 - [1^3 + 2^2 + \dots + n^3] \frac{\Delta\theta^4}{3!} \\ &\approx \frac{n^2}{2} \Delta\theta^2 - \frac{n^4}{4} \frac{\Delta\theta^4}{3!}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{cos}(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}. \tag{10}$$

Usando essa aproximação de quarta ordem para o cálculo das equações (8), podemos produzir uma aproximação de quinta ordem para o seno:

$$\begin{aligned} \theta - \text{sen}(\theta) &= \left( \frac{1^2}{2} \Delta\theta^3 - \frac{1^4}{4!} \Delta\theta^5 \right) + \left( \frac{2^2}{2} \Delta\theta^3 - \frac{2^4}{4!} \Delta\theta^5 \right) + \dots + \left( \frac{n^2}{2} \Delta\theta^3 - \frac{n^4}{4!} \Delta\theta^5 \right) \\ &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \frac{\Delta\theta^3}{2} - (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) \frac{\Delta\theta^5}{4!} \\ &\approx \frac{n^3}{3} \frac{\Delta\theta^3}{2} + \frac{n^5}{5} \frac{\Delta\theta^5}{4!}, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}. \tag{11}$$

Se continuarmos nesse processo iterativo, produzimos estimativas de ordem superior para o seno e o cosseno acrescentando um termo a cada etapa. Com isso temos

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \\ \text{cos}(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

As expressões acima, embora chamadas séries de Taylor em homenagem ao matemático britânico Brook Taylor (1685-1731), fizeram seu debute na Matemática europeia em uma carta escrita em 1676 pelo também britânico Isaac Newton (1642-1727) para o secretário da *Royal Society* de Londres Henry Oldenburg (1619-1677), mas destinada ao matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) em resposta a um pedido desse último por mais informações sobre o Cálculo.

Vale salientar que o matemático escocês James Gregory (1638-1675) também chegou à noção das séries de Taylor em 1671, quatorze anos antes que Taylor tivesse nascido! Tendo trabalhado em isolamento nos últimos sete anos da sua curta vida e evitado a publicação da sua obra, custou um longo tempo até que o trabalho de Gregory recebesse o reconhecimento devido. Não tanto quanto para os cientistas indianos, que embora tenham antecipado seus pares europeus nesse assunto em no mínimo 150 anos, somente há poucas décadas tiveram seu mérito reconhecido.

#### 4. Aproximações de pi por séries numéricas

Para obter uma tabela com um nível de precisão superior à tabela feita por Ariabata em (1), faz-se necessária uma aproximação mais acurada para  $R$  e, conseqüentemente, do valor de  $\pi$ . Madhava chegou a usar valor de  $R=3437'44''43'''^5$  (3437 minutos 44 segundos e 43 terços, ou a sexagésima parte de um segundo) na construção de uma tabela de senos de 24 valores. Entretanto foi a partir dos trabalhos de Jyestadeva em sua obra *Yuktibhasa* e Nilakanta no seu livro *Tantrasangraha* que um estudo de séries de potência para o cálculo do valor de  $\pi$  apareceu.

A função arctan:  $\mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  é definida como a função inversa da função  $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$ . Graças ao Cálculo, hoje sabemos que arctan está intimamente relacionada à função  $\frac{1}{1+x^2}$ , a primeira sendo a integral dessa última. Conforme veremos a seguir, foi a partir dessa relação (sem conhecê-la de antemão, é claro) que os indianos puderam obter uma série numérica para  $\pi$ .

Para entender o método, observe a Figura 5. Nela, o quadrado OABC tem lado de medida 1 (uma adaptação ao trabalho de Nilakanta) e o lado AB é dividido em n segmentos congruentes  $P_0P_1, \dots, P_{n-1}P_n$ . Os segmentos EF e  $P_{i-1}D$  são perpendiculares a  $OP_i$ , tornando os triângulos OEF e  $OP_{i-1}D$  semelhantes. Com isso temos

$$\frac{EF}{OE} = \frac{P_{i-1}D}{OP_{i-1}} \tag{12}$$

Também temos que  $P_{i-1}D \perp OP_i$  por construção, fazendo com que  $DP_{i-1}P_i$  e  $OAP_i$  também sejam semelhantes. Disso obtemos

$$\frac{P_{i-1}D}{OA} = \frac{P_{i-1}P_i}{OP_i}$$

$$P_{i-1}D = \frac{P_{i-1}P_i}{OP_i}.$$

Substituindo em (12) conseguimos

$$EF = \frac{P_{i-1}P_i}{OP_{i-1}OP_i} \approx \frac{P_{i-1}P_i}{OP_i^2} = \frac{\delta}{1 + AP_i^2} = \frac{\delta}{1 + i^2 \delta^2},$$

<sup>5</sup>[2] pág. 413

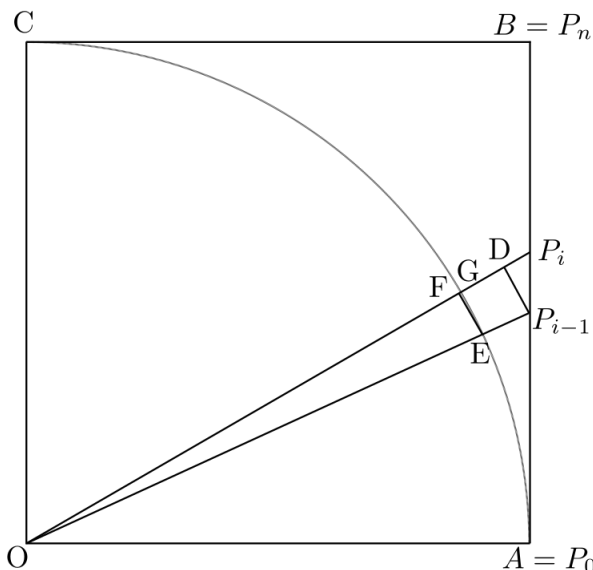


Figura 5: arco de  $\frac{1}{4}$  da circunferência em um quadrado de lado 1.

em que  $P_{i-1}P_i = \delta = \frac{1}{n}$ , conseqüentemente,  $AP_i = i\delta$ .

Sendo  $EG$  arco da circunferência e usando a aproximação  $EG \approx EF$ , temos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta}{1 + i^2 \delta^2}$$

é aproximadamente metade do arco  $AC$ , correspondendo a  $\frac{1}{8}$  do comprimento da circunferência. Como já era conhecido dos indianos que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é constante ( $\pi$ ), então a expressão acima é igual a  $\frac{\pi}{4}$ , desde que se fosse possível ter  $n$  muito grande. Por mais que as formalidades de limite não estivessem disponíveis para eles, a ideia aqui é preservada, permitindo escrever

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{1 + i^2 \delta^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{1 + i^2 \delta^2}. \quad (13)$$

Para atacar esse problema, Jyestadeva utiliza dois resultados já conhecidos. O primeiro é a soma da série geométrica

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

que era obtida a partir do seguinte método iterativo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x} &= \frac{1+x-x}{1+x} \\
 &= 1-x \frac{1}{1+x} \\
 &= 1-x \left( 1-x \frac{1}{1+x} \right) \\
 &= 1-x+x^2 \left( 1-x \frac{1}{1+x} \right) \dots
 \end{aligned}$$

O segundo resultado vem de (6), em particular que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ .

Associando esses dois resultados a (13), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \delta - \delta(i^2 \delta^2) + \delta(i^2 \delta^2)^2 - \delta(i^2 \delta^2)^3 + \dots \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{n^5} \sum_{i=1}^n i^4 - \frac{1}{n^7} \sum_{i=1}^n i^6 + \dots \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots
 \end{aligned}$$

Essa série de potência é uma conquista. Entretanto, em termos práticos, ela não é muito útil, uma vez que são necessários muitos termos para se obter uma aproximação comparável com as estimativas já obtidas para  $\pi$ . De fato, para calcular  $\pi$  com uma única casa decimal de precisão seriam necessários somar os 300 primeiros termos da série. Para calcular os primeiros 10 dígitos corretamente seriam necessários 5.000.000.000 de termos! Contudo o trabalho de Nilakanta não parou por aí. No livro *Tantrasangraha* ele expõe métodos que permitem substituir a série original por uma nova série que converge mais rapidamente.

A ideia é a seguinte: considere

$$\Sigma_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \pm \frac{1}{n} \mp f(n+1),$$

em que  $f(n)$  é uma fração racional de  $n$  tal que  $\Sigma_n$  é uma aproximação de  $\frac{\pi}{4}$  melhor do que a soma parcial  $S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \pm \frac{1}{n}$ . Substituindo  $n$  por  $n-2$  sucessivas vezes em  $\Sigma_n$  temos

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{n-2} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \pm \frac{1}{n-2} \mp f(n-1) \\
 \Sigma_{n-4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \mp \frac{1}{n-4} \pm f(n-3) \\
 &\vdots \\
 \Sigma_3 &= 1 - \frac{1}{3} + f(4) \\
 \Sigma_1 &= 1 - f(2).
 \end{aligned}$$

Agora seja  $\mu_n$  definido como

$$\begin{aligned} \mu_n &= \Sigma_n - \Sigma_{n-2} = \frac{1}{n} - f(n+1) - f(n-1) \\ \mu_{n-2} &= \Sigma_{n-4} - \Sigma_{n-2} = \frac{1}{n-2} - f(n-1) - f(n-3) \\ &\vdots \\ \mu_3 &= \Sigma_1 - \Sigma_3 = \frac{1}{3} - f(4) - f(2). \end{aligned}$$

Isso permite reescrever  $\Sigma_n$  como

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= \Sigma_1 - (\Sigma_1 - \Sigma_3) + (\Sigma_5 - \Sigma_3) + \dots \mp (\Sigma_{n-4} - \Sigma_{n-2}) \pm (\Sigma_n - \Sigma_{n-2}) \\ &= \Sigma_1 - \mu_3 + \mu_5 - \mu_7 + \dots \mp \mu_{n-2} \pm \mu_n \\ &= 1 - f(2) - \mu_3 + \mu_5 - \mu_7 + \dots \mp \mu_{n-2} \pm \mu_n. \end{aligned}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \frac{\pi}{4}$ , temos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - f(2) - \mu_3 + \mu_5 - \mu_7 + \dots \mp \mu_{n-2} \pm \mu_n \tag{14}$$

que é uma nova série para  $\pi$  que depende da escolha de  $f$ . Nilakanta propõe então três funções, sem descrever o motivo para tais escolhas <sup>6</sup>:

$$f_1(n) = \frac{1}{2n}, \quad f_2(n) = \frac{n}{2(n^2 + 1)}, \quad f_3(n) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1}{(n^2 + 5)\frac{n}{2}}.$$

Aplicando  $f_1(n)$  em  $\mu_n$  temos

$$\mu_n = \Sigma_n - \Sigma_{n-2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n-1)} = -\frac{1}{n^3 - n}.$$

Substituindo em (14) resulta na série

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^3 - 5} + \frac{1}{7^3 - 7} - \dots$$

Usando  $f_2(n)$  vem

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{1^5 + 4 \cdot 1} - \frac{4}{3^5 + 4 \cdot 3} + \frac{4}{5^5 + 4 \cdot 5} - \dots$$

A função  $f_3(n)$  é muito eficaz para o cálculo de  $\pi$ . Sem muita dificuldade, calculando

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{19} + f_3(20)$$

<sup>6</sup>Pode ser demonstrado que se  $\frac{\pi}{4} = S_n + f(n+1)$ , então [10]

$$f(n) = 1 = \frac{1}{2} \frac{1^2}{n + \frac{2^2}{n + \frac{3^2}{n + \dots}}}$$

É praticamente certo que Nilakanta conhecia algum método semelhante ao descrito acima envolvendo frações continuadas para ao cálculo de  $f$ , mas o *Tantrasangraha* não contém nenhuma pista de qual seja ele.



Nilakanta consegue aproximar  $\pi$  com a fração  $\frac{104348}{33215} = 3,141592654$ , correto até a oitava casa decimal. Apesar de não descrito em sua obra como fora a escolha das funções  $f_i$ , seus alunos Sankara Variyar [Śaṅkara Vāriyar] e Narayana [Nārāyaṇa] (c.1500 d.C.) registraram na obra *Kriyakramakari* uma justificativa matemática para  $f_1$  e  $f_2$ , informando que ela era conhecida por seu mestre [2, p. 377].

A aproximação de  $\pi$  através da função arctan foi estudada por diversos matemáticos europeus. Em especial, citamos G. W. Leibniz (1673) e J. Gregory (1671), que foram os pioneiros, abordando o problema com motivações distintas, e o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), que também publicou trabalhos importantes a respeito.

## 5. Conclusão

O grande salto na matemática desenvolvida em Kerala foi a aparição da análise matemática e cálculo numérico na forma de séries e suas aproximações relacionadas a funções no círculo. A motivação para esses trabalhos foi uma curiosidade intelectual, assim como a necessidade de maior precisão em cálculos astronômicos. As demonstrações desses resultados não têm o completo rigor dos padrões atuais, porém são corretas.

As principais descobertas da matemática indiana foram primeiramente relatadas na Europa por Charles Matthew Whish (1794-1833), um funcionário da Companhia das Índias Orientais sediado em Madras (atual Chennai, sudeste da Índia), e durante um século não atraiu a atenção da comunidade científica. O reconhecimento da importância das descobertas indianas veio somente quando o matemático indiano Cadambathur Tiruvenkatacharlu Rajagopal (1903-1978) iniciou uma série de publicações com as descobertas de Whish. Ver mais detalhes em [9] e [10].

Tal “atraso” no reconhecimento dos trabalhos da escola indiana pode estar relacionado à recusa em receber demonstrações fora dos padrões estabelecidos pelo método científico grego e sua correspondente lógica proposicional, além, claro, das limitações em se traduzir os escritos. Esses são tópicos específicos da filosofia da ciência. De acordo com David Pingree em *Hellenophilia versus the History of Science* [5],

*(...) quando a demonstração de Madhava sobre as séries de potência de seno e cosseno foram descritas pela primeira vez em inglês por Charles Whish, na década de 1830, foi alardeado que os indianos descobriram o Cálculo. (...) Essa questão ressurgiu nos anos 50, e agora que temos os textos em sânscrito apropriadamente editados, compreendemos o método engenhoso pelo qual Madhava obteve as séries **sem** o cálculo; mas muitos historiadores ainda acham impossível a concepção do problema e a sua solução com qualquer outra coisa senão o Cálculo e, por isso, proclamam que foi ao Cálculo que Madhava chegou. Dessa forma a elegância e o brilhantismo da matemática de Madhava são distorcidos na medida em que são soterrados sob a solução matemática corrente de um problema para o qual ele encontrou uma solução alternativa e poderosa.*

Essa “competição” velada em se determinar o melhor método – e com isso o único – para obter séries de potência, remete a outro episódio bem conhecido da história do Cálculo: a disputa entre Newton e Leibniz (ou melhor, entre seus admiradores; ou melhor ainda, entre Inglaterra e Alemanha), que trouxeram abordagens diferentes para os mesmos resultados. Em tais batalhas não existem vencedores e hoje reconhecemos que os dois grandes cientistas chegaram a seus resultados

independentemente e que suas contribuições para o avanço da ciência foram enormes. Com o presente trabalho não esperamos trazer à tona discussão sobre prioridades, mas fazer justiça histórica a um grupo de cientistas que, na Índia, enquanto a Europa aprofundava e despertava do seu sono dogmático da Idade Média, foi capaz de encontrar métodos poderosos para resolver complexos problemas matemáticos.

## Referências

- [1] CLARK, W.E. *The Ariabhatiya of Ariabata. Translated with notes.* University of Chicago, 1980.
- [2] JOSEPH, GEORGE G. *Indian Mathematics: Engaging with the World from Ancient to Modern Times.* World Scientific Publishing (UK). 2016.
- [3] KATZ, V. J. *A History of Mathematics: an Introduction*, 3ª edição, Addison-Wesley, 2009.
- [4] KATZ, V. J. *Ideas of Calculus in Islam and India.* Magazine, 68 (1995) pp.163-174.
- [5] PINGREE, D. E. *Hellenophilia versus the History of Science*, The University of Chicago Press Journal 562 (1992) Isis 83:4, 554-563.
- [6] PLOFKER, KIM. *Mathematics in India.* Princeton University Press (2009).
- [7] RODRIGUES, M. *Construções de tabelas de Seno nas civilizações Grega, Árabe e Indiana.* Dissertação Profmat, Universidade de Brasília, 2020.
- [8] ROY, R. *The Discovery of the Series Formula for  $\pi$  by Leibniz, Gregory and Nilakantha.* Math. Magazine, 63, (1990) pp.291-306.
- [9] RAJAGOPAL, C.T. E RANGASHARI, M.S. *On an Untapped Source of Medieval Keralese Mathematics* Archive for History of Exact Sciences, vol. 18, 1977, pp.89-102.
- [10] RAJAGOPAL, C.T. E RANGASHARI, M.S. *On Medieval Kerala Mathematics*, Archive for History of Exact Sciences, vol. 35, 1986, pp.91-99.

Marcos Rodrigues  
Centro de Ensino Fundamental 01 do Lago Norte  
<[marcosgt\\_rodrigues@hotmail.com](mailto:marcosgt_rodrigues@hotmail.com)>

Nilton Barroso  
Universidade de Brasília  
<[niltonmoura@unb.br](mailto:niltonmoura@unb.br)>

Recebido: 10/06/2020  
Publicado: 02/09/2020

# Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática

Regina Cássia de Souza Ortega 

Mari Sano 

## Resumo

O presente artigo, baseado na Dissertação de Mestrado [13] do Profmat <sup>1</sup> tem por objetivo divulgar e explorar as *Provas sem Palavras* no âmbito do Ensino Fundamental e Médio para, posteriormente, servir de possível material de consulta por parte de professores, na busca por melhores métodos de explicação sobre importantes assuntos desenvolvidos em sala. Dessa forma, acredita-se que a compreensão dos alunos através da visualização fortalecerá de maneira significativa a aquisição do conhecimento. Para tanto, são sugeridos diversos temas onde a visualização é desenvolvida e explicada.

**Palavras-chave:** Provas sem Palavras; Ensino Fundamental; Ensino Médio.

## Abstract

This article, based on the Profmat Master's Dissertation [13] aims to disseminate and explore *Proof Without Words* in the scope of elementary and high school, in order to be used later as a possible reference material for teachers in search of better methods of explanation on important subjects developed in the classroom. In this way, it is believed that students' comprehension through visualization will significantly strengthen the acquisition of knowledge. For that, several themes are suggested where the visualization is developed and explained.

**Keywords:** Proofs Without Words. Elementary School. High School.

## 1. Introdução

O ensino da Matemática é uma tarefa difícil na maioria das vezes. Por ser uma matéria abstrata, nem sempre os alunos conseguem compreendê-la. Há vezes em que o professor se esforça tentando ensinar através de exemplos do cotidiano, o que mostra que a aplicabilidade ocorre. Não obstante, nem sempre a Matemática a ser ensinada mostra a sua aplicação de imediato. Isso ocorre muitas vezes, principalmente nas etapas de “algebrismo” do Ensino Fundamental, muito embora toda essa álgebra seja de extrema importância e necessidade para todo o desenrolar da Matemática que vem pela frente. Talvez seja nesse ponto que a corrente de estudos sobre *Provas sem Palavras* venha a se desenvolver e tentar se fazer presente.

<sup>1</sup>Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - <http://www.profmat-sbm.org.br/>

As *Provas sem Palavras* surgiram da necessidade de mostrar, de uma maneira mais clara, o que determinado conceito, teorema ou fórmula quer dizer, seja através de diagramas, figuras ou animações que, com frequência, têm o poder do convencimento. O seu objetivo é auxiliar o leitor a compreender determinado tema, convencer sobre seus resultados e, por vezes, dar ideia de como provar a sua veracidade. É através da visualização que torna o caminho menos tortuoso e mais elucidativo.

Na realidade, a prática de tentar resolver um problema, seja através de um simples desenho realizado por quem queria se convencer sobre determinado resultado, seja por algum diagrama testado, existe há centenas de anos. Contudo, a expressão *Provas sem Palavras* começou muito mais recentemente, vindo da necessidade da busca de melhor explicação e convencimento visual. O seu precursor foi Roger Nelsen, que desenvolveu diversas *Provas sem Palavras* [10], [11] e [12]. Existem várias dissertações do Profimat que consideram diversos aspectos dessa abordagem visual, [1], [14].

O presente artigo propõe fazer um estudo intuitivo-pedagógico de algumas *Provas sem Palavras*, de forma a explorar exemplos, mostrar a importância da visualização e melhorar o entendimento na obtenção de resultados. Acredita-se, com isso, que esse material poderá servir aos professores como um meio de consulta e preparo antes de trabalharem com seus alunos. De forma complementar, fazendo jus à frase “uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática” contida no título do trabalho, indicamos a linha de demonstração para assistir ao professor no desenvolvimento da aula.

Apresentações dinâmicas, tais como animações, são especialmente adequadas para o enfoque pedagógico apresentado neste trabalho. Em vários momentos do presente artigo, assim como na referida dissertação, sugerimos *links* onde o leitor terá condições de acompanhar, através de movimento, a prova em questão. Com esses *links*, espera-se que a visualização seja, na medida do possível, aplicada em sala de aula. A maioria das figuras desse trabalho foi desenvolvida usando o *software GeoGebra*<sup>2</sup>, como forma de melhor compreensão.

Este trabalho está dividido na seguinte forma: na seção 2 descrevemos as Representações Visuais Através do Tempo; nela também são apresentados diversos pensamentos de pesquisadores que trabalham sobre o assunto. Nas seções 3 e 4 abordamos, respectivamente, diferentes temas aplicados para o Ensino Fundamental e Médio.

## 2. Representações Visuais através do Tempo

Até o século XVI constata-se uma marcante influência da rigorosidade axiomática da Matemática grega como paradigma de desenvolvimento na Matemática ocidental. A partir da Revolução Científica (XVI-XVII) até, aproximadamente, o início da segunda fase da Revolução Industrial (XIX), houve uma mudança de pensamento na qual não era presente muita preocupação com o rigor, e a Matemática passou a se interessar na resolução de problemas práticos necessários para a época, relacionados ao comércio, à Mecânica e à Astronomia. Essa fase foi marcada por imensa produtividade dentro da Matemática, dando origem ao Cálculo Diferencial e Integral.

Com a falta de rigor, muitos estudiosos do Cálculo, a começar pelos próprios Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716), tinham dificuldades para explicar certos fundamentos de procedimentos importantes criados por eles próprios [3]. Então, alguns matemáticos como Lagrange (1736-1813) e Bolzano (1781-1848) começaram a perceber a necessidade de eliminar das suas demonstrações o recurso à visualização de propriedades geométricas [5] e a ter consciência de que a fundamentação

---

<sup>2</sup><http://www.geogebra.org/>

matemática passava a ser uma necessidade, o que originou o movimento conhecido como aritmetização da Análise, o qual, por sua vez, impulsionou o aparecimento da Linguagem (Lógica) dos Conjuntos (veja [8], (capítulos 14 e 15), e que foi trazido para o Ensino pela Matemática Moderna, (veja [9] e os artigos de Búrgio, Prytz e Schubring em [17]).

No entanto, se por um lado as demonstrações rigorosas trouxeram o desenvolvimento lógico de conceitos e teorias, por outro ocorreu um distanciamento da linguagem matemática natural, tornando-se uma das maiores dificuldades por parte de professores e de alunos nos tempos atuais.

A partir de 1980, com o surgimento do Construtivismo<sup>3</sup>, a Educação Matemática ganhou espaço. Novas metodologias de pesquisa qualitativa passaram a ser aceitas como importantes ferramentas dentro da Educação Matemática. O pensamento visual, juntamente com a pesquisa qualitativa, passou a desempenhar um importante papel para a investigação de novos processos de pensamento e no uso de imagens e formas de expressão dentro do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Pouco a pouco, esse processo foi se desenvolvendo, e a utilização de diagramas e tabelas passou a ser mais frequente [16].

Nas últimas décadas, com o crescente acesso a computadores, mais pesquisas dentro dessa área passaram a ocorrer, principalmente devido à facilidade de desenvolver computacionalmente uma melhor visualização de diagramas e tabelas. Vários trabalhos começaram a ser realizados focando uma dinamização e novas formas de interpretação e de pensamento. Diante disso, departamentos de Filosofia, Matemática, Informática e Ciência Cognitiva passaram a trabalhar em projetos de pesquisa dedicados ao desenvolvimento de ferramentas visuais para facilitar o entendimento.

Algo importante a considerar a partir deste estudo, que ganha cada vez mais espaço nas pesquisas dessa área, é que representações visuais possam ser usadas não apenas para obter maior facilidade de visualização na Matemática, mas também na sua justificação. Um número cada vez maior de matemáticos e lógicos têm trabalhado com o uso de diagramas e representações visuais que, em geral, facilitam a compreensão de um teorema e sua demonstração, além de inspirar o teorema a ser provado, apontando, por vezes, caminhos para a construção da própria prova. Há um debate em torno de se uma *Prova sem Palavras* realmente se qualifica como uma prova. Hoje há ainda muita controvérsia sobre o papel da representação visual numa demonstração, e são muitos os pesquisadores que opinam sobre o tema. Por um lado colocam-se os que pensam que as representações visuais são meros facilitadores da compreensão matemática do que se quer provar, e, por outro, há os que defendem que as representações visuais têm papel essencial numa demonstração e que podem constituir provas, tornando desnecessária qualquer outra prova tradicional. A seguir apresentamos uma breve compilação do pensamento de alguns matemáticos em relação a essa abordagem:

- Bill Casselman acredita que uma imagem desempenha um papel crucial na demonstração lógica. Segundo ele, “uma *Prova sem Palavras* pode ser pensada como uma “prova” que faz uso de representações visuais, ou seja, imagens ou outros meios visuais para mostrar uma ideia matemática, equação ou teorema” [4].
- Jon Barwise e John Etchemendy reconhecem que provas formadas por uma sequência de etapas que chegam a um raciocínio correto contribuem com o desenvolvimento da Matemática, e que, se a prova utilizando representações visuais contiver de maneira clara as informações apresentadas na conclusão, então a prova é válida [2].

<sup>3</sup>O Construtivismo é uma corrente de pensamento baseado nos mecanismos de funcionamento da inteligência e a construção do sujeito a partir de sua interação com o meio, ou seja, as estruturas cognitivas do sujeito não nascem prontas, cabendo ao professor a tarefa de criar possibilidades enquanto sujeito mediador da aprendizagem.

- Segundo Richard Palais, professor emérito da Universidade de Brandeis, “a visualização pode mostrar o caminho a uma prova rigorosa”, deixando claro que as representações visuais podem ser aceitas como provas legítimas em si mesmas [15].

Finalmente, é importante citar que as *Provas sem Palavras* obtiveram um maior reconhecimento a partir do momento em que a *Mathematical Association of America* começou a publicá-las regularmente na *Mathematics Magazine*, sendo seu precursor Roger Nelsen, que tem interesse no processo de visualização em Matemática, mais especificamente em figuras que ajudam os alunos a entender ideias matemáticas, provas e argumentos, tendo publicado mais de uma centena de pesquisas a respeito.

### 3. Provas sem Palavras para o Ensino Fundamental

A Matemática do Ensino Fundamental é rica em situações-problemas que trazem aos alunos diversas aplicações e, conseqüentemente, visualizações de exemplos em forma de *Provas sem Palavras*. Aqui, longe de esgotar os casos, serão citadas algumas situações que poderão ter alguma importância.

A primeira abordagem será o Teorema de Pitágoras, que é estudado no 9º ano do Ensino Fundamental, sendo que esse tema é abordado durante todo o Ensino Médio.

**Teorema 1. (Teorema de Pitágoras)** *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Existem inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras, e muitas delas através de *Provas sem Palavras*. Devido à grande importância e variedade em demonstrações desse teorema, serão apresentadas duas provas.

#### 3.1. Teorema de Pitágoras I

Este Teorema foi mostrado através de *Provas sem Palavras*, em 1876, por James Abram Garfield (1831-1881), que foi o 20º presidente dos Estados Unidos.

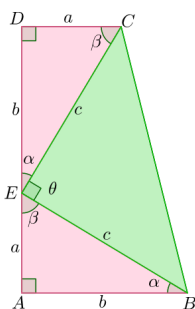


Figura 1: Teorema de Pitágoras I.

Fonte: As autoras.

James Garfield considerou um triângulo retângulo de catetos  $a$  e  $b$ , e hipotenusa  $c$ . Logo, desenhou duas cópias desse triângulo retângulo:  $\triangle ABE$  e  $\triangle CDE$ , conforme a Figura 1. Depois uniu os pontos  $B$  e  $C$ , formando o trapézio retângulo  $ABCD$ , de bases  $a$  e  $b$  e altura  $a + b$ . Importante observar que o  $\triangle BCE$  é retângulo isósceles, pois os lados  $\overline{CE}$  e  $\overline{BE}$  medem  $c$  e o ângulo  $\theta$  é retângulo pois, conforme a Figura 1, tem-se  $\alpha + \theta + \beta$  vale  $180^\circ$ . Assim,  $\theta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$ .

Ao calcular a área desse trapézio, de duas formas diferentes, tem-se:

(a) Pela área do trapézio,  $A_{\text{Trapézio}} = \frac{(a + b)(a + b)}{2}$ .

(b) Pela soma das áreas dos três triângulos retângulos,  $A_{\text{Trapézio}} = \frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2}$ .

Igualando as expressões das áreas obtidas acima, obtém-se  $c^2 = a^2 + b^2$ .

### 3.2. Teorema de Pitágoras II

Nessa segunda abordagem do Teorema de Pitágoras, observando a imagem que está ao lado esquerdo da Figura 2, considere-se o quadrado  $ABCD$ , de lado  $c$ , formado por quatro triângulos retângulos de catetos  $a$  e  $b$ , e hipotenusa  $c$ , além de um quadrado no centro, de lado  $b - a$ . Tal construção fecha um quadrado de lado  $a + b$  pelo fato de os triângulos serem retângulos.

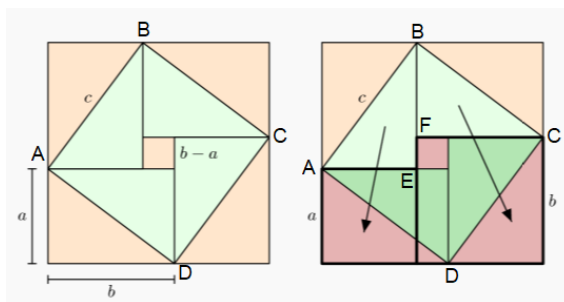


Figura 2: Teorema de Pitágoras II.

Fonte: [http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs\\_without\\_words](http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words). Acesso em: 08/10/2019. Legenda adicionada pelas autoras.

Calculando a área do quadrado  $ABCD$  de duas formas diferentes, tem-se:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b - a)^2 = a^2 + b^2.$$

A imagem do lado direito mostra uma ideia um pouco diferente: apenas o desmembramento de dois triângulos que compõem o quadrado  $ABCD$ . Primeiro, rotaciona-se por  $A$  o triângulo retângulo  $ABE$ , de tal forma que o vértice  $B$  coincida com o vértice  $D$ , do quadrado. Logo, rotaciona-se por  $C$  o  $\triangle CBF$ , de tal forma que o vértice  $B$  coincida com  $D$ . Dessa maneira, obtêm-se dois

quadrados (ambos delimitados por uma cor mais forte) de lados  $a$  e  $b$ , cuja soma de áreas,  $a^2 + b^2$ , é exatamente igual a  $c^2$ , área do quadrado de lado  $c$ , e conseguindo, assim, a equivalência de áreas entre o quadrado ABCD, de lado  $c$ , e a soma dos quadrados de lados  $a$  e  $b$ .

O link <https://www.geogebra.org/m/jFFERBdd> apresenta alguns trabalhos realizados no *GeoGebra*, onde se pode ver a demonstração visual de 30 maneiras diferentes do Teorema de Pitágoras de forma dinâmica.

### 3.3. Quadrado da Soma de Dois Termos

Nesta seção a *Prova sem Palavras* irá mostrar que  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Para interpretar geometricamente esse produto, considere-se o quadrado de lado  $(a + b)$ , como na Figura 3.

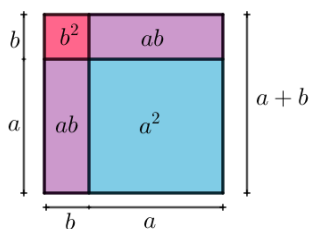


Figura 3: Quadrado da Soma de Dois Termos.

Fonte: As autoras.

Observa-se que a área do quadrado maior será  $(a + b)^2$ . Esse quadrado é composto por dois quadrados menores, um de área  $a^2$  e outro de área  $b^2$ , e também por dois retângulos, ambos de área  $ab$ . Somando-se as áreas dessas quatro regiões, se obter-se-á  $a^2 + 2ab + b^2$ , e, finalmente,  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

Existem vários materiais prontos e disponíveis no *GeoGebra*, onde se pode acompanhar esse resultado através de movimento. Seguem duas sugestões: <https://www.geogebra.org/m/rbmzq7Dh> e <https://www.geogebra.org/m/E39u4Cq6>.

Importante comentar que se o professor desenvolver em sala de aula esse raciocínio visual, o aluno poderá ter maior facilidade de compreensão do que ocorre.

### 3.4. Quadrado da Diferença de Dois Termos

O objetivo desta seção é fornecer uma *Prova sem Palavras* do quadrado da diferença de dois termos, isto é,  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ . A interpretação geométrica desse produto será feita por meio das áreas dos quadrados de lado  $a$  e  $b$ , conforme a Figura 4.



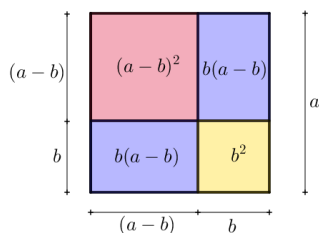


Figura 4: **Quadrado da Diferença de Dois Termos.**

Fonte: As autoras.

Observa-se que, ao tomar a área do quadrado maior, que tem lado  $a$ , e dele subtrair a área dos dois retângulos de lados  $b$  e  $a - b$ , assim como retirar a área do quadrado de lado  $b$ , sobrar a área do quadrado de lado  $(a - b)$ ; dessa forma:

$$\begin{aligned}
 a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2 &= a^2 - 2b(a - b) - b^2 \\
 &= a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 \\
 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 &= (a - b)^2.
 \end{aligned}$$

Uma vez que o aluno, com o auxílio do professor, esteja engajado e acostumado às representações visuais, pouco a pouco irá obter outros resultados de maneira mais rápida e significativa.

Segue como sugestão de visualização dinâmica sobre o quadrado da diferença de dois termos o *link* <https://www.geogebra.org/m/fm67dzqy>.

### 3.5. Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos

Nesta seção será visto que a demonstração da igualdade  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  é bastante simples. Será interpretado geometricamente esse resultado por meio das áreas dos quadrados de lados  $a$  e  $b$ , conforme a Figura 5.

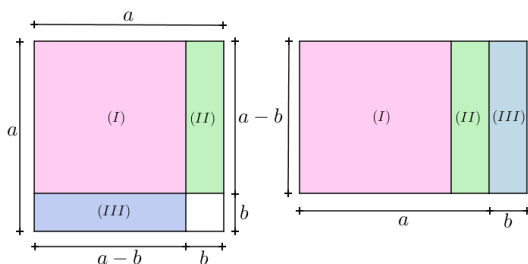


Figura 5: **Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos.**

Fonte: As autoras.

A Figura 5 mostra um quadrado maior de lado  $a$ , formado por um quadrado (I) de lado  $(a - b)$  e outro de lado  $b$ , além de dois retângulos (II) e (III) de lados  $b$  e  $a - b$ . Calculando a área do quadrado de lado  $a$  e dele retirando a área do quadrado de lado  $b$ , sobrarão as regiões I, II e III, cujas áreas são  $(a - b)^2$ ,  $b(a - b)$  e  $b(a - b)$ , respectivamente. Colocando essas regiões lado a lado, será formado um retângulo de lados  $a + b$  e  $a - b$ . A área desse retângulo é  $(a + b)(a - b)$ . Portanto,  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

Através dos seguintes *links*, tem-se duas formas diferentes de como visualizar no *GeoGebra* esse produto notável: <https://www.geogebra.org/m/P5CGdcpZ> e <https://www.geogebra.org/m/R4vQsjfr>.

### 3.6. Área de Figuras Planas

A Geometria Plana é um conteúdo que possibilita ser desenvolvido de forma diversificada com os alunos. Com base nisso, a próxima *Prova sem Palavras* foi desenvolvida com o intuito de os estudantes manipularem as formas geométricas de diferentes maneiras, até chegarem a superfícies equivalentes.

#### 3.6.1 Área de Trapézio e Triângulo

No Ensino Fundamental, a expressão que representa a área do trapézio normalmente é conhecida por:

$$S_{\text{Trapézio}} = \frac{(\text{Base maior} + \text{Base menor}) \cdot \text{Altura}}{2}.$$

Contudo, são poucos os alunos que sabem que um trapézio pode ser transformado em triângulo, e, a partir disso, obter a fórmula acima. Para isso, a *Prova sem Palavras* da Figura 6 mostra facilmente como chegar a esse objetivo.

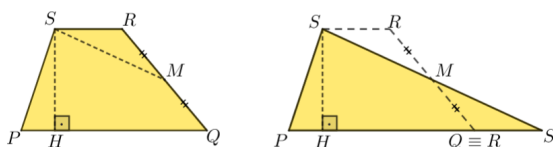


Figura 6: Área de Trapézio e Triângulo.

Fonte: As autoras.

Considere-se, no trapézio PQRS,  $\overline{PQ}$  = Base maior,  $\overline{RS}$  = Base menor e  $\overline{SH}$  = Altura. Partindo do trapézio PQRS, divide-se o lado  $\overline{QR}$  ao meio, encontrando o ponto médio  $M$ . Por esse ponto, rotaciona-se o  $\Delta SRM$  até  $\overline{QM}$  coincidir com  $\overline{MR}$ , sendo que os segmentos  $\overline{SM}$  e  $\overline{MS'}$  são colineares, obtendo-se o  $\Delta PS'S'$ , cuja base será  $\overline{PS'} = \overline{PQ} + \overline{QS'}$ , e de altura  $\overline{SH}$ . Com isso, a área do  $\Delta PS'S'$  será a mesma do trapézio PQRS, pois não houve perda de superfície. Algebricamente, como  $\overline{QS'}$  tem a mesma medida de  $\overline{RS}$ , tem-se:

$$S_{\Delta PS'S'} = \frac{\overline{PS'} \cdot \overline{SH}}{2} = \frac{(\overline{PQ} + \overline{QS'}) \cdot \overline{SH}}{2} = \frac{(\overline{PQ} + \overline{RS}) \cdot \overline{SH}}{2} = \frac{(\text{Base maior} + \text{Base menor}) \cdot \text{Altura}}{2}.$$

### 3.7. Completando Quadrados

Para se resolver equações polinomiais do segundo grau, da forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , quando ainda não existia a fórmula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , usava-se o método de completar quadrados, criado pelo matemático árabe Abu Abdullah Mohammed ben Musa Al-Khwarizmi (780-850) que se baseia em

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

A fim de entender a *Prova sem Palavras* dessa igualdade, trabalha-se com a área do quadrado de lado  $x$  somada à área do retângulo de lados  $b$  e  $x$ . Para isso, o retângulo é dividido em duas partes iguais, de tal modo que seus lados são  $x$  e  $\frac{b}{2}$ . Depois, constrói-se um novo quadrado de lado  $x + \frac{b}{2}$ , sendo que o quadrado pequeno de lado  $\frac{b}{2}$  não faz parte dessa construção, conforme pode-se ver na Figura 7.

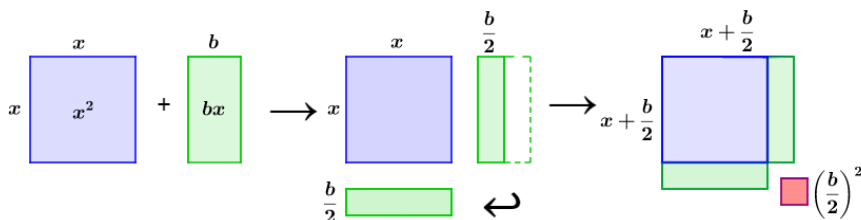


Figura 7: Completando Quadrados.

Fonte: As autoras.

Algebricamente, tem-se  $x^2 + bx = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ .

Introduzido no 9º ano do Ensino Fundamental, esse assunto é normalmente considerado de difícil entendimento por parte dos estudantes. A parte visual é de fundamental importância para sua elucidação. Uma vez desenvolvido esse tema através das representações visuais, espera-se que o aluno desempenhe melhor suas habilidades dentro do cálculo algébrico. Para tanto, aconselha-se ver o *link* <https://www.geogebra.org/m/ytsdsfyH>, onde o estudante poderá interagir com a proposta através do *GeoGebra*.

### 4. Provas sem Palavras para o Ensino Médio

Nesta seção serão apresentados mais exemplos de *Provas sem Palavras*, conforme realizado na seção 3, porém com assuntos próprios do Ensino Médio.

#### 4.1. Lei dos Cossenos

Dado um  $\triangle OBF$  qualquer, de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , conforme a Figura 8.

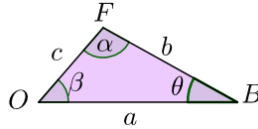


Figura 8: **Apresentação da Lei dos Cossenos.**

Fonte: As autoras.

A Lei dos Cossenos é dada por:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

Para a próxima *Prova sem Palavras* serão utilizados dois resultados da Geometria, cujas demonstrações podem ser consultadas em [7].

**Teorema 2.** *Um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo inscrito é metade da medida do arco correspondente.*

**Teorema 3.** *Se por P passam duas retas concorrentes que interseccionam a circunferência em A, B, C e D, respectivamente, conforme a Figura 9, então*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

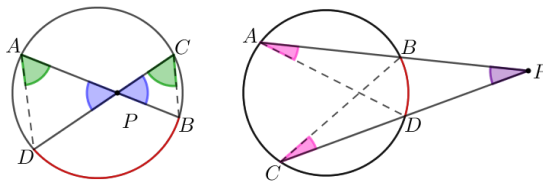
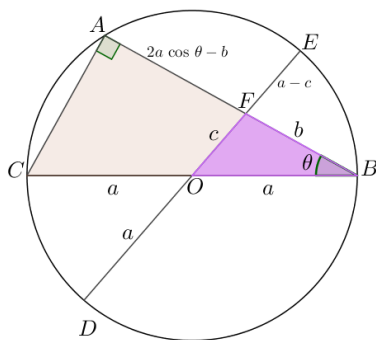


Figura 9: **Potência de Ponto.**

Fonte: As autoras.

Será demonstrada a identidade  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ . Para isso, considere-se o  $\triangle ABC$ , inscrito na circunferência de raio  $a$ , cuja hipotenusa  $\overline{BC}$  é o diâmetro dessa circunferência. Pelo Teorema 2, o  $\widehat{CAB}$  é retângulo, como mostra a Figura 10. Considere-se também o  $\triangle OBF$ , da mesma figura.



$$(2a \cos \theta - b) \cdot b = (a - c)(a + c)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Figura 10: **Lei dos Cossenos.**

Fonte: As autoras.

Tem-se que:

- $\overline{AB} = 2a \cos \theta$ .
- $\overline{OF} = c$ .
- $\overline{FB} = b$ .
- $\overline{FD} = a + c$ .
- $\overline{FA} = 2a \cos \theta - b$ .
- $\overline{FE} = a - c$ .

Pela propriedade de Potência de Ponto, sabe-se que  $\overline{FA} \cdot \overline{FB} = \overline{FD} \cdot \overline{FE}$ . Desse modo,  $(2a \cos \theta - b) \cdot b = (a + c) \cdot (a - c)$ . Logo,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ .

Também para esse tópico sugere-se acessar o [link https://www.geogebra.org/m/AbpUfamD](https://www.geogebra.org/m/AbpUfamD), onde se mostra a Lei dos Cossenos no *GeoGebra* dessa mesma forma.

#### 4.2. Seno e Cosseno da Soma de Dois Arcos

A expressão do seno da soma de dois arcos  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha.$$

E a expressão do cosseno da soma de dois arcos  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por:

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta.$$

Nessa *Prova sem Palavras* será usado o Teorema dos ângulos externos de um triângulo, cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

**Teorema 4.** *Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Para a visualização, considere-se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\alpha + \beta$  tais que  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $\alpha + \beta < 90^\circ$ .

Serão mostradas as duas expressões baseadas em uma mesma figura.

Começando com o triângulo retângulo  $ABF$ , com hipotenusa medindo 1 e um dos ângulos igual a  $\alpha + \beta$ . Logo, seus catetos medem  $\cos(\alpha + \beta)$  e  $\sin(\alpha + \beta)$ , segundo a Figura 11.

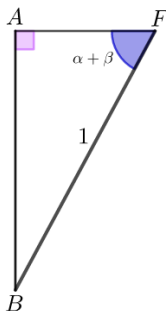


Figura 11: **Triângulo de ângulo  $\alpha + \beta$ .**

Fonte: As autoras.

A fim de provar as fórmulas do seno e do cosseno da soma, será preciso fazer aparecer  $\alpha$  e  $\beta$ . Para tanto, serão construídas em volta do  $\Delta ABF$  figuras associadas a  $\alpha$  e  $\beta$ , da seguinte forma: de B será traçada uma linha  $L_1$  em um ângulo  $\beta$  à direita de  $\overline{BF}$  e uma segunda linha  $L_2$ , em um ângulo  $\alpha$ , à direita de  $L_1$ , conforme a Figura 12.

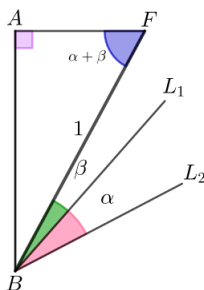


Figura 12: **Ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ .**

Fonte: As autoras.

Como o ângulo entre  $\overline{BF}$  e  $L_2$  é igual a  $\alpha + \beta$ , tem-se que  $L_2$  é paralela ao segmento  $\overline{AF}$ , isso sugere a presença de um retângulo associado ao problema.

A seguir, desenha-se de F uma perpendicular à linha  $L_1$ , obtendo E, e logo desenha-se de E uma paralela ao segmento  $\overline{AB}$  até atingir  $L_2$ , obtendo C, como mostra a figura a seguir:

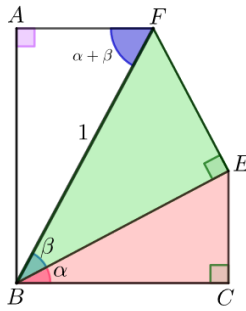


Figura 13:  $\overline{AF}$  é paralelo a  $\overline{BC}$ .  
 Fonte: As autoras.

Agora, basta completar o retângulo para obter D, como pode ser observado na Figura 14.

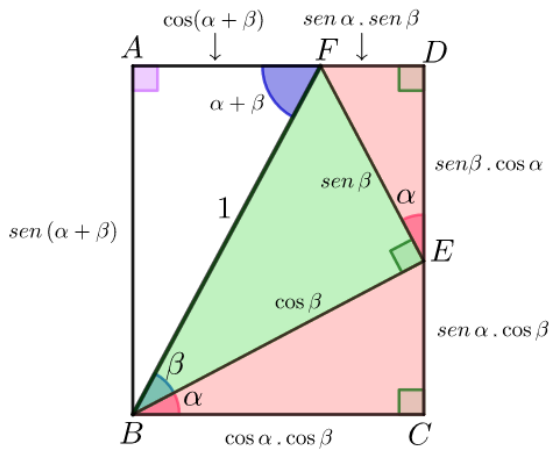


Figura 14: **Seno e Cosseno da Soma de Dois Arcos.**  
 Fonte: As autoras.

Como a hipotenusa do  $\triangle BEF$  mede 1 e o ângulo  $\widehat{FBE} = \beta$ , tem-se que o cateto  $\overline{BE}$  mede  $\cos \beta$  e o cateto  $\overline{EF}$  mede  $\sin \beta$ .

Os catetos  $\overline{CE}$  e  $\overline{BC}$ , do triângulo retângulo BCE, medem  $\sin \alpha \cdot \cos \beta$  e  $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ , respectivamente, dado que sua hipotenusa mede  $\cos \beta$ .

Finalmente, no  $\triangle EFD$ ,  $\widehat{FED} = \alpha$  pelo Teorema 4 no  $\triangle BCE$ . Com isso, os catetos  $\overline{DF}$  e  $\overline{DE}$  medem, respectivamente,  $\sin \alpha \cdot \sin \beta$  e  $\sin \beta \cdot \cos \alpha$ .

Comparando os lados do retângulo ABCD, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{AB} = \overline{DC} &\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha. \\ \overline{AD} = \overline{BC} &\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta. \\ &\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

### 4.3. Seno e Cosseno da Diferença de Dois Arcos

A expressão do seno da diferença de dois arcos  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

A expressão do cosseno da diferença de dois arcos  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

A fim de visualizar tais expressões, será considerado  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\alpha + \beta$  tais que  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $\alpha + \beta < 90^\circ$ .

Para essa *Prova sem Palavras* pode ser usada uma construção similar à que foi feita na seção 4.2, porém, neste caso os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  não serão adjacentes:

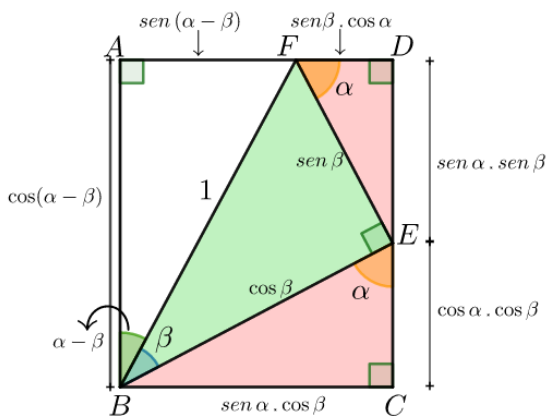


Figura 15: Seno e Cosseno da Diferença de Dois Arcos.

Fonte: As autoras.

No  $\triangle ABF$ , com hipotenusa medindo 1 e um dos ângulos igual a  $\alpha - \beta$ , o cateto  $\overline{AF}$  mede  $\sin(\alpha - \beta)$  e o cateto  $\overline{AB}$  mede  $\cos(\alpha - \beta)$ .

Como a hipotenusa do  $\triangle BEF$  mede 1 e o ângulo  $\widehat{FBE} = \beta$ , tem-se que os catetos  $\overline{BE}$  e  $\overline{EF}$  medem, respectivamente,  $\cos \beta$  e  $\sin \beta$ .

Agora,  $\widehat{BEC}$  é alterno interno a  $\widehat{ABE}$ ; logo,  $\widehat{BEC} = \alpha$ . Como a hipotenusa do triângulo retângulo  $BCE$  mede  $\cos \beta$ , segue que o cateto  $\overline{BC}$  mede  $\sin \alpha \cdot \cos \beta$  e o cateto  $\overline{CE}$  mede  $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ .



Finalmente, no  $\triangle EFD$  tem-se que  $\widehat{EFD} = \alpha$ , pelo Teorema 4 no  $\triangle BCE$ . Com isso, o cateto  $\overline{DE}$  mede  $\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$  e o cateto  $\overline{DF}$  mede  $\text{sen } \beta \cdot \cos \alpha$ .

Comparando os lados do retângulo ABCD, chega-se à conclusão:

$$\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \text{sen}(\alpha - \beta) + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha.$$

#### 4.4. Progressão Aritmética - Soma de Inteiros

Nessa seção será mostrado que a soma

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$$

dos primeiros  $n$  inteiros positivos é igual à metade de  $n^2 + n$ , isto é,  $\frac{n(n+1)}{2}$ . A *Prova sem Palavras* para essa soma está representada na Figura 16:

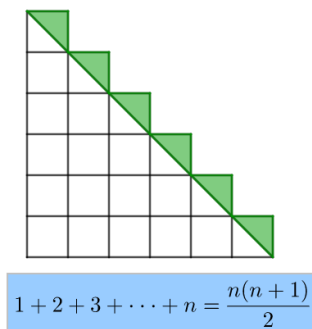


Figura 16: **Progressão Aritmética - Soma de Inteiros.**

Fonte: As autoras.

Nela pode-se observar que a área do triângulo de lado 6 e altura também 6 será 18 unidades; depois, somando a área de 6 quadrados e dividindo por 2, obtém-se o total de quadrados da figura, que é 21. Generalizando, tem-se portanto a área de um triângulo com uma altura de comprimento  $n$  unidades e uma base de comprimento  $n$  unidades, que resulta  $\frac{n^2}{2}$ . A área que falta ser adicionada é  $\frac{1}{2}$  multiplicada por  $n$ , sendo  $n$  o número de unidades quadradas. Essas são as metades dos quadrados sombreados,  $\frac{n}{2}$ .

Certamente, o exposto acima não é uma demonstração, mas sim uma visualização desse fato que pode ser apresentada aos estudantes e, logo, usar a soma de uma progressão aritmética para justificar a fórmula.

Como sugestão de animação pode-se acessar os *links*: <http://www.math.utah.edu/~palais/sums.html> e <https://www.geogebra.org/m/YYdPDUqS>. Esse último transmite exatamente o que foi exposto nesta seção.

#### 4.5. Volume de Tronco de Pirâmide de Base Quadrada

O volume do tronco de uma pirâmide quadrada costuma ser visto com muita frequência no Ensino Médio. A próxima *Prova sem Palavras* retrata uma maneira diferente de ser desenvolvida, para chegar à fórmula desse volume.

Na Figura 17 há um tronco de pirâmide de base maior  $b$  e base menor  $a$ , cuja altura é  $h$ .

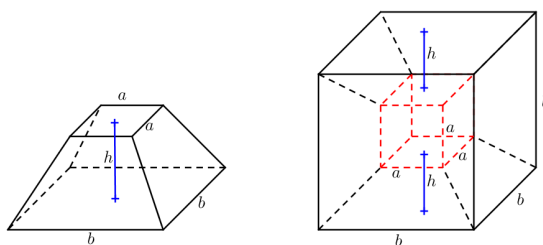


Figura 17: Volume de Tronco de Pirâmide de Base Quadrada.

Fonte: As autoras.

Se forem colocados nesse tronco de pirâmide outros quatro troncos iguais nas laterais (um em cada face), e outro tronco na parte superior, pode-se perceber que será formado um cubo grande de aresta  $b$ , porém com um cubo não preenchido internamente de aresta  $a$ . Isso significa que o volume de cada tronco de pirâmide colocado terá  $\frac{1}{6}$  do volume do cubo maior menos o volume do cubo menor. Escrito de outra forma:

$$V_{\text{Tronco}} = \frac{1}{6}(b^3 - a^3).$$

Como também se pode observar, a aresta  $b$  do cubo maior terá a mesma medida de duas alturas  $h$  do tronco inicial mais a aresta  $a$  do cubo menor, isto é,  $b = 2h + a$ . Assim,

$$V_{\text{Tronco}} = \frac{1}{6}(b^3 - a^3) = \frac{1}{6}(b - a)(a^2 + b^2 + ab) = \frac{1}{6}2h(a^2 + b^2 + ab) = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab),$$

que é a fórmula do tronco de uma pirâmide de base quadrada.

Segue, como sugestão, o *link* <https://www.geogebra.org/m/JWMSFnW8>, sobre tronco de pirâmide.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi precursor do cálculo infinitesimal. Ele, juntamente com o alemão Johannes Kepler (1571-1630) e outros matemáticos, inventou e usou métodos intuitivos infinitesimais para resolver problemas de área e volume, isto é, a integral. Vinte anos após a publicação da *Stereometria Doliorum* de Kepler, Cavalieri escreveu um livro muito popular: *Geometria*

*indivisibilibus* (1635). Nele, o matemático italiano usou o que agora é conhecido como o Princípio de Cavalieri [18].

### Princípio de Cavalieri:

*Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes)* [6].

Nas seguintes subseções serão apresentadas algumas aplicações do Princípio de Cavalieri.

### 4.6. Volume da Semiesfera

Nesta seção será mostrada outra *Prova sem Palavras* realizada no século V pelo matemático chinês Zu Geng (480-525). Acredita-se que ele tenha sido o primeiro a desenvolver a ideia do Princípio de Cavalieri, muito tempo antes desse último estudar o tema. O objetivo é chegar na fórmula do volume da semiesfera, para isso, serão comparadas as secções de uma pirâmide de base quadrada “deitada” do lado da semiesfera para, posteriormente, utilizar o Princípio de Cavalieri e comparar os seus respectivos volumes.

Partindo de uma pirâmide de base quadrada de lado  $r$  e altura  $2\pi r$ , traça-se um plano, a uma altura  $h$ , conforme a Figura 18.

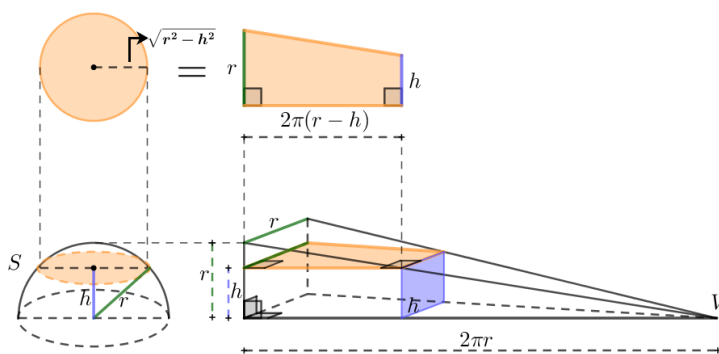


Figura 18: **Volume de Semiesfera.**

Fonte: As autoras.

A secção paralela à base desta pirâmide (na cor azul nas figuras) será um quadrado de lado  $h$ , conforme resultado abaixo, cujo assunto pode ser encontrado em [6].

**Proposição 1.** *Em uma pirâmide qualquer, a secção transversal e a base são regiões poligonais semelhantes.*

Dessa forma, pode-se comparar a base da pirâmide e da secção paralela, para encontrar a medida  $H$  da altura do tronco da pirâmide, aplicando proporções, segundo a Figura 19.

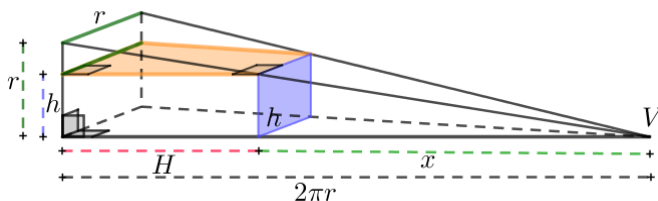


Figura 19: **Pirâmide.**

Fonte: As autoras.

Obtém-se  $\frac{x}{h} = \frac{2\pi r}{r}$ . Desse modo,  $x = 2\pi h$ .

Como  $H = 2\pi r - x$ , tem-se que  $H = 2\pi r - 2\pi h$ , o que implica  $H = 2\pi(r - h)$ .

Tomando a secção da pirâmide e calculando a sua área, de acordo com a Figura 20, obtém-se:

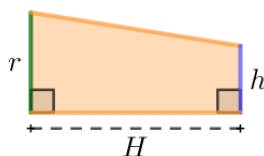


Figura 20: **Secção da Pirâmide.**

Fonte: As autoras.

$$S_{\text{Trapézio}} = \frac{(r + h)2\pi(r - h)}{2} = \pi(r^2 - h^2).$$

Seja agora a semiesfera de raio  $r$ , cuja secção dista  $h$  do centro da mesma, e seja  $r'$  o raio dessa secção. Tem-se que  $r, h$ , e  $r'$  formam um triângulo retângulo de hipotenusa  $r$ , de acordo com a Figura 21.

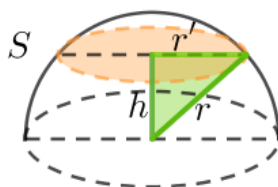


Figura 21: **Secção da Semiesfera.**

Fonte: As autoras.

Aplicando o Teorema de Pitágoras para calcular a medida do raio dessa secção, conclui-se que  $r^2 = r'^2 + h^2$ , de onde  $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$ . Portanto, a área da secção será  $A_{\text{Círculo}} = \pi r'^2 = \pi(r^2 - h^2)$ .

Logo, as áreas das secções da pirâmide e da semiesfera são iguais, qualquer que seja o plano secante paralelo a um plano dado, assim como seus volumes são iguais, de acordo com o Princípio de Cavalieri,  $V_{\text{Semiesfera}} = V_{\text{Pirâmide}} = \frac{2}{3}\pi r^3$ .

#### 4.7. Problema do Anel de Guardanapo

A forma do anel de guardanapo origina-se de uma esfera. Ao passar um cilindro cortante através do centro da esfera, obtém-se o anel de guardanapo, conforme a Figura 22.

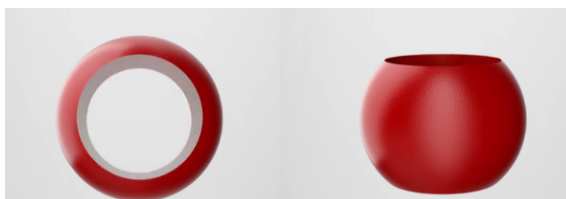


Figura 22: Anel de Guardanapo.

Fonte: <https://steemit.com/steemstem/@mcfarhat/the-napkin-ring-paradox>. Acesso em: 08/10/2019.

Surpreendentemente, o volume do anel de guardanapo não depende do raio da esfera original, apenas da altura.

Usando o Princípio de Cavalieri, será mostrado que *quaisquer dois anéis de guardanapo, com a mesma altura, terão o mesmo volume, independentemente do tamanho de suas esferas originais*. Ou seja, se houver uma esfera do tamanho de uma bola de tênis e outra do tamanho de uma bola de basquete, por exemplo, cortando anéis de guardanapos de mesma altura, ambos terão exatamente o mesmo volume, sendo que o menor teria um anel mais grosso, conforme se pode constatar na Figura 23. É nessa figura que se baseia a *Prova sem Palavras* desta seção.

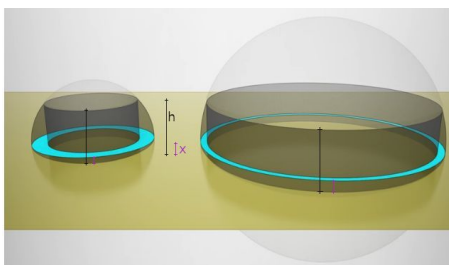


Figura 23: Anel de Guardanapo - Coroa Circular.

Fonte: <https://steemit.com/steemstem/@mcfarhat/the-napkin-ring-paradox>. Acesso em: 08/10/2019. Legenda adicionada pelas autoras.

Partindo-se de dois anéis de guardanapo de altura  $2h$ . Considerem-se somente os respectivos hemisférios superiores, de altura  $h$ . Logo, traça-se um plano horizontal, a uma altura  $x$ . A interseção desse plano com esses hemisférios são coroas circulares, como mostra a Figura 23. Então, para atingir o objetivo, usa-se o Princípio de Cavalieri: dado que se está considerando anéis de mesma altura, basta mostrar que a área da coroa circular independe do raio da esfera.

Para isso, considere-se uma semiesfera de raio  $R$  e um plano paralelo a sua base, a uma distância  $h$ . Esse plano determina, na semiesfera, uma secção de raio  $r_1$  e área  $\pi r_1^2$ , conforme a Figura 24. Essa secção é a do cilindro cortante que determina o anel de guardanapo de altura  $2h$ , considerando as duas semiesferas. Ao traçar outro plano paralelo à base, a uma distância qualquer  $x$ ,  $0 \leq x \leq h$ , tem-se outra secção, de raio  $r_2$  e área  $\pi r_2^2$ .

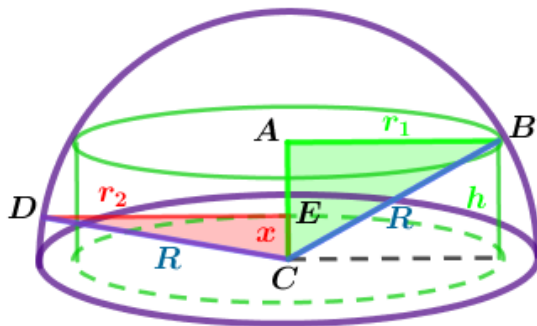


Figura 24: Anel de Guardanapo - Princípio de Cavalieri.  
Fonte: As autoras.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABC e CDE, conforme a Figura 25,

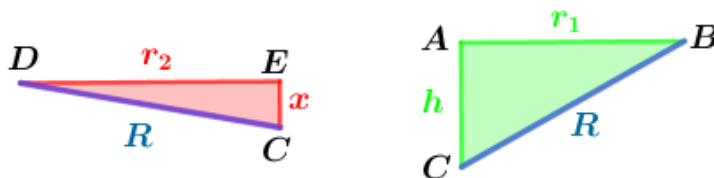


Figura 25: Anel de Guardanapo - Triângulos.  
Fonte: As autoras.

deduz-se para o  $\Delta ABC$  que  $R^2 = r_1^2 + h^2$  e para o  $\Delta CDE$  que  $R^2 = r_2^2 + x^2$ . Por conseguinte,  $r_1^2 = R^2 - h^2$  e  $r_2^2 = R^2 - x^2$ .

Logo, a área da coroa circular formada pelas duas secções citadas é dada por:

$$S_{\text{Coroa circular}} = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(R^2 - x^2) - \pi(R^2 - h^2) = \pi(R^2 - x^2 - R^2 + h^2) = \pi(h^2 - x^2).$$

Dessa forma, o Princípio de Cavalieri permite concluir que os volumes de dois anéis de guardanapo são iguais.

## Referências

- [1] Albuquerque, F. de Assis. *Visualizando e Dinamizando Temas no Ensino básico*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) - Universidade Federal Fluminense, 2017. Disponível em: [https://sca.profmat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=594](https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=594) Acesso em: 23 de junho de 2020.
- [2] Barwise, J.; Etchemendy, J. *Visual Information and Valid Reasoning*. MAA, pp.9-24, 1991.
- [3] Calazans, A. *Um Panfleto de Berkeley Contra as Práticas Matemáticas de Newton e de Leibniz*. *Scientiae Studia: Revista Latino-americana de Filosofia e História da Ciência*, v.8, n.4, pp.623-632, São Paulo, 2010.
- [4] Casselman, B. *Pictures and Proofs*. MAA, v.47, pp.1257-1266, 2000.
- [5] Clímaco, H.A., OTTE, M. Bolzano, *A Formação da Matemática Pura e a Aritmetização da Matemática*. Goiania: 36ª Reunião Nacional da ANPEd, 2013.
- [6] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo-SP. Atual Editora v.10, 2005.
- [7] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo-SP. Atual Editora v.09, 2005.
- [8] Eves, H. *Introdução à história da Matemática*. Editora da Unicamp, 2004.
- [9] Lima, E. L. *Conceituação, Manipulação e Aplicações. As dois Problemas e duas soluções*. RPM - *Revista do Professor de Matemática*. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/41/1.htm> Acesso em: 26/06/2020.
- [10] Nelsen, R. B. *Proofs Without Words - Exercices in Visual Thinking*. MAA, 1993.
- [11] Nelsen, R. B. *Proofs Without Words II*. MAA, 2000.
- [12] Nelsen, R. B. *Proofs Without Words II*. MAA, 2016.
- [13] de Souza Ortega, R. C. *Provas sem Palavras: Uma Ponte entre a Intuição e a Linguagem Matemática*. Dissertação de Mestrado, Profmat- UTFPR, Curitiba-PR, 2018.
- [14] Oliveira, A. L. C. *O Teorema de Pitágoras: Demonstrações e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciência e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013. Disponível: [https://sca.profmat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=31415](https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=31415) Acesso em: 23 de junho de 2020.
- [15] Palais, R. *The Visualization of Mathematics: Toward a Mathematical Exploratorium*. Notices of the AMS, v.46, pp.647-658, 1999.
- [16] Presmeg, N. C. *Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics*. [S.l.], 2006.
- [17] *Researching the History of Mathematics Education: An International Overview*. ICME-13 Monographs. Springer, 2018
- [18] MATEMÁTICAS VISUALES. El Volumen de la Esfera. Disponível em: <http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/cavalieri/cavalieriesfera.html> Acesso em: 20/03/2019.

Regina Cássia de Souza Ortega  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
<[reginacassia.ortega@hotmail.com](mailto:reginacassia.ortega@hotmail.com)>

Mari Sano  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
<[marisano@utfpr.edu.br](mailto:marisano@utfpr.edu.br)>

Recebido: 15/10/2019  
Publicado: 17/09/2020



# Contagem dupla

Edney Freitas Gregório

Luiz Augustavo Almeida Feitoza

## Resumo

Este pequeno artigo tem por objetivo apresentar o método Contagem Dupla como recurso a ser utilizado em provas e demonstrações de algumas afirmações matemáticas. São construídos vários argumentos por meio de problemas práticos, e suas soluções fornecem-nos demonstrações para resultados matemáticos, por vezes não triviais, fazendo uso de contagem dupla. A relevância do estudo reside no fato de uma ideia extremamente simples – ancorada a soluções interessantes para alguns problemas - proporcionarem-nos demonstrações para afirmações não triviais.

**Palavras-chave:** Contagem Dupla; Progressões Aritméticas; Progressões Geométricas; Soma de Potências de Inteiros Positivos.

## Abstract

This short article aims to present the Double Counting method as a resource to use in proof and to use some mathematical statements. Various arguments are constructed for practical problems in the middle, and their solutions are applied to mathematical results, sometimes not trivial, using double counting. The relevance of the study lies in the fact that it is an extremely simple idea, anchored in interesting solutions to some problems, which are provided for non-trivial statements.

**Keywords:** Double Counting; Arithmetic Progressions; Geometric Progressions; Sum of Powers of Positive Integers.

## 1. Introdução

O desenvolvimento de habilidades relativas a argumentação para defesa de nossas ideias, é uma característica humana que passa a ocorrer já na infância, quando, por exemplo, naturalmente busca-se convencer familiares, como pais e irmãos, sobre algo que se deseja conseguir.

Durante toda a vida desenvolvemos, até mesmo involuntariamente, mecanismos que nos auxiliam na atividade de apresentar nossas ideias, das mais variadas e em diferentes cenários, em busca de persuadir o máximo possível de pessoas.

No meio científico, desenvolver habilidades sobre argumentação para convencer a comunidade científica de que suas afirmações são verdadeiras, é fundamental. E, por essa razão, muitos estudos são desenvolvidos continuamente sobre métodos que possibilitem segurança quanto à comprovação de determinada afirmação nova. A grande obra *O Discurso do Método*, de René Descartes, é um exemplo dos esforços humanos de sistematizar métodos de racionalidade aceitável para comprovação de premissas postas.

Nesse aspecto, a Matemática constitui-se como uma ciência fértil em relação a métodos de comprovações de suas conjecturas. É natural em Matemática formularmos afirmações e buscarmos, por meios que possibilitem, mostrar, provar ou demonstrar que elas fazem sentido e que são justificáveis.

No presente texto apresentamos um método extremamente interessante para demonstrações de algumas afirmações matemáticas, denominado método de *Contagem Dupla*. Iniciamos discorrendo sobre o resultado matemático que alicerça o método, muito embora a ideia que justifica sua validade seja extremamente simples.

Em seguida, enunciamos alguns problemas práticos seguidos respectivamente de suas soluções, as quais serão vislumbradas como prova para afirmações matemáticas bem mais gerais.

Vale observar que, para uma boa compreensão dos resultados aqui apresentados, é importante o leitor ter relativa familiaridade com conjuntos, operações sobre os mesmos, funções e análise combinatória.

## 2. Contagem Dupla

Neste tópico apresentamos o resultado basilar da argumentação que garante a eficácia do método de *Contagem Dupla*. Inicialmente vejamos as seguintes notações.

Para  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $I_n$  o conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\} = I_n$  dos números naturais de 1 a  $n$ .

Um conjunto  $A \neq \emptyset$  é **finito** se existe uma bijeção  $f : I_n \rightarrow A$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Nesse caso denotamos  $a_j = f(j)$ , e escrevemos  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Dizemos que  $n$  é o número de elementos do conjunto  $A$  e denotamos por  $|A| = n$  ou  $\#A = n$ . Depreendemos então que uma bijeção  $f : I_n \rightarrow A$  é uma contagem dos elementos de  $A$ .

Iremos mostrar que se existem bijeções  $f : I_n \rightarrow A$ ,  $g : I_m \rightarrow A$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , então  $n = m$ . Isso significa que se realizarmos a contagem dos elementos de um conjunto finito não vazio, de dois modos diferentes, encontraremos o mesmo resultado. É claro que intuitivamente tal afirmação é óbvia, no entanto, necessitamos sistematizar essa ideia matematicamente, com o rigor adequado.

Seguindo as notações do parágrafo anterior, observe que ao considerarmos a função  $h = g^{-1} \circ f : I_n \rightarrow I_m$ , basta mostrar que se existe uma bijeção  $h : I_n \rightarrow I_m$ , então  $n = m$ , que faremos por meio da proposição a seguir.

**Teorema 1.** *Se existe uma bijeção  $\psi : I_n \rightarrow I_m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , então  $n = m$ .*

**Demonstração:** Utilizaremos indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , como  $\psi$  é bijeção temos que  $I_m$  possui um único elemento, ou seja:  $m = 1$ . Suponhamos pois que  $n > 1$  e consideremos uma bijeção  $\phi : I_{n+1} \rightarrow I_{m+1}$ , tal que  $\phi(n+1) = m+1$ . A restrição de  $\phi$  a  $I_n$  dá-nos uma bijeção  $\psi : I_n \rightarrow I_m$ . Logo, por hipótese temos que  $n = m$ , e conseqüentemente  $n+1 = m+1$ , o que conclui a prova pelo Princípio da Indução Finita. □

A técnica de *Contagem Dupla* consiste na simples ideia de que se calcularmos a quantidade de “configurações” (elementos) de um conjunto finito e não vazio de duas maneiras distintas sem cometer erros, então obteremos o mesmo resultado. Vejamos a técnica sendo utilizada no resultado a seguir.

**Proposição 1.** *Se  $n$  e  $k$  são inteiros positivos tais que  $0 \leq k \leq n$ , então, todo conjunto que possui  $n$  elementos possui exatamente  $\binom{n}{k}$  subconjuntos com  $k$  elementos.*

**Prova:** Seja  $C_k^n$  a quantidade de subconjuntos de  $k$  elementos do conjunto  $A$ . Como  $C_0^n = \binom{n}{0} = 1$ , consideremos  $1 \leq k \leq n$ .

Fixemos um conjunto  $A$  com  $n$  elementos e consideremos o problema de contar a quantidade de seqüências de  $k$  termos formada a partir dos elementos desse conjunto.

**Primeira contagem:** pela fórmula dos arranjos sem repetição, a resposta é

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1).$$

**Segunda Contagem:** permutando os elementos de cada subconjunto de  $k$  elementos do conjunto  $A$ , obtemos  $k!$  seqüências de  $k$  termos. Note que as seqüências assim formadas são todas distintas, e são todas que podemos obter a partir de  $k$  elementos de um subconjunto de  $A$ . Portanto, há exatamente  $k! \cdot C_k^n$  seqüências de  $k$  elementos.

Mas desde que  $n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)$  e  $k! \cdot C_k^n$  são respostas para um mesmo problema, concluímos que

$$k! \cdot C_k^n = n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1).$$

Daí,

$$C_k^n = \frac{n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) \cdot (n - k)!}{k! \cdot (n - k)!} = \binom{n}{k}.$$

□

### 3. Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Nesta seção, veremos que por meio da solução de um problema específico, demonstramos um resultado relativo a determinados tipos de progressões aritméticas, e em seguida, de modo análogo, demonstramos um resultado relativo a progressões geométricas.

Consideremos o seguinte problema:

**Problema 1.** *Em uma festa com  $n$  pessoas, sorteia-se uma pessoa para escolher um entre  $a$  prêmios, ou duas pessoas, para escolherem um entre  $r$  prêmios. Deseja-se descobrir de quantas formas esse sorteio pode ser realizado.*

**Soluções:** Faremos duas contagens da mesma situação.

**Primeira contagem:** o primeiro sorteio é realizado escolhendo-se uma pessoa entre  $n$  e depois 1 prêmio entre  $a$  possíveis. O segundo sorteio é realizado escolhendo-se 2 de  $n$  pessoas, e depois 1 de  $r$  prêmios. Os dois eventos são independentes, logo, o total de modos de escolha é

$$\binom{n}{1} \cdot a + \binom{n}{2} \cdot r. \tag{1}$$

**Segunda contagem:** denotemos as pessoas por  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Para cada pessoa sorteada, no primeiro sorteio, há  $a$  escolhas de prêmios. Assim, há  $a$  escolhas para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . No segundo sorteio, é formado um par  $(P_i, P_j)$ , onde a ordem não importa, logo podemos supor que  $i \leq j$ . Como uma pessoa não pode formar par consigo, podemos escrever  $i < j$ . Os possíveis pares são  $(P_1, P_2), \dots, (P_{i-1}, P_i)$ , ou seja, temos  $i - 1$  pares. Cada par de pessoas escolhe um dentre  $r$  prêmios, logo, há para esse sorteio  $r \cdot (i - 1)$  possibilidades. Considerando-se os dois sorteios, para cada  $i$  temos  $a_i = a + r \cdot (i - 1)$  possibilidades. O total de possibilidades é, portanto,  $\sum_{i=1}^n a_i$ , ou seja, a soma dos  $n$  primeiros termos da progressão aritmética com termo inicial  $a$  e razão  $r$ . □

Notemos que a solução do Problema 1 fornece uma demonstração para o Teorema 2 a seguir.

**Teorema 2.** *A soma*

$$\sum_{i=1}^n a_i \tag{2}$$

dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética de razão  $r \in \mathbb{Z}, r > 0$ , e primeiro termo  $a \in \mathbb{Z}, a > 0$ , é igual a

$$a \cdot \binom{n}{1} + r \cdot \binom{n}{2}. \tag{3}$$

**Problema 2.** *Temos uma quantidade suficientemente grande de lâmpadas de  $q-1$  tipos. Queremos colocar essas lâmpadas em  $a$  ruas, onde cada rua tem  $n$  postes, a princípio sem lâmpadas. Desejamos fazer isso de modo que em cada rua pelo menos um dos postes tenha uma lâmpada. De quantas formas essa atividade pode ser realizada?*

**Soluções:** Assim como no Problema 1, faremos a contagem, de dois modos distintos, da quantidade de maneiras de realizar esta atividade.

**Primeira contagem:** fixemos uma rua qualquer. Para cada poste dessa rua, temos  $(q-1) + 1$  possibilidades, pois podemos colocar em um poste uma das  $q-1$  lâmpadas, ou podemos deixar o poste sem lâmpada. Como são  $n$  postes, temos  $q^n$  possibilidades ao todo, das quais devemos excluir a configuração em que nenhum poste tem lâmpada. Logo, temos  $q^n - 1$  possibilidades para cada rua. Como são  $a$  ruas, ao todo são  $a \cdot (q^n - 1)$  configurações diferentes para todas as ruas.

**Segunda contagem:** consideremos uma rua qualquer, fixemos um poste  $i$  e escolhamos uma lâmpada do tipo  $k$  para esse poste. Nos postes que vêm antes do poste  $i$ , coloquemos uma lâmpada qualquer ou não coloquemos lâmpada alguma ( $q$  possibilidades para cada um dos  $i-1$  postes). No poste  $i$  coloquemos a lâmpada do tipo  $k$  (uma possibilidade). E nos postes que vêm depois do poste  $i$ , não coloquemos lâmpada alguma (uma possibilidade para cada um dos  $n-i$  postes). Assim, temos

$$\underbrace{q \cdot q \cdots q \cdot q}_{i-1} \cdot \underbrace{1}_{\text{tipo } k} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1}_{n-i} = q^{i-1}$$

modos de colocar lâmpadas em uma rua onde no poste  $i$  tem a lâmpada do tipo  $k$ . Como temos  $a$  ruas, o número de possibilidades para todas as ruas onde no poste  $i$  tem a lâmpada do tipo  $k$  é

$$a \cdot q^{i-1} = a_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n a_i \text{ modos.}$$

Uma vez que a lâmpada fixada no poste  $i$  pode ser de qualquer um dos  $q-1$  tipos, o número total de possibilidades para todas as ruas é

$$(q-1) \cdot \sum_{i=1}^n a_i.$$

Realizamos, portanto, duas contagens diferentes para o mesmo conjunto de possibilidades, e com isso obtemos a igualdade

$$a \cdot (q^n - 1) = (q-1) \cdot \sum_{i=1}^n a_i,$$

que é o resultado do teorema a seguir. □

**Teorema 3.** *A soma*

$$\sum_{i=1}^n a_i \quad (4)$$

dos  $n$  primeiros termos de uma progressão geométrica de razão  $q \in \mathbb{Z}, q > 1$ , e primeiro termo  $a \in \mathbb{Z}, a > 0$ , é igual a

$$a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (5)$$

#### 4. Soma de Potências

Nesta seção apresentamos a demonstração de um resultado interessante sobre somas de potências de números inteiros não negativos, utilizando contagens duplas. Vamos iniciar provando, abaixo, soma de uma quantidade finita de cubos. Faremos isso, por meio da solução do problema abaixo.

**Problema 3.** *Deseja-se calcular a quantidade de elementos do conjunto*

$$\mathbb{S} = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}^4 : 0 \leq a_1, a_2, a_3 < a_4 \leq n\}. \quad (6)$$

**Soluções:** Solucionaremos o problema de dois modos distintos.

**Primeira contagem:** seja  $k$  o maior elemento de uma quádrupla ordenada de  $\mathbb{S}$ . Devemos escolher três termos **não** necessariamente distintos entre  $0, 1, 2, \dots, k-1$  para formar a quádrupla, e isso pode ser feito de  $k \cdot k \cdot k \cdot 1 = k^3$  modos, para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , ou seja,  $\sum_{k=1}^n k^3$  modos. Portanto,  $\mathbb{S}$  possui  $\sum_{k=1}^n k^3$  elementos.

**Segunda contagem:** contemos todas as quádruplas ordenadas de  $\mathbb{S}$  que tem exatamente  $i$  elementos distintos ( $2 \leq i \leq 4$ ).

**$i = 2$ :** temos  $C_2^{n+1}$  modos de escolher os termos  $a_3$  e  $a_4$ . O penúltimo termo ( $a_3$ ) aparece repetido três vezes na quádrupla, o que nos dá

$$C_2^{n+1} \cdot \frac{3!}{3!} = \binom{n+1}{2} \cdot 1 = \binom{n+1}{2} \text{ modos.}$$

Observe que podemos escrever  $\frac{3!}{3!} = \sum_{\substack{k_1=3 \\ k_1 \in \mathbb{N}}} \frac{3!}{k_1!}$ .

**$i = 3$ :** temos  $C_3^{n+1}$  maneiras de escolher os 3 elementos distintos que irão aparecer na quádrupla. O maior deles será o  $a_4$ , e os outros dois termos devem ser usados para preencher os 3 lugares restantes, assim um deles deverá aparecer duas vezes. Isso nos dá

$$C_3^{n+1} \cdot \left( \frac{3!}{1! \cdot 2!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} \right) = \binom{n+1}{3} \cdot \sum_{\substack{k_1+k_2=3 \\ k_1, k_2 \in \mathbb{N}}} \frac{3!}{k_1! \cdot k_2!} = 6 \cdot \binom{n+1}{3} \text{ modos.}$$

O termo  $\left( \frac{3!}{1! \cdot 2!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} \right)$  é resultado da permutação com repetição.

$i = 4$ : temos  $C_4^{n+1}$  modos de escolher os quatro termos distintos e obviamente cada termo aparecerá uma única vez. Isso nos dá

$$C_4^{n+1} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = \binom{n+1}{4} \cdot \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=3 \\ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}}} \frac{3!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} = 6 \cdot \binom{n+1}{4} \text{ modos.}$$

Assim como no caso anterior, o termo  $\frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!}$  é resultado da permutação com repetição.

Somando as quantidades calculadas em cada caso acima, obtemos um total de elementos de  $\mathbb{S}$  ou seja,

$$\binom{n+1}{2} + 6 \cdot \left[ \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} \right].$$

□

As duas contagens distintas utilizadas para calcularmos a quantidade de elementos de  $\mathbb{S}$  no problema anterior fornece-nos uma demonstração do resultado abaixo.

**Teorema 4.** Para  $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ , temos

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2} + 6 \cdot \left[ \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} \right]. \quad (7)$$

Vejam agora uma generalização da ideia do Teorema 4, por meio de duas soluções distintas do problema a seguir.

**Problema 4.** Deseja-se calcular a quantidade de elementos do conjunto  $\mathbb{P}$  definido da seguinte forma

$$\mathbb{P} = \{(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}) \in \mathbb{Z}^{m+1} : 0 \leq a_1, \dots, a_m < a_{m+1} \leq n\}. \quad (8)$$

**Soluções:** Mais uma vez faremos duas soluções para o mesmo problema.

**Primeira contagem:** seja  $k$  o maior elemento de uma  $(m+1)$ -upla ordenada de  $\mathbb{P}$ . Devemos escolher  $m$  termos **não** necessariamente distintos entre  $0, 1, 2, \dots, k-1$  para formar a  $(m+1)$ -upla.

Isso pode ser feito de  $\underbrace{k \cdot k \cdot k \cdots k}_m \cdot 1 = k^m$  modos, para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , ou seja,  $\sum_{k=1}^n k^m$ , modos.

Portanto,  $\mathbb{P}$  possui  $\sum_{k=1}^n k^m$  elementos.

**Segunda contagem:** contemos todas as  $(m+1)$ -uplas ordenadas de  $\mathbb{P}$  que tem exatamente  $i$  elementos distintos ( $2 \leq i \leq m+1$ ).

Primeiro devemos escolher quem serão os  $i$  termos distintos, o que pode ser feito de

$$\binom{n+1}{i} \text{ modos.}$$

Sabendo quem são os termos distintos, escolhemos o maior deles para ficar na última entrada da  $(m+1)$ -upla, e os  $i-1$  termos restantes devem ser usados para preencher as  $m$  entradas restantes.

Podemos repetir qualquer um dos  $i - 1$  termos. Consideremos  $k_1, k_2, \dots, k_{i-1}$  suas multiplicidades. Logo, usando permutação com repetição temos

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{i-1}=m} \frac{m!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_{i-1}!} \text{ modos,} \tag{9}$$

com  $k_1, k_2, \dots, k_{i-1} \geq 1$ , pois cada um dos  $i - 1$  termos aparecem pelo menos uma vez e  $k_1 + k_2 + \dots + k_{i-1} = m$  já que devemos preencher as  $m$  entradas restantes.

Portanto, a quantidade de elementos do conjunto  $\mathbb{P}$  é

$$\sum_{i=2}^{m+1} \binom{n+1}{i} \cdot \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_{i-1}=m \\ k_1, k_2, \dots, k_{i-1} \in \mathbb{N}}} \frac{m!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_{i-1}!} \tag{10}$$

□

As soluções acima do Problema 4, obtidas por meio das duas contagens, dão-nos uma demonstração do teorema abaixo.

**Teorema 5.** Para  $n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 1, m \geq 1$  vale a seguinte identidade

$$\sum_{k=1}^n k^m = \sum_{i=2}^{m+1} \binom{n+1}{i} \cdot \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{i-1}=m} \frac{m!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_{i-1}!}, \tag{11}$$

com  $k_1, k_2, \dots, k_{i-1} \in \mathbb{N}$ .

A soma de potências de números inteiros positivos já foi objeto de estudo de vários matemáticos ao longo da história. No texto intitulado *Sums of Powers of Positive Integers*, de autoria da professora Janet Beery (Universidade de Redlands, Califórnia), é apontada uma lista dos matemáticos que se debruçaram sobre o problema, além de serem apresentadas as ideias centrais de seus estudos. No mesmo artigo são propostos e solucionados alguns problemas envolvendo somas de potências. Veja mais em [2].

Não encontramos em nossas pesquisas nenhum documento que disponha uma demonstração do Teorema 5 como essa que apresentamos neste trabalho, por meio da Contagem Dupla realizada para solucionar o Problema 4.

## 5. Considerações finais

Como vimos, foram apresentados alguns problemas práticos, cujas soluções, realizadas com duas contagens distintas, permitiram-nos vislumbrar identidades interessantes, sendo as duas contagens o suficiente para a demonstração desses resultados.

Ressaltamos que um conjunto muito variado de identidades matemáticas podem ser demonstradas por meio de contagens duplas.

Este texto é parte de um estudo maior acerca de demonstrações de resultados matemáticos utilizando essa técnica. Acreditamos ser uma abordagem interessante e esperamos que este trabalho possa suscitar outros estudos nesse sentido.

## Referências

- [1] Andreescu, T. e Feng, Z. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*. Birkhauser, 2003.
- [2] Beery, J. *Sums of Powers of Positive Integers*. University of Redlands, 2010. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers>. Acesso em: 08 de abril de 2020.
- [3] Chuan-Chong, C. e Khee-Meng, K. *Principles and Techniques in Combinatorics*. World Scientific, 1992.
- [4] Morgado, A. C.; Pitombeira, J. B.; Pinto Carvalho, P. C. e Fernandez, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2016.
- [5] Muniz Neto, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 Combinatória*. Rio de Janeiro/RJ: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2016.

Edney Freitas Gregório  
Universidade Estadual do Ceará (Uece)  
Campus Itaperi  
<[edney.gregorio@uece.br](mailto:edney.gregorio@uece.br)>

Luiz Augustavo Almeida Feitoza  
Instituto Federal de Educação,  
Ciência e Tecnologia do Amazonas  
Campus Avançado Iranduba (Ifam/CIR)  
<[luiz.feitoza@ifam.edu.br](mailto:luiz.feitoza@ifam.edu.br)>

Recebido: 13/04/2020  
Publicado: 21/09/2020



# A família dos poliedros fulerenos

Roberto Ribeiro Paterlini 

## Resumo

Nos últimos 40 anos, as moléculas denominadas fulerenos têm sido extensivamente estudadas em várias ciências, particularmente na Química. Como os poliedros constituem modelos dessas moléculas, vemos uma oportunidade para o professor de Matemática do Ensino Médio praticar a interdisciplinaridade e, ao mesmo tempo, incentivar o estudo da Geometria Espacial junto a seus estudantes. No presente texto pretendemos fornecer ao professor subsídios para essa prática.

**Palavras-chave:** Fulerenos combinatórios; lei dos doze pentágonos; modelos de fulerenos; fulerenos-tubo; poliedros de Goldberg.

## Abstract

In the last 40 years, molecules called fullerenes have been extensively studied in various sciences, particularly in Chemistry. As polyhedra are models of these molecules, we see an opportunity for the Mathematics teacher at High School to practice interdisciplinarity and, at the same time, encourage the study of Spatial Geometry by their students. In this text we intend to provide the teacher with subsidies for this practice.

**Keywords:** Combinatorial fullerenes; law of the twelve pentagons; fullerene models; tube fullerenes; Goldberg polyhedra.

## 1. Introdução

Os *fulerenos* são estruturas moleculares formadas exclusivamente por átomos de carbono, organizados em uma forma poliédrica com faces pentagonais e hexagonais apenas, e de modo que cada átomo liga-se a outros três. As faces não são necessariamente polígonos regulares.

Neste texto pretendemos apresentar ao professor de Matemática do Ensino Médio uma breve explicação sobre a presença dessas estruturas na Química e, principalmente, estudar suas propriedades geométricas mais elementares. Pensamos assim incentivar o professor a praticar a interdisciplinaridade com essa fantástica ciência, a Química, e, ao mesmo tempo, prover-se de sequências didáticas que possam estimular o interesse dos seus estudantes para a Geometria Espacial, especialmente para o estudo dos poliedros.

Alertamos que, na literatura especializada, a definição de fulereno tem variações. Por exemplo, a definição proposta por Melker e Kuprina [9] não exige que as faces sejam exclusivamente pentagonais ou hexagonais. No presente texto adotamos a definição da maioria dos autores que consultamos, como a de Buchstaber e Erokhovets [1], pág. 24.

## 2. Exemplos de fulerenos

O exemplo mais imediato de fulereno é a estrutura  $C_{20}$ , constituída por 20 átomos de carbono. Na Figura 1 vemos uma representação dessa estrutura, e o leitor pode reconhecer que seu modelo geométrico, conforme desenhado na Figura 2, é o dodecaedro com faces pentagonais. Uma aresta entre dois vértices indica que os átomos correspondentes estão quimicamente ligados. Esse poliedro tem 20 vértices, 30 arestas e 12 faces. Cada vértice é do tipo três, isto é, a ele concorrem três arestas (ou três faces). Uma molécula que tem como base essa estrutura é o dodecaedrano  $C_{20}H_{20}$ , um hidrocarboneto. Nessa molécula cada átomo de carbono está ligado a outros três átomos de carbono e a um átomo de hidrogênio. Para mais informações sobre o dodecaedrano consulte [18]. O fulereno  $C_{20}$  (Figura 1) é muito reativo e, portanto, difícil de ser obtido e isolado. Em 2000, ele foi obtido em fase gasosa a partir do dodecaedrano (Prinzbach *et al.* [13]).

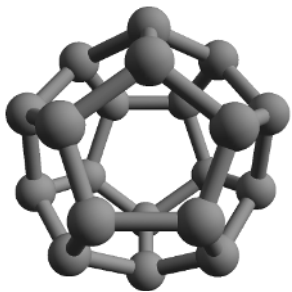


Figura 1: Organização dos átomos de carbono na estrutura do fulereno  $C_{20}$ . Figura da Wikipédia [27].

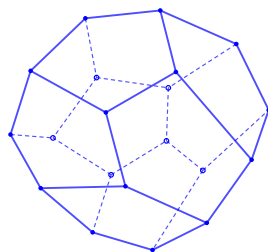


Figura 2: Representação poliédrica (sem escala correta) da estrutura  $C_{20}$ .

Segundo Parasuk e Amlöf [10], pág.188, a representação geométrica da estrutura  $C_{20}$  é um dodecaedro, mas não regular. As distâncias entre os átomos, representadas pelos comprimentos das arestas, são 1,416, 1,425 e 1,474 angstroms. Um angstrom é uma unidade de comprimento equivalente a  $10^{-10}$  metros. Esses valores repetem-se simetricamente nas arestas, formando faces congruentes duas a duas. No desenho da Figura 2, a representação está fora de escala. Uma possibilidade de modelo é o tetartoide. Veremos, mais adiante, como construir modelos desse poliedro.

Depois do  $C_{20}$ , a estrutura de fulereno mais comumente considerada é o  $C_{60}$ . Um modelo é o icosaedro truncado, muito conhecido e estudado, pelo menos desde o tempo de Arquimedes, c. de 250 a.C. Esse poliedro tem 60 vértices, 90 arestas e 32 faces, sendo 12 pentagonais e 20 hexagonais. Se essas faces forem regulares, esse poliedro é um dos sólidos semirregulares de Arquimedes. Confira, na Figura 3, uma representação.

Do ponto de vista da Arquitetura, estruturas como a do icosaedro truncado são utilizadas para construir cúpulas desde tempos antigos. São os chamados domos geodésicos e, modernamente, foram popularizados pelo arquiteto estadunidense R. Buckminster Fuller (1895-1983), que projetou um domo gigantesco para o pavilhão norte-americano da Exposição Mundial de 1967, realizada em Montreal, Canadá. Consulte [21] para ler mais detalhes.

Por muito tempo os químicos especularam sobre a existência de moléculas contendo a estrutura  $C_{60}$ . Não se conhecia nenhum composto de que ela fizesse parte. Depois do esforço de muitos pesquisadores, os químicos Robert Curl, Harold Kroto e Richard Smalley conseguiram, em 1985, sintetizar essa estrutura como uma molécula, reconhecendo-a como o  $C_{60}$ . Eles a chamaram

de buckminsterfulereno em homenagem ao arquiteto referido acima. Devido a tal feito, esses pesquisadores receberam o prêmio Nobel de Química de 1996.

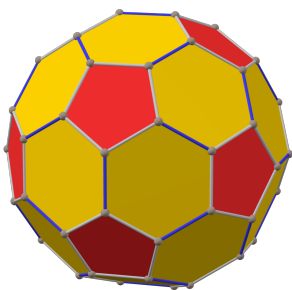


Figura 3: Representação do icosaedro truncado semirregular. Figura da Wikipedia [19].

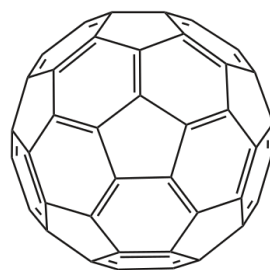


Figura 4: Representação poliédrica do  $C_{60}$ , mostrando as ligações duplas. Figura da Wikipedia [20].

A Figura 4 exibe um desenho do  $C_{60}$  no qual as faces estão distribuídas como no icosaedro truncado (veremos que outras distribuições são possíveis). Observe que, em nosso desenho, em cada hexágono existem três ligações duplas alternando com ligações simples. Dessa forma a valência de cada átomo de carbono é 4. Nossas figuras, por comodidade, usam polígonos regulares. Mas, segundo informam Schwerdtfeger e outros [16], nas moléculas as ligações simples têm comprimento de 1,442 angstroms, e as duplas, 1,378 angstroms. Uma pequena diferença difícil de expressar nos desenhos.

### 3. Propriedades combinatórias dos fulerenos

A partir desta seção denominamos *fulerenos combinatórios*, ou simplesmente *fulerenos*, aos poliedros formados por pentágonos ou hexágonos, e cujos vértices são do tipo três, isto é, a cada um concorrem três arestas. Além disso exigimos que o poliedro seja topologicamente uma esfera, o que significa que os vértices e arestas podem ser projetados sobre a superfície de uma esfera que os envolva sem que a estrutura combinatória das faces, arestas e vértices seja modificada. Um fulereno com  $n$  vértices será anotado por  $C_n$ .

Com essa definição sinalizamos que estamos interessados no estudo combinatório dessa família de poliedros e, apenas eventualmente, suas propriedades químicas ou métricas serão consideradas. A definição básica de poliedro que adotamos é a que está apresentada em [12], seção 19.5.

Iniciamos nossas investigações sobre propriedades geométricas dos fulerenos com uma observação induzida dos dois exemplos acima apresentados, o dodecaedro e o icosaedro truncado: a quantidade de pentágonos, nos dois casos, é 12. Será esse um comportamento recorrente nos fulerenos? Propomo-nos começar por aí.

Conforme é costume no estudo dos poliedros, dado um deles, indicaremos por  $V$  a quantidade de seus vértices, por  $A$ , a de suas arestas, e por  $F$ , a de suas faces. A relação de Euler é a principal fórmula combinatória dos poliedros que são topologicamente uma esfera:

$$V - A + F = 2 \tag{1}$$

Usaremos mais duas fórmulas combinatórias, ambas muito simples. Contando as arestas pelos vértices, como a cada vértice concorrem três arestas temos, a princípio,  $3V$  arestas. Mas nesse processo as arestas foram contadas em dobro, pois cada aresta está ligada a dois vértices. Obtemos a fórmula

$$2A = 3V \quad (2)$$

válida apenas no nosso caso, em que os vértices são todos do tipo três.

Contando agora as arestas usando as faces, vemos que cada face pentagonal contribui com 5 arestas e cada face hexagonal, com 6. Chamamos, conforme é costume, a quantidade de faces pentagonais de  $F_5$ , e, a de hexagonais, de  $F_6$ . Como cada aresta pertence a duas faces, temos a fórmula

$$2A = 5F_5 + 6F_6 \quad (3)$$

válida apenas no nosso caso, em que as faces são pentágonos ou hexágonos.

Temos de imediato nosso primeiro resultado:

**Teorema 1** (Lei dos doze pentágonos). *Em qualquer fulereno, a quantidade de faces pentagonais é 12.*

*Demonstração.* Começando com a fórmula (1) e, em seguida, introduzindo (2), temos

$$V - A + F = 2 \Rightarrow 3V - 3A + 3F = 6 \Rightarrow 2A - 3A + 3F = 6 \Rightarrow 3F = 6 + A$$

Multiplicando por 2 temos  $6F = 12 + 2A$ . Introduzindo  $F = F_5 + F_6$  e (3) nessa última relação, tem-se  $6(F_5 + F_6) = 12 + 5F_5 + 6F_6$ , o que implica

$$F_5 = 12 \quad (4)$$

□

Se o poliedro tiver vértices de tipos diferentes de três, não vale, necessariamente, o resultado do Teorema 1. Um exemplo é o icositetraedro pentagonal, um dos sólidos de Catalan. Ele tem 38 vértices, 60 arestas e 24 faces, todas pentagonais (não regulares). Existem 32 vértices do tipo três e 6 do tipo quatro. Para mais detalhes consulte [22].

A fórmula (4) simplifica bastante algumas relações nos fulerenos. Por exemplo, podemos obter os valores  $n = V$ ,  $A$  e  $F$  em função de  $F_6$  apenas:

**Corolário 1.** *Em qualquer fulereno  $C_n$  temos*

$$n = V = 2(10 + F_6) \quad A = 3(10 + F_6) \quad F = 12 + F_6 \quad (5)$$

*Demonstração.* Usando a fórmula (3) temos  $2A = 5F_5 + 6F_6 \Rightarrow 2A = 5 \cdot 12 + 6F_6 = 60 + 6F_6 \Rightarrow A = 30 + 3F_6 = 3(10 + F_6)$ .

Por outro lado, a fórmula (2) dá-nos  $3V = 2A = 60 + 6F_6 \Rightarrow V = 20 + 2F_6 = 2(10 + F_6)$ .

Finalmente,  $F = F_5 + F_6 = 12 + F_6$ , e terminamos a verificação de (5). □

Dado um fullereno  $C_n$  com valor  $n$  especificado, já podemos calcular seus valores  $V$ ,  $A$ ,  $F$ ,  $F_5$  e  $F_6$  em função de  $n$ :

**Corolário 2.** Dado um fullereno  $C_n$  temos:

$$V = n \quad A = \frac{3n}{2} \quad F = \frac{n}{2} + 2 \quad F_5 = 12 \quad F_6 = \frac{n}{2} - 10 \quad (6)$$

*Demonstração.* Temos  $V = n$  devido à definição de  $n$  na notação  $C_n$ , e  $F_5 = 12$  já foi obtido. De (5) vem  $V = 2(10 + F_6) \Rightarrow n = 2(10 + F_6) \Rightarrow F_6 = \frac{n}{2} - 10 \Rightarrow F = \frac{n}{2} - 10 + 12 \Rightarrow F = \frac{n}{2} + 2$ .

Por outro lado, ainda de (5), temos  $A = 3(10 + F_6) = 3(10 + \frac{n}{2} - 10) \Rightarrow A = \frac{3n}{2}$ . □

São úteis as seguintes observações:

**Corolário 3.** Dado um fullereno  $C_n$  temos:

$$n \text{ é par} \quad e \quad n \geq 20 \quad (7)$$

*Demonstração.* Do Corolário 2 temos  $F = \frac{n}{2} + 2$ , o que implica que  $n$  é par. Ainda, como  $F \geq 12$ , temos  $n = 2F - 4 \geq 2 \cdot 12 - 4 = 20$ . □

Precisamos agora determinar para que valores de  $n$  existem fullerenos  $C_n$ . Começamos com

**Teorema 2.** Para todo inteiro  $p \geq 0$  com  $p \neq 1$ , existem fullerenos com  $F_6 = p$ .

Aqui a demonstração é mais técnica. Faremos alguns comentários no final deste texto. Completamos com o

**Corolário 4.** Existem fullerenos (combinatórios)  $C_n$  para valores  $n = 20$  e todo inteiro par  $n \geq 24$ .

*Demonstração.* No Corolário 2 vimos que  $n = 2(10 + F_6)$ . Se  $F_6 = 0$ , segue  $n = 20$ . Se  $F_6 \geq 2$ , vem  $n = 20 + 2F_6 \geq 24$  e  $n$  é par e, devido ao Teorema 2,  $n$  pode ser qualquer par  $\geq 24$ . □

Determinamos assim que, do ponto de vista geométrico-combinatório, existem fullerenos que modelam cada uma das estruturas  $C_{20}$ ,  $C_{24}$ ,  $C_{26}$ ,  $C_{28}$ , ... e, para cada um deles, sabemos os valores de  $V$ ,  $A$  e  $F$ , distinguindo a quantidade de pentágonos (que sempre é 12) e a de hexágonos. Entretanto, em geral, uma estrutura  $C_n$  tem mais de um poliedro como modelo, pois pode variar a distribuição das faces. Veremos exemplos mais adiante.

#### 4. Construção de modelos de fullerenos

Nesta seção pretendemos, principalmente, prover o professor de Matemática de elementos suficientes para construir sequências didáticas nas quais seus estudantes possam investigar os fullerenos por meio de modelos. Esses modelos podem ser construídos com papel-cartão, varetas ou com outro método. Para facilitar podemos, sempre que possível, usar polígonos regulares como faces. Observamos, entretanto, que a maioria dos fullerenos não pode ter todas as faces regulares. Em certas situações, na construção de modelos, devemos inclusive permitir que as faces sejam não planas. Com isso evitamos fazer muitos cálculos para determinar as medidas das faces. Lembramos

que são as propriedades combinatórias que mais nos interessam, e, em menor grau, as propriedades métricas.

Nas figuras 1 e 2 vimos representações da estrutura  $C_{20}$ . O dodecaedro regular é bem conhecido dos estudantes e, em muitos laboratórios escolares de Geometria, vemos modelos construídos por eles. No contexto do presente estudo, entretanto, um bom modelo da estrutura  $C_{20}$  precisa ter arestas com três medidas diferentes, conforme foi comentado. Um dodecaedro com faces pentagonais que possui essa característica é o tetartoide, um poliedro com conexões com a Mineralogia.

Usando informações de [23], as faces do tetartoide são congruentes duas a duas e cada uma tem arestas com três medidas, digamos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , sendo uma aresta de medida  $c$ , duas consecutivas de medida  $b$  e duas consecutivas de medida  $a$ . Ao organizar as faces para montar o poliedro ocorrem vértices com a seguinte distribuição:

4 vértices aos quais concorrem três arestas de medida  $a$ ;

4 vértices aos quais concorrem três arestas de medida  $b$ ;

12 vértices aos quais concorrem três arestas, uma de cada medida.

Por outro lado, como existem 12 faces e as arestas de medida  $c$ , uma em cada face, são comuns a duas faces, existem 6 dessas arestas. Do mesmo modo, vê-se que existem 12 arestas de medida  $a$  e 12 de medida  $b$ .

Temos, na Figura 5, o modelo de uma face de um tetartoide, que pode ser desenhado com um aplicativo para Geometria. Na Figura 6 vemos um desenho indicativo do poliedro para mostrar como devem ser combinadas as faces. Na Figura 7 temos a foto de um modelo. As diferenças entre as medidas das arestas estão exageradas em relação àquelas correspondentes do fulereno  $C_{20}$ .

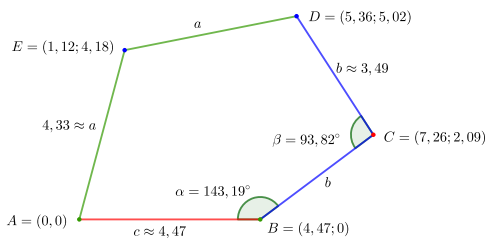


Figura 5: Face de um tetartoide.

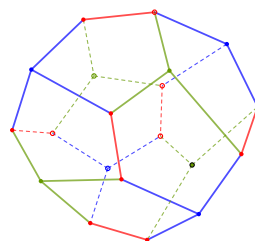


Figura 6: Desenho de um tetartoide.

Figura 7. Modelo de tetartoide construído em papel-cartão pelo autor. O modelo está pousado em uma aresta de cor vermelha, em posição similar à do desenho da Figura 6. As cores das arestas distinguem as diferentes medidas. Foto do autor.



Na Figura 8 vemos o desenho de um poliedro  $C_{24}$ , e, na Figura 9, desenho da esquerda, uma “meia” planificação. Trata-se de um fullereno com 12 faces pentagonais e 2 hexagonais, portanto,  $F = 14$ . Temos ainda  $V = 24$  e  $A = 36$ . O desenho do poliedro foi adaptado de Talanov e outros [17], pág. 359.

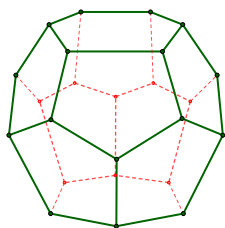


Figura 8: Poliedro  $C_{24}$ .

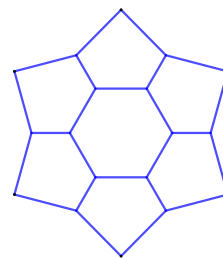
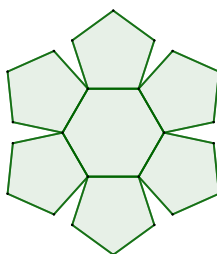


Figura 9: “Meia” planificação (indicativa) do poliedro  $C_{24}$  e grafo correspondente.

Na Figura 9, à direita, temos um grafo, um desenho representativo da projeção dessa parte do poliedro sobre o plano que contém a face hexagonal. O grafo informa a estrutura combinatória do poliedro, mas as medidas das arestas não são necessariamente iguais às correspondentes do poliedro.

Figura 10. Modelo do  $C_{24}$  construído em papel-cartão pelo autor. Por facilidade, as faces foram recortadas como polígonos regulares. Devido a isso ocorrem pequenas distorções. O modelo está pousado em uma face hexagonal, em posição similar à do desenho da Figura 8.



A Figura 11 exibe o desenho de um poliedro  $C_{26}$ . Trata-se de um fullereno com 12 faces pentagonais e 3 hexagonais, portanto,  $F = 15$ . Temos ainda  $V = 26$ , todos de tipo três, e  $A = 39$ . Na Figura 12 vemos a foto de um modelo. Uma planificação pode ser vista na Figura 13.

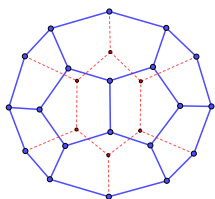


Figura 11: Desenho do poliedro  $C_{26}$ .

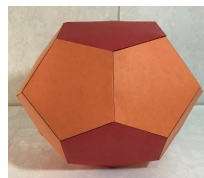


Figura 12: Modelo do poliedro  $C_{26}$ . O poliedro está pousado em uma aresta, em posição similar à da Figura 11. Construído em papel-cartão pelo autor. Foto do autor.

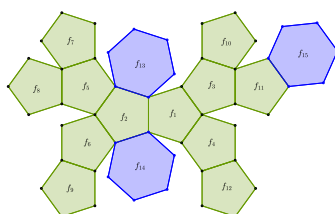


Figura 13: Uma planificação (indicativa) do poliedro  $C_{26}$ .

Na Figura 14 vemos o desenho de um poliedro representante da estrutura  $C_{28}$ . Ele tem 12 faces pentagonais e 4 hexagonais, portanto,  $F = 16$ . Temos ainda  $V = 28$ , todos de tipo três, e  $A = 42$ . A Figura 15 traz uma foto de um modelo do mesmo poliedro.

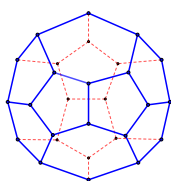


Figura 14: Um poliedro  $C_{28}$ .



Figura 15: Modelo do poliedro da Figura 14. Ele está em posição similar à do desenho, mas com um giro horizontal de  $180^\circ$ . Construído em papel-cartão pelo autor. Foto do autor.



Representações poliédricas das estruturas  $C_{24}$ ,  $C_{26}$  e  $C_{28}$  não podem ter, por razões teóricas, todas as faces regulares. Mas, para certas finalidades pedagógicas, é possível construir os modelos dessa forma pois as distorções são pequenas. Com isso evitamos muitos cálculos para determinar os comprimentos das arestas e as medidas dos ângulos das faces. No final do texto faremos observações mais detalhadas sobre essa questão.

Explicamos agora como construir modelos de fulerenos-tubo. Em Química, muitos os chamam “nanotubos fechados”.

A representação clássica de um nanotubo consiste de um cilindro circular reto no qual são dispostos os vértices de hexágonos de forma que, quando são projetadas as arestas sobre a superfície cilíndrica, essas formas hexagonais perfazem um ladrilhamento. Em um nanotubo fechado, a parte cilíndrica é completada com duas capas topologicamente em forma de semiesferas, constituídas por 6 pentágonos cada uma e por uma quantidade de hexágonos que varia com o formato escolhido. Existem outras propostas de representação poliédrica para o nanotubo; confira, por exemplo, Cox e Hill [3].

Na Figura 16 temos uma planificação de um fulereno-tubo, separada em três partes, com a finalidade de facilitar nossa exposição. No desenho da esquerda vemos faces hexagonais organizadas em três fileiras com seis hexágonos cada. Essas faces devem ser dobradas de forma que a face  $h_1$  tenha uma aresta em comum com cada uma das faces  $h_6$  e  $h_{12}$ , a face  $h_{12}$  tenha uma aresta em comum, além de  $h_1$ , com cada uma das faces  $h_7$  e  $h_{13}$ , e essa tenha uma aresta comum também com  $h_{18}$ . Com isso forma-se uma estrutura em que os vértices estão dispostos na superfície de um cilindro.

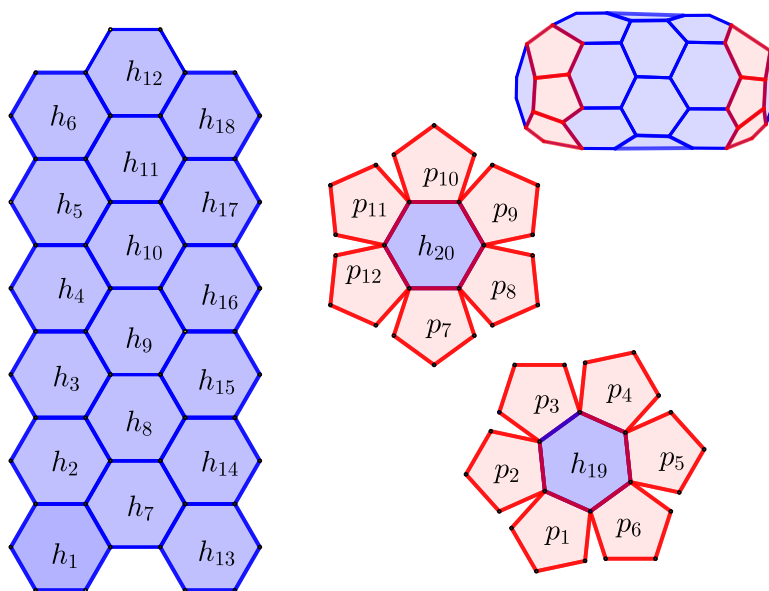


Figura 16: Uma planificação (indicativa) do fulereno-tubo  $C_{60}$  com desenho do modelo.

No desenho da direita, ainda na Figura 16, vemos duas cópias idênticas de um hexágono cercado

por seis pentágonos. Depois de recortadas, em cada uma delas juntamos as arestas laterais dos pentágonos, formando duas capas. Essas capas juntam-se ao tubo, uma em cada ponta, para formar um poliedro. Ainda na Figura 16 vemos um desenho do poliedro.

Observe que esse fullereno-tubo tem 12 pentágonos e 20 hexágonos, portanto, a mesma quantidade de faces de cada tipo que o icosaedro truncado. Trata-se de um segundo modelo da estrutura  $C_{60}$ , com as faces distribuídas de forma diferente.

Para construir a parte cilíndrica do fullereno-tubo  $C_{60}$  usamos três anéis com seis hexágonos cada. Variando a quantidade de anéis podemos construir uma infinidade de fullerenos tubos. Usando as fórmulas da Seção 2 vemos que com  $p$  anéis,  $p \geq 1$ , temos um fullereno-tubo  $C_{24+12p}$ .

As capas dos fullerenos-tubo podem ter outras formas. Por exemplo, na Figura 17 vemos como modelar capas usando “meio” icosaedro truncado. Para construir uma dessas capas, iniciamos com uma face pentagonal desse poliedro, e tomamos os dois primeiros anéis que o rodeiam. O primeiro anel é constituído de cinco faces hexagonais, e o segundo de dez faces, que se alternam entre faces pentagonais e faces hexagonais. A parte cilíndrica é modelada com cintas de dez hexágonos cada. Observe que a posição dos hexágonos nessas cintas é diferente daquela da Figura 16.

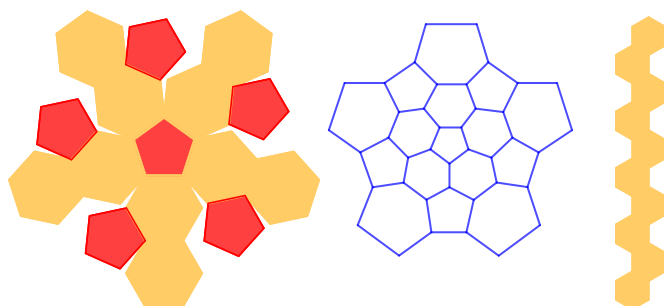


Figura 17: Uma planificação (indicativa) de “meio” icosaedro truncado, desenho do grafo correspondente, e uma planificação mostrando uma cinta de dez hexágonos.

Usando capas de “meio” icosaedro truncado e  $p$  cintas com dez hexágonos cada, fabricamos modelos em forma de tubos das estruturas  $C_{60+20p}$ . Se  $p = 1$  (uma cinta) temos, um fullereno tubo  $C_{80}$  (Figura 18), se  $p = 2$  (duas cintas) temos um fullereno tubo  $C_{100}$  (Figura 20), e se  $p = 3$  (três cintas) temos um fullereno tubo  $C_{120}$  (Figura 19).

Lembramos que esses fullerenos-tubo não podem ter todas as faces regulares. Esses poliedros não fazem parte das listas de poliedros convexos com faces regulares, conforme se pode consultar a partir de [24]. Portanto nossos desenhos e modelos são indicados para fins pedagógicos no ensino fundamental. Usando varetas maleáveis é possível fazer belos modelos. Confira, por exemplo, Hart [8], pág. 136.



Figura 18: Modelo do fulereno-tubo  $C_{80}$ . Construído em papel-cartão pelo autor. Foto do autor.

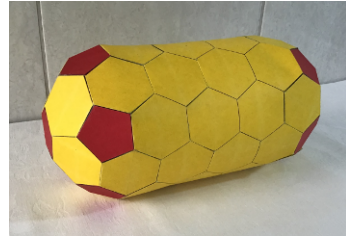


Figura 19: Modelo do fulereno-tubo  $C_{120}$ . Construído em papel-cartão pelo autor. Foto do autor.

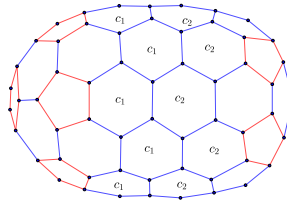


Figura 20: Desenho do fulereno-tubo  $C_{100}$ . Cada uma das capas é um “meio” icosaedro truncado. O tubo é formado por duas cintas  $c_1$  e  $c_2$ .

Sobre esse assunto de construção de fulerenos através de modelos, completamos esta seção comentando que poliedros convexos com faces pentagonais e hexagonais foram estudados por Michael Goldberg (1902-1990), em 1937. Na respectiva página da Wikipedia [25] podemos ver belos desenhos desses poliedros, como o da Figura 21. As faces pentagonais são regulares e as hexagonais são equiláteras.

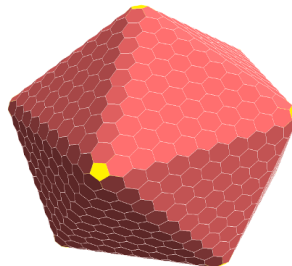


Figura 21: Um poliedro fulereno de Goldberg. Figura da Wikipedia [25].

Mais exatamente, os poliedros de Goldberg são, por definição, convexos, têm faces pentagonais e hexagonais apenas, todos os vértices são do tipo três, e têm simetria icosaédrica. Na Nota 3 apresentaremos explicações sobre essas simetrias.

Todo poliedro de Goldberg é um fullereno, mas nem todo fullereno é um poliedro de Goldberg, mesmo se for convexo. Em [6], Goldberg determinou que, nesses poliedros, a quantidade de vértices é  $V = 20(a^2 + ab + b^2)$ , em que  $0 \leq b \leq a$  são inteiros, com  $a > 0$ . Portanto, existem poliedros de Goldberg representantes das estruturas  $C_n$  para  $n = 20, 60, 80, 140, 180, 240$ , etc. Para esses poliedros temos ainda  $F = 10(a^2 + ab + b^2) + 2$  e  $A = 30(a^2 + ab + b^2)$ .

Construir um modelo do poliedro de Goldberg da Figura 21 certamente exige muita paciência. Modelos com menos faces são o dodecaedro e o icosaedro truncado, já citados. Outro que pode ser construído é o triacontaedro rômbico truncado (TRT), que corresponde aos valores  $a = 2$  e  $b = 0$  nas fórmulas acima. A quantidade de vértices é 80, portanto o TRT é um modelo da estrutura  $C_{80}$ . Ele tem 42 faces, sendo 12 pentagonais regulares e 30 hexagonais equiláteras. A quantidade de arestas é 120.

O poliedro TRT, representado na Figura 22, pode ser obtido, como o nome diz, por truncamento do triacontaedro rômbico, com os cortes executados apenas nos 12 vértices de tipo 5. Cada um desses 12 vértices dá origem a uma face pentagonal. O corte pode ser feito de forma que essas faces sejam regulares e as faces restantes sejam hexágonos equiláteros. O ângulo do hexágono, em dois vértices opostos, mede  $\alpha = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \approx 116,565^\circ$ . Esses dois vértices são aqueles de configuração (6, 6, 6) (encontro de três hexágonos). Os outros quatro ângulos, correspondentes aos vértices de configuração (5, 6, 6), medem  $\beta \approx 121,717^\circ$ . Para facilitar o desenho e o recorte dessas faces hexagonais calculamos sua altura:  $H = \ell \left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{1/2} \approx 1,701\ell$ , sendo  $\ell$  o lado do hexágono e  $H$  a distância entre os dois lados opostos contíguos a ângulos de medida  $\beta$ . Uma face hexagonal do TRT está desenhada na Figura 23. As medidas dos ângulos foram obtidas de [26].

Para facilitar o recorte das faces pentagonais regulares de lado  $\ell$ , informamos que sua altura (distância de um vértice ao lado oposto) é  $h = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right) \ell \approx 1,539\ell$ .

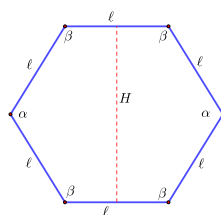
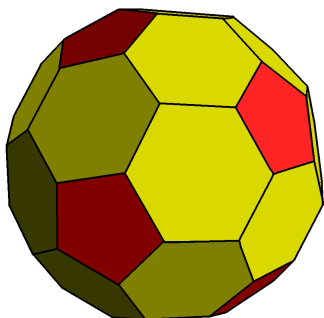


Figura 22: O poliedro de Goldberg triacontaedro rômbico truncado (TRT), um modelo da estrutura  $C_{80}$ . Figura da Wikipedia [26].

Figura 23: Face hexagonal do poliedro de Goldberg TRT.

Figura 24. Modelo em papel-cartão do tricontaédro rômbico truncado, construído pelo autor. O molde das faces hexagonais, em cor laranja, é o da Figura 23, com  $\ell = 4$  cm. As faces pentagonais são regulares e estão em cor vermelha. O modelo está pousado em uma face pentagonal. Foto do autor.



Notemos que no TRT, assim como no icosaedro truncado, cada face pentagonal está rodeada de um primeiro anel de cinco faces hexagonais, e de um segundo anel com 10 faces, sendo cinco pentagonais e cinco hexagonais. A diferença entre eles é que no TRT o segundo anel está rotacionado em relação ao mesmo anel do icosaedro truncado. Isso faz com que no TRT existam vértices rodeados por três faces hexagonais (portanto essas faces não podem ser regulares). Essa disposição no TRT implica que exista um terceiro anel com 10 faces hexagonais, o que não ocorre no outro poliedro. E essa é a diferença entre o icosaedro truncado e o TRT: o primeiro tem 32 faces, sendo 20 hexagonais, e o segundo, 42 faces, sendo 30 hexagonais.

## 5. Algumas considerações sobre isômeros

Vimos dois poliedros representantes da estrutura  $C_{60}$ : um é o icosaedro truncado, mostrado na Figura 3, e o outro é o fulereno-tubo, Figura 16. Vimos ainda dois representantes do  $C_{80}$ : o fulereno-tubo da Figura 18 e o poliedro de Goldberg da Figura 22. Duas representações da mesma estrutura se dizem *isômeros*.

Mais exatamente, chamamos de *isômeros* dois fulerenos com o mesmo número de faces hexagonais mas com as faces (pentágonos e hexágonos) dispostas em arranjos diferentes.

Dois isômeros, quando representam modelos de moléculas reais, formam compostos com propriedades químicas diferentes. Em particular, na estrutura  $C_{60}$ , o icosaedro truncado é o único isômero que tem todos os pentágonos isolados entre si. Esse é um dos critérios relatados na literatura como importante para a estabilidade molecular (confira Corrêa e Reis [2], pág. 964).

A contagem dos isômeros exige técnicas especiais e é relativamente difícil, pois a quantidade de isômeros de  $C_n$  aumenta exponencialmente em relação a  $n$ . Vemos abaixo uma tabela, extraída de [5], mostrando, para alguns valores, a quantidade  $I$  de isômeros em relação a  $C_n$  e a  $F_6$ .

$C_n$	$C_{20}$	$C_{24}$	$C_{26}$	$C_{28}$	$C_{30}$	$C_{32}$	$C_{34}$	$C_{36}$	...	$C_{60}$	...	$C_{170}$
$F_6$	0	2	3	4	5	6	7	8	...	20	...	75
$I$	1	1	1	2	3	6	6	15	...	1812	...	46.088.157

Vejamos como é o segundo isômero do  $C_{28}$  (confira no artigo de Fowler e Austin [4], pág. 265).

Uma forma de diferenciar os dois isômeros da estrutura  $C_{28}$  consiste em examinar a configuração de seus vértices. Um vértice diz-se ter a configuração  $(m, n, p)$  quando estiver rodeado por um polígono com  $m$  lados, outro com  $n$  lados, e o terceiro com  $p$  lados.

Quanto aos dois isômeros do  $C_{28}$ , temos:

**Isômero 1 do  $C_{28}$ :** desenho na Figura 14 e foto na Figura 15. Ele tem 24 vértices com a configuração (6, 5, 5) e 4 vértices com a configuração (5, 5, 5).

**Isômero 2 do  $C_{28}$ :** desenho na Figura 25, planificação na Figura 26 e foto na Figura 27. Ele tem 16 vértices com a configuração (6, 5, 5), 8 vértices com a configuração (5, 5, 5) e 4 vértices com a configuração (6, 6, 5).

Entretanto, dois isômeros da mesma estrutura  $C_n$  nem sempre têm configurações diferentes.

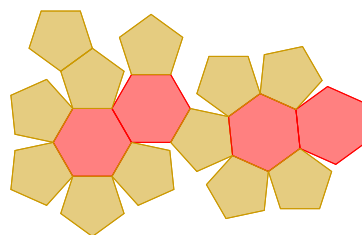
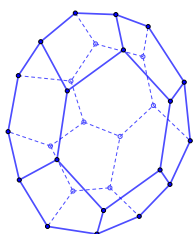
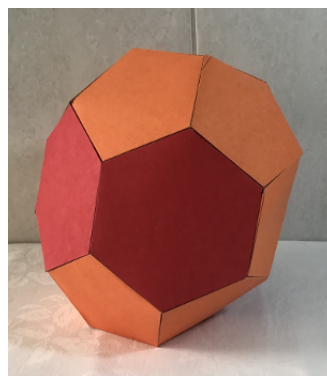


Figura 25: Representação do segundo isômero do  $C_{28}$ .

Figura 26: Planificação (indicativa) do segundo isômero do  $C_{28}$ .

Figura 27. Modelo do segundo isômero do  $C_{28}$ , construído pelo autor em papel-cartão. Um desenho e uma planificação do mesmo poliedro estão nas figuras 25 e 26, respectivamente. As faces foram recortadas como polígonos regulares, o que causa uma pequena distorção. As faces hexagonais estão em cor vermelha, e as faces pentagonais em cor laranja. O modelo está pousado em uma face pentagonal.



## 6. Notas técnicas finais

Reservamos, para o final deste texto, a exposição de algumas considerações técnicas, destinadas mais ao professor.

*Nota 1.* Comentários sobre a demonstração do Teorema 2 podem ser lidos no livro de Grünbaum [7], a partir da pág. 271. Entretanto, usando algumas técnicas, não é difícil convencermos da validade desse Teorema. Consideremos as figuras 28-32, as quais adaptamos de Grünbaum [7], pág. 280, exercício 1.

Na Figura 28 vemos uma representação, na forma de um grafo, da “metade” superior do  $C_{24}$ , conforme apresentado na Figura 8. Vemos um hexágono rodeado de seis pentágonos. Realizamos

uma operação na parte central deste grafo, transformando o hexágono em dois pentágonos. Em compensação, dois dos antigos pentágonos transformam-se em hexágonos. Obtemos o grafo descrito na Figura 29, com seis pentágonos e dois hexágonos. Portanto, essa operação, que chamaremos de  $T_1$ , conserva a quantidade de pentágonos e aumenta a de hexágonos em uma unidade.

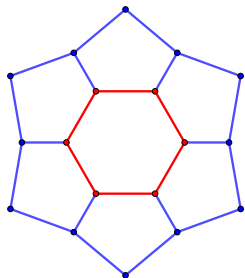


Figura 28:  $F_5 = 6, F_6 = 1$ .

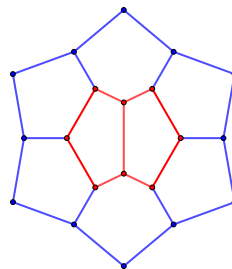


Figura 29:  $F_5 = 6, F_6 = 2$ .

Se fizermos a operação  $T_1$  em uma metade do  $C_{24}$  obtemos o  $C_{26}$ , e, se fizermos nas duas metades, obtemos o  $C_{28}$ .

Consideremos agora a operação  $T_2$ , ilustrada na Figura 30, que transforma o hexágono do grafo da Figura 28 em três pentágonos, e transforma três dos pentágonos externos em hexágonos. Portanto, a operação  $T_2$  conserva a quantidade de pentágonos e aumenta a de hexágonos em duas unidades.

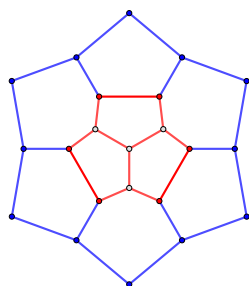


Figura 30:  $F_5 = 6, F_6 = 3$ .

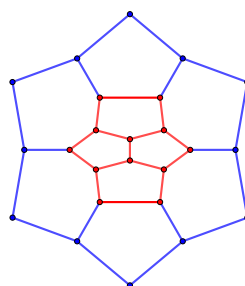
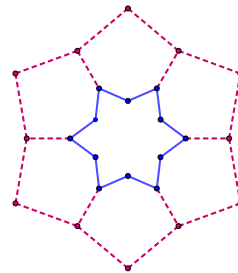


Figura 31:  $F_5 = 6, F_6 = 4$ .

Se fizermos a operação  $T_2$  em uma metade do  $C_{24}$  obtemos o  $C_{28}$ . Se fizermos a operação  $T_1$  em uma metade e a  $T_2$  na outra metade, obtemos o  $C_{30}$ . Aplicando a operação  $T_2$  nas duas metades, obtemos o  $C_{32}$ .

A operação  $T_3$  está descrita pela Figura 31. O hexágono do grafo da Figura 28 transforma-se em quatro pentágonos, e quatro dos pentágonos externos viram hexágonos. Assim, a operação  $T_3$  conserva a quantidade de pentágonos e aumenta a de hexágonos em três unidades. Se fizermos a operação  $T_3$  em uma metade do  $C_{24}$ , obtemos o  $C_{30}$  (um isômero daquele obtido acima). No mesmo esquema,  $T_1$  com  $T_3$  gera  $C_{32}$ ,  $T_2$  com  $T_3$  gera  $C_{34}$  e  $T_3$  com  $T_3$  gera  $C_{36}$ .

Figura 32. Descrição da operação  $T_4$ . Ela consiste em rodear os quatro grafos anteriores com seis novos hexágonos, mantendo a forma da linha externa. Desse modo, reduzindo o desenho, podemos acoplá-lo com a segunda metade do  $C_{24}$  e também daqueles obtidos com a aplicação das operações anteriores. Na verdade, essa operação consiste em inserir uma cinta de seis hexágonos entre as duas partes de todos os fulerenos já construídos.



Aplicando a operação  $T_4$ , descrita na Figura 32, aos fulerenos  $C_{24}$  a  $C_{36}$ , obtemos, respectivamente, os fulerenos  $C_{36}$  a  $C_{48}$ . Essa operação, por sua vez, pode ser repetida com esses últimos, de modo que obtemos todos os fulerenos  $C_n$  para  $n = 20$  e  $n \geq 24$  par. Assim, todos os valores inteiros  $F_6 \geq 0$  são usados, exceto  $F_6 = 1$ .

Observamos que, a partir da segunda cinta, temos fulerenos-tubo com diversas terminações nas capas de fechamento.

Por outro lado, para nos convenceremos de que não existe fullereno com  $F_6 = 1$ , podemos raciocinar a partir de tentativas de construir um modelo. Dispondo de 12 pentágonos e 1 hexágono recortados, começamos com este último. Ele tem que ser rodeado de 6 pentágonos. Como todo vértice é de tipo 3, esses pentágonos precisam estar conectados, cada um com seu vizinho, pois não é possível inserir outra face entre dois deles. Fica assim formada uma capa. Essa capa tem seis “entradas”, que devem ser preenchidas com os seis pentágonos restantes, cada um dos quais precisa estar conectado com seu vizinho. Sobra uma abertura, e não temos mais faces para completá-la.

*Nota 2.* Comentamos, na Seção 3, que os fulerenos  $C_{24}$ ,  $C_{26}$  e  $C_{28}$  não podem ter todas as faces regulares. Em geral os únicos poliedros convexos com faces pentagonais ou hexagonais regulares são o dodecaedro regular e o icosaedro truncado semirregular. Podemos constatar isso observando que não são prismas e nem antiprismas, e apenas o dodecaedro regular e o icosaedro truncado semirregular fazem parte das famílias dos sólidos de Platão, de Arquimedes e de Johnson. Mais informações sobre essas famílias podem ser encontradas em [24].

Resta-nos explicar por que aparentemente dá certo usar faces regulares para construir modelos de alguns fulerenos, como o  $C_{24}$ .

Primeiro observamos que se um poliedro é convexo e todos os seus vértices são do tipo três, então, os vértices formam triedros. Um triedro tem três ângulos planos, digamos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , que são os ângulos do vértice correspondente das faces que a ele concorrem, e tem três diedros. A medida  $[\alpha]$  do diedro oposto a  $\alpha$  é dada pela fórmula

$$\cos[\alpha] = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \quad (8)$$

Com essa fórmula vemos, em particular, que todo triedro é rígido. Assim, se dois triedros tiverem ângulos planos de mesma medida, então os diedros correspondentes também têm a mesma medida.

Se um poliedro convexo tem faces exclusivamente pentagonais e hexagonais regulares, os ângulos das faces dos triedros (necessariamente todo vértice formará um triedro) medem  $108^\circ$  ou  $120^\circ$ . Na tabela abaixo indicamos os triedros por  $(5, 5, 5)$ ,  $(5, 5, 6)$  e  $(5, 6, 6)$ , sendo 5 correspondendo a uma



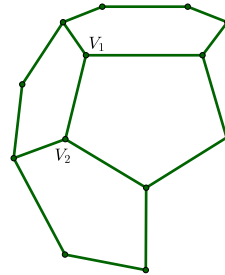
face pentagonal e 6, a uma hexagonal. No triedro (5,5,6), o símbolo [5,5] indica a medida do diedro oposto ao hexágono, e [5,6] a medida do diedro oposto ao pentágono, e assim por diante.

Usando a fórmula (8), podemos calcular as medidas de todos os diedros possíveis, como se vê na tabela abaixo.

triedro	diedro 1	diedro 2	diedro 3
(5, 5, 5)	[5, 5] $\approx 116,565051177^\circ$	[5, 5] $\approx 116,565051177^\circ$	[5, 5] $\approx 116,565051177^\circ$
(5, 5, 6)	[5, 5] $\approx 131,174856819^\circ$	[5, 6] $\approx 124,248093458^\circ$	[5, 6] $\approx 124,248093458^\circ$
(5, 6, 6)	[5, 6] $\approx 142,622631859^\circ$	[5, 6] $\approx 142,622631859^\circ$	[6, 6] $\approx 138,189685104^\circ$

Vejamos agora por que o  $C_{24}$  não pode ter todas as faces regulares.

Figura 33. Escolhemos dois vértices contíguos  $V_1$  e  $V_2$  do poliedro  $C_{24}$ , parte do desenho na Figura 8.  $V_1$  é um triedro do tipo (5, 5, 6) e seu diedro comum com seu vizinho é [5,5]  $\approx 131,174856819^\circ$ . Por outro lado,  $V_2$  é um triedro do tipo (5, 5, 5) e seu diedro comum com seu vizinho é [5,5]  $\approx 116,565051177^\circ$ . Consequentemente, se as faces forem regulares, os dois diedros não combinam.



Vemos que situação semelhante ocorre com  $C_{26}$ ,  $C_{28}$ , e outros.

Para completar, lembramos que se três hexágonos regulares (portanto são planos) encontram-se em um vértice (e se intersectam apenas em arestas), então eles formam uma figura plana. De fato, se formassem uma figura não plana, o referido vértice seria origem de um triedro. Nesse triedro a soma dos ângulos das faces seria  $3 \times 120^\circ = 360^\circ$ . Mas a soma dos ângulos planos de um triedro deve ser  $< 360^\circ$ . Para ver uma demonstração desse resultado consulte artigo de Paterlini [11].

Encerramos esta nota com a constatação de que a diferença das medidas dos diedros mencionados é de apenas 12,5% em relação à medida menor, de forma que, se os modelos forem construídos com papel-cartão ou varetas, a distorção pode passar despercebida.

*Nota 3.* Uma breve explicação sobre o que são simetrias icosaédricas. Considere um icosaedro regular, e uma reta que passa por dois vértices opostos, como na Figura 34. As rotações em torno desse eixo com ângulos  $72^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $216^\circ$  e  $288^\circ$  deixam o icosaedro invariante, assim como a rotação de ângulo  $0^\circ$ , que é a identidade. Essas rotações são simetrias do icosaedro regular. Como o icosaedro tem 12 vértices que se organizam em seis pares de vértices opostos, temos seis eixos que dão lugar a  $6 \times 4 = 24$  simetrias, e mais a identidade.

Consideremos agora as retas que passam pelo centro de duas faces opostas do icosaedro (um exemplo está desenhado na Figura 35). Como existem 20 faces que formam 10 pares de faces opostas, temos 10 eixos nessas condições. As rotações de  $120^\circ$  e de  $240^\circ$  que fixam esses eixos deixam o icosaedro invariante. Assim, temos mais  $10 \times 2 = 20$  simetrias.

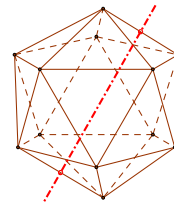
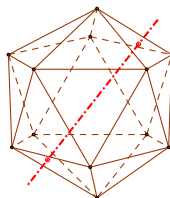
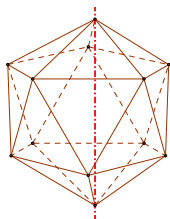


Figura 34: Eixo por dois vértices opostos.

Figura 35: Eixo por duas faces opostas.

Figura 36: Eixo por duas arestas opostas.

Por fim, consideremos a mediatriz de duas arestas opostas (Figura 36). Uma rotação de  $180^\circ$  que fixa esse eixo deixa o icosaedro invariante. Como são 30 arestas, existem 15 desses eixos, que determinam mais 15 simetrias.

Contando com a identidade temos  $1 + 24 + 20 + 15 = 60$  simetrias. Essas simetrias formam uma estrutura matemática de **grupo**, nesse caso denominado **grupo icosaédrico**.

Dizemos que tem *simetria icosaédrica* qualquer poliedro com simetrias que formam um grupo com a mesma estrutura do grupo icosaédrico. Exemplos de poliedros com simetria icosaédrica, além do icosaedro regular, são o dodecaedro regular e o icosaedro truncado semirregular.

*Nota 4.* Uma dica, que usei em alguns casos, para a construção de modelos. Primeiro recortei 12 faces pentagonais regulares, e depois uma boa quantidade de faces hexagonais regulares. Usei papel-cartão de cores diferentes para os dois tipos de faces. As faces foram recortadas com abas de 1cm de largura. Para juntar faces, usei grampos, como se vê na Figura 37. Os grampos são presos internamente até o ponto em que isso seja possível e externamente no final da montagem. Dessa forma os mesmos recortes de faces podem ser reaproveitados para vários modelos e para investigação de isômeros.

Figura 37. Um modelo com grampos expostos, construído em papel-cartão pelo autor. Foto do autor.



## Agradecimentos

O autor agradece ao Prof. Romeu C. Rocha-Filho, do Departamento de Química da UFSCar, que leu o original e fez sugestões que levaram ao seu aprimoramento.

## Referências

- [1] Buchstaber, V. M. e Erokhovets, N. Y. *Fullerenes, Polytopes and Toric Topology*. Versão publicada no Arxiv: <https://arxiv.org/abs/1609.02949> Consultado em 23 de janeiro de 2020.
- [2] Corrêa, T. H. B. e Reis, J. D. S. *Estruturas de fulerenos: estabelecendo interfaces no ensino de Matemática e Química em nível superior*. Quim. Nova, Vol. 40, No. 8, 963-969, 2017. <http://dx.doi.org/10.21577/0100-4042.20170053>
- [3] Cox, B. J. e Hill, J. M., *Exact and approximate geometric parameters for carbon nanotubes incorporating curvature*. Carbon 45 (2007) 1453-1462. doi:10.1016/j.carbon.2007.03.028
- [4] Fowler, P. W. e Austin, S. J. *Closed-Shell Carbon Frameworks: Leapfrog Fullerenes and Decorated Spheriphane Hydrocarbons*. J. Chem. Inf. Comput. Sci. 1994, 34, 264-269.
- [5] Goedgebeur, J. e McKay, B. D. *Recursive generation of IPR fullerenes*. J Math Chem v. 53, pp. 1702-1724, 2015.
- [6] Goldberg, M. (1937). *A class of multi-symmetric polyhedra*. Tohoku Math J v. 43, pp.104, 1937.
- [7] Grünbaum, B. *Convex Polytopes*. Segunda edição. N. York: Springer, 2003.
- [8] Hart, G. *Goldberg Polyhedra*. In Senechal, M. (ed.), **Shaping Space: Exploring Polyhedra in Nature, Art, and the Geometrical Imagination**. New York: Springer, 2013.
- [9] Melker, A. I. e Krupina, M. A. *Geometric modeling of midi-fullerenes growth from C<sub>24</sub> to C<sub>48</sub>*. St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics v. 2, pp.201-208, 2016. Obtido em <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405722316301074>
- [10] Parasuk, V. e Amlöf J. *C<sub>20</sub>: the smallest fullerene?* Chemical Physics Letters, v. 184, number 1, 2, 3, pp.187-190, 1991.
- [11] Paterlini, R. R. *Sobre a soma dos ângulos planos de ângulos poliédricos convexos*. PMO v.8, n.2, 2020, 156-169. ISSN: 2319-023X <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo812>
- [12] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar, gênese e desenvolvimento*. Disponível em [https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/geometria\\_Paterlini\\_27\\_01\\_2020.pdf](https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/geometria_Paterlini_27_01_2020.pdf) Acesso em: 18 de maio de 2020.
- [13] Prinzbach, H. *et alii Gas-phase production and photoelectron spectroscopy of the smallest fullerene, C<sub>20</sub>*. Nature, Vol 407, 7 September 2000, pp.60-63. DOI: 10.1038/35024037
- [14] Rocha-Filho, R. C. *Os fulerenos e sua espantosa geometria molecular*. Química Nova na Escola, n.º 4, 1996. Disponível em: <http://qnesc.sbg.org.br/online/qnesc04/actual.pdf>
- [15] Schein S. e Gayed, J. M. *Fourth class of convex equilateral polyhedron with polyhedral symmetry related to fullerenes and viruses*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 2014, v. 111, n.º 8, pp.2920-2925.
- [16] Schwerdtfeger, P., Wirz, L. N. e Avery, J. *The topology of fullerenes*. WIREs Comput Mol Sci 2015, 5:96-145. doi: 10.1002/wcms.1207
- [17] Talanov, V. M. et alii *Symmetrical Features of the Structure of C<sub>24</sub> and C<sub>48</sub> Fullerenes*. Glass Physics and Chemistry, v. 36, No. 3, pp.358-368, 2010.
- [18] Wikipedia. *Dodecahedrane*. Disponível em <https://en.wikipedia.org/wiki/Dodecahedrane> Consultado em 18 de janeiro de 2020.
- [19] Wikipedia. *Truncated icosahedron*. Disponível em [https://en.wikipedia.org/wiki/Truncated\\_icosahedron](https://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_icosahedron) Endereço da Figura 3: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polyhedron\\_truncated\\_20\\_max.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polyhedron_truncated_20_max.png) Autor: Watchduck. GNU Free Documentation License. Consultado em 20 de janeiro de 2020.

- [20] Wikipedia. *Buckminsterfullerene*. Disponível em <https://en.wikipedia.org/wiki/Buckminsterfullerene> Endereço da Figura 4: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Buckminsterfullerene.svg> Autor: Leyo. Domínio público. Consultado em 20 de janeiro de 2020.
- [21] Wikipedia. *Buckminster Fuller*. Disponível em [https://en.wikipedia.org/wiki/Buckminster\\_Fuller](https://en.wikipedia.org/wiki/Buckminster_Fuller) Consultado em 23 de janeiro de 2020.
- [22] Wikipedia. *Pentagonal icositetrahedron*. Disponível em [https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal\\_icositetrahedron](https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_icositetrahedron) Consultado em 24 de janeiro de 2020.
- [23] Wikipedia. *Dodecahedron*. Disponível em <https://en.wikipedia.org/wiki/Dodecahedron> Consultado em 24 de janeiro de 2020.
- [24] Wikipedia. *Johnson solid*. Disponível em [https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson\\_solid](https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson_solid) Consultado em 9 de fevereiro de 2020.
- [25] Wikipedia. *Goldberg polyhedron*. Disponível em [https://en.wikipedia.org/wiki/Goldberg\\_polyhedron](https://en.wikipedia.org/wiki/Goldberg_polyhedron) A Figura 21 foi adaptada de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldberg\\_10\\_0\\_equilateral-spherical.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldberg_10_0_equilateral-spherical.png) Autor: Tomruen. Licença Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International. Consultado em 9 de fevereiro de 2020.
- [26] Wikipedia. *Chamfered dodecahedron*. Disponível em [https://en.wikipedia.org/wiki/Chamfered\\_dodecahedron](https://en.wikipedia.org/wiki/Chamfered_dodecahedron) A Figura 22 foi obtida de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncated\\_rhombic\\_triacontahedron.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncated_rhombic_triacontahedron.png) Autor: Tomruen, domínio público. Consultado em 4 de abril de 2020.
- [27] Wikipedia. *Fullerene*. Disponível em <https://en.wikipedia.org/wiki/Fullerene> Endereço da Figura 1: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:C20\\_Fullerene.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:C20_Fullerene.png) Autor: Perditax. Data: 11 de junho de 2011. Domínio público. Consultado em 19 de agosto de 2020.

Roberto Ribeiro Paterlini  
Universidade Federal de São Carlos  
<[paterlini@ufscar.br](mailto:paterlini@ufscar.br)>

Recebido: 29/05/2020  
Publicado: 24/09/2020

# Um modelo matemático (discreto) de propagação de uma doença no Ensino Médio

Carlos Alberto Martins de Assis 

## Resumo

As doenças epidemiológicas são uma grande preocupação em nossa sociedade. Com isso, conhecer melhor como ocorre a propagação, os locais de maior incidência, tempo de vida da doença, processos de cura, e outros fatores relacionados é essencial para controlar a sua disseminação. Sendo assim, este artigo irá propor um modelo matemático (discreto) simples, conhecido pelos epidemiologistas como modelo SIS (Suscetível-Infetado-Suscetível), e que pode facilmente ser trabalhado no Ensino Médio a fim de estimular a curiosidade dos alunos. Daí, utilizando o vírus da gripe - uma doença tão comum - o presente artigo mostrará, através desse modelo, como o surto dessa doença comporta-se em uma população de crianças.

**Palavras-chave:** Modelo SIS; Epidemiologia; Ensino Médio.

## Abstract

Epidemiological diseases are a major concern in our society. Thus, better understanding how the spread occurs, the places with the highest incidence, the disease's lifetime, healing processes, and other related factors, are essential to control its spread. Therefore, this article will propose a simple (discrete) mathematical model, known by epidemiologists as the SIS (Susceptible-Infected-Susceptible) model, which can easily be worked on in high school in order to stimulate students' curiosity. Hence, using the flu virus as a common disease, this article will show how the outbreak of this disease behaves in a population of children through this model.

**Keywords:** SIS model; Epidemiology; High school.

## 1. Introdução

A utilização de modelos matemáticos para estudar a propagação de doenças contagiosas vem desde 1760, pelo menos, quando Daniel Bernoulli elaborou um trabalho sobre a varíola [3]. Mas, em 1906, o epidemiologista inglês Sir William Heaton Hamer observou que a disseminação de uma doença em uma população é diretamente proporcional ao produto da quantidade de indivíduos sadios pela quantidade de indivíduos infectados. Essa ideia de Hamer, conhecida como a “lei da ação de massas”<sup>1</sup>, foi originalmente formulada através de um modelo de tempo discreto. Nos estudos

<sup>1</sup>Lei da ação de massas para a epidemiologia é baseada na suposição de que indivíduos infecciosos misturam-se homogeneamente aos suscetíveis em toda a população.

epidemiológicos, os modelos matemáticos possibilitam entender melhor a dinâmica de propagação de uma doença em uma determinada situação. Sendo assim, o objetivo deste artigo é propor um modelo matemático que permitirá entender o funcionamento da propagação de uma doença em sua versão discreta. Tal modelo que será utilizado é conhecido pela sigla SIS (que significa Suscetível-Infetado-Suscetível) e pode ser trabalhado em sala de aula com alunos do Ensino Médio.

## 2. Apresentação do funcionamento do modelo

Inicialmente, considerando uma unidade de tempo, digamos  $n$  em dias; uma população inicial constante (não são considerados nascimentos e mortes), que será indicada por  $N$ ; e a existência de indivíduos que não estão infectados, dos quais definiremos como suscetíveis e indicaremos por  $(S_n)$ , e indivíduos que estão atualmente infectados, que indicaremos por  $(I_n)$ . O fluxo da propagação de uma doença no modelo SIS afirma que:

**“Um grupo de pessoas não infectadas, quando entra em contato com o grupo dos infectados, após se recuperarem da doença, voltam para a categoria inicial, configurando-se um cenário cíclico”.**

No entanto, muitas vezes, essas situações são resolvidas usando a solução de sistemas variacionais, onde é bem aconselhável tentar entender como são as variações das categorias envolvidas no fenômeno analisado. Com isso, podemos dizer que a variação do número de indivíduos suscetíveis no tempo  $n$  e  $n + 1$  será indicada por  $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$ . Por analogia, a variação dos infectados será  $\Delta I_n = I_{n+1} - I_n$ . A transmissão de uma doença ocorre, por exemplo, através do contato pessoal, pelo uso de objetos etc. Sendo assim, vamos definir que a incidência da propagação da doença seja  $(\alpha)$ , onde

$$\alpha = \frac{\text{número de indivíduos infectados}}{N}, \tag{1}$$

e esse valor atuando na população fixa  $N$  acarreta uma diminuição no número de indivíduos suscetíveis, provocando um aumento no número de infectados no tempo  $n$  em dias, isto é, o número de indivíduos infectados origina  $(\alpha \cdot S_n)$ , novas pessoas infectadas no tempo  $n$ . Então, para saber qual o número total de novos infectados, basta multiplicar  $(\alpha \cdot S_n)$  pelo número total de infectados  $(I_n)$  no tempo  $n$ , implicando  $(\alpha \cdot S_n \cdot I_n)$ . Note que a transmissão da doença é diretamente proporcional ao número de suscetíveis e infectados, onde foi modelado pelo produto entre suas quantidades (aqui se usa a “lei da ação de massas”). Podemos definir, também, que a constante positiva de proporcionalidade para a recuperação dos indivíduos infectados seja  $(\beta)$ , em que

$$\beta = \frac{\text{número de óbitos}}{N} + \frac{\text{número de indivíduos recuperados}}{\text{número de indivíduos infectados}} \tag{2}$$

e, na maioria das vezes, ela é conhecida como taxa de recuperação ou remoção.

Assim, conforme foi mencionado anteriormente de como é o funcionamento do modelo SIS, observamos que quando o número de indivíduos suscetíveis entra em contato com os infectados, o número deles diminui, enquanto o número de pessoas infectadas aumenta na mesma proporção. Daí, deve-se subtrair  $(\alpha \cdot S_n \cdot I_n)$  e adicionar  $(\beta \cdot I_n)$ . Logo, a variação do número de indivíduos suscetíveis será dada por

$$S_{n+1} - S_n = -\alpha \cdot S_n \cdot I_n + \beta \cdot I_n, \tag{3}$$

o que implica  $\Delta S_n = -\alpha \cdot S_n \cdot I_n + \beta \cdot I_n$ . Agora, para obter a variação do número de pessoas infectadas com a doença, também no tempo  $n$ , basta ver que o número delas diminui, uma vez que algumas são curadas. Isto é, para os indivíduos recuperados que agora voltaram para a categoria inicial, devem ser subtraídos  $(\beta \cdot I_n)$  de  $(\alpha \cdot S_n \cdot I_n)$ . Daí, temos

$$I_{n+1} - I_n = \alpha \cdot S_n \cdot I_n - \beta \cdot I_n, \tag{4}$$

ou melhor,  $\Delta I_n = \alpha \cdot S_n \cdot I_n - \beta \cdot I_n$ .

Com isso, a dinâmica da disseminação de uma doença pode ser descrita pelo sistema de equações,

$$\begin{cases} \Delta S_n = -\alpha \cdot S_n \cdot I_n + \beta \cdot I_n \\ \Delta I_n = \alpha \cdot S_n \cdot I_n - \beta \cdot I_n \end{cases}, \quad (5)$$

onde  $S_n + I_n = N$ . Mas, conforme está em [1], podemos encontrar uma fórmula de recorrência para obtermos  $S_{n+1}$ . Em outras palavras, perceba que ao substituir  $I_n = N - S_n$  em (3), teremos

$$S_{n+1} = S_n - \alpha S_n \cdot (N - S_n) + \beta \cdot (N - S_n) \quad (6)$$

ou, ainda,

$$S_{n+1} = \alpha S_n^2 + S_n \cdot (1 - \alpha N - \beta) + \beta N, \quad (7)$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

### 3. Uma situação-problema para o modelo

Vejam os:

**“O vírus da gripe é muito comum em crianças. Sendo assim, suponha que em uma escola com 1.000 crianças, 2 dessas crianças estejam com o vírus. Para a gripe, o período infeccioso é tipicamente de 1 a 3 dias. Se o considerarmos, por exemplo, igual a 2 dias, isso significa que a taxa de recuperação será  $\beta = \frac{1}{2}$  (por criança e por dia), mostrando com isso que em um dia metade das crianças com gripe se recuperaram. Avalie o surto de gripe nessa população fixa, passados 20 dias do começo da disseminação da doença.”**

Sabemos que o total de crianças é  $N = 1.000$ . A incidência da propagação da gripe será igual a  $\alpha = \frac{2}{1.000} = 0,002$ , e a constante de recuperação será igual a  $\beta = \frac{1}{2} = 0,5$ . Substituindo esses valores em (7), o número de crianças suscetíveis será calculado através da equação

$$S_{n+1} = 0,002S_n^2 - 1,5S_n + 500 \quad (8)$$

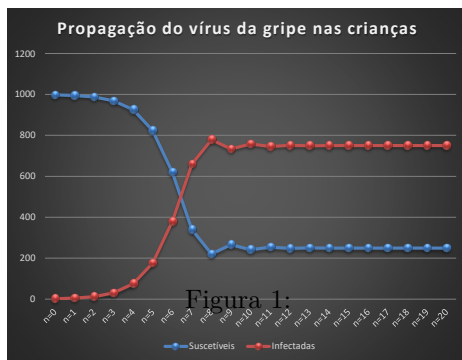
para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 20$  e, paralelamente, será encontrado o número de crianças infectadas, onde inicialmente  $I_0 = 2$ .

#### 3.1. Construindo uma tabela e o gráfico para análise

Através da equação (8), construiremos a Tabela 1 e a Figura 1 a seguir, que exibem o número de crianças suscetíveis e infectadas.

n	Crianças suscetíveis	Crianças infectadas
0	= 998	= 2
1	≈ 995	≈ 5
2	≈ 988	≈ 12
3	≈ 969	≈ 31
4	≈ 925	≈ 75
5	≈ 824	≈ 176
6	≈ 621	≈ 379
7	≈ 340	≈ 660
8	≈ 221	≈ 779
9	≈ 266	≈ 734
10	≈ 242	≈ 758
11	≈ 254	≈ 746
12	≈ 248	≈ 752
13	≈ 251	≈ 749
14	≈ 250	≈ 750
15	≈ 250	≈ 750
16	≈ 250	≈ 750
17	≈ 250	≈ 750
18	≈ 250	≈ 750
19	≈ 250	≈ 750
20	≈ 250	≈ 750

Tabela 1:



Analisando-os, observe que, no primeiro momento, até o 8º dia, o número de crianças suscetíveis vem diminuindo rapidamente, enquanto o número de crianças infectadas vai aumentando; elas estão saindo da classe dos suscetíveis. E foi nesse dia que houve o pico de crianças infecciosas. No 9º dia, vemos que um pequeno grupo de crianças infectadas estão voltando para a classe dos suscetíveis. Do 10º dia até o 13º dia, percebemos uma oscilação bem pequena entre o número de crianças suscetíveis e infectadas. Sem nenhuma dificuldade, existe uma instabilidade no comportamento do número de crianças suscetíveis e infectadas até o 13º dia. Agora, quanto ao(s) ponto(s) de equilíbrio dessa situação-problema, podemos encontrá-lo(s)? A resposta é sem sombra de dúvida, para  $S_n = 250$  ( $14 \leq n \leq 20$ ) e, conseqüentemente, para  $I_n = 1.000 - 250 = 750$  (também no mesmo intervalo), pois observa-se uma convergência para a solução desse problema. Outro ponto de equilíbrio que pode ser visto é quando temos  $S = N$  e  $I = 0$ , mas o que vemos em todo momento



é  $I \neq 0$ , comprovando com isso a propagação da gripe [1]. Um outro dado de grande importância para os epidemiologistas é o valor basal de reprodução (ou reprodutividade basal), que significa o valor médio de novas crianças infectadas que são geradas por uma única criança infectada com a gripe na população quase totalmente suscetível, ou seja, esse valor avalia a situação do problema que estão enfrentando e é calculado conforme está em [2], fazendo  $\frac{0,002}{0,5} \times 1.000 = 4 > 0$  (perceba que esse valor foi encontrado a partir da 2ª equação de (5), fazendo  $\Delta I_n > 0$  e  $S_n = 1.000$ ). De acordo com [2], quando esse valor de reprodutividade basal é  $> 1$ , a doença propaga-se e persiste na população; por outro lado, quando é  $< 1$ , a doença morre. Veja que, na população constituída das 1.000 crianças, o vírus da gripe propaga-se e persevera durante os 20 dias!

#### 4. Considerações Finais

Finalizando, para aguçar a curiosidade do leitor, sugerimos que aprecie o funcionamento de outros modelos epidêmicos discretos, como o modelo SIR (Suscetível-Infetado-Recuperado) usado para modelar a dinâmica do vírus da dengue, o modelo SI (Suscetível-Infetado) usado para modelar o vírus do HIV, entre outros modelos, e apresente-os em sala de aula para estimular a aprendizagem e torná-la mais harmoniosa.

#### Agradecimentos

Um agradecimento especial ao colega Prof. Alexandre J. M. Antunes, na editoração em Latex desse trabalho.

#### Referências


- [1] BASSANEZI, R. C.; JR, W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Editora Harbra, 1988.
- [2] CODEÇO, C. T.; COELHO, F. C. Modelagem de Doenças Transmissíveis. *Revista Oecologia Australis*, 2012.
- [3] DIPRIMA, R. C.; BOYCE, W. E. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2012.
- [4] MASSAD, E. e outros. *Métodos Quantitativos em Medicina*. São Paulo: Editora Manole, 2004.

Carlos Alberto Martins de Assis  
Rede Estadual de Educação - RJ  
Universidade Estácio de Sá - Unesa/RJ  
<[carlosalbertodeassis@gmail.com](mailto:carlosalbertodeassis@gmail.com)>

Recebido: 28/04/2020  
Publicado: 14/10/2020

# Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas

Eudes Antonio Costa 

Douglas Catulio dos Santos 

## Resumo

Neste artigo relatamos nossa experiência em uma oficina de resolução de problemas, em que participavam estudantes a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental, com objetivo de treinamento para competição matemática. Nela enfatizamos a importância entre a resolução de problemas e o processo de aprendizagem dos conceitos aritméticos associados aos números *repunidades* (repetição de unidade), buscando o desenvolvimento de habilidades nos estudantes, tais como: investigar, descobrir, propor, conjecturar e validar conceitos acerca dos números *repunidades*, explorando situações-problemas.

**Palavras-chave:** Habilidades; Números *Repunidades*; Resolução de problemas.

## Abstract

In this we report an experience in a problem-solving workshop, in which students from the seventh grade of elementary school (training for competitions in mathematics) participated. In it we emphasize the importance between problem solving and the learning process of the arithmetic concepts associated with the numbers *repunits*, seeking the development of skills in students, such as: investigate, discover, propose, conjecture and validate concepts about numbers *repunits* by exploring problem.

**Keywords:** Numbers *Repunits*; Problem solving; Skills.

## 1. Introdução

Diante dos dados acerca da avaliação do ensino de Matemática na educação básica no Brasil, que indica que aproximadamente “68% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de Matemática”, veja o Pisa 2018 [7], fica evidenciada a necessidade de explorarmos alternativas no ensino de matemática, e utilizar abordagens ou estratégias que valorizem o estudante no processo de aprendizagem Matemática. Nesse sentido, George Polya [8] apregoa que o estudante deve tornar-se independente e competente na resolução de problemas. Ele descreve uma série de heurísticas, estratégias práticas (preparadas pelo professor), que os auxiliam na resolução de problemas, enfatizando assim o papel de destaque do estudante no processo de sua aprendizagem. Portanto, a independência do estudante na resolução do problema está associada ao trabalho planejado e supervisionado pelo professor; para exemplificar: na preparação de ferramentas matemáticas necessárias, seleção de problemas e acompanhar a resolução. Isso nos leva a concluir

que a Matemática não pode ser apreendida sem a interação ou participação ativa do indivíduo. Aqui apresentamos nossa experiência em uma oficina de resolução de problemas. Nelas utilizamos a resolução de problemas como ferramenta de ensino para a sistematização de conceitos inerentes aos números *repunidades* ou *repunits*, favorecendo o papel de protagonista do estudante no seu aprendizado.

## 2. Números Repunidades

Os números *repunidades* (repetição da unidade) formam um subconjunto dos naturais, denotado por  $\mathbf{R1}$ , que apresentam um padrão e algumas propriedades bem definidas, as quais despertam o interesse de matemáticos no decorrer do tempo.

De acordo com Carvalho e Costa [3], o termo *repunidade*, em inglês *repunit*, foi usado primeiramente por Beiler em seu trabalho *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains* em 1964, referindo-se aos números naturais  $R_n$  que são escritos de forma única, no sistema decimal, com a repetição da unidade, ou seja, a justaposição do algarismo 1,  $n$  vezes. Assim, para todo  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{R1} = \{1, 11, 111, 1111, \dots, R_n, \dots\}$  representa o conjunto dos números *repunidades*.

Coube a Beiler também a apresentação da fatoração de alguns  $R_n$ , mostrando ainda a existência de primos pertencentes ao conjunto  $\mathbf{R1}$  que ficaram conhecidos como primos *repunidades*, em outras palavras, números naturais que são primos e *repunidades* ao mesmo tempo; por exemplo  $R_2$ ,  $R_{19}$  e  $R_{23}$ .

Inicialmente apresentamos a definição do número *repunidade*, escrevemos alguns exemplos e a seguinte lista de problemas e deixamos os alunos fazerem uma busca sobre o assunto e problemas correlatos. Em outro momento discutimos cada resolução e exploramos algumas propriedades, exemplos ou padrões:

**Problema 1.** [1, Problema 6.1] Roberto quer escrever o número  $R_6 = 111111$  como um produto de dois números, nenhum deles terminado em 1. Isso é possível ?

**Problema 2.** Mostre que 37 divide  $R_{3k}$ , para todo  $k$  natural.

**Problema 3.** [1, Problema 2.25] Considere os números  $A = \underbrace{111 \dots 11}_{2n \text{ algarismos}}$  e  $B = \underbrace{444 \dots 44}_n$ . Verifique que para todo  $n$  natural  $A + B + 1$  é um quadrado perfeito e calcule sua raiz quadrada.

**Problema 4.** [4, Problema 56] Mostre que  $(111)_b \mid (10101)_b$  para todo  $b > 1$ . Escreva o quociente da divisão em termos da base  $b$ .

## 3. Resolução do Problema 1

Recordemos que o resto da divisão de um número inteiro por 3 é igual ao resto da divisão da soma de seus algarismos por 3; esse é o critério de divisibilidade por 3. Sugerimos que eles verifiquem e ressaltamos que o critério de divisibilidade por 9 é similar. Agora apresentamos a

### Resolução: do Problema 1

Veja que soma dos algarismos de  $R_6 = 111111$  é 6; pelo critério de divisibilidade por 3, temos que  $R_6$  é múltiplo de 3, donde obtemos que  $R_6 = 3 \times 37037$ . Essa é a primeira resposta encontrada pelos estudantes.

Uma pergunta interessante é se existem outros pares de números, cujo produto obedeça a condição estabelecida. Escrevendo  $R_6$  em notação decimal expandida (polinomial), percebemos que:

$$\begin{aligned}
 R_6 &= 111111 \\
 &= 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1 \\
 &= 10^4(10 + 1) + 10^2(10 + 1) + (10 + 1) \\
 &= 11 \cdot (10^4 + 10^2 + 1) .
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Assim, a Equação (1) garante que  $R_6$  é múltiplo de  $R_2 = 11$ . Como já notamos,  $R_6$  é múltiplo comum de 3 e 11, e podemos fatorar  $R_6$  (testando para alguns primos "pequenos") e determinar

$$R_6 = 111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 .$$

No produto, desejamos 1 na 1ª ordem, assim precisamos que os fatores contemham na 1ª ordem, respectivamente: 3 e 7 ou 9 e 9; logo, as possibilidades de escrita de produtos que respeitem os termos definidos são:  $3 \times 37037$ ;  $7 \times 15873$ ;  $13 \times 8547$ ;  $33 \times 3367$ ;  $37 \times 3003$ ;  $39 \times 2849$ ;  $77 \times 1443$ ;  $143 \times 777$ ;  $259 \times 429$ ;  $407 \times 273$ . Portanto, existem 10 possibilidades de escrita de  $R_6$  como produto de dois números naturais não terminados em 1. •

Na sequência exibimos a tabela retirada de Carvalho e Costa [3] com a fatoração de  $R_n$  com  $2 \leq n \leq 19$ .

n	$R_n$	Fatoração
2	11	Primo
3	111	$3 \times 37$
4	1111	$11 \times 101$
5	11111	$41 \times 271$
6	111111	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
7	1111111	$239 \times 4649$
8	11111111	$11 \times 73 \times 101 \times 137$
9	111111111	$3^2 \times 37 \times 3336677$
10	1111111111	$11 \times 41 \times 271 \times 9091$
11	11111111111	$21649 \times 513239$
12	111111111111	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$
13	1111111111111	$53 \times 79 \times 265371653$
14	11111111111111	$11 \times 239 \times 4649 \times 909091$
15	111111111111111	$3 \times 31 \times 37 \times 41 \times 271 \times 2906161$
16	1111111111111111	$11 \times 17 \times 73 \times 101 \times 137 \times 5882353$
17	11111111111111111	$2071723 \times 5363222357$
18	111111111111111111	$3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37 \times 52579 \times 333667$
19	1111111111111111111	Primo
...	...	...

Tabela 1: Fatores primos de  $R_n$  [3]

A exploração do Problema 1, a observação da Tabela 1, questionamentos e atividades preparadas

pelo professor, instiga os estudantes a algumas observações ou conjecturas. Apresentamos algumas proposições relativas aos números *repunidades*  $R_n$ , cujas demonstrações encontram-se em [3].

**Proposição 1.** [3, Afirmação 1] Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , se  $n$  é múltiplo de 3, então,  $R_n$  também é.

**Proposição 2.** [3, Afirmação 2] Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , se  $n$  é um número par, então,  $R_n$  é múltiplo de 11.

Como consequência da Proposição (2), temos

**Corolário 1.** [4, Exercício 282] Para todo  $n \geq 2$  natural, tem-se  $R_{2n}$ , que é composto.

**Exemplo 1.** Temos  $R_6 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ , enquanto que  $R_{12} = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$ , associado à Proposição (1) e a Proposição (2). Podemos generalizar para o resultado seguinte.

**Proposição 3.** [3, Afirmação 3] Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , se  $n$  é múltiplo de 6, então,  $R_n$  é múltiplo de 3, 7, 11 e 13.

#### 4. Resolução do Problema 2

Antes de mostrarmos a resolução para Problema 2, vejamos algumas propriedades.

**Proposição 4.** [3, Afirmação 4] Para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , se  $n$  é múltiplo  $m$ , então,  $R_n$  é múltiplo de  $R_m$ .

**Exemplo 2.** Temos  $R_6 = 10101 \times R_2$ , ou ainda que  $R_6 = 1001 \times R_3$ . E mais,  $R_8 = 1010101 \times R_2 = 10001 \times R_4$ .

Segue diretamente da Proposição (4) que

**Corolário 2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , se  $R_n$  é primo, então,  $n$  é primo.

No entanto, a recíproca do Corolário (2) não é verificada, uma vez que  $n = 3$  e  $n = 5$  são primos; contudo, sabemos que  $R_3$  e  $R_5$  são compostos (Tabela 1).

De acordo com Carvalho e Costa [3], mesmo com o avanço da tecnologia, ainda existe uma dificuldade computacional para a verificação da primalidade de  $R_n$ , basta considerar  $R_n$  com milhares de algarismos. Além da primalidade de  $R_n$  para  $n = 2, 19$  e  $23$  sabemos que  $R_{217}$  e  $R_{1031}$  também são primos. Uma questão em aberto é sobre a infinitude dos primos *repunidades*.

#### Resolução: do Problema 2

De acordo com a Proposição (4) temos que  $R_{3k}$  é múltiplo de  $R_3$ , uma vez que  $n = 3k$  é múltiplo de 3; sendo assim, obtemos que existe um natural  $q$  de forma que  $R_{3k} = R_3 \times q$ . Pela Tabela 1 observamos que  $R_3 = 3 \times 37$ ; isso acarreta em  $R_{3k} = 3 \times 37 \times q = 37 \times (3q)$ . •

#### 5. Resolução do Problema 3

Em Brito [2] temos a seguinte caracterização para um número *repunidade*. Para todo  $n$  natural temos:

$$\begin{cases} R_1 = 1 \\ R_{n+1} = 10R_n + 1, n \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Dessa maneira podemos definir os números *repunidades* recursivamente pela equação (2).

**Exemplo 3.** Observe que  $R_2 = 11 = 10 \times R_1 + 1$ , enquanto  $R_3 = 111 = 10 \times R_2 + 1$ . Veja ainda que  $\text{mdc}(R_3, R_2) = 1$ .

De um modo geral temos que

**Proposição 5.** *Dois números repunidades consecutivos são coprimos.*

*Demonstração.* Basta observar que  $\text{mdc}(R_{n+1}, R_n) = 1$  para todo  $n$  natural. □

Apresentamos agora um resultado que estabelece uma expressão que gera os números *repunidades*  $R_n$  no sistema decimal, que dependa exclusivamente do valor de  $n$  e não mais (recursivamente) da *repunidade* anterior. Posteriormente tal notação será usada para generalizar um número *repunidade* em uma base  $b \geq 2$  qualquer.

**Proposição 6.** [1, Problema 3.30] Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos  $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$ .

**Exemplo 4.** Veja que  $R_1 = 1 = \frac{10^1 - 1}{9}$ ,  $R_2 = 11 = \frac{10^2 - 1}{9}$  e  $R_3 = 111 = \frac{10^3 - 1}{9}$ .

**Demonstração. da Proposição 6**

(Os estudantes já conheciam o princípio de indução finita)

Aplicamos indução em  $n$ . Para  $n = 1$  é fácil perceber que  $R_1 = 1 = \frac{10^1 - 1}{9}$ , o que garante a validade da sentença para  $n = 1$ .

Suponhamos que para algum  $n > 1$ , a sentença  $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$  é válida. Devemos mostrar a validade para  $n + 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} R_{n+1} &:= 10R_n + 1 \\ &= 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 \\ &= \frac{10^{n+1} - 10^n + 10^n - 1}{9} \\ &= \frac{10^{n+1} - 1}{9} . \end{aligned} \tag{3}$$

Isso garante a validade da sentença para todo  $n + 1$ . □

Agora, a **Resolução: do Problema 3**

Note que pela Proposição (6) temos

$$A = R_{2n} = \underbrace{\frac{111 \cdots 11}{2n \text{ algarismos}}} = \frac{10^{2n} - 1}{9} \quad \text{e}$$

$$B = 4 \times R_n = 4 \times \left( \underbrace{\frac{111 \cdots 11}{n \text{ algarismos}}} \right) = 4 \times \frac{10^n - 1}{9} \quad , ,$$

assim:

$$\begin{aligned}
 A + B + 1 &= \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4 \times \frac{10^n - 1}{9} + 1 \\
 &= \frac{10^{2n} - 1 + 4 \times 10^n - 4 + 9}{9} \\
 &= \frac{10^{2n} + 4 \times 10^n + 4}{9} \\
 &= \frac{(10^n + 2)(10^n + 2)}{9} \\
 &= \left( \frac{10^n + 2}{3} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Portanto, para todo  $n$  natural  $A + B + 1$  é um quadrado perfeito, e sua raiz quadrada é  $\frac{10^n + 2}{3}$ . •

### 6. Resolução do Problema 4

Nesta seção apresentaremos algumas características dos números *repunidades* em outra base numérica  $b \geq 2$ , além da decimal. Snyder [9] propôs uma generalização para os números *repunidades* e algumas propriedades aritméticas de  $R_n$  para qualquer base numérica inteira  $b \geq 2$ , em que  $R_n(b) = b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + b + 1 = (\underbrace{111 \dots 11}_n)_{b,}$  é um número *repunidade generalizado* ou *repunidade* em uma base  $b$ .

**Exemplo 5.** Veja que  $R_3(3) = (111)_3 = 3^2 + 3^1 + 3^0$ , da mesma forma que  $R_3(7) = (111)_7 = 7^2 + 7^1 + 7^0$ .

### Resolução: do Problema 4

Temos que  $R_3(b) = b^2 + b + 1$ ; de modo semelhante temos que  $(10101)_b = b^4 + b^2 + 1$ . Veja ainda que  $(10101)_b = b^4 + b^2 + 1 = (b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1)$ , portanto  $R_3(b) \mid (10101)_b$  para toda base numérica  $b \geq 2$ . •

De modo geral temos:

**Proposição 7.** [9] Dada uma base numérica inteira  $b \geq 2$ , então,  $R_n(b) = \frac{b^n - 1}{b - 1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Para uma base numérica  $b \geq 2$  fixada, basta efetuar a divisão polinomial  $R_n(b) = \frac{b^n - 1}{b - 1}$ . □

### 7. Mais duas propriedades

Consideremos a expressão

$$X = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + 111111 = R_1 + \dots + R_6,$$

claramente temos que  $X = 123456$ . Agora, para o caso em que a quantidade de termos é maior, usamos o seguinte resultado:

**Proposição 8.** [1, Problema 3.10] Seja  $(R_k)_{k \geq 1}$  um número repunidade. Então:

$$\sum_{k=1}^n R_k = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81} .$$

*Demonstração.* Faremos por indução em  $n$ . Para  $n = 1$  temos que  $\sum_{k=1}^1 R_k = \frac{10^{1+1} - 9 \times 1 - 10}{81} = \frac{81}{81} = 1$ . O que garante a validade da proposição para  $n = 1$ .

Suponha que para algum  $n > 1$  a sentença  $\sum_{k=1}^n R_k = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$  seja válida. Devemos mostrar a validade para  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} R_k &:= \sum_{k=1}^n R_k + R_{n+1} \\ &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81} + \frac{10^{n+1} - 1}{9} \\ &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10 + 9 \times 10^{n+1} - 9}{81} \\ &= \frac{10 \times 10^{n+1} - 9n - 9 - 10}{81} \\ &= \frac{10^{n+2} - 9(n+1) - 10}{81} . \end{aligned}$$

E temos a validade da sentença para todo  $n + 1$ . □

Outro fato curioso foi ao observar a Tabela 1 e constatar que

**Proposição 9.** [5, Problema 3.32], [6, Problema 4] Exceto  $R_1 = 1$ , nenhum outro  $R_n$  é um quadrado perfeito ou adição de dois quadrados perfeitos.

*Demonstração.* Aqui utilizaremos os seguintes fatos: um quadrado perfeito é da forma  $4q$  (par) ou  $4q + 1$  (ímpar), e portanto nenhum quadrado perfeito pode ser da forma  $4q + 3$  (já conhecido pelos discentes).

Para  $n \geq 2$  temos:

$$R_n = \underbrace{111 \cdots 111}_{n \text{ algarismos}} = 10^2 \left( \underbrace{111 \cdots 1}_{n-2 \text{ algarismos}} \right) + 11 .$$

Como 4 divide  $10^2$ , e  $11 = 4 \times 2 + 3$ , obtemos que  $R_n = 4q + 3$ , para algum inteiro positivo  $q$ . Como nenhum quadrado perfeito pode ser da forma  $4q + 3$ , então podemos concluir que, exceto  $R_1$ , nenhum outro número repunidade será quadrado perfeito.

Para verificarmos que exceto o  $R_1$  nenhuma outra repunidade é escrita como a soma de dois quadrados perfeitos, consideramos a Tabela 2:

+	$4q_1$	$4q_1 + 1$
$4q_2$	$4(q_1 + q_2) = 4q$	$4(q_1 + q_2) + 1 = 4q + 1$
$4q_2 + 1$	$4(q_1 + q_2) + 1 = 4q + 1$	$4(q_1 + q_2) + 2 = 4q + 2$

Tabela 2: Adição do quadrados perfeitos da forma  $4q + r$



De acordo com a Tabela 2, a soma de dois quadrados perfeitos será da forma  $4q$ ,  $4q + 1$  ou  $4q + 2$ ; então, como  $R_n$  é da forma  $4q + 3$ , podemos concluir que  $R_n$  não pode ser escrito como a adição de dois quadrados perfeitos.  $\square$

## 8. Considerações finais

Na oficina, o estudo dos números *repunidades* e as propriedades aritméticas são uma elaboração colaborativa com buscas ou consultas. Aqui relatamos parte do que vivenciamos em nossa prática pedagógica. Ao fazermos uso da resolução de problemas como ferramenta de ensino de Matemática, favorecemos uma aprendizagem ativa e participativa em que o estudante é desafiado a apreender a partir do seu próprio empenho, tornando possível que ele descubra, investigue, conjecture, proponha e valide conceitos e habilidades matemáticas acerca do objeto de aprendizagem ou conhecimento por ele estudado, evidenciando um protagonismo nesse processo.

## Agradecimentos

Este artigo foi parcialmente desenvolvido durante a elaboração da dissertação de Mestrado do segundo autor quando era discente do Profmat UFT-Araíais.

## Referências

- [1] BRASIL-OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Banco de Questões (Diversos). SBM : Impa.
- [2] BRITO, F. R. M. **Números Místicos**. *Revista do Professor de Matemática*, 58. Disponível em <[rpm.org.br/cdrpm//58/7.htm](http://rpm.org.br/cdrpm//58/7.htm)>.
- [3] CARVALHO, F. S. e COSTA, E. A. **Escrever o números 111...111 como produto de dois números**. *Revista do Professor de Matemática*, 87. Disponível em <[rpm.org.br/cdrpm/87/36.html](http://rpm.org.br/cdrpm/87/36.html)>.
- [4] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 2ª ed. Florianópolis-SC. Ed. da UFSC, 2003.
- [5] HEFEZ, A. **Aritmética**. 2ª ed. Rio de Janeiro-RJ. SBM, 2016.
- [6] PEREIRA, V. R. F. **Domingo regado a Repunits**. Eureka 29 (SBM-OBM). <[https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka\\_29.pdf](https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka_29.pdf)>.
- [7] PISA. **Programme for international assessment** . 2018. OECD. Disponível em <[https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018\\_CN\\_BRA.pdf](https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf)>.
- [8] POLYA. G. **A Arte de resolver problemas**. 2ª ed. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 2003.
- [9] SNYDER, W. M. **Factoring repunits**. *The American Mathematical Monthly* 89.7 (1982): 462-466 .

Eudes Antonio Costa  
Universidade Federal do Tocantins - UFT  
<[eudes@uft.edu.br](mailto:eudes@uft.edu.br)>

Douglas Catulio dos Santos  
Universidade Federal do Tocantins - UFT  
<[catulio.douglas@uft.edu.br](mailto:catulio.douglas@uft.edu.br)>

Recebido: 20/01/2020  
Publicado: 15/10/2020

# Ensino remoto de Matemática: possibilidades com a plataforma Desmos

Gladson Antunes<sup>1</sup> Michel Cambrinha<sup>2</sup>

## Resumo

Durante a pandemia de COVID-19 muitos professores, em especial os que atuam na Educação Básica, tiveram que se adaptar rapidamente à nova realidade de ensino imposta pelas medidas de distanciamento social. O ensino remoto virou o novo normal, e o esforço de toda a comunidade de professores para continuar desempenhando da melhor forma possível seu trabalho está sendo imenso. A grande maioria foi forçada a aprender de uma hora para outra novas ferramentas voltadas para o ensino não presencial. Neste contexto, cresceu a motivação de compartilhar nossa experiência com o Desmos, uma plataforma que oferece diversas atividades sobre diferentes tópicos de matemática da educação básica, uma calculadora gráfica *on-line* totalmente gratuita e ferramentas para criar tarefas *on-line*. Neste texto apresentamos em detalhes um passo a passo para cada uma das principais funcionalidades da plataforma e apontamos possibilidades de uso com a turma, no contexto da Educação *On-line*, tanto de forma síncrona quanto assíncrona. Em um cenário ainda de muitas incertezas e com a possibilidade de mais alguns meses sem aulas presenciais, vemos no Desmos uma ferramenta versátil para este momento, capaz de envolver os estudantes e desenvolver neles habilidades de investigação matemática.

**Palavras-chave:** Desmos; Ambiente virtual de aprendizagem; Educação *On-line*.

## Abstract

In the period of the COVID-19 pandemic, many teachers, especially those working in Basic Education, had to adapt quickly to the new teaching reality imposed by the social distance measures. Distance learning is the new normal and the effort of the entire community of teachers to continue performing their work in the best possible way is being immense. The vast majority were forced to learn new tools for non-face-to-face teaching. In this context, grew our motivation to share our experience with Desmos, a platform which offers several activities on different mathematics topics in basic education, a totally free *on-line* graphing calculator and tools to create *on-line* activities that can be used with the class. In a scenario of still many uncertainties and with the possibility of a few more months without the possibility of face-to-face classes, we see Desmos as a versatile tool, capable of involving students and developing research skills in them.

**Keywords:** Desmos; Virtual learning environment; *On-line* Education

<sup>1</sup>gladson.antunes@uniriotec.br

<sup>2</sup>michel.cambrinha@uniriotec.br

## 1. Introdução

É curiosa a forma como conhecemos a plataforma Desmos. Na época estávamos envolvidos com o desenvolvimento do capítulo de Introdução às Funções para o projeto Livro Aberto de Matemática<sup>3</sup>, e as pesquisas sobre o ensino de funções acabaram nos levando até ela. De imediato, a simplicidade e criatividade na apresentação dos conteúdos chamaram nossa atenção, e conforme fomos descobrindo todas as funcionalidades percebemos que estávamos diante de algo com potencial para transformar a forma como concebemos, planejamos e executamos nossas aulas de matemática com o auxílio de tecnologias e internet.

Para além de ser (mais) uma ferramenta, a plataforma Desmos é um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) completo. Segundo McKimm, Jollie e Cantillon (2019) [4], os AVA consistem em “um conjunto de ferramentas eletrônicas voltadas ao processo ensino-aprendizagem. Os principais componentes incluem sistemas que podem organizar conteúdos, acompanhar atividades e fornecer ao estudante suporte *on-line* e comunicação eletrônica”. A plataforma tem dois ambientes principais: a calculadora gráfica (<https://www.desmos.com/calculator>), também disponível na versão de aplicativo para *smartphones* e *tablets* e o *Classroom Activities* (<https://teacher.desmos.com>), onde é possível acessar as atividades criadas e organizadas por assunto ou ainda criar e editar atividades personalizadas por intermédio do *Activity Builder* (construtor de atividade).

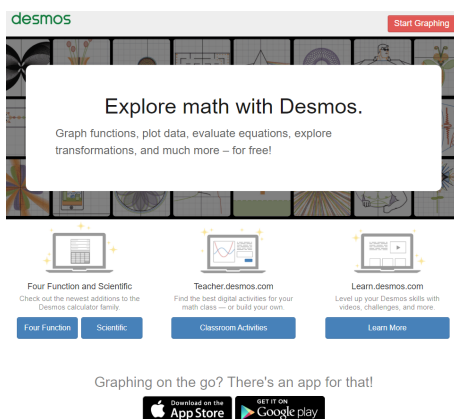


Figura 1: Página inicial em <https://www.desmos.com>

Nossa experiência com o Desmos vai desde a aplicação de atividades em disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática da Unirio e da Pós-Graduação, passa por oficinas para estudantes de Licenciatura e professores, até a criação de tarefas no seu ambiente em parceria com professores da Educação Básica, estudantes do Mestrado Profissional em Matemática - Profmat.

Em novembro de 2019 ministramos o minicurso *Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos: ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem*, como parte das atividades do IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, realizado na Universidade Federal do Espírito Santo, em Vitória. O material que escrevemos para o minicurso foi ampliado e deu origem a um *e-book* que em breve deverá estar disponível pela Associação Nacional dos

<sup>3</sup>[www.umlivroaberto.com](http://www.umlivroaberto.com)

Professores de Matemática na Educação Básica (ANPMat)<sup>4</sup>, nele fazemos uma apresentação mais completa da plataforma e por isso sugerimos a sua leitura aos interessados. Neste artigo, nosso foco recai em apresentar algumas possibilidades concretas de práticas e tarefas que possam servir de inspiração para os professores que desejarem e estiverem dispostos a se reinventar diante do novo normal.

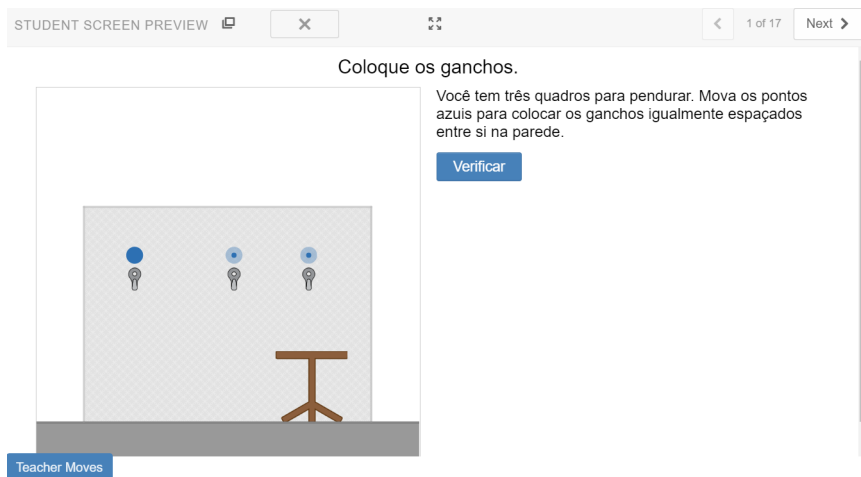


Figura 2: Captura de tela de uma atividade no Desmos

## 2. O ensino mediado por tecnologias digitais: uma nova imposição

Ja há muito tempo que se discute sobre como a inserção das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de Matemática. As discussões teóricas abrangem diversas questões, inclusive discutindo como as TDIC influenciam ou têm potencial de transformar as práticas dos professores que as utilizam. Contudo, essas discussões, em geral, tendiam a ficar restritas aos artigos acadêmicos e aos grupos de pesquisa, refletindo-se de maneira tímida no dia a dia da sala de aula.

O período de isolamento social forçado pela pandemia da COVID-19 impôs aos professores que de maneira bastante aligeirada passassem a ministrar suas aulas de maneira remota e mediada pelas TDIC. Esse cenário acabou por evidenciar a carência na formação desses professores (inicial ou continuada) que passaram a ter que buscar na internet maneiras de engajar seus alunos nessa nova abordagem.

Uma grande barreira a ser rompida se compararmos a Educação *On-line* (EOL) [5] com a presencial é o lugar do professor e do livro didático na dinâmica do ensino-aprendizagem. Essa dupla perde o protagonismo, e o professor passa, mais claramente, a assumir o papel de curador de conteúdos *on-line*, organizador e provedor dos recursos. Assim como seus alunos, assume também o papel de aprender, aproximando-se deles e em muitas situações é aquele que menos sabe sobre como lidar com as questões tecnológicas [6]. Essa posição de vulnerabilidade precisa ser assumida com humildade e de maneira nenhuma como desqualificadora de seu papel profissional. Faz-se necessário entender outras maneiras (mais atualizadas) de promover a interação e a construção do conhecimento matemático em ambiências de aprendizagem em rede.

<sup>4</sup><https://anpmat.org.br/ebooks-dos-simposios>

*“A proposição de efetivar uma Educação On-line, como aqui caracterizada, parte da compreensão de que vivemos, hoje, em um (ciber)espaço-tempo propício à aprendizagem em rede: conectar-se, conversar, postar, curtir, comentar, compartilhar, colaborar, tornar-se autor, expor-se, negociar sentidos, cocriar...”* (Pimentel e Carvalho, 2020)



Figura 3: Princípios da Educação *On-line*. fonte: Pimentel e Carvalho, 2020. [5]

Outra questão importante a ser considerada é que, nesse novo ambiente, o professor deve encontrar meios de dar voz a todos, promover a conversação e a interação entre todos, escapando do padrão unidirecional (professor → aluno). O modelo expositivo, em que o aluno apenas ouve e eventualmente tem espaço para “tirar dúvidas” revela-se bastante frágil e pouco adequado para atividades remotas. Mais que um reprodutor dos conteúdos, o estudante precisa desenvolver autonomia no processo de aprendizagem, e para isso a interação é fundamental.

*“A autonomia não é um processo individualizado. Ela na verdade é concebida através de ambientes colaborativos que pressupõem a presença de diversos atores, entre os quais professor/alunos ou alunos/alunos, o que, vinculados ao ambiente computacional, constituem ambientes de aprendizagem colaborativos. Essa característica pode potencializar as atitudes e concepções dos alunos”* (Braga, p.7, 2010).

Pretendemos, neste artigo, compartilhar algumas das experiências adquiridas nos últimos anos com a plataforma Desmos, e sugerindo como elas podem contribuir diante do novo normal para o ensino de Matemática na prática.

### 3. Usando a calculadora gráfica

A história do Desmos começa com a calculadora gráfica em 2011. A ideia era criar uma calculadora baseada na internet, desenvolvida nas linguagens HTML e JavaScript, de forma que para acessá-la bastaria ao usuário um computador conectado à internet e um navegador.

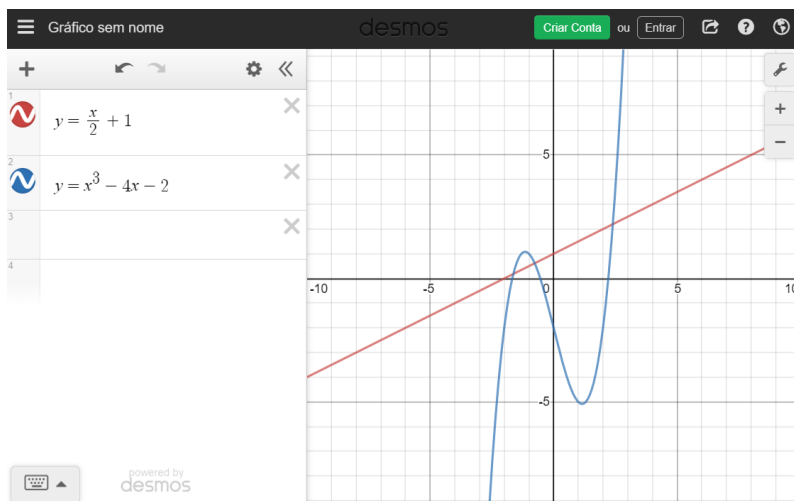


Figura 4: Calculadora gráfica Desmos

Atualmente ela pode ser acessada diretamente no endereço <https://www.desmos.com/calculator> ou instalada como um aplicativo em dispositivos Android ou iOS, funcionando sem a necessidade de conexão com a internet. A calculadora gráfica do Desmos permite traçar gráficos de funções, plotar tabelas de dados, resolver equações, explorar transformações, fazer regressões, estatísticas, e muito mais. O idioma padrão da interface é o inglês, mas ele pode ser facilmente alterado para Português (Brasil), bastando clicar no ícone do globo terrestre localizado no canto superior direito e selecionar o idioma desejado.



Figura 5: Primeiros passos com a interface da calculadora gráfica Desmos

Os comandos de entrada são bastante intuitivos; por exemplo, para criar um novo gráfico basta digitar sua expressão na barra em branco que aparece no canto superior esquerdo da tela. Conforme

vamos digitando, a expressão, a calculadora vai exibindo o gráfico correspondente. É possível utilizar todos os recursos sem a necessidade de criação de uma conta pessoal, no entanto, para ter a opção de salvar seus projetos será necessário criar uma conta.


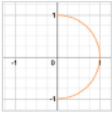

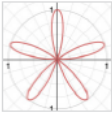

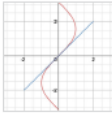
Tipo do gráfico	Exemplo	Observações
Função regular	$y=2x+1$	
x como função de y	$x=\sqrt{1-y^2}$	
Desigualdades	$x \leq 2y$ $2x^2 - 1 < y < 4$	Desigualdades estritas são plotadas com linhas pontilhadas. 
Polar	$r=\sin(5\theta)$	Expressões com r e theta (θ) serão interpretadas como na forma polar. 
Por partes	$y=\{-1 < x < 1; -1, 1\}$	Use o formato {intervalo: valor, padrão} para funções definidas por partes. 
Restrições no conjunto domínio e no conjunto imagem	$y=x\{-2 < x < 2\}$ $x=\sin(y)\{-\pi < y < \pi\}$	Adicione a restrição no final da equação. 

Figura 6: Alguns exemplos de expressões de entrada e seus gráficos.

A calculadora admite diferentes entradas, as expressões podem ser do tipo  $y = f(x)$  ou  $x = f(y)$ , desigualdades, forma polar, função definida por partes, equação paramétrica ou mesmo expressões na forma implícita. Nós fizemos a tradução para o Português do Guia do Usuário oficial da Calculadora Gráfica, além de oferecer um tutorial seguindo a mesma identidade visual da Figura 5, trazendo informações sobre controles deslizantes, de como compartilhar um gráfico, como fazer ajustes nos eixos e modificar a malha (cartesiana e polar), o uso de tabelas, funções estatísticas, como fazer regressões para um conjunto de pontos, além da lista com todas as funções suportadas. Esse material está disponível neste endereço <https://bityli.com/spWqo>.

#### 4. Comunicação síncrona e assíncrona

As ferramentas utilizadas para comunicação para a Educação *Online* podem ser diferenciadas entre dois tipos: aquelas que permitem interação entre estudantes e professor em tempo real,



instantaneamente, e aquelas que estão desconectadas de tempo e espaço, isto é, não exigem a participação simultânea dos envolvidos. As primeiras são chamadas de *síncronas*, e as do segundo tipo, de *assíncronas*. Webconferência e *chats* são exemplos de ferramentas síncronas e podem ser feitas via Google Meet, Skype, Microsoft Teams, *Zoom* etc. Não por acaso o número de usuários desses aplicativos acompanhou o crescimento exponencial da pandemia. Fórum, *e-mails*, e o Google Sala de Aula são exemplos de ferramentas assíncronas.

Nesta seção iremos oferecer algumas sugestões de ideias para que você possa tirar melhor proveito das ferramentas oferecidas pelo Desmos, tanto na comunicação síncrona quanto na assíncrona.

Por ser de fácil acesso, a calculadora gráfica é uma excelente ferramenta para ser acessada durante uma transmissão ao vivo ou em uma webconferência. Pode-se preparar a construção de antemão (e deixar salva na sua conta pessoal) para ser acessada durante a aula, ou abrir uma tela em branco e construir/experimentar na hora.

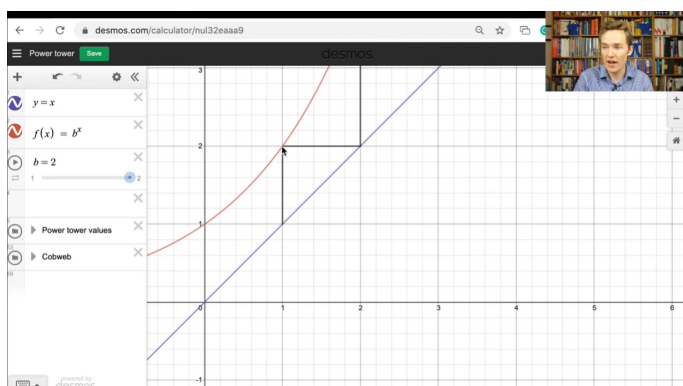


Figura 7: Captura de tela do vídeo do canal 3blue1brown <https://youtu.be/elQVZLLiod4?t=1222>

Além da calculadora gráfica, há outras duas calculadoras: quatro operações e a científica, que podem ser acessadas diretamente na tela inicial. Mais recentemente foi lançado o aplicativo para construções geométricas (<https://www.desmos.com/geometry>) seguindo o mesmo princípio de ser leve e funcionar diretamente no navegador. Todos eles podem ser acessados durante atividades síncronas.

No contexto das atividades assíncronas, as construções salvas nas calculadoras gráficas e de geometria podem ser compartilhadas via Google Sala de Aula, mensagem instantânea, *e-mail* etc., para serem acessadas a qualquer momento pelos estudantes. Há também a possibilidade de incorporar as construções no código fonte de um website, permitindo ao estudante interagir com a matemática sem necessariamente ter que abrir outra página ou aba do navegador.

O grande diferencial da plataforma Desmos está, de fato, na seção *Classroom Activities* de atividades para a sala de aula. Elas são concebidas a partir de elementos que são apontados e reconhecidos pelas pesquisas científicas como sendo importantes para uma boa instrução matemática: os problemas propostos são fácil e rapidamente entendidos, instigando os estudantes a iniciarem uma investigação em busca de respostas; o aprendizado é social e ocorre de forma coletiva. Além disso os processos são visíveis e os estudantes muitas vezes recebem *feedback* por escrito, geralmente de outros colegas. Sobre esse último ponto, Dan Meyer, diretor-acadêmico do Desmos, em uma entrevista concedida ao portal de notícias KQED afirma que:

“Obter feedback binário, do tipo certo ou errado, tende a fazer o aluno pensar apenas sobre si mesmo. Já o feedback por escrito sobre o trabalho que está sendo desenvolvido coletivamente tende a fazer com que os estudantes concentrem-se no trabalho em si.” [8]

Ao entrar em *Classroom Activities* você terá acesso a diversas listas de atividades organizadas em coleções por assunto (*Featured Collections*) ou por popularidade (*Most Popular*), além das coleções criadas pelo próprio usuário e o histórico das atividades acessadas (*Custom*). No canto superior esquerdo há também um campo para a busca de atividades (*Search for an activity*). É possível acessar a página com as atividades, navegar por elas, em cada uma delas visualizar no papel do aluno e ver as recomendações ao professor (Figura 8). Contudo, para poder utilizá-las com seus alunos, você precisa ter um cadastro e estar conectado a ele. Uma vez conectado e escolhida a atividade, basta criar um código para a turma e compartilhar com seus alunos.

**Detalhes**  
Título, autor, tempo de execução, tipo de atividade e descrição. Informa também sobre os dispositivos em que a atividade funciona bem.

**Salas de aula**  
Espaço para gerenciar e acessar suas turmas. Ao clicar no código de uma turma você tem acesso ao painel do professor.

**Telas da atividade**  
Cada miniatura pode ser clicada dando acesso à tela que será vista pelo estudante com dicas para o professor e possíveis respostas.

**Carregando o celular!**  
Nesta atividade, os alunos usam modelagem linear para prever quanto tempo levará para um celular atingir a carga total. Os alunos também interpretarão os parâmetros de sua equação no contexto.

**Guia do Professor**  
Arquivo em pdf com os detalhes da atividade com espaços para anotações pessoais que auxiliam na preparação da aula

**Criar código**  
Botão para criar códigos de turmas.

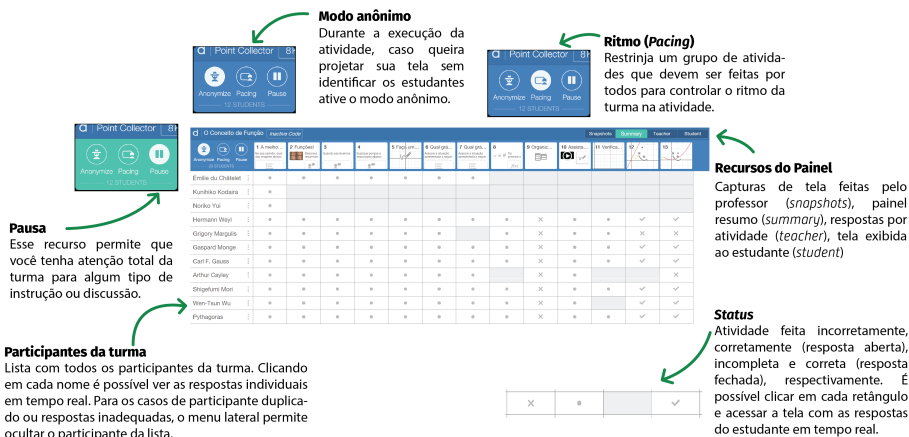
**Pré-visualizar**  
Visualiza a atividade exatamente como o estudante a verá. É possível clicar diretamente na tela desejada

CLASS CODE	STUDENTS	DATE	
GKZPMY	0	Nov 15, 2019 at 9:40 pm	View Dashboard

Screens

- 1 Faça uma previsão!
- 2 Esboce um gráfico!
- 3 Complete a tabela
- 4 Construa um modelo!
- 5 Use seu modelo
- 6 Interprete a inclinação
- 7 Interprete o intercepto...
- 8 Reflexão!
- 9 Reflexão
- 10 Extensão

Figura 8: Tela de apresentação de uma atividade



**Modo anônimo**  
Durante a execução da atividade, caso queira projetar sua tela sem identificar os estudantes ative o modo anônimo.

**Ritmo (Pacing)**  
Restrinja um grupo de atividades que devem ser feitas por todos para controlar o ritmo da turma na atividade.

**Pausa**  
Esse recurso permite que você tenha atenção total da turma para algum tipo de instrução ou discussão.

**Participantes da turma**  
Lista com todos os participantes da turma. Clicando em cada nome é possível ver as respostas individuais em tempo real. Para os casos de participante duplicado ou respostas inadequadas, o menu lateral permite ocultar o participante da lista.

**Recursos do Painel**  
Capturas de tela feitas pelo professor (*snapshots*), painel resumo (*summary*), respostas por atividade (*teacher*), tela exibida ao estudante (*student*)

**Status**  
Atividade feita incorretamente, corretamente (resposta aberta), incompleta e correta (resposta fechada), respectivamente. É possível clicar em cada retângulo e acessar a tela com as respostas do estudante em tempo real.

Nome do Estudante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ruanilson Kozlaka	x											
Walter Paul	x											
Hermes Wiler	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Gregory Magalhães	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Gasparid Monge	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Carl F. Gasas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Arthur Cayne	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Singetuna Mori	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Wen Tsun Wu	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Pythagoras	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Figura 9: Painel do professor

Clicando sobre o código da turma, você terá acesso ao Painel do Professor (*Teacher dashboard*, Figura 9) onde é possível acompanhar o progresso dos estudantes em tempo real, visualizar as telas individuais, fazer capturas de tela para serem exibidas depois durante a discussão com a turma, pausar a execução da atividade para dar instruções, comandar o ritmo da turma limitando as telas que eles podem acessar, dentre outras coisas. O painel subsidia o professor na comunicação com seus alunos, fazendo com que o *feedback* possa ser feito de maneira mais precisa, tanto individual como coletiva. Diversas atividades têm mecanismos de comunicação estudante ↔ estudante, seja permitindo que um veja as respostas dadas por alguns de seus colegas seja por ferramenta própria de interação em dupla, como é o caso das atividades do tipo *polygraph*.

Apresentamos a seguir dois quadros nos quais reunimos alguns destaques para o uso das ferramentas oferecidas pelo Desmos quando combinadas com as ferramentas de comunicação síncronas e assíncronas.

## 5. Construindo uma atividade

Nesta seção vamos fazer um tutorial para mostrar como construir uma atividade <sup>5</sup> usando o *Activity builder* (construtor de atividades). Não pretendemos esgotar todas as possibilidades que o construtor oferece. Caso deseje conhecer mais, pode acessar os tutoriais da plataforma (<https://learn.desmos.com/create>) ou consultar [1] para uma referência em língua portuguesa.

Escolhemos, como exemplo, contruir uma atividade de revisão do assunto função afim. Para começar, você deve estar conectado em sua conta e acessar a página de atividades de sala de aula (*Classroom activities* – <https://teacher.desmos.com/>).

1. Dentro dessa página, clique primeiro em *Custom* na parte lateral esquerda, e em seguida em *New activity* na parte superior direita (Figura 10). Você será direcionado a uma página com uma caixa para digitar o nome da atividade, e em seguida clique no botão azul *start building*.

<sup>5</sup>A atividade pronta disponível no link <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5ee400b4c039086c1a917900>

Tabela 1: Destaques de usos síncronos e assíncronos das ferramentas Desmos

Ferramenta	Uso síncrono	Uso assíncrono
Calculadora 4 operações Calculadora Científica	Apresentar em transmissões ao vivo ou webconferências; fazer contas instantâneas diante dos estudantes.	Disponibilizar <i>link</i> da calculadora para os estudantes; Servir de suporte para resolução de listas de exercícios e avaliações.
Calculadora gráfica App Geometria	Apresentar em transmissões ao vivo ou webconferências uma construção feita previamente; Fazer a construção coletivamente com a turma; Registros visuais matematicamente precisos.	Disponibilizar <i>link</i> da construção para acesso via Google Sala de Aula, Moodle etc; Incorporar códigos em <i>websites</i> . Experimentação livre das construções oferecidas e/ou discutidas previamente com o professor; Servir de suporte para resolução de listas de exercícios e avaliações.
Atividades de sala de aula <i>Classroom activities</i>	Estudantes interagem entre si e o professor realiza a mediação por meio do Painel do Professor simultaneamente; <i>Feedback</i> instantâneo e personalizado; Pausas para orientações; Ajustes no ritmo da execução da atividade; Discussão com a turma ao final da atividade; Coleta de dados.	Estudantes interagem entre si e o professor realiza a avaliação por meio do Painel do Professor, posteriormente; <i>Feedback</i> personalizado; Coleta de dados.

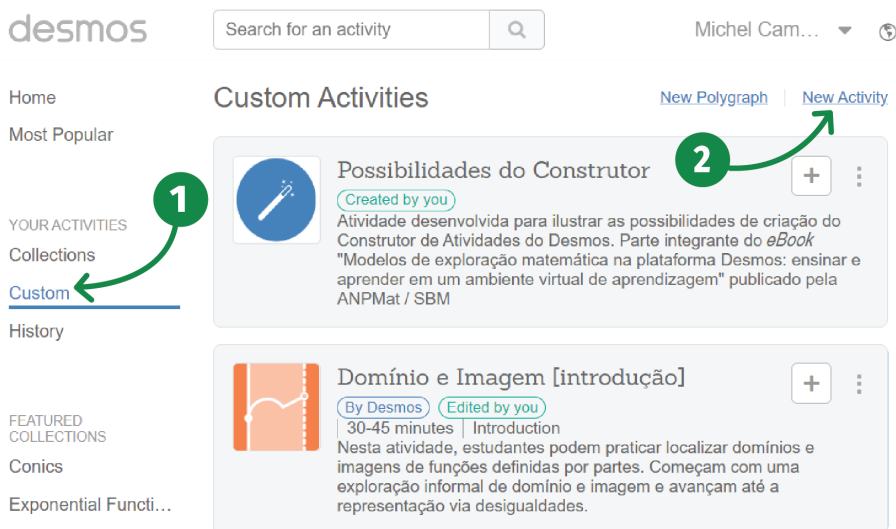


Figura 10: Tela para acessar a construção de uma nova atividade

2. Vamos começar com uma tela de boas-vindas. Colocamos um título para essa tela, em seguida clicando em NOTE, podemos adicionar uma descrição, e em MEDIA podemos acrescentar uma

imagem interessante <sup>6</sup> (Figura 11).

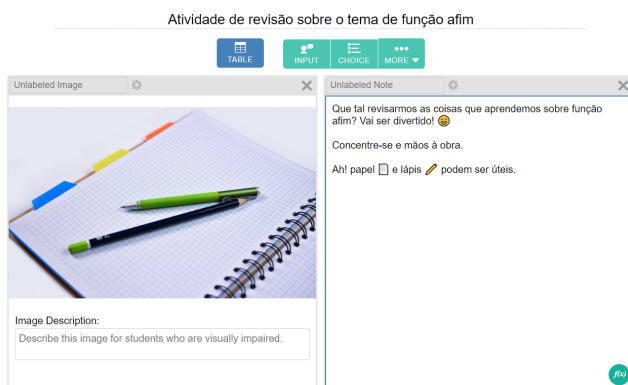



Figura 11: Tela de boas-vindas

3. Agora vamos colocar uma tela de entrada para conhecer o estado emocional dos estudantes. Em atividades remotas, como não há interação física, é importante permitir que os estudantes expressem-se sobre suas emoções. Abra em uma nova aba do navegador novamente o *Classroom activities* e procure pela coleção *Starter screens*. Dentro dessa coleção há diversas telas que podem ser copiadas e coladas em atividades próprias. Para nossa atividade, vamos acessar a atividade *Screens for checking in* e clicar na tela de número 1 (Figura 12).

Na parte superior, ao lado do texto STUDENT SCREEN PREVIEW, há um ícone  que serve para copiar essa tela. Clique sobre ele (ou digite *ctrl+c*), volte para a aba da atividade que estamos criando e digite *ctrl+v*. Clique, então, sobre o título e depois sobre o texto para editá-los.

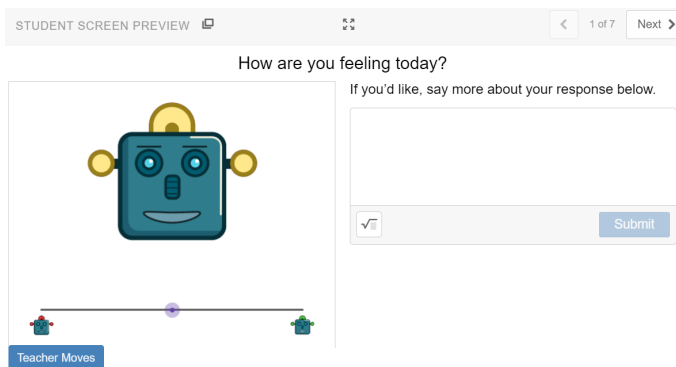


Figura 12: Tela de entrada para copiar

4. Clique em seguida em *New Screen* para iniciar uma nova tela. Coloque o título: *Inclinações*, e clique em GRAPH logo abaixo do título. Nas linhas da calculadora digite quatro equações de reta.

<sup>6</sup>A que usamos pode ser baixadas grátis no link <https://bit.ly/37oZjZq>



Figura 13: equações para digitar nas linhas da calculadora gráfica

Escolha, então, a opção NOTE para escrever o enunciado e em seguida em CHOICE para colocar as opções de múltipla escolha; as configurações estão detalhadas na Figura 14.

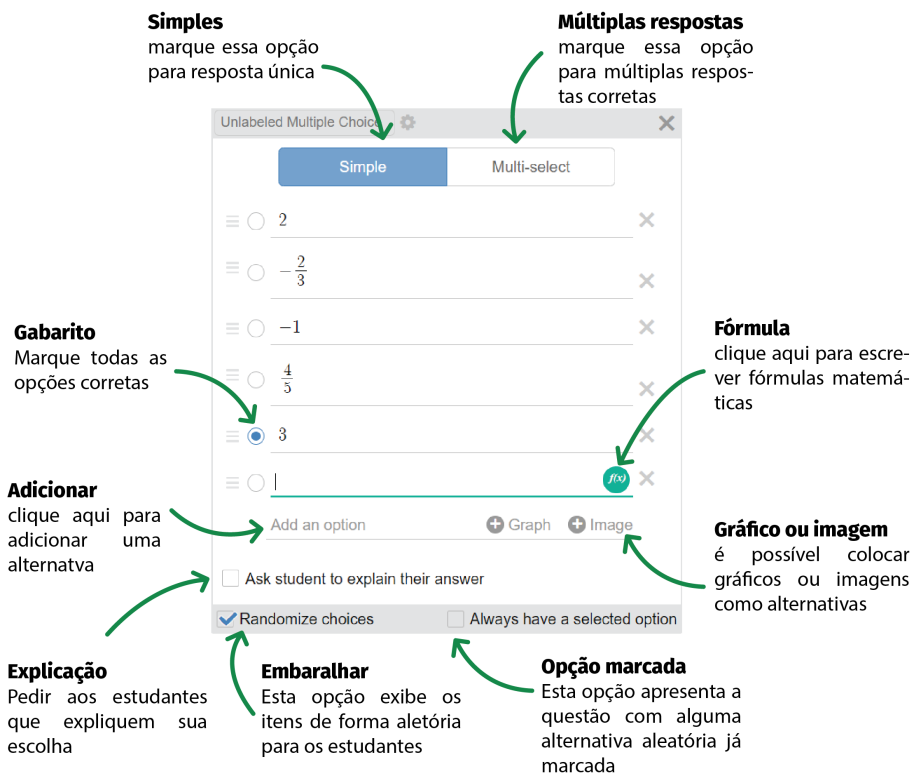


Figura 14: Detalhes de configuração da ferramenta CHOICE.

5. Vamos copiar uma outra tela que já está pronta em outra atividade para incluir aqui. Em outra aba, vá até a atividade *Writing Rules: Linear, Quadratic, and Exponential*,<sup>7</sup> e copie a tela número 5. Volte para o construtor, digite *ctrl+v*, e edite o título para “Escreva a expressão” e a instrução para “Escreva a expressão de uma função que passe por todos esses pontos.”. Essa tela tem uma característica especial que é uma camada de programação: o que o estudante responder digitando na caixa do lado direito, vai aparecer no gráfico do lado esquerdo quando ele submeter (Figura 15).



Figura 15: *Preview* da atividade copiada e colada.

6. Para finalizar vamos copiar mais três telas de uma atividade do tipo *Marbleslides*. É uma atividade em que o estudante deve jogar bolinhas para coletar estrelas no plano cartesiano, e para isso deve usar equações como anteparos do lançamento. Na tela de construção, clicando em MORE, é possível acessar a ferramenta de construção das atividades desse tipo. Para facilitar, vamos copiar e adaptar uma que esteja pronta (Figura 16).

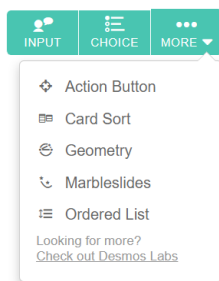


Figura 16: Mais opções de atividades, dentre elas Mableslides.

Em outra aba do navegador, procure pela atividade *Marbleslides: Lines*<sup>8</sup>. Vamos copiar e colar

<sup>7</sup><https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/569ee4053962ed3f062a0930>

<sup>8</sup><https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/566b31734e38e1e21a10aac8>

as telas 2, 4 e 5, uma por vez e editar o título e o comando. Se for preciso altere o *zoom* do gráfico até aparecer a bolhinha roxa na tela.



Figura 17: *Previews* de uma das telas do tipo Marbleslides.

Caso você queira, pode editar a posição das estrelas e da posição de onde a bola cairá em queda livre. Para criar mais desafios, duplique as telas e edite as posições, ou procure por outros desafios prontos nas atividades do Desmos.

- Depois de finalizadas todas as telas, clique em NEXT, escreva uma descrição para sua atividade e então clique em PUBLISH (Figura 18). Nessa tela ainda é possível configurar para deixar a atividade privada (*Private* – somente você pode ver). Em vez de publicar, você pode clicar em *Save Draft* para salvar um rascunho e editar em outro momento. Nesse caso a atividade ficará em *Classroom Activities > Custom* e aparecerá como *Untitled*.

Figura 18: Tela final da construção da atividade.



Há diversas outras possibilidades para a criação de atividades. Sugerimos que você invista um tempo navegando por elas, inspire-se para criar novas atividades ou adapte à realidade e ao gosto dos seus estudantes.

## 6. Considerações Finais

Nosso objetivo com este texto foi apresentar a plataforma Desmos destacando as possibilidades de uso síncrono e assíncrono que as ferramentas disponibilizadas por ela oferecem. Tendo em conta o momento que estamos vivendo, com a grande maioria das Escolas e Universidade Públicas fechadas devido à pandemia de COVID-19, e os professores buscando se adaptar da melhor forma possível a essa nova realidade, pensamos que a popularização de ferramentas como essas tornam-se ainda mais relevantes.

Independentemente do momento especial pelo qual estamos passando, os benefícios do uso de calculadoras gráficas nas salas de aula de matemática estão bem documentados pelas pesquisas científicas. Quesada & Cooper (2010) [7], observaram que o uso de calculadoras gráficas e *softwares* de geometria dinâmica permite que os alunos explorem os conceitos matemáticos por conta própria, dando-lhes a oportunidade de assumir um papel ativo em sua própria aprendizagem. Smith & Shotsberger (1997) [9] destacam que os alunos perceberam que o uso de calculadoras gráficas ajudou-os a “entender mais por completo” ou “ver certas ideias melhor”, ilustrando o poderoso impacto que a visualização pode ter na construção do conhecimento matemático dos estudantes.

Desmos oferece um terreno fértil para que os estudantes explorem matemática. O entusiasmo que percebemos e o *feedback* positivo que recebemos de nossos estudantes quando realizamos com eles atividades na plataforma são comprovados também com resultados registrados na literatura científica, como os apontados por Beigie (2014) [2] ao relatar sobre o “*imediato feedback visual que é ideal para a experimentação informal dos conceitos*”(p.259).

Mais ilustrativo ainda é o relato, disponível em inglês neste endereço <https://bityli.com/uX1NA>, de uma professora que atua na Educação Básica na província de Quebec, Canadá, em uma escola que trabalha exclusivamente na modalidade a distância. Suas aulas são totalmente *on-line* e ocorrem de forma síncrona, com os alunos participando como fariam em uma sala de aula presencial. Ela chama atenção que por não estar no mesmo espaço físico que os alunos, não conseguia “ver” o que seus alunos estavam fazendo até adotar o Desmos. Agora, segundo seu relato, ela pode apresentar um problema para os alunos e depois observar como cada um tenta resolvê-lo. Usando o Painel do Professor ela consegue olhar para a turma como um todo ou, caso sinta necessidade, interagir individualmente com um aluno. Outra característica importante destacada por ela, é a percepção de que os alunos estão participando mais do que estariam em uma classe normal, isso porque cada aluno tem que fazer seu trabalho e compartilhar seu pensamento, enquanto em uma sala de aula típica, o que se observa é que em média apenas 10% dos estudantes participam das discussões.

O relato acima reforça o que já colocamos anteriormente na seção 4, que o grande diferencial do Desmos está no ambiente denominado Atividades Para a Sala de Aula (*Classroom Activities*), a combinação entre problemas que são facilmente compreendidos, ferramentas de exploração e investigação que permitem *feedback* por escrito – tanto de outros colegas quanto do professor – mostram-se uma combinação poderosa a favor de uma boa instrução matemática. Não por acaso estamos vendo *softwares* já consagrados e bastante experimentados como o GeoGebra seguirem em suas mais recentes atualizações nesta direção.

Conforme pode ser visto ao longo do texto o idioma padrão da Plataforma Desmos é o inglês, e até este momento o número de atividades traduzidas para o português é baixo. Se por um lado

entendemos que essa é uma dificuldade a ser superada para que seja observado um crescimento no número de usuários brasileiros, por outro percebemos a necessidade de estimular a contribuição de todos - seja na tradução das atividades já existentes ou na criação de novas atividades, ambas as ações podem ser feitas a partir do Construtor de Atividades (*Activity builder*). Iniciativas dessa natureza são estimuladas pelo time de desenvolvimento da Plataforma, e as contribuições devem ser enviadas para [translations@desmos.com](mailto:translations@desmos.com). Reunimos neste *link* <https://bityli.com/bFfXJ> uma série de atividades traduzidas para o português.

Esperamos que os caminhos e possibilidades apontadas neste texto sirvam de motivação para que possam explorar as muitas possibilidades que surgem com a introdução dessas ferramentas no cotidiano da sala de aula.

## Referências

- [1] Antunes, G., Cambrainha, M. *Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem*. IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, SBM, 2020
- [2] Beigie, D. *The algebra artist*. *The Mathematics Teacher*, 108(4), 258-265. 2014.
- [3] Braga, M. Paula, R. "O Ensino de Matemática mediado pelas Tecnologias de Informação e Comunicação – Uma caracterização do Elemento Visualização segundo uma concepção fenomenológica." *Revista Tecnologias na Educação*. Ano 2, número 1. Julho 2010
- [4] Mckimm, J; Jollie, C.; Cantillon, P. *ABC of learning and teaching - Web based learning*. *BMJ* 2003;326:870-873 (19 April). Disponível em: <<https://www.bmj.com/content/326/7394/870>>. Acesso em: 11 junho. 2020.
- [5] Pimentel, M.; Carvalho, F. S. P. *Princípios da Educação Online: para sua aula não ficar massiva nem maçante!* SBC Horizontes, maio 2020. ISSN 2175-9235. Disponível em: <<http://horizontes.sbc.org.br/index.php/2020/05/23/principios-educacao-online>>. Acesso em: 09 junho. 2020.
- [6] Ponte, J. P. . "Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: Que desafios?" *Revista Iberoamericana de Educación*, 24, 63-90, 2000. Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3993>>. Acesso em 09 junho. 2020.
- [7] Quesada, A., & Cooper, A. *The impact of technology and dynamic geometry software on fostering discovery and research at the undergraduate level, some new results*. In *Electronic Proceedings of the Ninth ICTCM*. Disponível em: <<http://archives.math.utk.edu/ICTCM>>. Acesso em 14 de junho. 2020.
- [8] Schwartz, K., *Could This Digital Math Tool Change Instruction For the Better?*. KQED, San Francisco, 6 de abril de 2016. Mindshift. Disponível em: <<https://bit.ly/2DRXENS>>. Acesso em: 11 jun. 2020.
- [9] Smith, K. & Shotsberger, P. *Assessing the use of graphing calculators in college algebra: Reflections on dimensions of teaching and learning*. *School Science and Mathematics*, 97(7), 368-376. 1997.


Gladson Antunes  
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
<[gladson.antunes@uniriotec.br](mailto:gladson.antunes@uniriotec.br)>

Michel Cambrinha  
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
<[michel.cambrinha@uniriotec.br](mailto:michel.cambrinha@uniriotec.br)>

Recebido: 16/06/2020  
Publicado: 16/10/2020

# Algumas desigualdades úteis e o teste da segunda derivada

Eddy Kwessi 

Seth Kermausuor 

Geraldo de Souza 

## Resumo

Determinar os pontos de máximo e mínimo locais de uma função de duas variáveis  $z = f(x, y)$  em um curso de cálculo requer o uso do conhecido “o teste das segundas derivadas”, usualmente ensinado aos estudantes nos primeiros anos do curso superior. Em particular, os cursos de engenharia, física e matemática. Em nossa experiência ensinando cálculo, usualmente escolhemos exemplos bem simples para ilustrar o uso desse teste. Em relação aos exemplos e aplicações mais complicados, procuramos evitá-los para facilitar o aprendizado e compreensão dos estudantes.

O nosso objetivo nestas notas é apresentar, aos leitores interessados, casos patológicos do teste das segundas derivadas, e ilustrar a importância dele em conexão com várias desigualdades. Tais desigualdades, são frequentemente vistas nos primeiros cursos de análise e álgebra linear. Por exemplo, as desigualdades de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski, de Young, de Bernoulli e a desigualdade da média aritmética e geométrica.

O teste das segundas derivadas para funções de duas variáveis  $z = f(x, y)$  envolve uma expressão usualmente denotada por  $D$  que é definida por  $D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$ , sendo que o ponto  $P = (a, b)$  é candidato a máximo local, mínimo local ou ponto de sela, e as funções  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$  e  $f_{xy}$  são as segundas derivadas parciais de  $f(x, y)$ . O teste usa as seguintes condições em  $D(a, b)$ :

1.  $D > 0$
2.  $D < 0$
3.  $D = 0$ .

No caso 1, o ponto  $P = (a, b)$  pode ser de máximo ou mínimo, no caso 2 ele é um ponto de sela e, finalmente, no caso 3 o teste é inconclusivo.

Nestas notas vamos mostrar que o caso 3, em geral, não é inconclusivo. Por exemplo, considere a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski que diz, se  $X = (x, y)$  e  $Y = (\alpha, \beta)$ , então o produto interno  $\langle X, Y \rangle$  e as normas em  $\mathbb{R}^2$  de  $X$  e  $Y$  são relacionadas pela desigualdade

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\|_{\mathbb{R}^2} \|Y\|_{\mathbb{R}^2} .$$

Se consideramos a função  $f(x, y)$  definida por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2} (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} - \alpha x - \beta y ,$$

poderemos usar o teste das segundas derivadas para mostrarmos que a função  $f(x, y)$  é maior ou igual a zero, isto é,  $f(x, y) \geq 0$ . Daí segue a famosa desigualdade acima, que é essencial para estudar dualidade no  $\mathbb{R}^2$ . É interessante notar que  $D(a, b) = 0$ , e o teste das segundas derivadas diz ser inconclusivo. É importante ressaltar que fizemos o mesmo para as outras desigualdades e ilustraremos geometricamente todas as desigualdades. Um outro fato que ilustramos é que podemos considerar uma função de uma variável como se fosse uma função de duas variáveis, digamos

$$f(x, y) = g(x) \quad \text{ou} \quad f(x, y) = h(y) .$$

Veremos que  $D(a, b) = 0$ , então o teste das segundas derivadas afirma ser inconclusivo onde as funções  $g(x)$  e  $h(y)$  são duas vezes diferenciáveis. No entanto, mostraremos via, um simples exemplo, que isso não é o caso. Também, ilustramos geometricamente.

Esses exemplos usando a teoria de máximo e mínimo de funções de duas variáveis para provar importantes desigualdades parece ser uma técnica nova e muito interessante. Assim, esses casos contradizem a afirmação do teste que diz  $D = 0$  é inconclusivo. Em resumo, deixamos aqui essas notas para que os leitores possam tirar suas próprias conclusões.

**Palavras-chave:** Teste das segundas derivadas; desigualdades ;Young, Bernoulli; Cauchy-Schwarz-Bunyakowski.

### Abstract

Finding local extrema in calculus requires knowledge of the so-called Second Derivative Test for one or two variables, often taught to students early in college, at least for those majoring in engineering, physics, or mathematics. In our experience teaching, we often tend to choose "nice academic" examples to illustrate the usefulness of the Second Derivative Test, and focusing less on the "not so nice" cases either because of time, or just because of our belief that students will not be interested in these often long and detailed examples. Our impetus in this short note is to bring the "not so nice" case or the pathological case of the Second Derivative Test for functions of two variables to the forefront and to illustrate its importance in connection to some inequalities often used in mathematical analysis.

**Keywords:** Second Derivative Test; Inequality; Young, Bernoulli; Cauchy-Schwarz-Bunyakowski

## 1. Introdução

Começaremos lembrando o conhecido teorema do teste da segunda derivada, frequentemente usado em livros de Cálculo, veja por exemplo [2]. Para funções de uma variável, o teste da segunda derivada, o leitor interessado poderá consultar o Teorema 4.7 em [2].

**Teorema 1** (Teorema 12.14, p.855 em [2]).

Seja  $f(x, y)$  uma função de duas variáveis definida em um disco contendo o ponto  $(a, b)$ , com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Suponha  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  e seja  $D \equiv D(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$ . Então,

- Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(a, b) > 0$ , então  $f(a, b)$  é o mínimo local para  $f$ .
- Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(a, b) < 0$ , então  $f(a, b)$  é o máximo local para  $f$ .
- Se  $D < 0$ , então  $f(a, b)$  é o ponto de sela para  $f$ .
- Se  $D = 0$ , o teste é considerado inconclusivo.

*Demonstração.* O leitor interessado pode consultar o Apêndice B em [2]. □

O último caso é patológico no sentido de que muitas vezes não é muito claro que tipo de extremo obteremos em geral quando isso acontecer. Além disso, em muitos livros de cálculo, não há quase nenhum exemplo envolvendo essa situação. Acontece que muitas desigualdades interessantes estão conectadas a essa situação. A seguir, discutiremos respectivamente a desigualdade de Bernoulli, a desigualdade das médias aritméticas e geométricas, a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky, a desigualdade de Young e sua relação com esse caso patológico. Também forneceremos representações pictóricas tridimensionais para ilustrar sua veracidade.

Começaremos com a desigualdade de Bernoulli, publicada por Jacob Bernoulli em 1669. Notamos, entretanto, que Joseph Hoffman (1969) a atribuiu à obra de Sluse (1668).

## 2. Desigualdade de Bernoulli

**Teorema 2** (ver [1]). *Seja  $n$  um inteiro positivo e  $x$  um número real tal que  $x \geq -1$ . Então, a seguinte desigualdade mantém-se:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \quad (1)$$

*Observação 1.* Observamos que quando  $n$  é par, a desigualdade vale para todo número real  $x$ . Além disso, a desigualdade é estrita para  $n \geq 2$  e  $x \geq -1$  e  $x \neq 0$ .

*Observação 2* (O método do intervalo fechado. Veja a página 278 em [2]). Para encontrar os valores mínimos ou máximos absolutos de uma função contínua  $f$  em um intervalo fechado  $[a, b]$ :

1. Encontre os valores de  $f$  nos pontos críticos de  $f$  em  $(a, b)$ .
2. Encontre os valores de  $f$  nas extremidades do intervalo  $[a, b]$ .
3. O maior dos valores dos Passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto de  $f$  em  $[a, b]$ . O menor desses valores é o valor mínimo absoluto de  $f$  em  $[a, b]$ .

Essa desigualdade assume duas formas diferentes quando  $n$  é um número real positivo  $r$ . Na verdade, para  $x \geq -1$ , temos respectivamente

$$(1 + x)^r \geq 1 + rx \quad , \quad \text{para } r \geq 1 \quad (2)$$

$$(1 + x)^r \leq 1 + rx \quad , \quad \text{para } 0 \leq r \leq 1 \quad (3)$$

Para provar essa desigualdade, vamos definir a função  $f(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ . Essa função possui a derivada  $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n$  e os pontos críticos são soluções da equação  $(1+x)^{n-1} = 1$ . A única solução real é  $x = 0$ . Dado que  $f(0) = 0$  e  $f''(0) = n(n-1)$ , então o teste da segunda derivada para funções de uma variável implica que o ponto  $(0,0)$  é o mínimo local por  $n \geq 1$ . Para provar que  $(0,0)$  é um mínimo absoluto (ou global), ou seja,  $f(0) \leq f(x)$  para todo  $x \geq -1$ , procederemos por contradição. De fato, suponha que haja um  $c \geq -1$  tal que  $f(c) < f(0)$  para todos os  $x \geq -1$ . Então, usando a fórmula de extensão binomial de Newton, teremos

$$(1+c)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c^k = 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2}c^2 + \dots + c^n.$$

Consequentemente, se  $c \geq 0$  e  $f(c) < f(0)$  implica  $\frac{n(n-1)}{2}c^2 + \dots + c^n < 0$ , o que é uma contradição óbvia, uma vez que todos os termos  $c, c^2, \dots, c^n$  são positivos.

Agora, suponha  $c \in [-1, 0]$ . Observamos que a função  $f(x) = (1+x)^n - 1 - nx$  é contínua no intervalo fechado  $[-1, 0]$ . Além disso,  $f'(0) = 0$ , i.e.,  $0$  é um ponto crítico para a função  $f$ . Observamos  $f(-1) = n - 1 > 0 = f(0)$ , para  $n \geq 2$ . Segue, usando o método do intervalo fechado acima, que o menor valor de  $f(x)$  no intervalo  $[-1, 0]$  é  $f(0) = 0$ , ou seja,  $f(0)$  é o mínimo absoluto de  $f(x)$  em  $[-1, 0]$ . A Figura 1 abaixo é uma ilustração de  $f(x) = (1+x)^n - 1 - nx$  para diferentes valores de  $n$ .

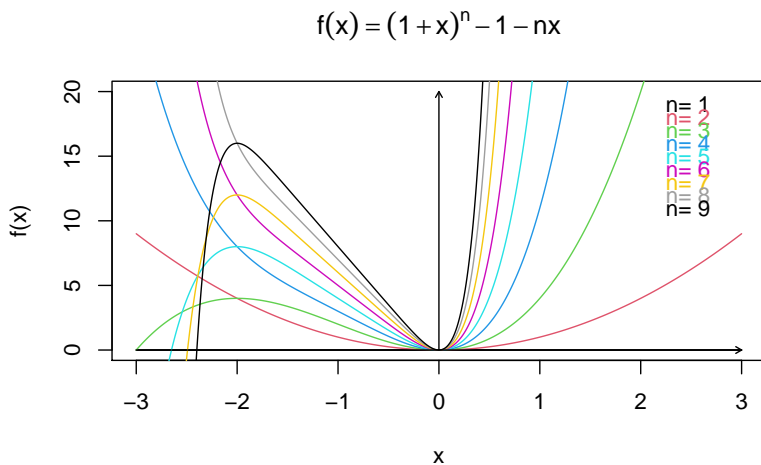


Figura 1: Ilustração de  $f(x) = (1+x)^n - 1 - nx$  para diferentes valores de  $n$ .

Notamos, entretanto, que usando o teste da segunda derivada (Teorema 1) com  $g(x,y) = (1+x)^n - 1 - nx$ , obteremos  $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = n(1+x)^{n-1} - n$ ,  $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0$ , de modo que os pontos críticos sejam  $(0,t)$  para qualquer  $t \geq 0$ . Além disso,  $D(0,t) = 0$  de forma que o caso patológico do teste da segunda derivada seja observado e nenhuma conclusão teria sido alcançada com ele.

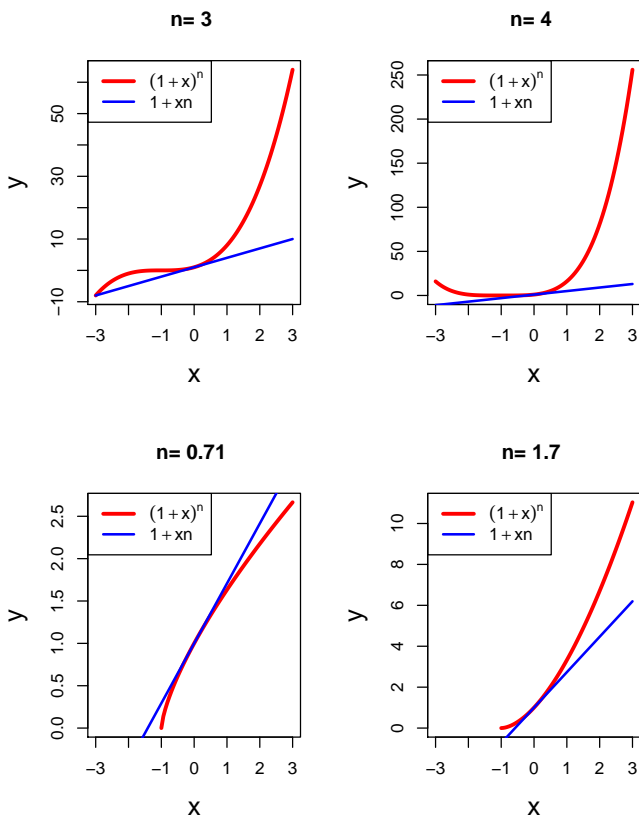


Figura 2: Esse gráfico mostra a relação entre  $(1+x)^n$  e  $1+nx$  para os valores  $n = 3; 4; 0,71$  e  $1,7$  respectivamente

### 3. Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica

A seguir, discutiremos a relação entre as médias aritméticas e geométricas.

**Teorema 3.** *Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  números reais positivos e  $n$  um inteiro positivo. Então, a seguinte desigualdade (AM-GM) é verdadeira:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (4)$$

A igualdade é alcançada quando  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

*Observação 3.* Vemos claramente que apesar de a desigualdade ser verdadeira apenas para números positivos  $x_i$ , a média aritmética existe mesmo quando os  $x_i$  são de sinais mistos. A média geométrica encontra seu uso quando estamos lidando com quantidades absolutas. Há uma aplicação interessante dessa desigualdade em Ecologia, veja [5]. Para usar a terminologia ecológica, esse



manuscrito mostra que as espécies invasoras têm valores de sensibilidade negativos ou positivos quando em modo de facilitação com outras espécies. Sua diferença média de nicho, portanto, só pode ser descrita pela média aritmética. No entanto, no modo de competição, seus valores de sensibilidade são todos positivos. Portanto, sua diferença média de nicho pode ser descrita pela média geométrica, com uma diferença de nicho aumentada (devido à desigualdade), que, em termos leigos, é benéfica para as espécies nativas.

Provaremos a seguir a desigualdade AM-GM para  $n = 2$ . Considere a função  $f(x, y) = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$ , para  $x, y \geq 0$ . As primeiras derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

As segundas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{y}}{4\sqrt{x^3}}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{4\sqrt{xy}}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y^3}}.$$

Os pontos críticos são dados por

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Além disso, quando  $x = y$ , temos

$$\frac{\partial^2 f(x, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, x)}{\partial y^2} = \frac{1}{4x}, \quad \frac{\partial^2 f(x, x)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{4x}.$$

Segue-se que  $D = D(x, x) = 0$  e, portanto, estamos no caso patológico do teste da segunda derivada. Mostraremos que  $(x, x)$  é local, na verdade um mínimo local. Mostraremos que uma simples prova por contradição será suficiente. De fato, suponha que haja um ponto  $(a, b)$  tal que  $f(a, b) < f(x, x)$ . Ou seja,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{x+x}{2} - \sqrt{x^2} = 0$$

Isso significa  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < 0$ . Então, elevando os dois lados ao quadrado, temos que  $(a+b)^2 < (2\sqrt{ab})^2$ , ou seja,  $a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Rightarrow (ab)^2 < 0$ , o que é uma contradição.

Também podemos observar que a contradição pode ser obtida observando que

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < 0 \Leftrightarrow a+b - 2\sqrt{ab} < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0.$$

Portanto,  $f(a, b) \geq 0$  para todos  $a, b \geq 0$ , ou seja,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

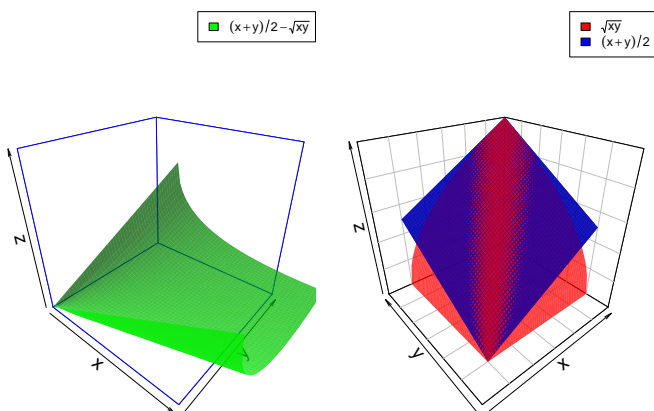


Figura 3: O primeiro gráfico mostra a superfície  $(x + y)/2 - \sqrt{xy}$  (verde) ficando acima do nível  $z = 0$ , e o segundo gráfico mostra a superfície  $(x + y)/2$  (azul) sempre acima da superfície  $\sqrt{xy}$  (vermelho).

A seguir, discutimos uma desigualdade devida a William Henry Young (1912).

#### 4. Desigualdade de Young

Sejam  $p$  e  $q$  números positivos que satisfazem  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $a$  e  $b$  são números reais não negativos, o seguinte é verdadeiro:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (5)$$

A igualdade ocorre quando  $a^p = b^q$ .

Existem numerosas generalizações dessa desigualdade, devido a Young, ver [8]. Abaixo, mencionamos uma que é particularmente útil na análise funcional.

**Teorema 4.** *Seja  $f$  uma função contínua crescente definida para números reais não negativos  $x$ , com  $f(0) = 0$ . Suponha que  $a, b$  sejam números reais positivos, de modo que  $a$  esteja no domínio de  $f$  e  $b$  esteja na sua imagem. Então, o seguinte é verdadeiro:*

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx, \quad (6)$$

onde  $f^{-1}$  é a função inversa de  $f$ .

Essa desigualdade pode ser interpretada como: a soma das áreas de  $f$  no intervalo  $(0, a)$  e de  $f^{-1}$  no intervalo  $(0, b)$  é pelo menos a área do retângulo de base  $a$  e altura  $b$ ; veja a Fig. 4 abaixo.

Notamos que se tomarmos  $f(x) = x^{p-1}$  em (6), então  $f(x) = x^{q-1}$  e iremos recuperar a desigualdade em (5).

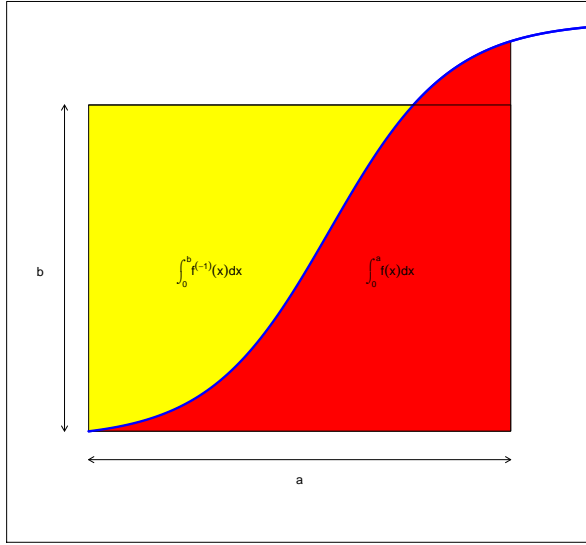


Figura 4: A soma das duas áreas (em amarelo e vermelho) é pelo menos a área do retângulo com base  $a$  e altura  $b$

Conectaremos a desigualdade de Young ao teste da segunda derivada para  $p = q = 2$ . Defina a função  $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy$ , para  $x, y > 0$ . Notamos que  $f$  é contínua e duas vezes diferenciável em  $x$  e  $y$  e as derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = x - y, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = y - x.$$

Portanto, os pontos críticos encontram-se na linha  $x = y$ . As segundas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -1.$$

Segue-se que  $D(x, x) = 1^2 - 1 = 0$  e, portanto, novamente, temos o caso patológico do teste da segunda derivada.

No entanto, mostraremos usando a contradição que  $0 \leq f(x, y)$ , para todos  $x, y > 0$ . Suponha que não seja esse o caso, ou seja, há um ponto  $x_0, y_0$  com  $x_0, y_0 > 0$  tal que  $f(x_0, y_0) < 0$ . Isso implicará que

$$\left( \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{2} \right)^2 < (x_0 y_0)^2.$$

Consequentemente, teremos que  $(x_0^2 - y_0^2)^2 < 0$ , que é uma contradição. Assim, temos  $f(x, y) \geq 0$  para todos  $x, y > 0$ , ou seja,

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \text{ para todos } x, y > 0.$$

A Figura 5 abaixo é uma ilustração desse resultado em três dimensões.

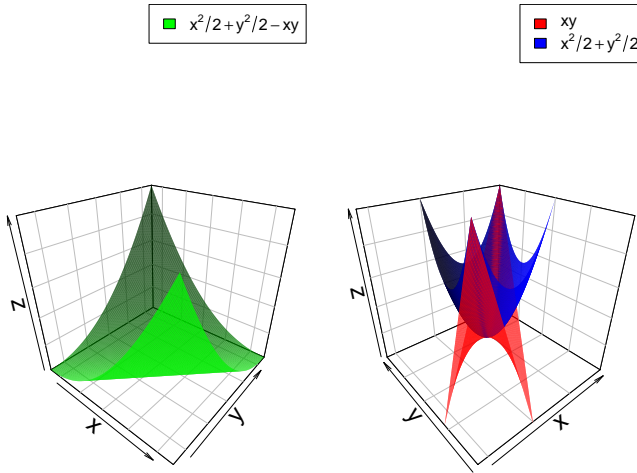


Figura 5: O primeiro gráfico mostra a superfície  $x^2/2 + y^2/2 - xy$  (verde) ficando acima do nível  $z = 0$ , e o segundo gráfico mostra a superfície  $x^2/2 + y^2/2$  (azul) sempre acima da superfície  $xy$  (vermelho).

Agora, apresentamos a célebre e amplamente utilizada desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski, derivada pela primeira vez por Augustin Louis Cauchy (1821).

### 5. Desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n > 0$ . A seguinte desigualdade é verdadeira:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}. \tag{7}$$

A igualdade é alcançada quando  $x_i$  e  $y_i$  são proporcionais e foi estabelecida por Cauchy [4].

Existem várias generalizações desses resultados. Começamos com aquele dado por Herman Schwarz em [7] para espaços de produtos internos:

**Teorema 5.** *Seja  $V$  um espaço de produto interno e sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  em  $V$ . Defina o produto escalar de  $x$  e  $y$  como  $\langle x, y \rangle$ . Defina a norma de  $x$  em  $V$  como  $\|x\|_V = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ .*

A seguinte desigualdade é verdadeira:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_V \cdot \|y\|_V. \quad (8)$$

Na verdade, se  $V = \mathbb{R}^n$ , então  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , e, com  $\|x\|_V = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ , obteremos a desigualdade em (7). Também mencionamos uma generalização devida a Victor Yakovlevich Bunyakowsky [3], que derivou uma desigualdade semelhante para integrais.

**Teorema 6.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções quadrado integráveis em  $\mathbb{R}^n$ . Então, o seguinte é verdadeiro:*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x)dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} g^2(x)dx \right)^{1/2}.$$

Observamos que, no teorema acima,  $V = L^2(\mathbb{R}^n)$  (o espaço de funções quadrado integráveis em  $\mathbb{R}^n$ ) é um espaço de produto interno com um produto interno definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \quad \text{e} \quad \|f\|_V = \left( \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x)dx \right)^{1/2}.$$

Outra generalização, que foi mencionada pela primeira vez por Leonard James Rogers (1888) e posteriormente derivada por Otto Ludwig Hölder em 1889, é fornecida abaixo:

**Teorema 7.** *Sejam  $p$  e  $q$  dois números reais tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então, o seguinte é verdadeiro:*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{1/q} \quad (9)$$

*Observação 4.* A desigualdade em (7) é obviamente obtida tomando  $p = q = 2$  em (9). Seria uma tarefa tola tentar enumerar todas as aplicações dessa desigualdade. No entanto, vamos mencionar uma útil na área de Estatística:

Sejam  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  dois vetores de números reais, com as respectivas médias aritméticas  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ . A covariância entre  $a$  e  $b$  é definida como

$$\text{Cov}(a, b) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}).$$

Essa quantidade foi introduzida pela primeira vez por Karl Pearson em [6] como uma medida de associação linear entre os vetores  $a$  e  $b$ . Essencialmente, uma covariância grande/pequena significa uma associação linear forte/fraca. Além disso, uma covariância positiva/negativa também significa uma associação positiva/negativa entre  $a$  e  $b$ . Acontece, entretanto, que a covariância  $\text{Cov}(a, b)$  é uma quantidade que pode assumir valores arbitrários e, portanto, não é muito sábio usá-la para quantificar o grau de associação linear entre dois vetores  $a$  e  $b$ . Além disso, uma mudança de unidade entre  $a$  e  $b$  afetaria drasticamente  $\text{Cov}(a, b)$ . Para corrigir essas falhas, Karl Pearson propôs dividir  $\text{Cov}(a, b)$  por uma constante de normalização  $\sqrt{\text{Cov}(a, a)} \cdot \sqrt{\text{Cov}(b, b)}$  e, portanto, a quantidade resultante é o que é conhecido hoje como o coeficiente de correlação de Pearson, definido como

$$R(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - \bar{b})^2}}.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky como em (7) com  $x_i = a_i - \bar{a}$  e  $y_j = b_j - \bar{b}$ , segue-se que  $|R(a, b)| \leq 1$ . A igualdade é alcançada quando  $a$  e  $b$  são proporcionais ou, em termos leigos, quando  $a$  e  $b$  são perfeitamente correlacionados. Além disso,  $R(a, b)$  é uma quantidade adimensional e, portanto, não contém unidades.

Existem várias provas dessa desigualdade, incluindo a prova original de Cauchy em que ele reescreve (7) de uma forma que é obviamente verdadeira:

$$0 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x_j - x_j x_i)^2.$$

Daremos uma prova dessa desigualdade, para  $n = 2$  em conexão com o Teste da Segunda Derivada.

Seja  $f(x, y) = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2} - ax - by$ . Notamos que  $f$  é duas vezes diferenciável e as derivadas parciais de primeira ordem são fornecidas como

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - a, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - b.$$

Segue-se que os pontos críticos são soluções da equação  $x = \frac{a}{b}y$ , ou seja, os pontos  $(\frac{a}{b}y, y)$ .

Da mesma forma, as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right), \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right), \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= -\frac{xy\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}. \end{aligned}$$

Observe que  $D\left(\frac{a}{b}y, y\right) = 0$ , e mais uma vez, obtemos o caso patológico do teste da segunda derivada. Mostraremos por contradição que  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ . Sem perda de generalidade, provaremos o caso com  $x, y > 0$ , e o procedimento é semelhante para os outros casos. Se houver  $x_0, y_0 > 0$  tais que  $f(x_0, y_0) < 0$ , então teríamos  $\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < ax_0 + by_0$ . Quadrando ambos os lados, temos  $(a^2 + b^2)(x_0^2 + y_0^2) < (ax_0 + by_0)^2$ . Expandindo ambos os lados desse lado da desigualdade, temos:  $a^2x_0^2 + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 + b^2y_0^2 < a^2x_0^2 + 2abx_0y_0 + b^2y_0^2$ . Após a simplificação, obtemos:  $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - 2abx_0y_0 < 0$ , que é equivalente a  $(bx_0 - ay_0)^2 < 0$ . Essa é uma contradição óbvia e, portanto, para todos os  $x, y > 0$ , temos  $f(x, y) \geq 0$ , ou seja,  $ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2}$ .

De fato, mostramos que para  $u = (a, b)$ ,  $v = (x, y)$ , temos  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$  para  $\|v\| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . A Figura 6 abaixo é uma ilustração desse fato para  $a = b = 1$ . Notamos que a contradição é obtida usando um argumento semelhante à prova original de Cauchy usada.

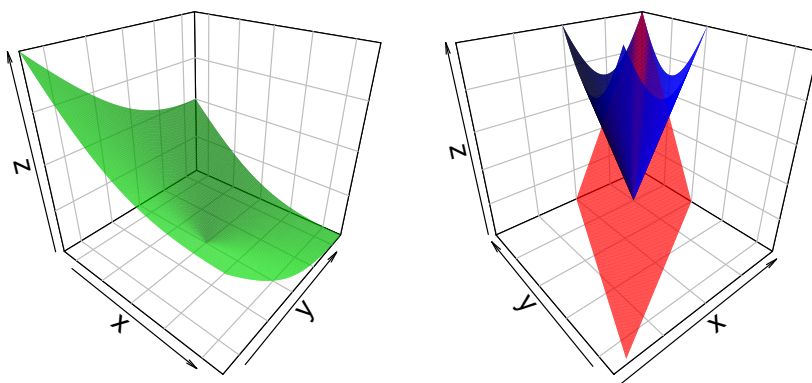


Figura 6: O primeiro gráfico mostra a superfície  $\sqrt{2(x^2 + y^2)} - x - y$  (verde) ficando acima do nível  $z = 0$ , e o segundo gráfico mostra a superfície  $\sqrt{2(x^2 + y^2)}$  (azul) sempre acima da superfície  $x + y$  (vermelho).

## 6. Discussão

Nesta seção, gostaríamos de discutir os tipos de funções para as quais  $D(a, b) = 0$ . Afirmamos que o conjunto de funções para as quais  $D(a, b) = 0$  é muito grande. De fato, considere qualquer função de uma variável única  $g(x)$  que seja duas vezes diferenciável. Defina  $f(x, y) = g(x)$ , para todos os  $x$  no domínio de  $g$  e para todos os  $y \in \mathbb{R}$ . Então, temos o seguinte:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = g''(x); \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Portanto,

$$D = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left[ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right]^2 = 0.$$

Isso prova que o caso  $D = 0$  ocorre em muitas situações na prática.

**Exemplo:** Seja  $f(x, y) = g(x) = x^2 - 4x$ . Então  $g'(x) = 2x - 4 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

Além disso,  $g''(x) = 2 > 0$ . Os pontos críticos para  $f(x, y)$  são  $(2, y)$  para todos os  $y \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $f(2, y) = -4$  e  $D(2, y) = 0$ , que é o caso patológico do Segundo Teste Derivado. Mostraremos

que, de fato,  $(2, y)$  é um mínimo global de  $f(x, y)$ . Suponha por contradição que existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $f(a, b) < f(2, y)$  para algum  $y \in \mathbb{R}$ . Então teríamos  $a^2 - 4a < -4$ , ou seja,  $(a - 2)^2 < 0$  o que é impossível. Segue-se que  $f(a, b) \geq f(2, y) = -4$  para todos  $y \in \mathbb{R}$ , e para todos  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ou seja,  $-4$  é um mínimo absoluto de  $f(x, y)$ , conforme ilustrado na Figura 7 abaixo.

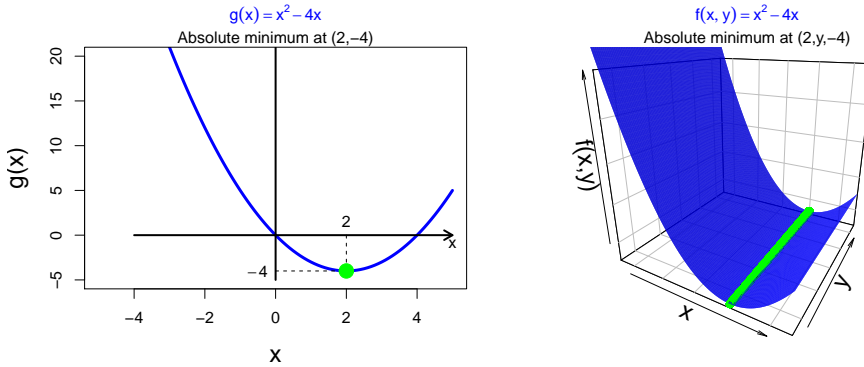


Figura 7: A figura à esquerda mostra que  $-4$  é um mínimo absoluto para  $g(x)$  e o da direita mostra que  $f(2, y) = -4$  para todos  $y \in \mathbb{R}$  é um mínimo absoluto para  $f(x, y)$ .

Podemos concluir observando que, em geral,  $g(a) = b$  é um extremo local/absoluto de  $g(x)$ ; então,  $f(a, y) = b$  é um extremo local / absoluto de  $f(x, y) = g(x)$  onde  $D(a, y) = 0$ , para todos  $y \in \mathbb{R}$ .

## 7. Conclusão

Nesta breve nota, fornecemos exemplos de casos patológicos do teste da segunda derivada e suas relações com desigualdades conhecidas. Isso não é de forma alguma uma cobertura exaustiva de todas as desigualdades úteis. Podemos, no entanto, mencionar que as mesmas técnicas podem ser aplicadas à desigualdade de Minkowski, mas por uma questão de brevidade, ela foi omitida aqui. Esse esforço deve ser continuado para trazer noções complicadas em matemática a níveis que sejam mais atraentes para o público em geral.

## Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer aos pareceristas anônimos por seus comentários e sugestões que ajudaram muito a melhorar a qualidade e o *layout* do artigo. Este trabalho foi originalmente escrito em inglês, e a tradução foi feita pelo professor Ronaldo Garcia.

## Referências

- [1] J. Bernoulli. *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis*. Basel, 1689.
- [2] W. Briggs and L. Cochran. *Calculus: Early transcendentals*. Addison-Wesley, 2010.
- [3] V. Y. Bunyakowski. Sur quelques inégalités concernant les intégrales aux différences finies. *Mémoires de l'Académie des sciences de St-Petersbourg*, 4:1-9, 1859.
- [4] L. A. Cauchy. *Cours sur l'analyse de l'École Royale Polytechnique, Première Partie, Analyse Algébrique*. Debure frères, 1821.



- [5] E. E. Tansey, K. Schultz, C. Afferbach, K. Kwessi, K. Lyons, and E. Elaydi. From competition to facilitation: Expanding on mechanistic models of species interactions. *Letters in Ecology*, 2017.
- [6] K. Pearson. Notes on regression and inheritance in the case of two parents. *Proceedings of the Royal Society of London*, 58:240–242, 1895.
- [7] H. A. Schwarz. Über ein flächen kleinsten flächeninhalts betreffendes problem der variationsrechnung. *Acta. Soc. Sci. Fennisca*, 15:315–362, 1885.
- [8] W. H. Young. On classes of summable functions and their Fourier series. *Proceeding of the Royal Society of London, Series A*, 87(594):225–229, 1912.

Eddy Kwessi

Department of Mathematics

Trinity University, San Antonio, TX, USA

<[ekwessi@trinity.edu](mailto:ekwessi@trinity.edu)>

Seth Kermausuor

Department of Mathematics and Computer Science

Alabama State University, USA

<[skermausuor@alasu.edu](mailto:skermausuor@alasu.edu)>

Geraldo de Souza

Department of Mathematics and Statistics

Auburn University


Auburn Alabama, USA


<[desougs@auburn.edu](mailto:desougs@auburn.edu)>

Recebido: 13/03/2020

Publicado: 22/10/2020

# Progressões aritméticas e geométricas de ordem superior e suas relações

Ruikson S. O. Nunes 

Juliano Sanquite Gomes 

## Resumo

Este trabalho apresenta um breve estudo sobre Progressões Aritméticas e Geométricas, focando especialmente nas de ordem superior. São apresentadas as definições e algumas importantes propriedades dessas seqüências numéricas. Um ponto importante deste trabalho é mostrar relações existentes entre Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem  $k$ , sendo  $k$  um número natural qualquer. Mais especificamente, é mostrado que uma função de tipo exponencial transforma uma Progressão Aritmética de ordem  $k$  em uma Progressão Geométrica de ordem  $k$  e, reciprocamente, que uma função logarítmica transforma uma Progressão Geométrica de ordem  $k$ , com termos positivos, em uma Progressão Aritmética de ordem  $k$ .

**Palavras-chave:** Progressão Aritmética; Progressão Geométrica; Ordem Superior; Função Logarítmica; Função Exponencial.

## Abstract

This paper presents a brief study on Arithmetic and Geometric Progressions, focusing especially on the higher order ones. The definitions and some important properties of these numerical sequences are presented. An important point of this work is to show the existing relations between Arithmetic and Geometric Progressions of order  $k$ , with  $k$  being a natural number. More specifically, it is shown that an exponential function transforms an Arithmetic Progression of order  $k$  into a Geometric Progression of order  $k$  and, conversely, that a logarithmic function transforms a Geometric Progression of order  $k$ , with positive terms, in an Arithmetic Progression of order  $k$ .

**Keywords:** Arithmetic Progression; Geometric Progression; Higher order; Exponential Function; Logarithmic Function.

## 1. Introdução

Muitos temas da Matemática Elementar, como a Teoria Elementar dos Números, sem dúvida alguma, são um campo muito fértil para um professor estimular e desenvolver em seus alunos o raciocínio matemático. Uma das maneiras de atingir esse propósito é estimular os alunos a fazerem, por si mesmos, pequenas generalizações ou simplesmente extensões de alguns conceitos da Matemática Elementar. Em especial, quando se trabalha com os temas progressões aritmética e geométrica, existem muitas propriedades que, com um bom estímulo, os alunos podem conseguir

deduzir por si só. Este trabalho explora os conceitos de Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior, obtendo algumas fórmulas, tais como: fórmulas para a soma e para o produto dos  $n$  primeiros termos para progressões Aritmética e Geométrica, respectivamente, e a fórmula do  $n$ -ésimo termo. Além disso, mostra também relações entre tais conceitos. Com isso, entendemos que o presente trabalho traz uma excelente contribuição para professores do Ensino Básico, fornecendo material e ideias que não estão presentes na maioria dos livros didáticos adotados nas escolas de Ensino Médio. Uma ideia interessante seria que, durante o ensino de Progressões Aritméticas e Geométricas, o professor motivasse os alunos a pensarem sobre a possibilidade de fazer generalizações de alguns conceitos dessas progressões, e, a partir daí, obter novas identidades matemáticas.

Na literatura podemos encontrar diversos trabalhos que lidam com Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior fornecendo propostas de abordagens desses conceitos no Ensino Básico; para citar alguns, veja ([4], [5], [7], [8]). Nos trabalhos ([4], [7] e [8]) são estudadas apenas as Progressões Aritméticas de ordem superior e, e não se avança ao estudo das Progressões Geométricas. Já em Lopes [5], o autor faz um estudo sobre Progressões Aritméticas e Geométricas, porém, apenas para as de ordem 2.

A fim de simplificar a escrita, usaremos a sigla  $PA(k)$  para denotar Progressão Aritmética de ordem  $k$ ; quando  $k = 1$  denotaremos  $PA$  em vez de  $PA(1)$ . Analogamente, Progressão Geométrica de ordem  $k$  será denotada por  $PG(k)$  e, quando  $k = 1$ , denotaremos  $PG$  em vez de  $PG(1)$ .

Uma relação interessante entre uma  $PA$  e uma  $PG$  é apresentada em [3], onde é mostrado que uma função de tipo exponencial transforma uma  $PA$  em uma  $PG$ . Surge, então, uma questão interessante, que é saber se essa relação permanece válida quando abordamos progressões de ordem superior. Para a ordem 2 é mostrado em [5] que a relação permanece válida, isto é, que função de tipo exponencial transforma  $PA(2)$  em  $PG(2)$ . Este trabalho avança, mostrando que tal resultado pode ser generalizado, isto é, que uma função de tipo exponencial transforma  $PA(k)$  em  $PG(k)$ , para  $k = 2, 3, \dots$ . Mostraremos também que uma função logarítmica transforma uma  $PG(k)$ , de termos positivos, em uma  $PA(k)$ . Além disso, mostraremos algumas fórmulas básicas como: fórmula do  $n$ -ésimo termo, fórmula do produto e da soma dos  $n$  primeiros termos para  $PG(k)$  e  $PA(k)$ , respectivamente. Com o propósito de melhorar o entendimento dos conceitos aqui abordados, primeiramente trabalharemos o caso particular em que  $k = 2$  e, a seguir abordamos o caso geral.

O restante deste trabalho está organizado em três seções. A Seção 2 é dedicada a expor alguns resultados e comentários preliminares que servirão de base para as seções posteriores. Na Seção 3 trabalhamos as progressões de ordem 2 e, por fim, a Seção 4 é dedicada ao estudo das progressões de ordem qualquer.

## 2. Notas Preliminares

Nesta seção faremos um breve esboço sobre  $PA$  e  $PG$  recordando algumas de suas principais propriedades. Além disso, abordaremos o conceito de função de tipo exponencial e pontuaremos algumas importantes observações sobre números binomiais que serão de fundamental importância no desenvolvimento das seções posteriores.

**Definição 1.** Uma sequência numérica  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é uma  $PA$ , quando podemos obter cada termo, a partir do segundo, como soma do termo anterior com uma constante  $r$ . Isto é,  $x_{i+1} = x_i + r$  para todo  $i = 1, 2, \dots$ . A constante  $r$  é chamada de razão da  $PA$ .

**Exemplo 1.** A sequência  $(3, 5, 7, \dots, 2n + 1, \dots)$  é uma  $PA$  de razão  $r = 2$ , pois cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o termo anterior com a constante 2.

As fórmulas de recorrência que determinam o  $n$ -ésimo termo de uma PA de razão  $r$  e a soma  $S_n$  de seus  $n$ -primeiros termos são dadas, respectivamente, por:

$$x_n = x_1 + (n - 1)r \tag{1}$$

e

$$S_n = nx_1 + \frac{n(n-1)}{2}r. \tag{2}$$

**Definição 2.** Uma sequência numérica  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é uma PG, quando podemos obter cada termo, a partir do segundo, como produto do termo anterior com uma constante  $q$ . Isto é,  $x_{i+1} = x_i \cdot q$  para todo  $i = 1, 2, \dots$ . A constante  $q$  é chamada de razão da PG.

**Exemplo 2.** A sequência  $(3, 6, 12, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}, \dots)$  é uma PG de razão  $q = 2$ , pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior com a constante 2.

Como pode ser visto em [6], as fórmulas de recorrência que determinam o  $n$ -ésimo termo de uma PG de razão  $q$ , bem como o produto  $P_n$  dos seus  $n$  primeiros termos, são dadas, respectivamente, por

$$x_n = x_1 q^{n-1}, \tag{3}$$

$$P_n = x_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{4}$$

Consideremos  $a$  e  $b$  números reais positivos com  $a \neq 1$ . A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ba^x$  é chamada tipo exponencial. O Teorema abaixo, encontrado em [3], mostra como PA e PG relacionam-se por meio de uma função de tipo exponencial.

**Teorema 1.** *Sejam  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma PA de razão  $r$  e  $f(x) = ba^x$  uma função de tipo exponencial. Então, a sequência  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$  é uma PG de razão  $a^r$ .*

*Demonstração.* Como  $r$  é a razão da PA  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , segue que  $r = x_{n+1} - x_n$  para todo número natural  $n$ . Por outro lado, note que  $\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = \frac{a^{x_{n+1}}}{a^{x_n}} = a^r$  para todo  $n$  natural, garantindo que a sequência  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$  é uma PG. □

A fim de obter as fórmulas gerais para progressões aritméticas e geométricas de ordem superior serão necessárias algumas propriedades dos números binomiais. Existem, na literatura, várias obras que tratam desse assunto, veja ([6], [1], [2]).

Considerando  $m$  e  $n$  números inteiros não negativos, o número binomial  $\binom{n}{m}$  é definido, conforme [2], por

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & \text{se } n \geq m, \\ 0, & \text{se } n < m. \end{cases}$$

O número  $n$  representa a linha e  $m$  a coluna onde o número está posicionado no Triângulo de Pascal. Um resultado que terá papel importante neste trabalho é o chamado Teorema das Colunas, exposto no Lema 1 abaixo.

**Lema 1.** (Teorema das Colunas) Dados inteiros não negativos  $n$  e  $p$ , a soma dos  $p + 1$  primeiros números da coluna  $n$  do Triângulo de Pascal é:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Uma demonstração do Lema 1 pode ser vista em [1].

### 3. Progressões Aritméticas e Geométricas de 2ª ordem

**Definição 3.** Uma sequência  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é uma Progressão Aritmética de segunda ordem, isto é, PA(2), quando a sequência de diferenças  $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$ , com  $d_n = x_{n+1} - x_n$ , for uma PA.

**Exemplo 3.** A sequência  $(1, 3, 7, 13, 21, \dots, 1 + n(n-1), \dots)$  é uma PA(2), pois a sequência de diferenças  $(2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots)$  é uma PA de razão igual a 2.

Para deduzir a fórmula do  $n$ -ésimo termo de uma PA(2), digamos que a sequência  $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$  seja uma PA de razão  $r$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}) \\ &= x_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r \\ &= \binom{n-1}{0}x_1 + \binom{n-1}{1}d_1 + \binom{n-1}{2}r. \end{aligned} \tag{5}$$

Na segunda igualdade acima, usamos a fórmula (2) para somar os termos da PA  $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$  e o fato de que  $x_1 = \binom{n-1}{0}x_1$ .

Usando o Lema 1, obtemos a fórmula da soma dos  $n$  primeiros termos da PA(2):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{0}x_1 + \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{1}d_1 + \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{2}r \\ &= \binom{n}{1}x_1 + \binom{n}{2}d_1 + \binom{n}{3}r. \end{aligned} \tag{6}$$

**Observação 1.** Levando em conta a definição de número binomial concluímos que  $\sum_{i=1}^n \binom{i-1}{j} = \sum_{i=j+1}^n \binom{i-1}{j}$ . Assim, na fórmula (6), temos especificamente,  $\sum_{i=1}^n \binom{i-1}{1} = \sum_{i=2}^n \binom{i-1}{1}$  e  $\sum_{i=1}^n \binom{i-1}{2} = \sum_{i=3}^n \binom{i-1}{2}$ .

Trataremos, a seguir, o conceito de Progressão Geométrica de segunda ordem, ou PG(2).

**Definição 4.** Uma sequência  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é uma Progressão Geométrica de segunda ordem, isto é PG(2), quando a sequência de quocientes  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)$ , com  $q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ , for uma PG.

**Exemplo 4.** A sequência  $(1, 3, 18, 216, \dots, 3^{(n-1)} \cdot 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}, \dots)$  é uma PG(2), pois a sequência de quocientes  $(3, 6, 12, \dots, 3 \cdot 2^{(n-1)}, \dots)$  é uma PG de razão igual a 2.

Primeiramente determinaremos a fórmula do termo geral de uma PG(2)  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  cuja seqüência de quocientes  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)$  é uma PG de razão  $q$ . Veja que

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_{n-1} \\ &= x_1 \cdot q_1^{(n-1)} \cdot q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \\ &= x_1^{\binom{n-1}{0}} \cdot q_1^{\binom{n-1}{1}} \cdot q^{\binom{n-1}{2}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Na segunda equação acima usamos a fórmula do produto dos termos de uma PG, estabelecido em (4).

Agora, considerando o Lema 1 e a Observação 1, obtemos a fórmula do produto dos  $n$  primeiros termos de uma PG(2):

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n x_i &= x_1^{\sum_{i=1}^n \binom{i-1}{0}} \cdot q_1^{\sum_{i=1}^n \binom{i-1}{1}} \cdot q^{\sum_{i=2}^n \binom{i-1}{2}} \\ &= x_1^{\binom{n}{1}} \cdot q_1^{\binom{n}{2}} \cdot q^{\binom{n}{3}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Para finalizar esta seção mostraremos que a função de tipo exponencial  $f(x) = ba^x$ , definida anteriormente, transforma PA(2) em PG(2).

**Teorema 2.** *Sejam  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma PA(2) e  $f(x) = ba^x$  uma função do tipo exponencial. Então, a seqüência  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$  é uma PG(2).*

*Demonstração.* Sendo  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma PA(2), então a seqüência de diferenças  $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$ , onde  $d_n = x_{n+1} - x_n$ , é uma PA, e suponhamos que sua razão seja  $r$ . Considerando a função exponencial  $g(x) = a^x$ , pelo Teorema 1, segue que  $(a^{d_1}, a^{d_2}, \dots, a^{d_n}, \dots)$  é uma PG de razão  $a^r$ . Agora, observe que  $\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = a^{(x_{n+1} - x_n)} = a^{d_n}$ , para todo  $n$  natural. Logo, concluímos que  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$  é uma PG(2).  $\square$

#### 4. Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem $k$

Seja  $k$  um número inteiro não negativo. Afim definir Progressões Aritméticas de ordem  $k$ , definiremos o conceito de operador diferença de ordem  $k$ .

**Definição 5.** Seja  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma seqüência de números reais. O operador diferença de ordem  $k$ , denotado por  $D^k$ , é definido recursivamente por  $D^k x_n = D^1(D^{k-1} x_n) = D^{k-1} x_{n+1} - D^{k-1} x_n$ .

Pela forma em que foi definido, note que o operador diferença  $D^k$  satisfaz  $D^j(D^k x_n) = D^{j+k} x_n$ . Por exemplo,  $D^2 x_n = D^1(D^1 x_n) = D^1 x_{n+1} - D^1 x_n$ ,  $D^3 x_n = D^1(D^2 x_n) = D^2 x_{n+1} - D^2 x_n$ , e assim sucessivamente.

**Definição 6.** Uma seqüência  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é uma Progressão Aritmética de ordem  $k > 1$ , isto é, PA( $k$ ), quando a seqüência de diferenças  $(D^1 x_1, D^1 x_2, \dots, D^1 x_n, \dots)$ , com  $D^1 x_n = x_{n+1} - x_n$ , for uma PA( $k-1$ ).

A fim de simplificar notação, vamos fixar o seguinte;  $r_0 = D^0 x_1, r_1 = D^1 x_1, r_2 = D^2 x_1, \dots, r_k = D^k x_1$ . Veja que  $r_0$  é o primeiro termo da seqüência original,  $r_1$  é o primeiro termo da seqüência de

diferenças de ordem 1; enfim,  $r_k$  é o primeiro termo da sequência de diferenças de ordem  $k$ . A fórmula do  $n$ -ésimo termo e a da soma dos  $n$  primeiros termos de uma PA( $k$ ) são estabelecidas no seguinte teorema.

**Teorema 3.** *Seja  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é uma Progressão Aritmética de ordem  $k > 1$ . O  $n$ -ésimo termo é determinado por;*

$$x_n = \binom{n-1}{0}r_0 + \binom{n-1}{1}r_1 + \binom{n-1}{2}r_2 + \dots + \binom{n-1}{k}r_k \quad (9)$$

e a soma de seus  $n$  primeiros termos é determinada por;

$$\sum_{i=1}^n x_i = \binom{n}{1}r_0 + \binom{n}{2}r_1 + \binom{n}{3}r_2 + \dots + \binom{n}{k+1}r_k. \quad (10)$$

*Demonstração.* Provaremos primeiramente a fórmula do  $n$ -ésimo termo usando a indução sobre  $k$ . Se  $k = 2$ , temos

$$x_n = \binom{n-1}{0}r_0 + \binom{n-1}{1}r_1 + \binom{n-1}{2}r_2,$$

que é o  $n$ -ésimo termo de uma PA(2), conforme a igualdade (5). Por hipótese, suponhamos que a fórmula (9) seja válida para uma PA( $k-1$ ). Sendo  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma PA( $k$ ), segue que a sequência de diferenças  $(D^1x_1, D^1x_2, \dots, D^1x_n, \dots)$  é uma PA( $k-1$ ). Assim, pela hipótese de indução segue que

$$D^1x_n = \binom{n-1}{0}D^1x_1 + \binom{n-1}{1}D^2x_1 + \binom{n-1}{2}D^3x_1 + \dots + \binom{n-1}{k-1}D^kx_1.$$

Agora, levando em conta o Lema 1, a Observação 1, bem como essa ultima igualdade, obtemos;

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_1 + (D^1x_1 + D^1x_2 + D^1x_3 + \dots + D^1x_{n-1}) \\ &= x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} D^1x_i \\ &= x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{0}D^1x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{1}D^2x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{2}D^3x_1 + \dots + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{k-1}D^kx_1 \\ &= D^0x_1 + \binom{n-1}{1}D^1x_1 + \binom{n-1}{2}D^2x_1 + \binom{n-1}{3}D^3x_1 + \dots + \binom{n-1}{k}D^kx_1 \\ &= \binom{n-1}{0}r_0 + \binom{n-1}{1}r_1 + \binom{n-1}{2}r_2 + \dots + \binom{n-1}{k}r_k. \end{aligned}$$

Para provarmos a fórmula (10) utilizamos a fórmula (9), o Lema 1 e a Observação 1; assim obtemos;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{0}r_0 + \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{1}r_1 + \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{2}r_2 + \dots + \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{k}r_k. \\ &= \binom{n}{1}r_0 + \binom{n}{2}r_1 + \binom{n}{3}r_2 + \dots + \binom{n}{k+1}r_k. \end{aligned}$$

□

A seguir definiremos Progressão Geométrica de ordem  $k > 1$ . Para isso, definiremos operador quociente de ordem  $k$ , que é dado recursivamente por  $Q^k x_n = Q^1(Q^{k-1} x_n) = \frac{Q^{k-1} x_{n+1}}{Q^{k-1} x_n}$ . Por exemplo,

$$Q^2 x_n = Q^1(Q^1 x_n) = \frac{Q^1 x_{n+1}}{Q^1 x_n}, \quad Q^3 x_n = Q^1(Q^2 x_n) = \frac{Q^2 x_{n+1}}{Q^2 x_n}, \text{ e assim sucessivamente.}$$

**Definição 7.** Uma seqüência  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é uma Progressão Geométrica de ordem  $k$ , isto é,  $PG(k)$ , quando a seqüência de quocientes  $(Q^1 x_1, Q^1 x_2, \dots, Q^1 x_n, \dots)$ , com  $Q^1 x_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ , for uma  $PG(k-1)$ .

Com o propósito de simplificar notações, vamos fixar o seguinte;  $q_0 = Q^0 x_1, q_1 = Q^1 x_1, q_2 = Q^2 x_1, \dots, q_k = Q^k x_1$ . Veja que  $q_0$  é o primeiro termo da seqüência original,  $q_1$  é o primeiro termo da seqüência de quocientes de ordem 1; enfim,  $q_k$  é o primeiro termo da seqüência de quocientes de ordem  $k$ .

A fórmula do  $n$ -ésimo termo e também a do produto dos  $n$  primeiros termos de uma  $PG(k)$  serão estabelecidas no seguinte teorema.

**Teorema 4.** *Seja  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é uma Progressão Geométrica de ordem  $k > 1$ . O  $n$ -ésimo termo é determinado pela seguinte fórmula:*

$$x_n = q_0 \binom{n-1}{0} \cdot q_1 \binom{n-1}{1} \cdot q_2 \binom{n-1}{2} \dots q_k \binom{n-1}{k}, \quad (11)$$

e o produto de seus  $n$  primeiros termos é determinado por

$$\prod_{i=1}^n x_i = q_0 \binom{n}{0} \cdot q_1 \binom{n}{1} \cdot q_2 \binom{n}{2} \dots q_k \binom{n}{k}. \quad (12)$$

*Demonstração.* Vamos fazer primeiramente a prova da fórmula (11), para isso usaremos a indução sobre  $k$ . Se  $k = 2$ , temos;

$$x_n = q_0 \binom{n-1}{0} \cdot q_1 \binom{n-1}{1} \cdot q_2 \binom{n-1}{2},$$

que é fórmula do  $n$ -ésimo termo de uma  $PG(2)$ , conforme a igualdade (7), lembrando que  $q_0 = x_1$  e  $q_2 = q$ . Por hipótese de indução, suponhamos que a fórmula seja válida para  $PG(k-1)$ . Sendo  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma  $PG(k)$ , segue que a seqüência de quocientes  $(Q^1 x_1, Q^1 x_2, \dots, Q^1 x_n, \dots)$  é uma  $PG(k-1)$ . Assim, pela hipótese de indução segue que

$$Q^1 x_n = q_1 \binom{n-1}{0} \cdot q_2 \binom{n-1}{1} \cdot q_3 \binom{n-1}{2} \dots q_k \binom{n-1}{k-1}.$$

Agora, levando em conta o Lema 1, a Observação 1, bem como essa ultima igualdade, obtemos;

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \dots \frac{x_n}{x_{n-1}} \\
 &= x_1 \cdot Q^1 x_1 \cdot Q^1 x_2 \cdot Q^1 x_3 \dots Q^1 x_{n-1} \\
 &= x_1 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} Q^1 x_i \\
 &= x_1 \cdot q_1^{\sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{0}} \cdot q_2^{\sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{1}} \cdot q_3^{\sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{2}} \dots q_k^{\sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{k-1}} \\
 &= q_0 \binom{n-1}{0} \cdot q_1 \binom{n-1}{1} \cdot q_2 \binom{n-1}{2} \dots q_k \binom{n-1}{k}.
 \end{aligned}$$



Nessa última igualdade levamos em conta o fato de que  $q_0 = x_1$  e  $x_1 = x_1^{\binom{n-1}{0}}$ .

A fim de provar a fórmula (12) utilizaremos a fórmula (11), o Lema 1 e a Observação 1. Assim, o produto dos  $n$ -primeiros termos de uma  $PG(k)$  é estabelecido da seguinte forma;

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n x_i &= q_0^{\sum_{i=1}^n \binom{n-1}{0}} \cdot q_1^{\sum_{i=1}^n \binom{n-1}{1}} \cdot q_2^{\sum_{i=1}^n \binom{n-1}{2}} \dots q_k^{\sum_{i=1}^n \binom{n-1}{k}} \\ &= q_0^{\binom{n}{1}} \cdot q_1^{\binom{n}{2}} \cdot q_2^{\binom{n}{2}} \dots q_k^{\binom{n}{k+1}}. \end{aligned}$$

□

Mostraremos agora que a função de tipo exponencial  $f(x) = ba^x$ , transforma  $PA(k)$  em  $PG(k)$ .

**Teorema 5.** *Sejam  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma  $PA(k)$  e  $f(x) = ba^x$  uma função do tipo exponencial. Então, a sequência  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$  é uma  $PG(k)$ .*

*Demonstração.* Faremos a demonstração por indução sobre  $k$ . Para  $k = 1$  o resultado segue do Teorema 1. Suponhamos agora que o resultado seja válido para  $k = m$ , com  $m \geq 1$ , provaremos que o resultado é válido para  $k = m + 1$ .

Sendo  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma  $PA(m + 1)$ , segue que a sequência de diferenças  $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$ , onde  $d_n = x_{n+1} - x_n$ , é uma  $PA(m)$ . Agora, pela hipótese de indução, segue que  $(a^{d_1}, a^{d_2}, \dots, a^{d_n}, \dots)$  é uma  $PG(m)$ , pois é a imagem de  $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$  pela função exponencial  $g(x) = a^x$ . Por fim, veja que  $\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = a^{x_{n+1} - x_n} = a^{d_n}$ , garantindo que  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$  é uma  $PG(m + 1)$ , finalizando a demonstração. □

Para finalizar, é importante fazermos uma observação com respeito à recíproca do teorema anterior, isto é, se existe uma função que transforma uma  $PG(k)$  em uma  $PA(k)$ . Pelo menos quando consideramos uma  $PG(k)$  com termos positivos isto é verdadeiro, considerando uma função logarítmica, como pode ser visto no teorema abaixo.

**Teorema 6.** *Sejam  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma  $PG(k)$  de termos positivos e  $g(x) = \log_a(x)$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , uma função logarítmica. Então, a sequência  $(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n), \dots)$  é uma  $PA(k)$ .*

*Demonstração.* Faremos a demonstração por indução sobre  $k$ . Veja que o resultado é válido para  $k = 1$ , pois, neste caso,  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é uma  $PG$ , cuja razão será denotada por  $q$ . Note que  $\log_a(x_{n+1}) - \log_a(x_n) = \log_a\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \log_a(q)$ , para qualquer que seja o número natural  $n$ . Isso mostra que  $(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n), \dots)$  é uma  $PA$  de razão  $\log_a(q)$ .

Suponhamos agora que o resultado seja válido para  $k = m$  e  $m \geq 1$ . Sendo  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma  $PG(m + 1)$  segue que a sequência de quocientes  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots)$ , com  $Q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ , é uma  $PG(m)$ . Daí, pela hipótese de indução segue que  $(g(Q_1), g(Q_2), \dots, g(Q_n), \dots)$  é uma  $PA(m)$ . Notando que  $g(x_{n+1}) - g(x_n) = \log_a\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = g(Q_n)$ , garantimos que  $(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n), \dots)$  é uma  $PA(m + 1)$ , como queríamos demonstrar. □

□

## Referências

- [1] Carvalho, P.C P., Morgado, A. C O., Fernandez P., Pitombeira, J. B. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro, SBM, 2000.
- [2] Hefez, A. *Curso de Álgebra, Vol. 1*. 3ª ed. Coleção Matemática Universitária; Rio de Janeiro, 2002.
- [3] Lima, E. L. *Números e Funções*. Coleção Profmat; Rio de Janeiro, SBM, 2013.
- [4] Lima, W. A. F. *Progressões Aritméticas de Ordem Superior: uma proposta de abordagem no Ensino Médio*. Dissertação (Profmat-UEM), Maringá-PR, 2015.
- [5] Lopes, F. H. *O ensino de Progressão Geométrica de segunda ordem no Ensino Médio*. Dissertação (Profmat-Unesp), São José do Rio Preto - SP, 2017.
- [6] Morgado, A. C.; Carvalho, P. C. P. *Matemática Discreta*. Coleção Profmat; Rio de Janeiro, SBM, 2013.
- [7] Nobre, J. F. F. *Progressões Aritméticas: abordando as ordens superiores*. Dissertação (Profmat-UFT), Palmas-TO, 2018.
- [8] Nobre, J. F. F.; Rocha, R. A. "Progressões Aritméticas de Ordem Superior". *Revista Professor de Matemática Online*, v.5, n.1, 2018.

Ruikson S. O. Nunes  
Universidade Federal de Mato Grosso-UFMT  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra-Icet  
Departamento de Matemática  
<[ruiksonsillas@hotmail.com](mailto:ruiksonsillas@hotmail.com)>

Juliano Sanquite Gomes  
Universidade Federal de Mato Grosso-UFMT  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra-Icet  
Departamento de Matemática  
<[san27g@gmail.com](mailto:san27g@gmail.com)>

Recebido: 14/02/2019  
Publicado: 19/11/2020