

Construções geométricas de polígonos regulares e aplicações à trigonometria

José Gilvan de Oliveira 

Moacir Rosado Filho 

Domingos Sávio Valério Silva 

Resumo

No presente trabalho, apresentamos construções geométricas de alguns polígonos regulares, dentre eles, o pentágono e o decágono, usando apenas régua (não graduada) e compasso. A partir dessas construções, obtemos a célebre razão áurea e as razões trigonométricas dos ângulos 18° , 36° e 72° , que nos permitem ampliar os estudos em Trigonometria com novas aplicações envolvendo esses ângulos. Também apresentamos uma relação entre a construção do pentágono regular e a do icosaedro regular. Os ingredientes usados no texto são aqueles encontrados na Geometria Plana e são bem poucos, restritos a interseções de retas e circunferências, propriedades de triângulos e o Teorema de Pitágoras.

Abstract

In the presente work, we present geometric constructions of some regular polygons, among them, the pentagon and the decagon, by using only straightedge (ruler with no marks) and compass. From these constructions, we obtain the famous golden ratio and the trigonometric ratios of the angles 18° , 36° and 72° , which allow us to expand our studies in Trigonometry with new applications involving these angles. We also present a relationship between the construction of the regular pentagon and that of the regular icosahedron. The ingredients used in the text are those found in Basic Geometry and are very few, restricted to intersections of lines and circles, properties of triangles and also the Pythagorean Theorem.

Palavras-chave: Construções geométricas; Pentágono; Decágono; Razões trigonométricas.

1. Introdução

O objetivo principal deste artigo é abordar as construções do pentágono e do decágono regulares, juntamente com o cálculo das principais razões trigonométricas dos correspondentes ângulos centrais. Nos livros didáticos, os exemplos e exercícios envolvendo razões trigonométricas são normalmente restritos aos chamados arcos notáveis dos ângulos 30° , 45° e 60° . Embora esses ângulos não sejam o objetivo principal do presente artigo, eles serão abordados porque os ingredientes usados nesses casos são exatamente os mesmos que usaremos para construir o pentágono e o decágono regulares. A diferença para as construções desses dois últimos fica restrita apenas ao número de etapas necessárias durante todo o processo de construção. Assim procedendo, pretendemos mostrar ao leitor que é possível ampliar o estudo da Trigonometria, abordando novas aplicações e exercícios, por exemplo, com os ângulos 18° , 36° e 72° . Os ingredientes usados no texto são aqueles encontrados na Geometria Plana e são bem poucos, restritos a interseções de retas e circunferências, propriedades de triângulos e o Teorema de Pitágoras.

Para cada número inteiro $n \geq 3$, seja \mathcal{P}_n um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio unitário e centro O , considerados em um plano estabelecido. Sejam ℓ_n o comprimento do lado de \mathcal{P}_n e seja θ_n o ângulo central interno em O de um triângulo com vértices em O e dois vértices consecutivos de \mathcal{P}_n . Então, como a circunferência de raio unitário está dividida em n arcos de mesma medida, o ângulo central θ_n é dado por $\theta_n = 360^\circ/n$, e, daí, conforme a Figura 1, temos $\text{sen}(\theta_n/2) = \ell_n/2$ e, portanto, $\text{sen}(180^\circ/n) = \ell_n/2$. Uma questão que vamos estudar é como efetivamente dividir a circunferência unitária dessa forma, ou seja, em n partes iguais. O objetivo principal desse artigo é apresentar resposta para os casos $n = 5$ e $n = 10$, isto é, construir o pentágono regular \mathcal{P}_5 e o decágono regular \mathcal{P}_{10} . Faremos isso repetindo as mesmas técnicas dos dois casos precedentes $n = 3$ e $n = 4$. Como consequência diretamente relacionada com a construção do pentágono regular, obteremos também os casos $n = 10$ e $n = 20$.

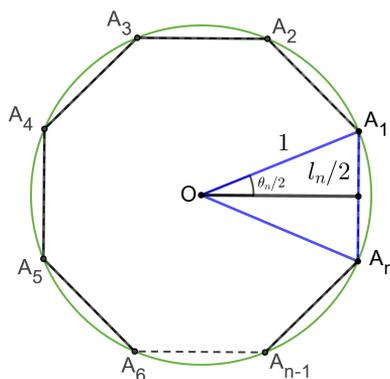


Figura 1: Polígono regular de n lados

1.1. Caso $n=3$

Neste caso, temos $\theta_3 = 360^\circ/3 = 120^\circ$ e $\text{sen}(\theta_3/2) = \text{sen} 60^\circ = \ell_3/2$. Considere a Figura 2 abaixo. Dado o segmento de reta AA' , determinamos o seu ponto médio O , obtido a partir da interseção das duas circunferências de centros nas extremidades do segmento AA' e mesmo raio r maior ou igual à metade do comprimento de AA' . Os dois triângulos com lado comum OA são isósceles e congruentes, pelo caso LLL de congruência de triângulos. De modo análogo, considerando o segmento OA , obtemos seu ponto médio C . Além disso, C é o ponto médio do segmento BB' . Em particular, se $r = OA$, então os dois triângulos são equiláteros, a medida do ângulo α é 60° e os dois triângulos com lado comum OC são congruentes, pelo caso LAL. Portanto, eles são também triângulos retângulos. Finalmente, como temos α como um ângulo externo do triângulo $A'OB$, a medida dos ângulos da base desse triângulo isósceles é $\alpha/2 = 30^\circ$. A mesma conclusão vale para o triângulo $A'OB'$. Isso permite concluir que $A'B'B$ é um triângulo equilátero e, logo, o ângulo $\angle(OBC)$ é igual a $\alpha/2 = 30^\circ$. Além disso, considerando o segmento OA unitário, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo OCB , concluímos então que $\text{sen} 30^\circ = 1/2$, $\text{sen} 60^\circ = \sqrt{3}/2$ e que o lado ℓ_3 do triângulo equilátero $A'B'B$ é $\ell_3 = \sqrt{3}$.

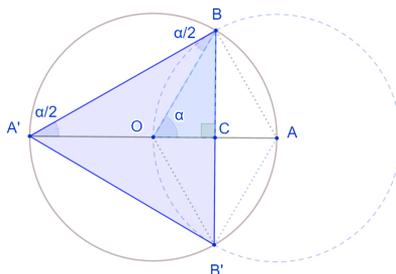


Figura 2: Construção do triângulo equilátero

Vale destacar que o procedimento descrito, tomando-se a interseção de duas particulares circunferências, permite efetivamente dividir uma circunferência em três partes iguais e, assim, construir o polígono regular \mathcal{P}_3 . O processo pode ser resumido em duas etapas: a) Dado o segmento AA' determinamos seu ponto médio O ; b) Em seguida, a partir de O determinamos os pontos B e B' de interseção da mediatriz do segmento OA com a circunferência de centro O e raio OA . Outro destaque é que o método permite efetivamente obter a mediatriz de um segmento qualquer e, portanto, bissetriz, mediana e altura, em relação à base, de um triângulo isósceles qualquer. Isso será usado nos outros casos considerados a seguir. No caso da Figura 2 temos esses conceitos destacados, por exemplo, tanto para o triângulo OAB quanto para o triângulo $A'B'B$. Assim, o ponto C é ponto médio com relação ao segmento OA , bem como com relação ao segmento BB' .

1.2. Caso $n=4$

Neste caso, temos $\theta_4 = 360^\circ/4 = 90^\circ$ e $\text{sen}(\theta_4/2) = \text{sen} 45^\circ = \ell_4/2$. Considere a Figura 3 abaixo.

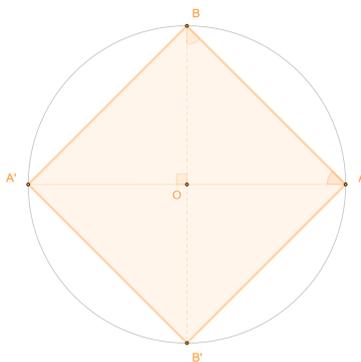


Figura 3: Construção do quadrado

Dado o segmento de reta AA' , seguindo o procedimento descrito no caso anterior, determinamos o seu ponto médio O . Em seguida determinamos os pontos de interseção B e B' da mediatriz de AA' com a circunferência de centro no ponto O e raio OA . Obtemos assim o triângulo retângulo AOB . Como esse

triângulo é também isósceles, considerando OA como sendo unitário e usando o Teorema de Pitágoras, obtemos assim de maneira efetiva o quadrado inscrito \mathcal{P}_4 . Além disso, $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$ e $\ell_4 = \sqrt{2}$.

2. Pentágono e Decágono Regulares

2.1. Caso n=5

Neste caso, temos $\theta_5 = 360^\circ/5 = 72^\circ$ e $\sin(\theta_5/2) = \sin 36^\circ = \ell_5/2$. Daí, a partir da soma dos ângulos internos de um triângulo e das igualdades $180^\circ = 36^\circ + 2 \times 72^\circ$ e $180^\circ = 36^\circ + (36^\circ + 36^\circ) + 72^\circ$, isso sugere a existência de dois triângulos isósceles semelhantes com bases ℓ e $1 - \ell$, como na Figura 4 abaixo, onde $\alpha = 36^\circ$. Tais triângulos serão posteriormente obtidos de maneira efetiva e, nesse caso, ℓ é o lado ℓ_{10} do polígono regular \mathcal{P}_{10} . Segue, da semelhança desses triângulos, que $\ell = \ell/1 = (1 - \ell)/\ell$, e, portanto, $\ell = (\sqrt{5} - 1)/2$, que é a célebre razão áurea ([1] e [4]).

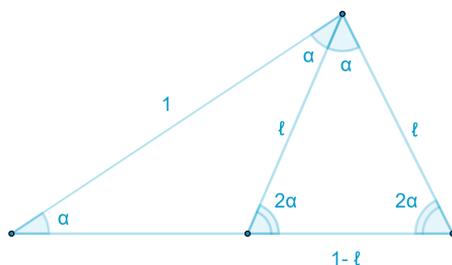


Figura 4: Razão áurea

Com conhecimento desses fatos, vamos construir a seguir, de forma efetiva, o polígono regular \mathcal{P}_5 , ou seja, o pentágono regular. Considere a Figura 5 abaixo.

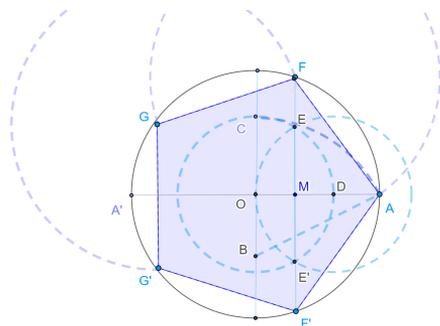


Figura 5: Construção do pentágono regular

Dado o segmento de reta AA' determinamos, a partir do procedimento detalhado no primeiro caso tratado ($n = 3$), sua mediatriz contendo o ponto médio O de AA' e também a circunferência com centro O e raio

OA. Em seguida, determinamos o ponto B da mediatriz mencionada de forma que OB é a metade do raio da circunferência. Admitindo-se que o segmento OA seja unitário, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo AOB, temos $AB = \sqrt{5}/2$. Portanto, $OC = AB - 1 / (2 = ((\sqrt{5} - 1)) / 2)$, que é a razão áurea, onde C é um dos pontos de interseção da mesma mediatriz com a circunferência com centro B e raio AB. O ponto D é a interseção do segmento OA com a circunferência de centro O e raio OC. Finalmente, os pontos F e F' são os pontos de interseção da circunferência de raio 1 e centro O com a mediatriz do segmento OD. Como o triângulo OFD é isósceles, com dois lados unitários e com base igual à razão áurea, então ele é congruente ao triângulo isósceles da Figura 4, com ângulos da base ℓ iguais a 72° . Assim, os pontos F', A e F são três pontos consecutivos de \mathcal{P}_5 . Os pontos restantes de \mathcal{P}_5 são os pontos G e G' obtidos da interseção da circunferência unitária de centro O com as circunferências de mesmo raio AF e centros nos pontos F e F'. Além disso, como os ângulos da base do triângulo isósceles OFD são iguais a 72° e a altura FM desse triângulo em relação ao vértice F é a metade de FF' , segue do Teorema de Pitágoras que

$$\text{sen } 72^\circ = FM = \sqrt{(5 + \sqrt{5})/8} = \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})/4},$$

$$FF' = \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}/2,$$

e, usando a bissetriz do triângulo OFD em relação ao vértice F, temos

$$\text{sen } 18^\circ = OM/OF = (\sqrt{5} - 1)/4.$$

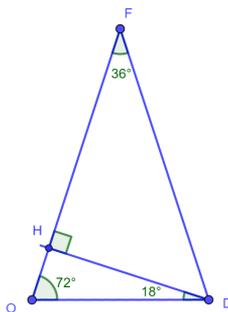


Figura 6: Razão áurea

Em seguida, calculando a altura do triângulo OFD em relação ao vértice D por meio do Teorema de Pitágoras (veja Figura 6), obtemos

$$\text{sen } 36^\circ = DH/DF = \sqrt{(5 - \sqrt{5})/8} = \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})/4}.$$

Daí, os lados do pentágono regular \mathcal{P}_5 e do decágono regular \mathcal{P}_{10} são, respectivamente,

$$\ell_5 = \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} / 2 \text{ e } \ell_{10} = (\sqrt{5} - 1)/2.$$

Outra propriedade interessante a ser destacada do pentágono regular, como se pode verificar das informações acima, é a razão áurea como quociente do comprimento do lado pela diagonal do pentágono regular. Em particular, usando o caso LLL de semelhança de triângulos, se o lado AF na Figura 5 é 1, então a diagonal FF' é $(1 + \sqrt{5})/2$ (Ver [4]).

A partir dos resultados anteriores e da relação $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, obtemos as tabelas.

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos \theta$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

θ	18°	36°	72°
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Exemplo 1. O Plano Diretor de certo município litorâneo, para garantir a adequada insolação da praia em certa data e horário do ano, estabelece que a altura das edificações não poderá ultrapassar o ângulo de 36° , medido a partir do calçadão segundo uma linha horizontal, até o ponto mais elevado da fachada, conforme a Figura 7 abaixo. Admitindo que a distância do calçadão até a base de uma edificação é igual a 21 metros, qual é a altura máxima h da edificação?

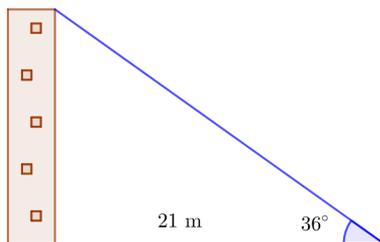


Figura 7

Solução: Para a altura máxima h da edificação, temos

$$h/21 = \operatorname{tg} 36^\circ = \sin 36^\circ / \cos 36^\circ = \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} / (1 + \sqrt{5}).$$

Logo, $h \cong 15,25$. Portanto, a edificação deverá ter altura máxima de aproximadamente 15,25 metros. Considerando que, na construção civil cada pavimento tem altura média de 3 metros, essa edificação corresponde a um prédio de aproximadamente 5 pavimentos.

Retornando à construção do pentágono regular aqui apresentada, vemos que o ponto C na Figura 5 é um dos pontos de interseção da reta contendo os pontos B e O com a circunferência de centro B e raio igual a AB . Considerando então o outro ponto de interseção, digamos C' , obtemos o chamado retângulo áureo determinado pelos vértices consecutivos A , O e C' , com medida dos lados 1 e $((1 + \sqrt{5}) / 2)$ (Ver [1], [4]). Um destaque importante desse retângulo, com relação à construção do pentágono regular, é a construção de Luca Pacioli para o icosaedro regular, descrita a seguir (Ver [3], p. 8). Ela é obtida a partir da interseção de três retângulos áureos perpendiculares, dispostos em particular posição de simetria destacada na Figura 8a. Para cada um dos doze vértices desses retângulos áureos perpendiculares existem outros cinco vértices que, juntamente com o vértice inicial, formam cinco triângulos equiláteros. Mais ainda, esses cinco pontos são coplanares e determinam um pentágono regular. O poliedro determinado por todos os doze vértices é o icosaedro regular (Figura 8b), que é um dos cinco poliedros regulares, únicos existentes, e que foram todos descobertos pelos matemáticos gregos antigos.

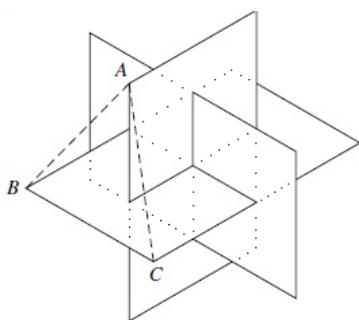


Figura 8a: Retângulos áureos perpendiculares

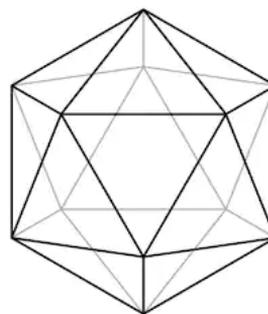


Figura 8b: Icosaedro regular

3. Conclusão

No caso tratado do triângulo equilátero, Figura 2, foi tomada a mediatriz do segmento OA . Um procedimento análogo pode ser feito tomando a mediatriz de $A'O$. Esses dois procedimentos simultâneos produzem o hexágono regular \mathcal{P}_6 . Da mesma forma, no caso do pentágono regular, Figura 5, o ponto D foi tomado no segmento OA dentre as quatro possíveis interseções da circunferência de centro O e raio OC . O mesmo procedimento poderia ser feito usando a interseção com $A'O$. Essas duas escolhas simultâneas produzem o decágono regular \mathcal{P}_{10} , enquanto todas as quatro alternativas simultâneas produzem o icosaedro regular \mathcal{P}_{20} . Cada um desses casos leva-nos às razões trigonométricas relativas aos ângulos 72° , 36° , e 18° , assim como ao ângulo 54° , que é o ângulo complementar de 36° . Mais ainda, como estímulo ao leitor, lembrando que um ângulo inscrito em uma circunferência é a metade do seu correspondente ângulo central (Figura 2), temos até mesmo a construção do ângulo 9° e do seu complementar 81° , enriquecendo ainda mais as possibilidades de aplicações. Também, usando as fórmulas de adição, é possível calcular as razões trigonométricas do ângulo 3° , a partir das razões trigonométricas dos ângulos 18° , 30° e 45° .

Uma curiosidade natural é saber o que ocorre sobre a efetiva construção de \mathcal{P}_n se n é maior do que 5. Podemos separar a questão em duas situações, dependendo da paridade de n . Se n é par, digamos $n = 2k$, então o método usado anteriormente, considerando a mediatriz do lado ℓ_k , pode ser aplicado admitindo-se que já é conhecido o resultado para o polígono regular \mathcal{P}_k . Caso contrário, se n é ímpar, então já para $n = 7$ é conhecido que o método não pode ser aplicado. No caso geral, uma resposta foi dada por Gauss, dependendo da fatoração de n em números primos: \mathcal{P}_n é construtível se, e somente, se $n = 2^r \times p_1 \times \dots \times p_k$, onde $r \in \mathbb{N}$ e p_1, \dots, p_k são distintos primos da forma $p_i = 2^{2^{s_i}} + 1$, $1 \leq i \leq k$, $s_i \in \mathbb{N}$ (veja por exemplo [2]). Os

números primos dessa forma são conhecidos como números primos de Fermat. São conhecidos apenas os cinco primeiros primos de Fermat, a saber: 3, 5, 17, 257 e 65.537. Sabe-se que vários números da forma $2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, não são primos. Por exemplo, Euler foi a primeira pessoa a alertar sobre isso, mostrando que o número $2^{2^5} + 1$ tem 641 como fator primo e, logo, não é primo.

Referências

- [1] ÁVILA, G.S.S. “Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci”. *RPM* 6, 1985.
- [2] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Coleção Projeto Euclides, SBM, 2017.
- [3] STILLWELL, J. *Elements of Algebra – Geometry, Numbers, Equations*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2001.
- [4] WAGNER, E. “O Símbolo da SBM”. *RPM* 20, 1992.

José Gilvan de Oliveira
DMAT/UFES
<jgilvanol@gmail.com>

Moacir Rosado Filho
DMAT/UFES
<moacir@ele.ufes.br>

Domingos Sávio Valério Silva
DMAT/UFES
<dsvaleriosilva@gmail.com>

Recebido: 23/09/2020
Publicado: 21/05/2021

Uma abordagem para o princípio da casa dos pombos no Ensino Fundamental através da resolução de problemas

Simone da Silva Martins 

Luciane Gobbi Tonet 

Fabiane Cristina Höpner Noguti 

Resumo

Este trabalho apresenta os resultados da aplicação de uma sequência didática, criada a partir de três atividades, que utilizam a Resolução de Problemas como forma de abordar o Princípio da Casa dos Pombos no nono ano do Ensino Fundamental. A dificuldade das questões elaboradas aumenta gradativamente, de forma que a primeira atividade utiliza material concreto, a segunda apresenta questões relacionadas ao cotidiano dos alunos e que exigem abstração, e a terceira e última atividade é um desafio bem mais complexo adaptado do Banco de Questões da Obmep. O objetivo desta proposta é mostrar como o estudo deste princípio, de enunciado tão simples, pode trazer benefícios para a aprendizagem dos alunos, especialmente no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio lógico. Este artigo é proveniente da dissertação de mestrado de Martins (2019) [8] pelo Profmat – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Princípio da Casa dos Pombos; Resolução de Problemas

Abstract

This paper presents the result of the application of a didactic sequence, created from three activities, which use Problem Solving as a way to approach the Pigeonhole Principle in the ninth grade of Elementary School. The difficulty of the proposed activities increases gradually so that, the first activity uses concrete material, the second is related to students' everyday issues and require abstraction, and the third and last activity is a much more complex challenge. The goal of this work is to show how the study of this principle, with such a simple statement, can bring benefits for students' learning, especially with regard to the development of logical reasoning. This is a paper from the master's dissertation of Martins (2019) [8] from PROFMAT - Professional Master in Mathematics on National.

Keywords: Math Education, Pigeonhole Principle, Problem Solving

1. Introdução

O Princípio da Casa dos Pombos normalmente não é um conteúdo trabalhado no Ensino Básico, ficando restrito ao Ensino Superior e cursos preparatórios para concursos. No entanto, Brasil (2018) [4] apresenta como competência da disciplina de matemática o desenvolvimento do raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de argumentação, habilidades essas que podem ser desenvolvidas por meio desse conteúdo.

Além disso, a simplicidade de seu enunciado, aliada à inexistência de fórmulas complexas, torna-o uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas dos mais variados níveis de dificuldade. Por esse motivo, acredita-se que esse conteúdo possa ser utilizado para despertar o interesse do aluno pela matemática, desmistificando um pouco a disciplina e auxiliando no desenvolvimento das habilidades previstas para esse componente curricular.

Para tanto, este trabalho apresenta uma proposta de atividade que utiliza a Resolução de Problemas e a manipulação de material concreto com o objetivo de desenvolver gradualmente a compreensão do Princípio da Casa dos Pombos com alunos de Ensino Fundamental.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [3], a Resolução de Problemas deve ser considerada como uma orientação para o ensino, já que possibilita a aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. Através dela o aluno constrói conceitos articulados com outros conceitos, dando um maior sentido ao conteúdo estudado.

Neste trabalho foi dado um enfoque especial ao ensino da matemática no Ensino Fundamental, apresentando, além de uma proposta de estudo para o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas, uma análise dessa execução. Tal perspectiva retrata um diferencial, pois, analisando as dissertações apresentadas até o momento ao Profmat – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, que abordam o Princípio da Casa dos Pombos, é possível perceber que a maior parte delas apresenta propostas de atividades ou relatos de experiências direcionados aos conteúdos do Ensino Médio, como pode ser observado em [16, 1, 11, 5, 13]. Outras trazem diferentes aplicações do princípio, servindo de suporte a professores que desejam abordar o conteúdo em suas aulas, como em [14, 9].

Este artigo está estruturado da seguinte forma: na segunda seção o Princípio da Casa dos Pombos é enunciado, e, na sequência, encontra-se um breve relato histórico sobre a Resolução de Problemas. Na terceira seção são descritas a metodologia adotada e as três atividades elaboradas para o nono ano do Ensino Fundamental com o propósito de explorar o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas. Na quarta seção são expostas algumas resoluções dos problemas propostos, bem como os resultados das aplicações das atividades. A quinta seção reproduz as considerações finais nas quais implementam-se sugestões para futuras aplicações da proposta.

2. Referencial Teórico

Nesta seção, apresenta-se a fundamentação teórica do Princípio da Casa dos Pombos e um breve estudo sobre o ensino através da Resolução de Problemas.

2.1. Princípio da Casa dos Pombos

O Princípio da Casa dos Pombos, o qual será denominado daqui em diante por PCP, também é conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet, Princípio das Gavetas ou até mesmo Princípio de Dirichlet. De acordo com [6], o matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1839) tem seu nome associado ao princípio por ter sido o primeiro matemático a utilizar esse método para resolver problemas não triviais.

Segue, então, seu enunciado:

Teorema 1. *Dadas n casas e $n+1$ pombos pode-se afirmar que se forem distribuídos os pombos nas casas, pelo menos uma casa ficará com mais de um pombo.*

A seguir, um dos problemas que constituem a proposta deste trabalho ilustra sua aplicação.

Exemplo: Em uma caixa há cinco bolas azuis, três amarelas, três vermelhas e duas verdes misturadas. Retirando uma bola de cada vez, quantas bolas devem ser retiradas no mínimo para que se possa afirmar que pelo menos duas têm a mesma cor?

Nesse caso, considera-se que o número de casas é igual ao número de cores, isto é, $n=4$. O número de pombos corresponde ao número de bolinhas. Como se quer uma repetição, deve-se ter $n+1=5$ pombos. Portanto, retirando-se cinco bolinhas é possível afirmar que, pelo menos, duas serão da mesma cor.

O resultado a seguir apresenta o Princípio Geral da Casa dos Pombos. Neste caso, basta considerar $k=1$ para retornar ao PCP usual.

Teorema 2. *Dadas n casas e $nk+1$ pombos, pode-se afirmar que em pelo menos uma das casas haverá $k+1$ pombos.*

Na maioria das vezes, a grande dificuldade em se resolver questões que envolvam o PCP está em distinguir o que deve ser considerado como “casa” e o que deve ser considerado como “pombos”. Após feita essa identificação, praticamente não há maiores problemas em se aplicar o princípio. Como exemplo, outro problema que constitui essa proposta é apresentado.

Exemplo: Na nossa escola há 13 turmas dos anos finais do Ensino Fundamental. Será realizado um sorteio para selecionar 40 desses alunos para representar a escola em uma gincana. A partir de qual sorteado será possível afirmar que há pelo menos dois alunos sorteados de uma mesma turma?

O fato de uma das informações fornecidas não ser relevante para a resolução do problema pode gerar confusão na identificação de “casas” e “pombos”, considerando o público-alvo das atividades. Neste caso, o número de casas é dado pelo número de turmas, ou seja, $n=13$. Os pombos representam os alunos. Como se quer dois em alguma das casas, são necessários, pelo menos, $n+1 = 13+1 = 14$ pombos. Portanto, a partir do 14º sorteado é possível afirmar que haverá pelo menos dois alunos de uma mesma turma.

2.2. Resolução de Problemas

Baseada na Teoria Significativa, de William Brownell, a partir da segunda metade da década de 1930 a ênfase do ensino de Matemática passou a ser sobre o desenvolvimento da aprendizagem e não somente sobre o resultado final, como era considerada anteriormente. Neste sentido, a Resolução de Problemas começou a despontar como uma teoria que vai ao encontro dessa demanda. Ela foi desenvolvida, inicialmente, pelo matemático e pesquisador George Polya, que a difundiu através do livro *A arte de resolver problemas*. Esta obra foi publicada em 1945 e é um dos livros mais vendidos do mundo moderno [10, 15].

No entanto, foi somente a partir de 1980 que a Resolução de Problemas passou a integrar os currículos como uma proposta de aprendizagem, inicialmente nos Estados Unidos e após expandindo-se para outros países ao redor do mundo. Foi nesse mesmo ano que o NCTM¹ dos EUA publicou um documento chamado “An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980’s”, contendo recomendações para o ensino da matemática, dentre as quais indicava que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar durante a década de 1980 [3, 2, 10].

¹National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional dos Professores de Matemática)

Na metodologia de ensino através da Resolução de Problemas, os conteúdos matemáticos são trabalhados a partir de um problema previamente escolhido pelo professor com a finalidade de motivar a aprendizagem. Neste tipo de abordagem, os conteúdos tornam-se ferramentas para a resolução do problema proposto, o qual atribui mais sentido ao que está sendo estudado.

Segundo Onuchic e Allevato (2011, p.80)[12] “Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo coconstrutores de seu próprio conhecimento, e os professores, os responsáveis por conduzir esse processo”.

Propiciar ao aluno a oportunidade de se tornar ativo e responsável pelo próprio aprendizado aumenta sua autoestima. Ao resolver o problema, o aluno apropria-se de suas habilidades matemáticas, ocorrendo então um empoderamento em relação à disciplina.

De acordo com a BNCC, a Resolução de Problemas é uma estratégia para a aprendizagem que pode ser implementada ao longo do Ensino Fundamental como forma de auxiliar no desenvolvimento de competências como o raciocínio lógico, representação, comunicação e argumentação.

Da mesma forma, os PCN [3] apresentam a Resolução de Problemas como um dos caminhos possíveis para “se fazer matemática” em sala de aula, atribuindo ao aluno o papel de protagonista na construção de sua aprendizagem.

Por acreditar nos benefícios advindos desse tipo de estratégia, no que se refere a esta proposta, as atividades elaboradas com a finalidade de estudar o PCP estão baseadas no ensino através da Resolução de Problemas, atendendo a demanda dos documentos norteadores da educação básica brasileira.

3. Metodologia

Esta pesquisa foi realizada na forma de um estudo de caso no qual as atividades elaboradas foram aplicadas em uma turma do 3º ano do 3º ciclo, correspondente ao 9º ano do Ensino Fundamental, da Escola Municipal de Ensino Fundamental Vereador Antônio Giúdice, localizada em Porto Alegre/RS. Ela integra a dissertação de mestrado de Martins (2019) [8], defendida em agosto do mesmo ano da publicação, na Universidade Federal de Santa Maria, e na qual é possível encontrar mais detalhes sobre aplicação realizada.

3.1. Descrição dos Sujeitos da Pesquisa

A escola onde ocorreu a aplicação da proposta atende, em grande maioria, alunos de baixa renda, muitos deles em situação de vulnerabilidade social.

As atividades foram desenvolvidas em uma das turmas regulares da primeira autora deste artigo, composta por 32 alunos que frequentavam as aulas no turno da manhã. Salienta-se que um deles era portador de necessidades educativas especiais devido ao comprometimento cognitivo causado pelas crises de epilepsia que sofreu quando ainda era bebê.

Quase todos os estudantes já haviam sido alunos regulares da professora em anos anteriores, o que garantia um vínculo afetivo entre os mesmos. Era habitual a perda de alguns minutos no início das aulas devido à conversa entre os alunos. Entretanto, eles costumavam se comprometer com as atividades propostas nas aulas de matemática, apresentando boa produção.

3.2. Propostas de Atividades

Na primeira atividade foram propostos problemas que envolviam o PCP e que eram passíveis de representação por meio de material concreto. Os alunos formaram grupos de três a quatro integrantes. Neste contato inicial, não havia exigência de rigor matemático relacionado ao conteúdo. No decorrer da aula, composta por 2 períodos de 45 minutos, era esperado que os alunos conseguissem responder as perguntas propostas através da manipulação do material e da interação entre eles próprios e que, no decorrer do processo, começassem a realizar abstrações, diminuindo a necessidade de manipular material concreto.

Na segunda atividade, os problemas propostos abordavam temas relacionados com a realidade dos alunos, tais como data de nascimento e dias da semana. Nesta etapa, não foram mais utilizados materiais concretos e mantiveram-se os grupos formados na aula anterior. Almejava-se que depois da primeira aula utilizando o material concreto, os alunos conseguissem abstrair e generalizar a estratégia de resolução, respondendo a problemas mais complexos.

Na terceira atividade foi proposto um problema que exigiu abstração e compreensão do PCP. Era esperado que, após as duas primeiras aulas, os alunos conseguissem, dessa vez sem a interação em pequenos grupos, solucionar uma questão mais complexa, proposta no sentido de desafio.

Em cada uma das atividades foi entregue uma folha, contendo o enunciado dos problemas, para que os alunos pudessem registrar suas respostas individualmente. Durante a aplicação, a professora circulou pela sala, tentando auxiliar na resolução por meio de perguntas, instigando, mas sem fornecer o resultado. A avaliação foi realizada no decorrer da aula, a partir da observação da ação dos alunos mediante os problemas propostos e também posteriormente, através da análise dos registros de cada aluno. Considera-se que a atividade foi positiva, pois os alunos mostraram-se motivados e conseguiram aplicar o PCP em diferentes situações do cotidiano, respondendo a maioria dos problemas propostos corretamente. A seguir serão descritos os problemas que foram disponibilizados aos alunos.

3.2.1 Problemas Propostos para a Atividade 1

Salienta-se que os problemas aqui destacados foram especialmente elaborados para esta atividade.

A) Dentro de um estojo há quatro canetas pretas, cinco canetas azuis, duas vermelhas e uma verde. Distribuindo aleatoriamente as canetas desse estojo para que um grupo de pessoas assine um cartão de aniversário para um amigo, e considerando que não haverá trocas de canetas e cada um assinará com a cor que receber, quantas canetas devem ser distribuídas, no mínimo, para se ter certeza de que duas dessas pessoas assinarão o cartão com a mesma cor?

B) Quantas cartas devem ser retiradas aleatoriamente de um baralho embaralhado, para se ter certeza de que pelo menos três das cartas retiradas tenham naipes iguais?

C) No refeitório da escola estão sendo oferecidas três opções de fruta para lanche, banana, maçã e melancia. Em uma das turmas vai um aluno de cada vez retirar seu lanche. Quantos alunos devem ir ao refeitório para que se possa afirmar que dois alunos, pelo menos, escolheram a mesma fruta?

D) Em uma caixa há cinco bolas azuis, três amarelas, três vermelhas e duas verdes misturadas. Retirando uma bola de cada vez, quantas bolas devem ser retiradas no mínimo para que se possa afirmar que pelo menos duas têm a mesma cor?

E) Em um envelope há cartões verdes e laranjas. Quantos cartões devem ser retirados do envelope para que se tenha pelo menos três cartões da mesma cor?

F) Uma escola dispõe de quatro cores de tintas para pintar suas salas de aulas, rosa, amarelo, azul e lilás. Cada sala de aula será pintada na cor mais votada por cada turma. Para conferir a pintura, a diretora fará vistoria sala por sala. Em quantas salas ela deverá entrar, no mínimo, para encontrar duas salas pintadas com a mesma cor?

G) Em uma loja há camisetas de duas cores distintas para serem vendidas (branca ou preta). Quantas camisetas devem ser vendidas, no mínimo, para que seja possível afirmar que foram vendidas três camisetas da mesma cor?

A Figura 1 ilustra os materiais utilizados para esta atividade.



Figura 1: Material utilizado para ilustração dos problemas da atividade 1

Para a ilustração do problema A foi disponibilizado um estojo com o mesmo número e cores de canetas mencionadas no enunciado. Para o problema B, um baralho de cartas. Para a ilustração do problema C foram disponibilizadas figurinhas com desenhos das frutas oferecidas no refeitório. Para o problema D, uma caixa com bolinhas nas mesmas cores e quantidades mencionadas no enunciado. Para o problema E foi disponibilizado um envelope contendo diversos cartões verdes e laranjas. Para o problema F, uma planta baixa do prédio da escola e quatro cores de tintas diferentes, e, para o problema G, diversas miniaturas de camisetas brancas e pretas confeccionadas em papel.

3.2.2 Problemas Propostos para a Atividade 2

Novamente, destaca-se que os problemas aqui listados foram especialmente elaborados para tal atividade.

1) Conte o número de alunos presentes na sala hoje.

a) Quantos alunos, no mínimo, é possível afirmar que fazem aniversário no mesmo mês?

- b) Quantos alunos, no mínimo, é possível afirmar que farão (ou já fizeram) aniversário em um mesmo dia da semana neste ano?
- 2) Se for realizada uma votação para escolher o professor conselheiro da turma, em um grupo de dez professores, quantos alunos devem votar, no mínimo, para que se possa afirmar que um professor recebeu dois votos?
- 3) Em um grupo de três alunos é possível afirmar que há, no mínimo, quantas pessoas do mesmo sexo?
- 4) Quantas pessoas deveriam ter na sala para que se possa afirmar que, pelo menos, duas nasceram em um mesmo dia? (não necessariamente no mesmo mês. Exemplo: 17 de agosto e 17 de janeiro)
- 5) Será feita uma gincana na escola. Haverá cinco equipes nas quais os alunos poderão se inscrever. Supondo que ordenadamente os alunos da turma escolham a sua equipe, a partir de qual aluno será possível afirmar que haverá dois alunos da turma em uma mesma equipe?
- 6) Na nossa escola há 13 turmas dos anos finais do Ensino Fundamental. Será realizado um sorteio para selecionar 40 desses alunos para representar a escola em uma gincana. A partir de qual sorteado será possível afirmar que há pelo menos dois alunos sorteados de uma mesma turma?

3.2.3 Problema Proposto para a Atividade 3

O problema proposto nesta atividade foi adaptado da Questão 10 do nível 3 do Banco de Questões da Obmep de 2016.

Uma urna contém k bolas marcadas com k , para todo $k = 1, 2, \dots, 2019$. Ou seja, há uma bola com o número 1, duas bolas com o número 2 e assim sucessivamente. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar, sem reposição e sem olharmos as bolas, para termos certeza de que teremos 12 bolas com o mesmo número? [?]

4. Resultados e Discussão

Na sequência são expostas algumas resoluções apresentadas, bem como um relato da aplicação das atividades descritas na seção anterior.

4.1. Atividade 1

No dia em que a atividade 1 foi aplicada, 28 alunos estavam presentes. A maioria escutou com atenção as orientações e se mostrou empolgada com a proposta. O tempo planejado de dois períodos para a execução da atividade foi suficiente, embora alguns alunos não a tenham finalizado. Ressalta-se que, nestes casos, foram a falta de comprometimento e distração que prejudicaram o andamento da tarefa.

Alguns alunos destacaram-se na aula, compreendendo rapidamente o raciocínio necessário para a resolução dos problemas e auxiliando os demais colegas. Ao longo da aula, a necessidade da manipulação do material concreto foi diminuindo, o que atendeu a expectativa das autoras para esse momento. No final da mesma, muitos alunos mostraram seu progresso ao descartar o uso do material concreto e realizar abstrações sobre as situações propostas nos problemas.

Dezesseis alunos responderam todas as questões, o que representa pouco mais da metade da turma. A maioria dos 12 alunos remanescentes entregou a folha de respostas faltando poucas questões. Apenas dois alunos entregaram a atividade em branco. Um deles afirmou não ter compreendido que cada aluno deveria entregar a sua atividade individualmente. O outro, portador de necessidades educativas especiais, não estava disposto nesse dia, embora tivesse condições de responder os problemas que estavam sendo propostos.

A seguir é realizada uma análise dos resultados apresentados pelos alunos. A Figura 2 ilustra uma das respostas fornecidas para o problema A.

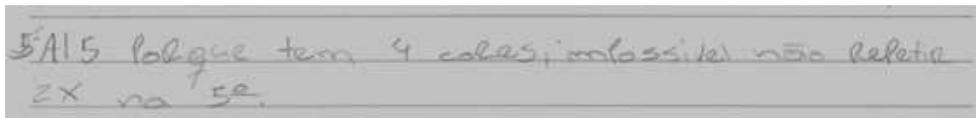


Figura 2: Resposta apresentada para o problema A

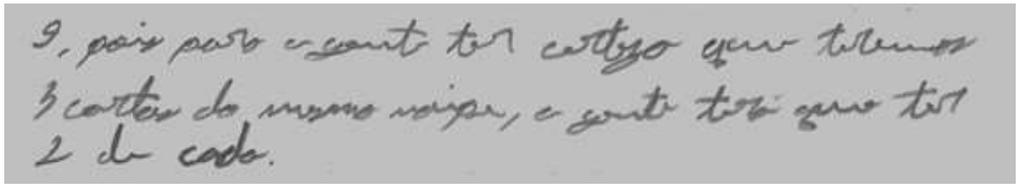
O aluno afirma que a resposta é “5 porque tem 4 cores, impossível não repetir 2x na 5ª”. Muitos alunos apresentaram justificativas semelhantes, o que demonstra que, embora não tenham sido apresentados formalmente ao PCP, eles conseguiram compreender a sua lógica através da manipulação do material concreto, da interação entre os colegas dentro dos grupos e pelos questionamentos da professora.

Na Tabela 1 são apresentadas informações quantitativas sobre o êxito dos alunos em suas resoluções.

Problema	Número de alunos que responderam	Número de respostas corretas	Percentual de acerto entre os que responderam
A	21	21	100%
B	20	16	80%
C	26	25	96,1%
D	21	18	85,7%
E	21	18	85,7%
F	26	26	100%
G	21	17	80,9%

Tabela 1: Dados quantitativos das respostas apresentadas na atividade 1.

Durante a aplicação da atividade 1, observou-se que os alunos apresentaram mais dificuldades nos problemas B, E e G, todos relacionados com o Princípio Geral da Casa dos Pombos. Isso se confirma quando analisamos os resultados apresentados na Tabela 1. Além disso ressalta-se a grande dificuldade apresentada pelos alunos no que se refere a justificar adequadamente a solução para esses problemas, como ilustra a Figura 3.



9, pois para a gente ter certeza que teremos 3 cartas do mesmo naipe, a gente terá que ter 2 de cada.

Figura 3: Resposta apresentada para o problema B

O aluno afirma que são “9, pois para a gente ter certeza que teremos 3 cartas do mesmo naipe, a gente terá que ter 2 de cada”. Embora o resultado esteja correto, sua justificativa é bastante confusa, situação recorrente nesses problemas.

Nos problemas A e F os alunos apresentaram mais facilidade, respondendo-os corretamente. Ambos abordam o caso usual do PCP.

Considerando os percentuais de acerto apresentados na Tabela 1, é possível afirmar que os alunos apresentaram bom desempenho na atividade 1.

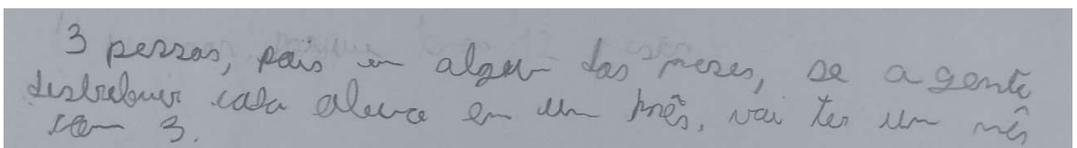
Houve uma boa receptividade dos alunos à aula, percebida inclusive pelos comentários de “muito legal essa aula” no final do período.

4.2. Atividade 2

Muitos alunos iniciaram a aula questionando se uma continuidade à aula anterior seria dada. Estavam presentes 26 alunos neste dia. Novamente, dois alunos não entregaram a atividade, não sendo os mesmos da aula anterior. Todos os demais responderam-na completamente, e a grande maioria mostrou-se empenhada. O tempo planejado de dois períodos para a atividade foi suficiente e adequado.

Mais uma vez, alguns alunos destacaram-se e responderam rapidamente quase sem auxílio da professora. Outros alunos tiveram mais dificuldades, especialmente na primeira questão, a qual abordava o caso geral do princípio.

Em diversos momentos, foi necessário que a professora auxiliasse com questionamentos que favorecessem a compreensão. Por exemplo, para auxiliar na resolução do problema 1 (a), a professora indagou se era possível que, em um grupo de 12 pessoas, cada uma delas fizesse aniversário em um mês diferente das demais. Na sequência, os alunos eram questionados sobre o que aconteceria se houvesse uma pessoa a mais nesse grupo. Dezenove alunos responderam corretamente este problema e a Figura 4 ilustra uma das justificativas apresentadas.



3 pessoas, pois em algum das meses, se a gente distribuir cada pessoa em um mês, vai ter um mês com 3.

Figura 4: Resposta apresentada para o problema 1(a)

O aluno afirma que são necessárias “3 pessoas, pois em algum dos meses, se a gente distribuir cada aluno em um mês, vai ter um mês com 3.”. Esse exemplo confirma a dificuldade apresentada pelos alunos em justificar adequadamente as soluções dos problemas relacionados com o Princípio Geral da Casa dos Pombos.

Os problemas 3, 5 e 6, abordando o caso usual do PCP, foram respondidos corretamente por todos os alunos. A Figura 5 ilustra uma das respostas apresentadas para o problema 5.

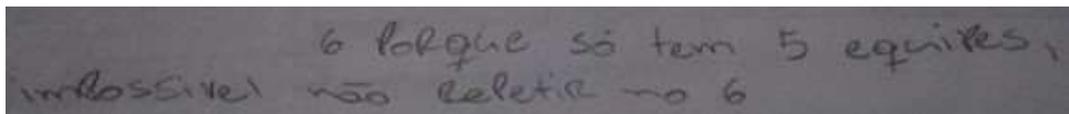


Figura 5: Resposta apresentada para o problema 5

Neste caso o aluno responde “6 porque só tem 5 equipes, impossível não repetir no 6” o que demonstra boa compreensão e clareza na justificativa.

A Tabela 2 apresenta informações quantitativas das respostas observadas na aplicação da atividade 2.

Problema	Número de alunos que responderam	Número de respostas corretas	Percentual de acerto entre os que responderam
1A	24	19	79,1%
1B	24	12	50%
2	24	22	91,6%
6	24	24	100%
4	24	19	79,1%
5	24	24	100%
6	24	24	100%

Tabela 2: Dados quantitativos das respostas apresentadas na atividade 2.

Embora não houvesse a obrigatoriedade de responder os problemas na ordem em que apareciam, a maioria dos alunos assim o fez. Como o nível de dificuldade era similar, é possível pressupor que o nível de compreensão foi aumentando no decorrer da aula, já que as últimas duas questões não apresentaram erros.

Conforme a Tabela 2, o problema 1, versando sobre o caso geral do PCP, apresentou o menor índice de acerto. Ressalta-se que nos problemas 1 e 3 são fornecidos os dados necessários para se determinar o número de repetições decorrentes, o que os difere dos demais problemas propostos. No entanto, o problema 3 aborda o PCP usual e, todos os alunos que responderam o fizeram corretamente. Essa análise reforça a dificuldade apresentada pelos alunos relacionada ao caso geral do PCP.

No geral, os alunos apresentaram muitas dúvidas no início da aula, mas evoluíram bem no decorrer da mesma e, no final, já conseguiam responder as perguntas corretamente e sem auxílio, demonstrando compreensão da lógica presente nos problemas. Com exceção do item b do problema 1, é possível afirmar que os alunos apresentaram bom desempenho na atividade 2.

4.3. Atividade 3

A aula iniciou retomando as questões das aulas anteriores, enfatizando que todos os problemas trabalhados, inclusive o desafio que seria proposto na sequência, abordavam a mesma lógica. A fim de auxiliá-los na resolução do desafio, perguntou-se: quantas pessoas são necessárias em um grupo para que se possa afirmar que, pelo menos, quatro delas fazem aniversário em um mesmo mês?

No quadro, foram descritas todas as possibilidades de meses. Imaginando um grupo formado por 12 pessoas, distribuiu-se cada uma em um mês diferente e se questionou se aquela situação seria possível. O grupo foi ampliado de tal forma que cada mês ficasse com exatamente três pessoas. No que segue, discutiu-se sobre o que aconteceria se esse grupo tivesse uma 37ª pessoa. Concluiu-se que o número de pessoas necessárias em um grupo para que se possa afirmar que, pelo menos, quatro delas façam aniversário em um mesmo mês é

$$37 = 36 + 1 = 12 \cdot 3 + 1 \quad (1)$$

Na sequência, a professora leu o enunciado do desafio para a turma, informando que ele era realmente mais complexo que os demais, necessitando, possivelmente, de mais empenho por parte de cada um. A maior parte da turma encarou o desafio com seriedade e tentou resolvê-lo. Tanto que o tempo de 1 período estipulado inicialmente para a atividade precisou ser ampliado para 2 períodos.

Explicou-se o que o problema pedia e um desenho ilustrativo das bolinhas, semelhante ao da Figura 6, foi feito no quadro.

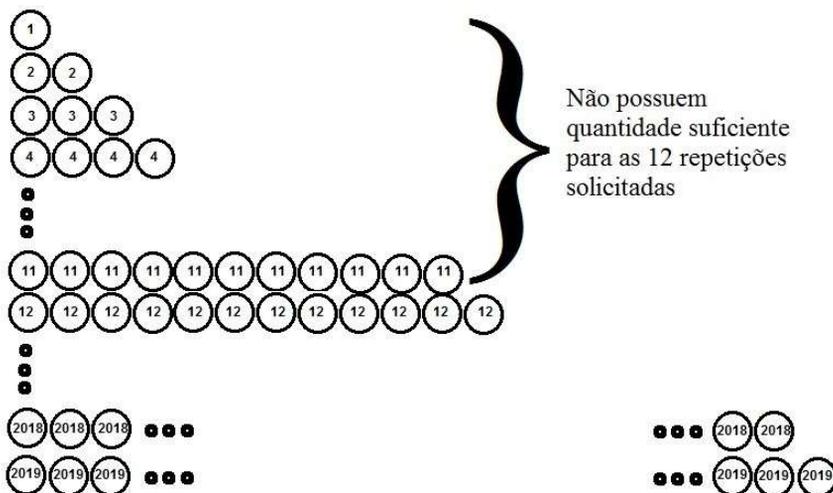


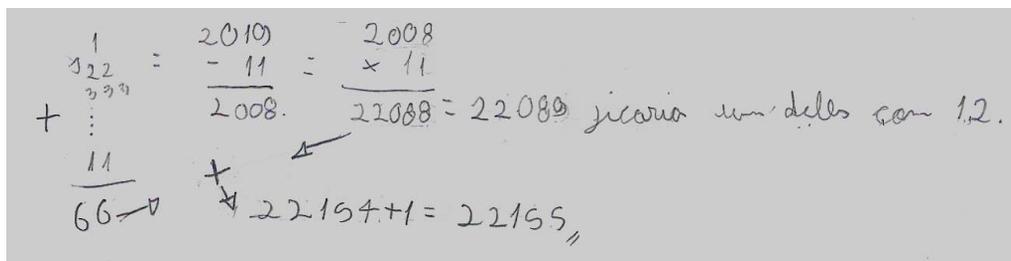
Figura 6: Ilustração do desafio feito no quadro

Foi explicado que as primeiras bolinhas não tinham quantidade suficiente para serem repetidas 12 vezes, no que se sugeriu separar o exercício em dois casos. As bolinhas de 1 a 11, que não poderiam se repetir 12 vezes, seriam o primeiro caso e, as bolinhas de 12 a 2019, que poderiam se repetir

12 vezes, o segundo caso. Reforçou-se que o cálculo do segundo caso era semelhante ao exemplo inicial da aula.

Nove alunos entregaram a atividade em branco, o que não é considerado ruim, dada a complexidade do problema proposto e que alguns desses fizeram isso após algumas tentativas inconclusivas. Ressalta-se que mais de um aluno pediu que a resolução do desafio fosse explanada na aula seguinte.

Dos 16 alunos que entregaram algo escrito, seis respostas destacaram-se. Três chegaram muito perto do resultado, apresentando um raciocínio próprio ou seguindo as dicas dadas. Outros três acertaram o problema completamente, dois deles seguindo as dicas e um terceiro usando uma estratégia própria. A Figura 7 ilustra uma das respostas apresentadas ao desafio.



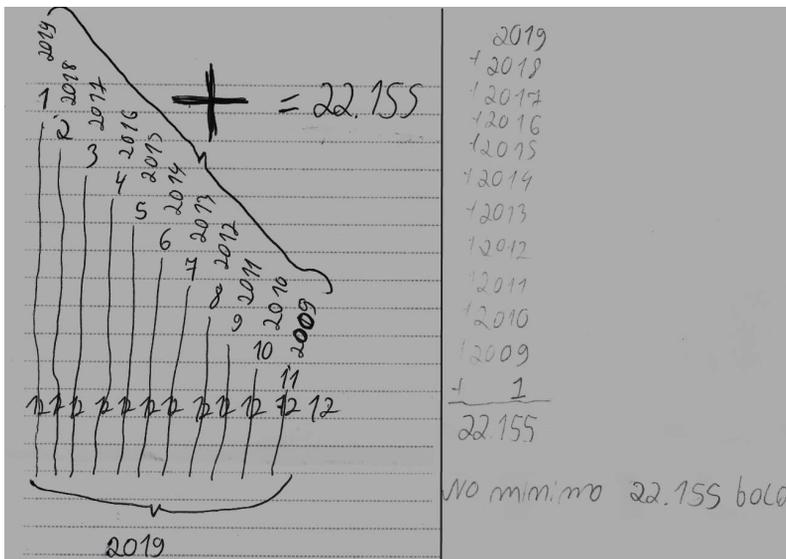
$$\begin{array}{r}
 1 \\
 122 \\
 333 \\
 \vdots \\
 11 \\
 \hline
 66 \rightarrow
 \end{array}
 = \frac{2019}{-11} = \frac{2008}{\times 11}$$

$22088 - 11 = 22077$ jicaria um deles com 12.
 $22077 + 11 = 22088$
 $22154 + 1 = 22155$

Figura 7: Resposta correta apresentada ao desafio

Percebe-se que, neste caso, o aluno contou as bolinhas com numeração inferior a 11 e aplicou o PCP nas bolinhas com numeração superior, seguindo assim a sugestão da professora para obter o resultado correto.

Outro aluno que apresentou resultado correto utilizou uma estratégia própria bastante interessante, conforme ilustra a Figura 8.



$$\begin{array}{l}
 2019 \\
 2018 \\
 2017 \\
 2016 \\
 2015 \\
 2014 \\
 2013 \\
 2012 \\
 2011 \\
 2010 \\
 2009
 \end{array}
 + = 22.155$$

No minimo 22.155 bolo

Figura 8: Resposta correta apresentada ao desafio

Esse aluno explicou sua estratégia oralmente, na qual se baseia a descrição a seguir. Suponha que sejam retiradas todas as primeiras bolinhas de todos os números. Isso corresponde a 2019 bolinhas. Depois retiram-se todas as segundas bolinhas de cada. Como a bolinha 1 não possui segunda bolinha, são 2018 segundas bolinhas. Após retirar todas as 2017 terceiras bolinhas de cada número, repete-se esse processo até que sejam retiradas todas as 11 bolinhas de todas as bolinhas, que serão 2009. A próxima bolinha a ser retirada certamente será a 12^a bolinha de alguma das bolinhas. O resultado será então a soma de todos esses valores de bolinhas retiradas.

$$2019 + 2018 + 2017 + \dots + 2009 + 1 = 22155 \quad (2)$$

Em geral os alunos solicitaram bastante auxílio no decorrer da aula. Nesses momentos eram informados se estavam no caminho certo ou se mudanças em suas estratégias faziam-se necessárias. Essa orientação sempre era feita através de questionamentos.

Considerando a complexidade do problema e que originalmente o mesmo era destinado a alunos do Ensino Médio (Nível 3 – Obmep) avalia-se que os resultados apresentados foram bastante satisfatórios.

5. Considerações Finais

O propósito desse artigo consiste em apresentar uma maneira de introduzir o Princípio da Casa dos Pombos no Ensino Fundamental, de forma a valorizar o aprendizado desses alunos e tornar a aula de matemática mais interessante.

O grande diferencial dessa pesquisa está no fato de que a sua aplicação ocorreu em uma turma regular do Ensino Fundamental e não em um grupo de estudantes selecionados formando uma sala de aula irreal. Isso fez com que aparecessem situações adversas e muito comuns em qualquer sala de aula, tais como os alunos que entregaram a atividade em branco, os que não compreenderam a proposta e não expuseram suas dúvidas e os que faltaram e perderam a sequência do trabalho.

No entanto, mesmo com as dificuldades, avalia-se que a aplicação da proposta foi muito positiva. Os alunos mostraram-se motivados e a interação dentro dos pequenos grupos favoreceu a resolução dos problemas que eram propostos. Por isso, considera-se que a Resolução de Problemas foi uma ótima estratégia de ensino.

Durante a aplicação das atividades uma dificuldade maior foi percebida nos exercícios que envolviam o caso geral do Princípio da Casa dos Pombos, para os quais os índices de acertos foram menores. Com base nisso, sugere-se que, em uma próxima aplicação, a primeira atividade seja dividida em duas partes. A primeira parte destinada somente a exercícios sobre o caso usual do princípio, para que assim os alunos consigam fixar melhor o conceito antes de executar os exercícios sobre o caso geral, para o qual seria dedicada a segunda parte da atividade. Para tanto, recomenda-se acrescentar outros exercícios em cada uma dessas partes, ampliando o tempo de aplicação da proposta. Também sugere-se finalizar a atividade 2 com o problema inicial, já que este é o único que aborda o caso geral do Princípio da Casa dos Pombos nessa atividade.

Embora a proposta tenha sido elaborada para um nono ano, acredita-se que ela possa ser executada em outros anos do Ensino Fundamental.

Tendo em vista a análise apresentada, considera-se que a proposta de atividade presente neste trabalho atingiu os objetivos almejados, conseguindo estimular os alunos ao aprendizado e sendo muito gratificante aos envolvidos.

Referências

- [1] Aguiar, T. P. *Princípio da casa dos pombos: uma abordagem diferenciada com objetos de aprendizagem*. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.
- [2] Allevaro, N. S. G.; Onuchic, L. R. *Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?* In: Onuchic, L. R.; Allevaro, N. S. G.; Noguti, F. C. H.; Justulin, A. M. (orgs). *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 35-52.
- [3] Brasil, Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1997.
- [4] Brasil, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 17/03/2020.
- [5] Costa, A. L. B. *O Ensino do Princípio das Casas dos Pombos no Ensino Básico*. Dissertação (mestrado) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.
- [6] Holanda, B. *Princípio da Casa dos Pombos I*. Programa Olímpico de Treinamento. Curso de Combinatória Nível 2, 2012. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2014/02/Aula07-PCPI_bruno.pdf>. Acesso em: 27/03/2019.
- [7] IMPA/OBMEP. *Banco de questões 2016*. Rio de Janeiro, Impa, 2016.
- [8] Martins, S. S. *Uma Abordagem para o Princípio da Casa dos Pombos no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas*. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.
- [9] Moraes Júnior, O. F. *O Princípio da Casa dos Pombos e a Contagem Dupla*. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.
- [10] Moraes, R. S.; Onuchic, L. R. “Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas”. In: Onuchic, L. R.; Allevaro, N. S. G.; Noguti, F. C. H.; Justulin, A. M. (orgs). *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 17-34.
- [11] Muniz Júnior, C. A. *Matemática Discreta: Médias e Princípio das Gavetas*. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.
- [12] Onuchic, L. R.; Allevaro, N. S. G. “Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas”. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.
- [13] Pacífico, T. M. *O Princípio das Gavetas de Dirichlet – Problemas e Aplicações*. Dissertação (mestrado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.
- [14] Paiva, V. B. *Sobre Pombos e Gavetas*. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Federal de São João del-Rei, 2014.
- [15] Polya, G. *A Arte de Resolver Problemas*. 1945. Título em inglês: “How to solve it: a new aspect of mathematical method”. Tradução de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- [16] Zonta, C. A. *O Princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de matemática com metodologia ativa de aula invertida*. 2019. 66f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, Três Lagoas, 2019.

Simone da Silva Martins
Universidade Federal de Santa Maria
<simonesmartins86@gmail.com>

Luciane Gobbi Tonet
Universidade Federal de Santa Maria
<lucianegobbi@yahoo.com.br>

Fabiane Cristina Höpner Noguti
Universidade Federal de Santa Maria
<fchnoguti@gmail.com>

Recebido: 02/10/2020
Publicado: 21/05/2021

Pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma proposta de aplicativo

Vagner Campeão¹ 

Túlio Oliveira de Carvalho 

Resumo

Neste artigo, apresentamos um produto para o desenvolvimento do pensamento algébrico: o aplicativo Algebrizar. Sua construção baseou-se nas competências e habilidades requeridas pela Base Nacional Comum Curricular para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, aliadas à Estratégia de Investigação Matemática. As situações lúdicas são contempladas, pois o aplicativo possui o formato de um jogo, guiando o aluno através de trilhas e pontuações. O aplicativo procura incentivar a participação dos alunos nos momentos de reflexão, uma vez que, dentro do próprio jogo, ele precisa refletir e responder a algumas questões criadas com a intenção de promover um momento de diálogo e discussão em sala, situação que será conduzida pelo professor durante a investigação.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico; Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Investigação Matemática.

Abstract

We report on an applet for the development of algebraic thinking, named Algebrizar. Its construction was based on the competences and skills required by the official Base Nacional Comum Curricular for the early years of elementary school, combined with the strategy of Mathematical Investigation. The playful situations, which are also essential in the early years, are met through the use of the Algebrizar applet, which may be viewed as a game, guiding the student through trails and scores. Algebrizar is designed to encourage participation in moments of reflection, since within the game itself the student needs to reflect on and answer some questions created with the intention of promoting a moment of dialogue and discussion in the classroom, a situation that will be conducted by the teacher during the investigation.

Keywords: Algebraic Thinking; Early Years of Elementary School; Mathematical Investigation.

1. Introdução

Por meio da observação constante da natureza é que o homem construiu a Matemática ao longo dos séculos, analisando o seu cotidiano e considerando problemas afetos à sua sobrevivência. A partir da necessidade de soluções, foram sistematizados registros, análises e estudos que enfim levaram a uma linguagem com símbolos próprios.

¹Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior - Capes durante o curso de Mestrado em Matemática pelo Programa Profmat.

A ação pedagógica no campo da matemática não tem sido satisfatória nos últimos anos, quando observamos os índices oficiais tais como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) apontando 71% de insuficiência na disciplina [1], posicionando-nos no 72º posto de um total de 79 países no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) [3]. A prática docente também permite a percepção da desmotivação e a desvalorização desta disciplina, tantas vezes sendo considerada muito difícil e para poucos. Isso se intensifica quando os temas da Álgebra são tratados, nos quais os alunos precisam lidar com o formalismo matemático e com símbolos.

Nesse estudo, partimos de uma análise da história do ensino da álgebra na Educação Básica. Por muito tempo, ela era inserida nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Estudos recentes apontam que esse campo da matemática poderia ser tratado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental recorrendo ao desenvolvimento do pensamento algébrico para, posteriormente, estar preparado para a sementeira da linguagem algébrica.

Em [7, p.40], descrevendo o ensino da álgebra no decorrer do tempo, os autores relatam que este esteve associado à memorização de fórmulas, ou mesmo de regras mecânicas que solucionam expressões algébricas sem aplicabilidade e sentido. No ensino da matemática na Educação Básica, a álgebra foi inserida nos currículos de forma isolada e sem ligação com as demais áreas que já se estudavam: geometria e aritmética. O ensino era de caráter mecânico, reprodutivo e sem clareza. Os autores afirmam:

o modo como a maioria dos professores ainda trabalha a álgebra – de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões – tal como ocorria há várias décadas, mostra que seu ensino não tem recebido a devida atenção. [7, p.40]

Mais recentemente, reporta-se em [4, p.4] a entrada conturbada da álgebra nos currículos escolares, no advento da Matemática Moderna, e que seu ensino desconexo tem causado repúdio nos alunos desde então. A resistência observada nos alunos quando o assunto é álgebra, principalmente por causa de sua linguagem, terá aqui uma proposta para ser contornada.

Este artigo propõe apresentar o aplicativo de nome *Algebrizar*, desenvolvido pelos autores, aliado à Investigação Matemática, a fim de encaminhar reflexões que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental alinhado à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) por meio das suas habilidades e competências do campo da álgebra. Os objetivos deste artigo são os seguintes:

- compreender as demandas de aprendizagem dos anos iniciais do ensino fundamental, 1º ao 5º ano, pautadas nas competências e habilidades da BNCC;
- explorar estudos a respeito do pensamento algébrico como requisito para a linguagem algébrica;
- propor a Metodologia de Investigação Matemática aliada ao uso das tecnologias, como forma de alcançar o pensamento algébrico, já que este requer diálogo e trocas;
- propor as tarefas e modos de uso do aplicativo *Algebrizar*, criado com a intenção prioritária de desenvolver o pensamento algébrico por meio de discussões e levantamento de hipóteses.

2. Fundamentação Teórica e Aspectos Metodológicos

Segundo [14, p.3], a álgebra é um conjunto de afirmações que caminham na produção de um significado em termos de números e operações aritméticas. É usada para expressar fatos genéricos, utilizando símbolos e códigos próprios manipuláveis, sendo essa uma de suas principais características. A leitura de uma expressão algébrica exige esforço para o entendimento do uso de símbolos, com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico. O autor conclui que o que fortemente diferencia a álgebra da aritmética são os objetivos. O da aritmética está na resposta única e numérica e o da álgebra é uma resposta geral afirmável para vários valores numéricos.

Um traçado da história do ensino da álgebra, separado em três concepções, pode ser encontrado em [5, p.83]:

Linguístico-pragmática: desde o século XIX até metade do século XX, a álgebra foi apenas um instrumento de resolução de problemas. Eram procedimentos mecânicos representados pelos transformismos algébricos² e isso era considerado suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de solucionar problemas matemáticos.

Fundamentalista-estrutural: a álgebra passa a ser a base de todos os outros campos da matemática. Tal concepção requereu que as estruturas e propriedades das operações, que justificam o transformismo algébrico, fossem ensinadas, acreditando que a partir daí o aluno teria aptidão para transpor esta habilidade a qualquer novo contexto que surgisse.

Fundamentalista-analógica: Há um retorno da álgebra como instrumento para a resolução de problemas, o que lhe atribui um valor prático, mas sem descartar a sua fundamentação, só que dessa vez recorrendo à geometria, ou seja, as justificativas das identidades algébricas pautaram-se em demonstrações geométricas, acreditando-se que a “álgebra geométrica” era didaticamente superior à abordagem simbólica.

A intenção de modificar o atual cenário do ensino da álgebra nas escolas brasileiras mostra-se presente em estudos e em regulamentos recentes, nos quais foram aprovadas mudanças na organização dos currículos. Atualmente, o documento norteador no Brasil é a BNCC - Base Nacional Comum Curricular. Esse documento tem âmbito nacional e estabelece diretrizes para a educação nacional nas escolas públicas e privadas em caráter normativo.

Os anos iniciais do Ensino Fundamental, foco deste estudo, compreendem do 1º ao 5º ano, de 6 a 10 anos de idade. Nessa fase, segundo a BNCC, valorizam-se as situações lúdicas de aprendizagem com progressiva sistematização dessas experiências. Nessa etapa também se inicia a assimilação de novas formas de relação com o mundo, quando a criança experimenta o desenvolvimento das relações consigo mesma e com os outros.

A conexão entre a aquisição do conhecimento e o uso da fala, quando esta é oportunizada nas aulas, é defendida em [13]. A verbalização conecta a linguagem, o conhecimento, as experiências e as experiências de outros alunos com a matemática. “É preciso promover a comunicação pedindo aos alunos que esclareçam e justifiquem suas respostas, que reajam frente às ideias dos outros e que considerem pontos de vista alternativos.”

A comunicação estabelece a troca de conhecimento entre alunos e entre alunos e professor. Cabe ao professor possibilitar situações para essas trocas, através de sua mediação, e isso só ocorre através

²Transformismo algébrico, segundo [5], refere-se à manipulação dos termos de uma expressão, com regras válidas, para a obtenção de outra expressão equivalente.

de um planejamento de tarefas, configurando um ambiente em sala de aula que a favoreça, segundo [8, p.74].

Nesses estudos sobre o ensino de matemática [8, 13], a comunicação é vista como fator essencial para a apropriação dos conhecimentos matemáticos, através do ouvir o outro, do compartilhar experiências, inclusive do erro. A própria BNCC já prevê ambientes que favoreçam tais trocas nos anos iniciais do ensino básico, principalmente.

O advento da BNCC traz a álgebra como novidade para os professores dos anos iniciais. Anteriormente, ela era mencionada somente nos anos finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. É válido destacar que a presença da álgebra já nos primeiros anos não pode e não deve requerer o formalismo ou as representações simbólicas, por mais simples que sejam. Essa unidade temática restringe-se a ideias de regularidades, generalizações de padrões e propriedades da igualdade, sendo, por exemplo, esta última definida da seguinte forma:

A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. [1, p. 270]

A álgebra é trazida como um elemento de um tipo de pensamento: o pensamento algébrico, que, segundo a BNCC, é “essencial para utilizar em modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e estruturas matemáticas”. Dentre algumas habilidades, prevê que o aluno seja capaz de identificar regularidades, padrões em sequências numéricas e não numéricas, estabelecer leis que expressem relações entre grandezas, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas.

Em [5], após exporem vários exemplos de problemas, matemáticos e físicos, os autores defendem que o pensamento algébrico caracteriza-se pela “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização”. Consequentemente, a construção do pensamento algébrico não seria realizada de modo isolado, mas na articulação entre os campos da matemática, e dessa com outras áreas de conhecimento.

Distinguindo a álgebra do pensamento algébrico, [8] caracteriza esse último como sendo as habilidades que possibilitam o uso de modelos algébricos, manipulação de expressões e aplicação de estruturas, chamando de pensamento analítico o que faz o aluno ser capaz de generalizar, abstrair relações e manipular a linguagem algébrica. Defende, portanto, que para constituir o pensamento algébrico é preciso tempo, o que pressupõe que isso deva ser induzido já no início da escolarização e gradativamente ganhar maior complexidade.

A necessidade do trabalho do desenvolvimento do pensamento algébrico logo nos primeiros anos de escolaridade é defendida em [4]. Estes autores trazem o ponto de vista de que o pensamento algébrico está relacionado à capacidade de aplicação de generalidade, variabilidade e estrutura. Em suma, o uso de símbolos, muito presente na álgebra, deve ser dominado pelo estudante, como também os significados, nos diversos contextos em que sejam aplicados, para que, enfim, esteja alcançado o pensamento algébrico.

Recorre-se, novamente, à BNCC para tornar clara uma competência geral do ensino fundamental, a Cultura Digital, que será subsídio para justificar a concepção do aplicativo:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. [1, p. 9]

A BNCC cita que o advento da cultura digital trouxe mudanças na sociedade. Com o fácil acesso ao computador, telefone, celular e *tablet*, os jovens têm se tornado elemento principal nessa cultura, de modo que a interação social midiática os tem envolvido e de forma cada vez mais rápida [1, p. 61].

Na competência “Cultura Digital”, o texto traz a diretriz de que, além de consumir essa tecnologia, é preciso tornar os alunos competentes em produzi-la, ao passo que também prevê que o aluno a compreenda de forma crítica, significativa, reflexiva e ética. Em outras palavras, as tecnologias na educação devem ir além do seu uso, chegando à produção e à compreensão.

Partindo dessa premissa, a escola atualiza-se em um novo papel.

É importante que a instituição escolar preserve seu compromisso de estimular a reflexão e a análise aprofundada e contribua para o desenvolvimento, no estudante, de uma atitude crítica em relação ao conteúdo e à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais. [1, p. 61]

Por outro lado, o mundo digital tem conduzido a sociedade ao imediatismo de respostas e a um quadro de informações passageiras, o que leva a análises superficiais, segundo a BNCC. Portanto, a escola deve ressignificar os modos de comunicação e as linguagens para que, então, “eduque para usos mais democráticos das tecnologias e para a participação consciente na cultura digital”. É dessa forma de significar a presença e o uso das tecnologias na educação que a escola pode, conforme a BNCC [1, p. 61], “promover situações de aprendizagem, a interação e o compartilhamento de significados entre professores e estudantes”.

Considerando o propósito de criar e manter um ambiente de trocas, diálogos para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem, a Metodologia de Investigação Matemática coloca-se como uma escolha natural: “Afinal, quem investiga está a procurar aprender, e quem aprende pode ter muito interesse em investigar” [10, p. 1]. O autor diz que não deveríamos separar o aprender do investigar. Ele ainda pontua que o “investigar” não é mais do que procurar conhecer e encontrar soluções para os problemas que surgem, elevando a investigação a uma capacidade de primeira importância para os cidadãos que, portanto, deve estar presente na escola. Na definição do “aprender”, especificamente em matemática, seu estudo diz que é

O desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo. [10, p.3]

Aqui vale especificar como é uma atividade de investigação matemática. Em [11, p.20], os autores descrevem momentos dentro desse tipo de atividade, que constam no Quadro 1.

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problema, explorar a situação problema e formular questões
Conjecturas	Organizar dados e formular conjecturas
Testes e reformulação	Realizar testes e refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura e avaliar o argumento e sua conclusão

Quadro 1: Momentos na realização de uma atividade. Fonte: [11, p.20]

O ato de investigar em matemática deve considerar que uma atividade deva englobar a identificação de questões, a formulação, o teste e a prova de conjecturas, a argumentação, a reflexão e a avaliação do próprio trabalho [12, p.20]. Esse tipo de abordagem ainda é pouco encontrado nos livros didáticos, como atestam os estudos [6, 9], por exemplo.

Em resumo, o contexto histórico do ensino da matemática coloca a álgebra no ensino regular como fonte de preocupação, visto que a sua abordagem tardia pode causar falhas na aprendizagem desse campo da matemática. Para que o ensino da álgebra possa acontecer desde os anos iniciais do ensino fundamental, deve-se lembrar que se evite o formalismo simbólico das representações algébricas. O desenvolvimento do pensamento algébrico requer, antes, o diálogo e a interação, além da criação de um ambiente pedagógico propício para a discussão de conjecturas, testes e levantamento de hipóteses, momentos tais que o símbolo, a ideia de generalidade e regularidade poderão dar espaço para uma cognição que torne o aluno preparado para a álgebra, tal como ela deve acontecer nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A Cultura Digital é hoje vista como uma das competências gerais da Educação Básica, marcada pela presença da tecnologia e as mudanças causadas por esta na comunicação, bem como na sociedade. Este trabalho vai ao encontro de tal diretriz ao propor situações matemáticas aliadas ao uso das tecnologias. No que tange ao ambiente de trocas e franca comunicação, conduzido pelo professor, lembramos que os estudos analisados [8, 13] reforçam que a comunicação na aprendizagem de matemática é essencial, justificando o uso da estratégia de investigação matemática, aliada à tecnologia. Entendemos que as atividades de investigação matemática promovem oportunidades de explorar conceitos matemáticos importantes, desenvolvem a capacidade de encaminhar processos matemáticos e possibilitam a inclusão de alunos com diferentes graus de aprendizagem, respeitando seus ritmos.

3. O aplicativo Algebrizar

Para o cumprimento da proposta deste artigo, um aplicativo foi criado pelos autores na intenção de mediar o trabalho do professor nos momentos de investigação. Tal estratégia pressupõe o diálogo e a participação sistemática dos alunos, que devem propor soluções, conjecturar e questionar. Frente ao desafio dos educadores de promover a participação de todos os estudantes, o aplicativo tem também o papel de incentivador promovendo, ao mesmo tempo, o uso da tecnologia nas práticas pedagógicas objetivando o protagonismo e a autonomia dos alunos na própria aprendizagem.

O aplicativo de nome Algebrizar é uma coletânea de problemas fundamentada nas habilidades e competências da BNCC em formato de jogo, guiando o aluno na aquisição de conceitos e reflexões sobre regularidade, variação e generalização, principalmente no estudo de sequências, padrões e igualdades. Na sua função enquanto jogo, o Algebrizar tem a proposta de monitorar o desempenho dos alunos no entendimento dos conceitos, que podem ou não ser previamente trabalhados pelos professores. Como uma ferramenta pedagógica, sua proposta visa estimular o pensamento algébrico

que, antecedendo a linguagem algébrica, requer diálogo, discussão, levantamento de hipóteses e conclusões individuais ou coletivas.

Relata-se a seguir como foi a produção e concepção do aplicativo para uma melhor compreensão da sua relação com o pensamento algébrico e dos benefícios do seu uso quando aliado à investigação matemática. A programação necessária para a sua produção foi executada exclusivamente pelo primeiro autor.

Uma vez que o foco da proposta são os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, o aplicativo precisava ter uma característica lúdica (cores, imagens e sons), fragmentada e progressiva (fases, pontuações e telas), o que exigia um produto que estivesse em constante interação com o aluno durante o seu uso. Para atingir essa demanda o aplicativo faz uso de três plataformas: Kodular, phpMyAdmin e páginas PHP.

O *Kodular* é um ambiente de desenvolvimento de aplicativos para celulares Android em forma de blocos encaixáveis e programáveis. Sua plataforma é aberta e de uso livre, tem a intenção de disseminar a criação de programas para leigos ou de conhecimentos avançados.

O *phpMyAdmin* é um banco de dados, local onde ficarão as informações sobre pontuação, nível de desempenho dos alunos, cadastros de usuários e as observações feitas pelos alunos durante o uso do Algebrizar. O que motiva a escolha dessa plataforma é que as informações não ficarão armazenadas no celular do usuário, portanto podem ser alteradas com o tempo. Por exemplo, as perguntas motivadoras que garantirão o momento de investigação podem ser modificadas quando se tornarem obsoletas, sem que haja a necessidade de instalar novamente o aplicativo ou fazer uma atualização.

As *páginas PHP* constituem uma linguagem de programação voltada para o desenvolvimento de páginas *web*. No aplicativo, seu uso é intercalado com o processamento do celular. Informações como pontuação, questionamentos, observações e desempenho que estarão fora do celular do usuário são processadas nestas páginas.

Outra ferramenta usada na produção do jogo é o de reconhecimento de fala e conversão em texto (e de texto em voz) nativo nos celulares, uma ferramenta da empresa *Google*. Na intenção de preservar a característica de fala, simulando um ambiente de conversa, o jogo anuncia as fases pelas quais o aluno vai passar, dá explicação às regras da atividade e felicita as conquistas. Por outro lado, quando é exigido do aluno uma resposta ou um comentário, esse momento também é de conversa, ou seja, o aluno fala e, através dessa ferramenta, o áudio é convertido em texto.

Com esse conjunto de plataformas e ferramentas de produção, o aplicativo Algebrizar pode ser instalado em um celular ou *tablet* cujo sistema operacional seja Android. Seu uso requer uma conexão com a internet.

A ferramenta encontra-se disponível na loja de aplicativos do Google para *download*. Utilizando o aplicativo *Play Store*³, deve-se procurar pelo jogo Algebrizar. Sua licença de uso é gratuita.

A usabilidade do Algebrizar segue por meio de cadastros simples. O professor é o usuário que guiará o fluxo do jogo. Inicialmente, o professor precisa fazer o seu cadastro. A tela é mostrada na Figura 1.

³Aplicativo de propriedade da empresa Google responsável pelo repositório de jogos e aplicativos do sistema Android, local onde está disponível o jogo Algebrizar.

Somente algumas informações

Bem-vindo

Nome: Digite seu nome completo

Instituição: Digite o nome da escola que leciona

Cidade: Digite o nome da cidade que trabalha

Estado: Digite a sigla do estado

Cadastrar

Figura 1: Tela de cadastro de professor. (Fonte: do autor)

Trata-se de uma coleta simples de informações. O jogo não exige *e-mail* nem confirmação do usuário, pois considera-se não haver a necessidade de segurança de dados, e que a finalidade do aplicativo é educacional, não fazendo uso de informações sigilosas nem pessoais. Ao final de um cadastro os futuros acessos dos professores serão realizados através de códigos numéricos, e esses serão informados no ato do cadastro.

Em seguida, os professores precisam cadastrar suas salas e vincular os seus alunos a elas. A tela é mostrada na Figura 2. Esta ação gerará os códigos numéricos dos alunos, que passarão a ser usuários do aplicativo (deverão ser informados os nomes dos alunos e as salas em que estudam).

Aluno: Digite o nome do aluno

Sala: Selecione a sala

Cadastrar Aluno

Figura 2: Tela de cadastro de alunos. (Fonte: do autor)

Os professores deverão divulgar aos alunos os códigos de acesso para o início do jogo, que estarão em sua posse após os cadastros. Os filtros de acessos através de códigos de usuários tornam-se necessários para que o professor faça o acompanhamento do desempenho dos alunos nas atividades propostas, bem como observar os comentários deixados por eles nos momentos de reflexão, fazendo a identificação dos alunos e suas ações, situação que não é possível em aplicativos de jogos usuais, sem cadastros prévios.

É função do professor liberar as habilidades que ele deseja permitir que os alunos joguem. Neste caso, ele pode permitir ou bloquear fases do jogo conforme seu objetivo e usar tal ferramenta durante o ano nos momentos em que desejar propor o trabalho com a álgebra, sem que as propostas do jogo esgotem-se logo de início.

Para o professor, as opções disponíveis estão representadas na Figura 3:



Figura 3: Tela de opções dos professores. (Fonte: dos autores)

Os alunos ingressarão no jogo através do código de acesso fornecido pelo seu professor e, diante das habilidades liberadas pelo mesmo, iniciarão as atividades. A Figura 4 a seguir descreve as opções disponíveis para os alunos:



Figura 4: Tela de opções de alunos (Fonte: do autor)

O Algebrizar segue um roteiro dividido em fases, denominadas jornadas e trilhas. A proposta do jogo está diretamente ligada às habilidades de Matemática da unidade temática Álgebra descritas na BNCC. Cada jornada representa uma habilidade e as trilhas representam o caminho que o aluno seguirá no jogo para finalizar esta jornada; em outras palavras, para alcançar a habilidade.

Cada trilha consiste de uma série de problemas que explorarão os conceitos por trás das habilidades. Os alunos só avançam para a trilha seguinte ao alcançar 250 pontos. Ao final de cada trilha o aluno é levado para uma seção de investigação, momento em que se depara com uma pergunta que pretende induzi-lo a fazer conclusões, observações, análises e conjecturas, não havendo respostas certas ou erradas. Por fim, quando todas as trilhas forem concluídas a jornada é dada como finalizada.

Baseado no planejamento do professor e na realidade local, o jogo pode ser usado dentro da sala de aula como também em casa, adequando-se ao seu objetivo. Entretanto, o uso do Algebrizar nas aulas não pode estar limitado à realização dessas atividades na tela de um celular. Nesse sentido trata-se apenas de uma coletânea de problemas, o que não basta para alcançar o pensamento algébrico.

Na organização de uma proposta de investigação matemática, conforme [11], o aplicativo encaminhará parte desse processo, promovendo momentos de exploração, contato com diversas situações e problemas para resolver, seguido de um momento para refletir, organizar e fazer conjecturas. No caso específico da álgebra, esses momentos levam o aluno a reconhecer padrões e analisar variações de quantidades, com a meta de descrever tais situações com generalidade.

De posse desses levantamentos, o professor deve analisar as respostas com a intenção de agrupar os diferentes níveis de alcance da habilidade e criar um ambiente de diálogo e discussão com essas observações realizadas durante o jogo, validando-as ou não, por meio de testes. Nesse ambiente, refinar um argumento válido, justificar os posicionamentos e avaliar as conjecturas que os alunos formularam torna-se possível. Considerando que todos os alunos que participam do jogo tiveram acesso às mesmas questões durante as trilhas, destaca-se o papel de mediador do professor, ao acolher as diversas interpretações e formulações surgidas. O Quadro 2 descreve a síntese do processo de investigação proposto:

Exploração e formulação de questões	Realização das tarefas, baseadas nas habilidades da BNCC, através do jogo Algebrizar, conquistando pontos e vencendo as trilhas.
Conjecturas	Momento de reflexão no Algebrizar com uma pergunta motivadora em que o aluno é levado a concluir regras ou levantar hipóteses sobre determinada situação tratadas no momento de exploração.
Testes e reformulação	A partir das respostas, o professor precisa agrupar e analisar os níveis de comentários e promover um momento de diálogo e trocas na sala, encaminhando a turma para uma conclusão colaborativa, promovendo o pensamento algébrico.
Justificação e avaliação	Analisar as conclusões a que chegarem, fazendo uma avaliação do processo e das conclusões.

Quadro 2: Ações da Investigação Matemática com o uso do aplicativo Algebrizar e mediação do professor.

Para exemplificar as trilhas e jornadas do aplicativo, será abordada a jornada número um do quarto ano do Ensino Fundamental, intitulada “A ordem dos múltiplos”. Essa jornada possui três trilhas que levarão o aluno a alcançar a habilidade que está ilustrada na Figura 5:

EF04MA11 – Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.

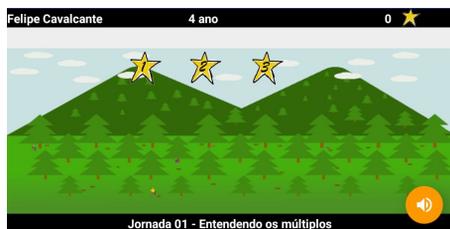


Figura 5: Tela inicial da jornada “Entendendo os Múltiplos”. (Fonte: do autor)

A primeira trilha é chamada “Observe as mudanças” e tem o objetivo de fazer o estudante observar

o comportamento de uma sequência quando se altera o padrão que a forma. Ela é caracterizada por uma situação onde o aluno escolhe um número natural qualquer e digita-o para formar sequências. Ao gerá-la, os primeiros dez múltiplos desse número (incluindo o zero) se apresentarão em uma sequência crescente, podendo ainda ser estendida com os dez múltiplos seguintes, pressionando o botão disponível. É interessante mencionar a facilidade que o aplicativo terá em fornecer as sequências, mesmo para números com dois ou mais algarismos, o que contempla uma grande diversidade de exemplos para a sala de aula. A cada formação de sequência distinta, o aluno aumenta seus pontos para concluir essa trilha. Finalizados os 250 pontos dessa trilha o aluno será parabenizado e encaminhado para a tela de reflexão que possui algumas perguntas, como as ilustradas na Figura 6:

- Existe algum número que esteja em todas as sequências?
- Cada número gera uma sequência totalmente diferente?
- Será que existe alguma sequência composta por todos os números?

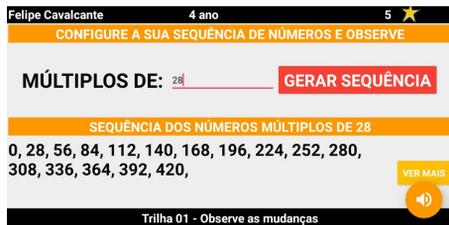


Figura 6: Tela da trilha um: Observe as mudanças. (Fonte: do autor)

A trilha dois, “Completando sequências”, possui o objetivo de completar sequências através da regra de formação dada. De forma inversa à trilha um, nessa etapa o aluno precisa descobrir e seguir a regra de formação da sequência, apontando quais termos faltam. Os números que geram as sequências são aleatórios (entre 1 e 100) e podem iniciar por qualquer termo (não necessariamente do zero). As três primeiras sequências dadas terão o seu padrão de formação identificado (por exemplo, múltiplos de 2, múltiplos de 7), enquanto as demais exigirão estratégias dos alunos para identificar e completar. Em todas as sequências o aluno terá três lacunas para preencher, conforme mostra a Figura 7, e ir pontuando até 250, momento em que será levado para as seguintes reflexões:

- Como você faz para encontrar um número em uma sequência de múltiplos?
- Você é capaz de descobrir qualquer um deles?



Figura 7: Tela da trilha dois: Completando seqüências. (Fonte: do autor)

Para encerrar essa jornada, a trilha três, “Observe com atenção”, cujo objetivo é adquirir uma noção mais consolidada do padrão progressões aritméticas, leva o aluno a refletir sobre as características dos números que as compõem, observando os múltiplos, como indicado na Figura 8. Espera-se que identifique que os números múltiplos de dois são todos pares, que os múltiplos de dez são terminados em zero e que os múltiplos de seis constam nas tabuadas do número dois e três. A cada noção adquirida de características comuns a pontuação vai aumentando até a pontuação máxima e, por fim, para as questões

- Que características os múltiplos de 5 têm em comum?
- E os múltiplos de 4?
- E os de 11? (escreva no seu caderno suas observações)

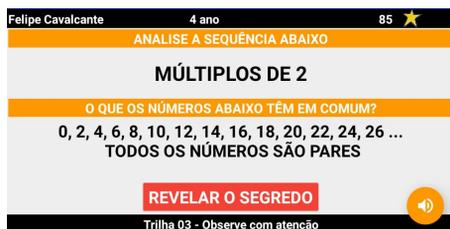


Figura 8: Tela da trilha três: Observe com atenção. (Fonte: do autor)

Após as três trilhas, a jornada é finalizada e então o momento de investigação deve ser conduzido em sala de aula, lembrando que o professor terá acesso às observações feitas pelos seus alunos. É importante que cada trilha tenha um momento de discussão e trocas em sala e que o professor separe os levantamentos feitos por nível de entendimento.

As perguntas de cada trilha têm a intenção de conduzir o aluno a ser capaz de fazer generalizações; nesse caso, a respeito de seqüências em progressão aritmética.

Por fim, cabe mencionar a possibilidade, dentro do aplicativo, para os professores enviarem *feedbacks* das questões de investigação. Nessa tela os professores podem enviar sugestões de novas questões ou reformulações. Trata-se de um movimento colaborativo, o que faz o aplicativo estar

em permanente construção, trazendo ainda a possibilidade de evoluir sua aplicabilidade em sala com o uso dos professores a quem o aplicativo se destina.

4. Considerações Finais

A Matemática, por possuir sua própria simbologia e representações, exige muitas vezes um elevado grau de abstração. Careceria sentido iniciar a linguagem algébrica no Ensino Fundamental, por volta do 7º e 8º anos, sem que o aluno tenha os princípios do pensamento que lhe poderão garantir o domínio dessa linguagem.

É acreditando na importância de iniciar a Álgebra nos primeiros anos de aprendizagem, a fim de minimizar as grandes dificuldades encontradas pelos professores e alunos quando iniciam assuntos como equações ou produtos notáveis, que se apresenta uma proposta de prática docente que promova o desenvolvimento do pensamento algébrico. Generalizar, identificar padrões, usar símbolos e perceber variação não são alcançados somente por meio dos problemas neste estudo; momentos de diálogo que promovam trocas de ideias são requisitos para a exploração da álgebra, principalmente nessa etapa de ensino em que a criança experimenta o desenvolvimento das relações consigo e com os outros, o que torna a Investigação Matemática ideal para esse objetivo.

Com o jogo, pretendeu-se valorizar situações lúdicas de forma a incentivar a participação dos alunos diante de questionamentos que poderão servir de subsídio para a Investigação Matemática, que traz em seu bojo o questionamento, o levantamento e a formulação de hipóteses e, mediados pelos professores, a conclusão.

Durante a produção do aplicativo foram formulados problemas ligados às habilidades contidas na BNCC, que são priorizadas pelas trilhas em um caminho pelo qual o aluno pode explorar e percorrer para dominar tal habilidade, seguido de um momento de reflexão e elaboração de conjecturas. Justamente por isso, sugere-se aos professores que priorizem os momentos de testes e avaliação, analisando detidamente as observações deixadas pelos alunos durante o jogo, pois elas deverão ser as norteadoras da investigação em sala.

Referências

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. *Base nacional comum curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 10 de março de 2020.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação – Inep. *Resumo técnico. Resultados do índice do desenvolvimento da Educação Básica*. Brasília: INEP / Ministério da Educação, 2017.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação – Inep. *Relatório Brasil no Pisa 2018 – Versão preliminar*. Brasília: Inep / Ministério da Educação, 2018.
- [4] BORRALHO, A; BARBOSA, E. *Pensamento algébrico e exploração de padrões..* APM – Associação dos Professores de Matemática, 2009. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf>. Acesso em: 28 de novembro de 2016.
- [5] FIORENTINI, D; MIORIM, M A; MIGUEL, A. *Contribuição para um repensar ... a Educação Algébrica Elementar*. Pro-Posições. Campinas, 1993.
- [6] LOPES, A. *Análise de uma coleção de livros didáticos para o ensino médio*. Dissertação de Mestrado. Profimat (2013)

- [7] MIGUEL, A; FIORENTINI, D; MIORIM, M. A. *Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?*. Pro-Posições. Campinas, 1992.
- [8] NACARATO, A M.; CUSTÓDIO, I A. *O desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Básica: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática*. Brasília. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 2018.
- [9] PASSOS, D. S.; MARIANI, R. C. P. *Uma análise do livro didático “Tudo é Matemática” a partir dos registros mobilizados na educação algébrica no 8º ano do Ensino Fundamental*. Caminhos da Educação Matemática em Revista (online). v. 2, pp. 72–82, 2014.
- [10] PONTE, J. P. *Investigar, ensinar e aprender* In: Actas do ProfMat 2003. (CDROM, pp.25-39). Lisboa: APM, 2003.
- [11] PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
- [12] PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* In: Actas do Profmat 1995 (p. 161 a 167), Lisboa: APM, 1995
- [13] SMOLE, K S; DINIZ, M I. *Comunicação em matemática: instrumento de ensino e aprendizagem..* Disponível em: <<https://mathema.com.br/artigos/comunicacao-em-matematica-instrumento-de-ensino-e-aprendizagem/>>. Acesso em: 31 de março de 2020.
- [14] TELES, R A M. *A aritmética e álgebra na matemática escolar*. Anais do VIII Enem – Encontro Nacional de Educação Matemática - Minicurso GT 2 – Educação Matemática nas Séries Finais do Ensino Fundamental - 2004.

Vagner Campeão
Universidade Estadual de Londrina
<vcampeao@hotmail.com>

Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina
<tulio-carvalho@uel.br>

Recebido: 11/09/2021
Publicado: 25/05/2021

A *chakana*: dimensão histórica e interdisciplinaridade

Luiz Carlos de Andrade 

Rosa García Márquez 

Fábio Silva de Souza 

Resumo

O presente trabalho é baseado em pesquisas bibliográficas e relatos de alguns arqueólogos e tem por objetivo apresentar uma breve resenha histórica sobre o símbolo andino conhecido como *chakana*, explorando alguns conceitos matemáticos através da análise dos aspectos geométricos deste símbolo, com a intenção de estimular os professores do Ensino Básico a criar e recriar sua prática de ensino e aprendizagem pautados nos princípios de interdisciplinaridade. É sugerido que o professor oriente os alunos em uma pesquisa sobre a história da *chakana*, a localização geográfica das antigas culturas que a utilizavam, além de analisar a Arte e Matemática dos povos andinos e principais culturas da América do Sul antes da colonização. Vestígios arqueológicos mostram a precisão matemática nas construções de templos, utensílios cerimoniais e principalmente a cosmovisão desses povos andinos. Com isso, esperamos agudizar a curiosidade do leitor, justificando as diversas formas de produção matemática nas antigas culturas, contribuindo assim, para um despertar dos nossos alunos, relacionado aos conceitos de Matemática do Ensino Básico de forma contextualizada com as descobertas de nossos ancestrais.

Palavras-chave: Geometria; Interdisciplinaridade; Teorema de Pitágoras; *chakana*.

Abstract

The present work is based on bibliographic research and reports by some archaeologists and aims to present a brief historical review of the Andean symbol known as *chakana*, exploring some mathematical concepts through the analysis of the geometric aspects of this symbol, with the intention of encouraging teachers Basic Education to create and recreate their teaching and learning practice based on the principles of interdisciplinarity. It is suggested that the teacher guide students in researching the history of *chakana*, the geographical location of the ancient cultures that used it, in addition to analyzing the Art and Mathematics of the Andean peoples and the main cultures of South America before colonization. Archaeological remains show the mathematical precision in the construction of temples, ceremonial utensils and especially the worldview of these Andean peoples. With this, we hope to sharpen the reader's curiosity, justifying the various forms of mathematical production in ancient cultures, thus contributing to an awakening of our students, related to the concepts of Mathematics in Basic Education in a contextualized way with the discoveries of our ancestors.

Keywords: Geometry; Interdisciplinarity; Pythagorean theorem; *chakana*.

1. Introdução

Estamos em um mundo de formas. Para qualquer lugar que se direcione o olhar, as formas geométricas estão presentes, seja na natureza, nas artes, na arquitetura ou em outras áreas do conhecimento.

De acordo com a BNCC [3], “Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos” é uma habilidade que os alunos devem desenvolver. Desta forma, temos os conceitos básicos da geometria como um dos conteúdos mais importantes para o Ensino Básico.

Segundo Andrade [1] explorar a matemática em símbolos de civilizações antigas apresentando sua história e mistérios e estudar os costumes desses povos, em especial os latino-americanos, pode aguçá a curiosidade dos alunos e estabelecer conexões da Matemática com outras áreas do conhecimento como Geografia, História, Ciências e Arte.

Conectar a geometria e a história das civilizações antigas fornece uma variedade de situações interdisciplinares a serem exploradas, tais como: pinturas artísticas (em tecidos e cerâmica), construções arquitetônicas de templos, terraças¹ e a construção das cidades com pedras angulares de encaixes perfeitos que suportavam a ação do tempo e forças da natureza, como terremotos, ver Motta [7],.

Neste artigo abordamos um símbolo utilizado nas antigas civilizações andinas, conhecido pelo nome de *chakana* como ponto principal para a interdisciplinaridade.

2. A Chakana

Nossos ancestrais, eram movidos pela curiosidade observando os padrões na natureza, em especial os movimentos dos astros, ver Amaral [9]. Para esses povos tal observação era uma prática comum e não foi diferente para o povo andino: eles se inspiraram na constelação do Cruzeiro do Sul, composta pelas estrelas de Magalhães, Mimosa, Rubídea, Pálida e Intrometida, conforme pode ser visto na Figura 1, e criaram a *chakana*. Para Bazán, Villena e Ramos [2, 8, 10], ela é o símbolo base da cosmovisão andina.

¹Técnica agrícola em terrenos muito íngremes, permitindo o seu cultivo e o controle da erosão.



Figura 1: Constelação do Cruzeiro do Sul (adaptado)

Fonte:

<http://prensaliubrepuoblosoriginarios.blogspot.com/2012/04/la-chakanaherencia-de-nuestros.html>

Villena [8] menciona que entre o dia 2 e 3 de maio a constelação mencionada forma uma cruz perfeita, em posição vertical em relação ao Polo Sul. No dia 3 de maio, alguns povos andinos celebram o Dia da *Chakana*, agradecendo a colheita e cultivo de alimentos, [12].

A *chakana* “é uma figura geométrica usada há milhares de anos pelo povo andino que a nomeia. No fundo é uma forma geométrica que representa quatro escadarias de três degraus cada, com um círculo dividido ao meio na parte central do símbolo”, [6].

De acordo com Ramos [10], como a *chakana* esteve presente em várias culturas andinas antigas antes da colonização europeia, ela assume algumas variantes em sua forma geométrica, sendo moldada e adaptada para cada uma dessas culturas. Porém essas variantes conservam como base uma cruz quadrada e escalonada, conforme são apresentadas na Figura 2.

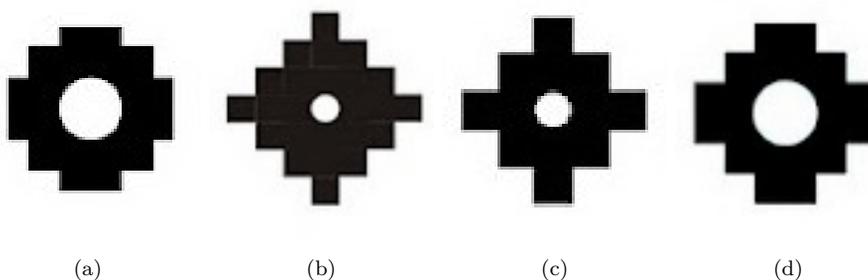


Figura 2: Algumas variações estilísticas do símbolo da *chakana*

Fonte:

<http://prensaliubrepuoblosoriginarios.blogspot.com/2012/04/la-chakanaherencia-de-nuestros.html>

Para o trabalho neste artigo utilizaremos figura geométrica da *chakana* ilustrada na Figura 2a.

De acordo com Bazán, Villena, Ramos e Rengifo [2, 8, 10, 11], algumas das culturas pré-incas que usaram a *chakana* são: Caral, Chavin, Chincay, Mochica, Paracas, Chiribaya e Tiauanaco, sendo a cultura inca ou Tahuantinsuyo (*tahua* significa quatro) a última que usou este elemento simbólico. Os 4 lados maiores correspondem à divisão do império inca em 4 *suyos* (estados): Chinchaysuyo, Antisuyo, Collasuyo e Contisuyo. O círculo central representa Cuzco, o umbigo do mundo.

Segundo Lajo [4], a *Qhapaq Nan*, é consistente com a geometria da *chakana*. É uma estrada em linha reta que passa por várias cidades do império inca como Cajamarca, Cuzco, Tiahuanaco, Oruro e Potosí, como podemos observar na Figura 3.

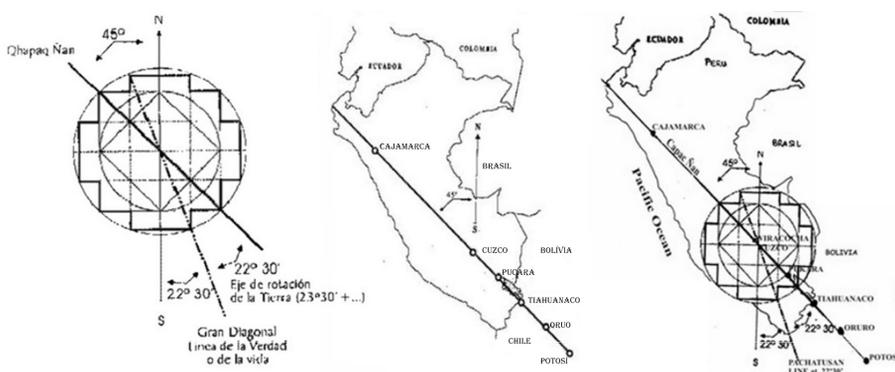


Figura 3: Trajetória descrita pela Qhapaq Ñan

Fonte: <https://etoiles.noblogs.org/post/2015/07/07/wiphala/>

No trabalho de Bazán [2] são exibidas diversas figuras de vestígios arqueológicos de algumas culturas pré-incas onde aparece a *chakana*. Como exemplo, a Figura 4 mostra parte do obelisco Tello da cultura pré-incaica Chavin (1200 a.C - 400 a.C.) desenvolvida no norte de Peru.



Figura 4: A *chakana* esculpida no Obelisco Tello

Fonte: Extraído de Bazán [2] p. 220

Segundo Lambert [5], a *chakana* ou *chaka hanan* significa ponte ao alto/escada, representa diversos conceitos e princípios, segundo seu uso. De acordo com Villena [8], símbolo com importantes funções para os andinos em vários aspectos: astronômico, agrícola, espiritual, arquitetônico e matemático. Cada um dos seus degraus representa os meses do ano, a parte superior, inferior e laterais representam as quatro estações do ano, servindo como um calendário agrícola para as épocas de plantio e colheita, conforme mostra a Figura 5.

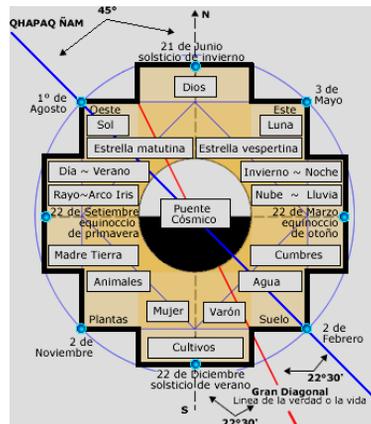


Figura 5: Utilidades da *chakana*

Fonte:

<http://prensalierepueblosoriginarios.blogspot.com/2012/04/la-chakanaherencia-de-nuestros.html>

3. A Geometria na *Chakana*

Com a figura geométrica da *chakana* podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras e estudar conceitos geométricos importantes como circunferência, diâmetro, raio, quadrados inscritos e circunscritos, diagonais, ponto médio, área e perímetro.

3.1. Construção geométrica da *chakana*

Para dar início à construção geométrica da *chakana*, primeiramente vamos apresentar uma expansão de quadrados utilizando as diagonais e circunferências.

Na Figura 6 é apresentada uma seqüência de desenhos geométricos em que cada quadrado tem o lado com mesma medida da diagonal do quadrado anterior.

Considere:

1. um quadrado inicial $A_1B_1C_1D_1$ de lado unitário e uma circunferência \mathcal{C}_1 de centro O , inscrita neste quadrado de diâmetro igual a uma unidade;
2. uma circunferência \mathcal{C}_2 com diâmetro de comprimento $\sqrt{2}$ circunscrita ao quadrado $A_1B_1C_1D_1$;
3. o quadrado $A_2B_2C_2D_2$ de lado medindo $\sqrt{2}$, circunscrito a \mathcal{C}_2 de modo que os vértices do quadrado $A_1B_1C_1D_1$ são os pontos médios do quadrado de seus lados;
4. uma circunferência \mathcal{C}_3 com diâmetro de comprimento 2 circunscrita ao quadrado $A_2B_2C_2D_2$;
5. um quadrado $A_3B_3C_3D_3$ de lado medindo 2, circunscrito a \mathcal{C}_3 de modo que os vértices do quadrado $A_2B_2C_2D_2$ são os pontos médios de seus lados;
6. uma circunferência \mathcal{C}_4 com diâmetro de comprimento $2\sqrt{2}$ circunscrita ao quadrado $A_3B_3C_3D_3$;
7. um quadrado $A_4B_4C_4D_4$ de lado medindo $2\sqrt{2}$ circunscrito a \mathcal{C}_4 de modo que os vértices do quadrado $A_3B_3C_3D_3$ são os pontos médios de seus lados;
8. finalmente, uma circunferência \mathcal{C}_5 com diâmetro de comprimento 4 circunscrita ao quadrado $A_4B_4C_4D_4$.

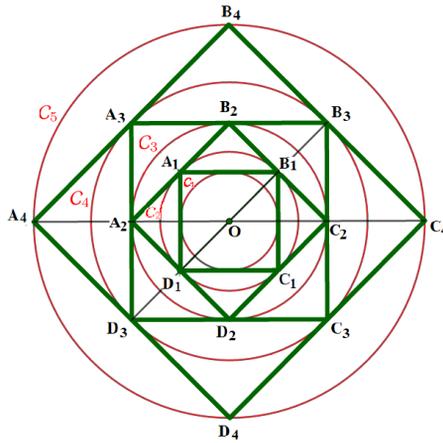


Figura 6: Expansão de quadrados

Vamos utilizar o princípio da expansão de quadrados apresentado na Figura 6 para dar início à construção da Chakana:

- Vamos interromper a expansão dos quadrados no quadrado $A_3B_3C_3D_3$ e na circunferência \mathcal{C}_4 que circunscreve este quadrado (Figura 7).

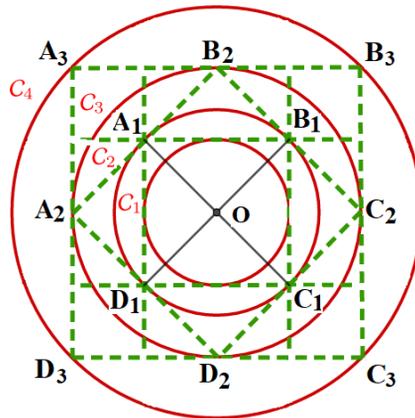


Figura 7: Quadrado $A_3B_3C_3D_3$ inscrito na circunferência \mathcal{C}_4

- Prolongando os lados do quadrado $A_1B_1C_1D_1$, obtemos os pontos $E_1, F_1, G_1, H_1, I_1, J_1, K_1, L_1$, interseções dos prolongamentos com \mathcal{C}_4 (Figura 8).

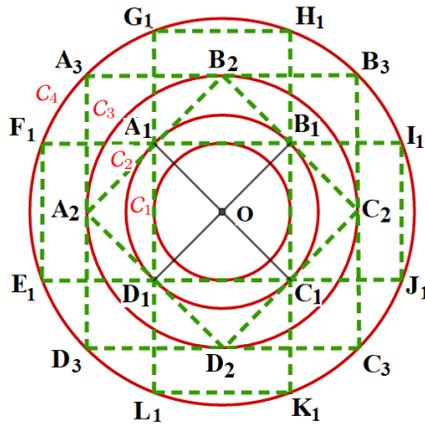


Figura 8: Prolongamento dos lados do quadrado $A_1B_1C_1D_1$

- Após o prolongamentos dos lados do quadrado $A_1B_1C_1D_1$, obtemos a forma geométrica ilustrada na Figura 9.

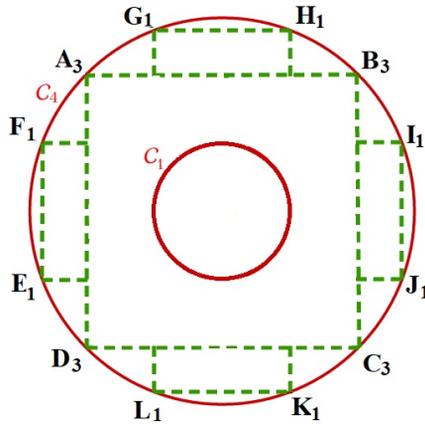


Figura 9: Figura geométrica formada

- A *chakana* é o símbolo geométrico inscrito na circunferência \mathcal{C}_4 com um buraco no centro representado pela circunferência \mathcal{C}_1 (Figura 10).

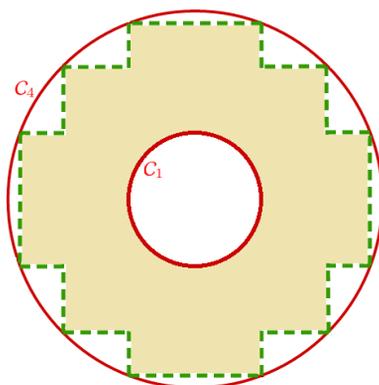


Figura 10: A *Chakana*

3.2. Explorando o teorema de Pitágoras na *chakana*

Utilizando da mesma forma geométrica da *Chakana* construída na Figura 9 e não levando em consideração o pequeno círculo central, vamos explorar o teorema de Pitágoras, enunciado a seguir.

Teorema 1. *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos, isto é, dado um triângulo retângulo de catetos com comprimentos b e c e hipotenusa a , vale a relação:*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração. Considere o quadrado $A_3B_3C_3D_3$ da Figura 9 dividido em pequenos quadrados. No interior do quadrado $A_3B_3C_3D_3$ construímos o quadrado $ABCD$ com lados de comprimento a e $A_3A = B_3B = C_3C = D_3D = c$, $DA_3 = AB_3 = BC_3 = CD_3 = b$, conforme Figura 11.

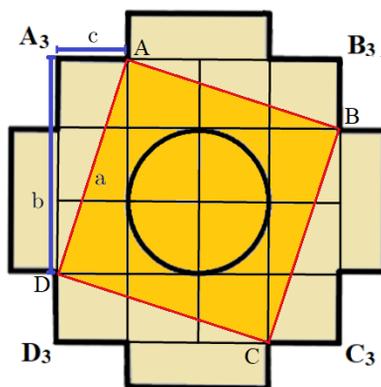


Figura 11: Teorema de Pitágoras na *Chakana*

Dessa forma, pode-se afirmar que os lados do quadrado $A_3B_3C_3D_3$ têm comprimento $(c + b)$ e que sua área será igual à soma das áreas dos quatro triângulos retângulos congruentes de catetos de comprimentos c e b e hipotenusa de comprimento a , com a área do quadrado $ABCD$.

Portanto, temos que

$$4 \frac{bc}{2} + a^2 = (b + c)^2 \Rightarrow 2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2.$$

Logo,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Assim fica demonstrado o teorema de Pitágoras. □

3.3. Área da *chakana* e comprimento de sua fronteira

Utilizaremos a *chakana* construída na subseção 3.1 para determinarmos sua área e o comprimento do sua fronteira.

Observe que podemos dividir a *chakana* em quatro retângulos congruentes, sendo um deles o retângulo $G_3G_1H_1H_3$ e o quadrado $A_3B_3C_3D_3$ e na circunferência \mathcal{E}_1 de centro no ponto O , conforme mostra a Figura 12.

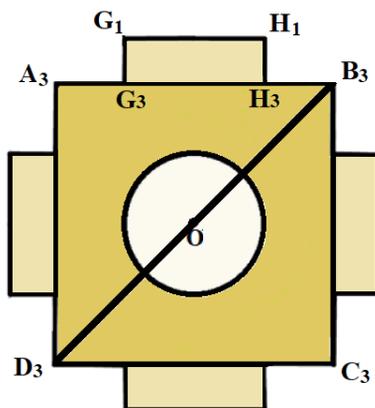


Figura 12: Quadrado $A_3B_3C_3D_3$ e quatro retângulos congruentes

Denotemos por L o comprimento do lado do quadrado $A_3B_3C_3D_3$, então suas diagonais terão comprimento $L\sqrt{2}$

Na Figura 13, observe que o quadrado $A_3B_3C_3D_3$ pode ser dividido em 16 outros quadrados menores, assim o que o raio da circunferência \mathcal{E}_1 tem comprimento $\frac{L}{4}$, o raio da circunferência

\mathcal{C}_4 , circunscrita ao quadrado $A_3B_3C_3D_3$ mede $\frac{L\sqrt{2}}{2}$ unidades, portanto no triângulo ΔOPH_1 , reto em P, temos que $\overline{OP} = \frac{L}{4}$ e $\overline{OH_1} = \frac{L\sqrt{2}}{2}$.

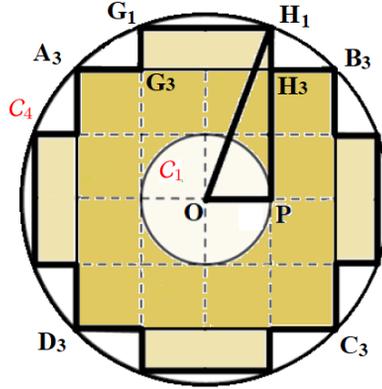


Figura 13: Comprimentos dos raios de \mathcal{C}_1 e de \mathcal{C}_4

Vamos determinar o comprimento do segmento $\overline{H_1P}$ pelo teorema de Pitágoras. Tem-se

$$\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{4}\right)^2 + \overline{H_1P}^2 \Rightarrow \overline{H_1P}^2 = \frac{2L^2}{4} - \frac{L^2}{16} = \frac{7L^2}{16} \Rightarrow \overline{H_1P} = \frac{L\sqrt{7}}{4}.$$

Como $\overline{H_3P} = \frac{L}{2}$, segue que $\overline{H_1H_3} = \frac{L\sqrt{7}}{4} - \frac{L}{2} = \frac{L(\sqrt{7}-2)}{4}$.

Portanto,

$$\overline{H_1H_3} = \frac{L(\sqrt{7}-2)}{4}. \tag{1}$$

Proposição 1. A fronteira da chakana, F_{chak} , é dada por

$$F_{\text{chak}} = \frac{L}{2} (4\sqrt{7} + \pi) \text{ u.m.}$$

Demonstração. A fronteira da *chakana* é composta por: 8 segmentos congruentes a $\overline{H_3B_3}$, de comprimento $\frac{L}{4}$, 8 segmentos congruentes a $\overline{H_3H_1}$, cujo comprimento é dado na Equação (1), 4 segmentos congruentes a $\overline{G_1H_1}$, de comprimento $\frac{L}{2}$ e o perímetro de uma circunferência central \mathcal{C}_1 de raio $\frac{L}{4}$, desse modo temos:

$$F_{\text{chak}} = 8 \left(\frac{L}{4} \right) + 8 \frac{L(\sqrt{7}-2)}{4} + 2\pi \left(\frac{L}{4} \right) + 4 \left(\frac{L}{2} \right) \text{ u.m.} \quad (2)$$

Reduzindo os termos algébricos do Equação (2), a fronteira da *chakana* é dada por:

$$F_{\text{chak}} = \frac{L}{2} (4\sqrt{7} + \pi) \text{ u.m.}$$

□

Proposição 2. A área da região definida pela *chakana*, A_{chak} , é dada por

$$A_{\text{chak}} = \frac{L^2}{16} (8\sqrt{7} - \pi) \text{ u.a.}$$

Demonstração. A área da *chakana* é dada pela adição da área do quadrado $A_3B_3C_3D_3$ com as áreas dos quatro retângulos congruentes, subtraindo a área do pequeno círculo central de raio $\frac{L}{4}$.

Denotemos por A_1 a área do quadrado $A_3B_3C_3D_3$, assim,

$$A_1 = (\overline{A_3B_3})(\overline{B_3C_3}) = L^2 \text{ u.a.} \quad (3)$$

Denotemos por A_2 as áreas dos retângulos, logo

$$A_2 = 4(\overline{G_1H_1})(\overline{H_1H_3}) = 4 \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{L}{4} \right) (\sqrt{7} - 2) = \frac{L^2}{2} (\sqrt{7} - 2) \text{ u.a.} \quad (4)$$

Por último, denotemos por A_3 a área do pequeno círculo central de raio $\frac{L}{4}$, logo

$$A_3 = \frac{\pi L^2}{16} \text{ u.a.} \quad (5)$$

Assim, das Equações (3), (4) e (5), temos:

$$A_{\text{chak}} = L^2 + \frac{L^2}{2} (\sqrt{7} - 2) - \frac{\pi L^2}{16} = L^2 + \frac{L^2\sqrt{7} - 2L^2}{2} - \frac{\pi L^2}{16} \text{ u.a.} \quad (6)$$

Simplificando os termos da Equação (6), a área da *chakana* é dada por

$$A_{\text{chak}} = \frac{L^2}{16} (8\sqrt{7} - \pi) \text{ u.a.}$$

□

4. Interdisciplinaridade

A história das civilizações antigas, utilizada no ambiente escolar pode estimular a pesquisa e permitir que várias disciplinas trabalhem em conjunto.

De acordo com Bazán [2] há uma possível ligação histórico-cultural entre os povos andinos pré-colombianos e a cultura Kadiwéu do Brasil por meio da simbologia da *chakana* nas diversas expressões artísticas.

É previsto na BNCC [3] as habilidades: “Identificar os espaços territoriais ocupados e os aportes culturais, científicos, sociais e econômicos dos astecas, maias e incas e dos povos indígenas de diversas regiões brasileiras” e “Identificar algumas constelações no céu, com o apoio de recursos (como mapas celestes e aplicativos digitais, entre outros), e os períodos do ano em que elas são visíveis no início da noite”.

Nesta seção apresentamos sugestões de algumas disciplinas que podem ser envolvidas nesse contexto.

4.1. História

O professor de História pode solicitar pesquisas sobre o uso da *chakana* e a agricultura, e a relação entre os povos andinos e o povo Kadiwéu². Algumas dessas relações manifestam-se no símbolo da *chakana*, como ilustrado na Figura 14.

²Povo indígena brasileiro. Lutaram pelo Brasil na Guerra do Paraguai.



(a) Obelisco Telles da cultura Chavin (Peru) (1220 a.C - 200 a.C)



(b) Arte Kadiwéu (Brasil) (Séc. XVII)



(c) Vaso cerimonial: Arte na cultura Moche (Peru) (200 a.C - 500 d.C)



(d) Arte Kadiwéu (Brasil) (Sec. XVII)

Figura 14: Semelhança entre a cultura andina e a Kadiwéu

Fonte: Extraído de Bazán [2] p. 180

4.2. Artes

O professor de Artes pode explorar o artesanato, pinturas em cerâmicas. Na Figura 15 são ilustradas algumas formas de arte em que a *chakana* está presente, como arte têxtil de Nazca (300 a.C - 800 d.C) com cruzes quadradas, Figura 15a; a cerâmica da cultura *La Tolita* com representação da cruz quadrada, Figura 15b; a imagem de um vaso em cerâmica em forma de cabeça com uma *chakana* desenhada na testa, Figura 15c; e a arte Kadiwéu ilustrada nas figuras 14b e 14d.



Figura 15: Chakana na arte da cultura pre-incaica Nazca

Fonte: <https://peregrinadanza.wordpress.com/2015/10/10/las-cruces-cuadradas-chavin/>

4.3. Geografia

O professor de geografia pode abordar a civilização inca na América do Sul e explorar a localização, extensão, exibida na Figura 16a, e o caminho *Qhapaq Ñan* [4], Figura 3, o relevo dos Andes, falhas geológicas, e resistência das construções arquitetônicas. Na Figura 16b é vista uma parte do sítio arqueológico de Machu Picchu, uma cidade inca localizada a 2400 metros de altitude, no Peru.

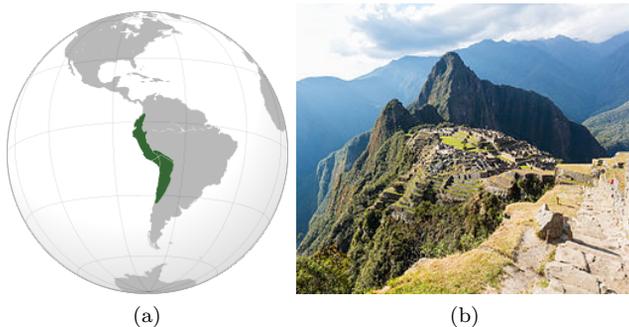


Figura 16: Mapa e relevo

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Imp%C3%A9rio_Inca

4.4. Ciências com astronomia

O professor de Ciências pode solicitar que os alunos observem o céu noturno e estrelado e identifiquem algumas estrelas como as do Cinturão de Orion (Três Marias), visualizadas na Figura 17a, e as estrelas da constelação Cruzeiro do Sul, visualizadas na Figura 17b, e relacionar essa constelação com a *chakana* que era usada como orientação espacial dos Incas.

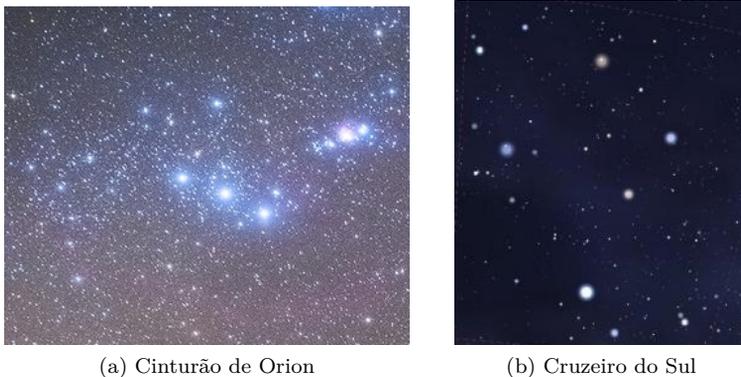


Figura 17: Constelações

Fonte: <http://www.astropt.org/>

5. Conclusão

A História da Matemática pode ser utilizada como elemento motivador em particular para o estudo da geometria, mostrando aos alunos como ela se desenvolveu em diferentes culturas de civilizações antigas.

A geometria e sua conexão com a história das antigas civilizações é uma prática metodológica interdisciplinar, a qual pode nos fornecer uma variedade de situações conexas a serem exploradas em sala de aula, tais como: seus costumes, construções arquitetônicas e pinturas artísticas, além de favorecer à alfabetização cartográfica e com isso estimular a interdisciplinaridade.

Os conhecimentos históricos, a importância da geometria e curiosidades presentes nesses assuntos são elementos que podem despertar no aluno um senso mais crítico e uma maior capacidade para pesquisar sobre as raízes de seus antepassados, assim como também buscar soluções para diferentes situações encontradas no cotidiano.

Referências

- [1] Andrade, L. C. *Aspectos Geométricos de Alguns Símbolos Místicos*. Dissertação de Mestrado (Profmat). 2018. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=161030208>. Acesso em: 05 de janeiro de 2021.
- [2] Bazán, P. S. *Evidências e reflexões sobre uma possível ligação histórico-cultural entre os povos andinos pré-colombianos e a cultura kadiwéu do Brasil por meio da simbologia Chakana nas diversas expressões artísticas*. Dissertação (Mestrado em Artes). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São Paulo, 2020.
- [3] BNCC. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.

- [4] Lajo, J. *Qhapaq ñan: a rota inca da sabedoria*. 2006. Disponível em: <https://digitalrepository.unm.edu/abya_yala/358>. Acesso em: 27 de janeiro de 2021.
- [5] Lambert, M. *Chakana, a cruz andina*. 2016. Disponível em: <<http://blog.marcelolambert.com/search?q=chakana>>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.
- [6] Maldonado, A. P. *Significado dos Símbolos: Cruz Inca ou Chakana*. 2016. Disponível em: <<https://www.altoastral.com.br/significado-dos-simbolos-cruz-inca-ou-chakana/>>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.
- [7] Motta, S. *A pedra de 12 ângulos feita pelos incas em Cusco*. Disponível em: <<http://sergiomotta.com.br/a-pedra-de-12-angulos-feita-pelos-incas-em-cusco/>>. Acesso em: 03 de fevereiro de 2021.
- [8] Villena, C. M. *Genesis de la Cultura Andina*. Fondo Editorial C.A.P.. Lima, Peru, 1983.
- [9] Amaral, M. M. DO, Márquez, R. M. G., Araújo, J. C. DE. “Algumas velocidades de órbitas planetárias”. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, v. 6, n°1, p. 1-14, 30 dez. 2019.
- [10] Ramos, Jorge R. *Análisis comparativo entre el diseño iconográfico andino precolombino y actual del Ecuador com el Peru y Bolivia*. 220 f. Monografia (Bacharel em Design Gráfico) - Faculdade de Ciência da Computação e Eletrônica, Escola de Design Gráfico, Escola Superior Politécnica Chimborazo, Equador, 2009.
- [11] Rengifo, M. G. F. *La Chakana y los saberes ancestrales del Pueblo Kayambi*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em ciências da educação). Universidad central del Ecuador. 2018
- [12] Servindi, *Mundo andino celebra o Dia da Chakana*. Disponível em: <<https://www.servindi.org/actualidad-noticias/03/05/2019/el-dia-de-la-chakana>>. Acesso em: 03 de fevereiro de 2021.

Luiz Carlos de Andrade
ETE Helber Vignoli Muniz - FAETEC
<luizsaqu@gmail.com>

Rosa García Márquez
Faculdade de Formação de Professores - UERJ
<rgmalillo@gmail.com>

Fábio Silva de Souza
Faculdade de Formação de Professores - UERJ
<fasouza08@gmail.com>

Recebido: 05/02/2021
Publicado: 01/06/2021

Polinômios e métodos numéricos interativos

Marlon Péricles da Silva Assis

Márcio Batista

Resumo

O presente trabalho aborda os métodos numéricos da Bisseção, Falsa Posição e de Newton para aproximação de zeros das funções polinomiais de qualquer grau, dados os intervalos em que essas funções se anulam ou quando podem ser deduzidas ou em cenários em que tais intervalos possam ser inferidos. Ressalta-se que o texto compreende a elaboração de algoritmos e demanda o pensamento computacional para resolução de problemas, em conformidade com os aspectos previstos na Base Nacional Comum Curricular. A utilização dos *softwares* educacionais Visual Cálculo Numérico e o Excel foi determinante para a eficiência dos algoritmos nos quesitos velocidade e precisão.

Palavras-chave: Métodos Numéricos; Funções Polinomiais; Algoritmos; Base Nacional Curricular Comum; *Softwares*.

Abstract

The present work deals with the numerical methods of Bisection, False Position and Newton to approximate zeros of polynomial functions of any degree, given the intervals in which these functions vanish, either when it can be deduced or in scenarios where such intervals can be inferred. It is noteworthy that this research comprises the elaboration of algorithms and demands computational thinking in order to solve problems in accordance with the aspects provided for the National Common Curricular Base. The use of the educational software Visual Numerical Calculation and Excel was decisive for the efficiency of the algorithms in terms of speed and accuracy.

Keywords: Numerical Methods; Polynomial Functions; Algorithms; Base Nacional Curricular Comum; *Softwares*.

1. Introdução

Neste artigo apresentamos, sucintamente, parte da pesquisa desenvolvida no trabalho de conclusão de curso Profmat do primeiro autor (2020), sob orientação do segundo autor, onde são propostas atividades para o desenvolvimento de um projeto audacioso em turmas do 3º ano do Ensino Médio. Tendo como pano de fundo as necessidades da sociedade e entendendo que o aluno deve habilitar-se para o pensamento computacional e ao mesmo tempo fazer uso das tecnologias digitais, e considerando o pensamento crítico e a autonomia do educando para investigar, criar modelos, e julgar resultados, no presente trabalho destacamos o uso dos métodos numéricos como ferramenta para aproximação dos zeros das funções polinomiais de qualquer grau. Tais métodos implementam algoritmos, considerando para isso uma dada precisão. Os zeros (raízes, como de costume se fala),

quando conhecidos, possibilitam a aplicação em diversas áreas do conhecimento, principalmente no âmbito das Engenharias, onde a empregabilidade dos métodos numéricos é extremamente predominante.

Diversos *softwares* são utilizados para essa finalidade, desde o mais básico como o Excel, como também o Visual Cálculo Numérico (VCN), que é um *software* brasileiro desenvolvido por professores da PUC do estado de Minas Gerais, visando ser um ótimo auxílio para os estudantes do cálculo numérico. O programa é disponibilizado gratuitamente no *site*. Nossa primeira impressão foi que o *design* do VCN é simples e direto. Separadamente, assuntos como ajuste de curvas, cálculo de raízes, derivação, equações diferenciais, interpolação, integração, sistemas lineares, operadores, otimização e seus derivados. Além disso, disponibiliza cálculos de trocas de variáveis, calculadora, tabelas, entre outras ferramentas, tendo uma precisão de dezenove casas decimais. Ao selecionar um ícone qualquer, percebemos que abre uma guia, e se quisermos fazer outros cálculos basta minimizar a aba e selecionar outras, fazendo diferentes cálculos ao mesmo tempo, otimizando assim o tempo. Ao fazermos um teste com o cálculo de raízes, um exercício que leva longos minutos para achar a raiz, neste programa facilmente preenchem-se os dados e após segundos o *software* fornece-nos a raiz. A eficiência desempenhada pelo VCN é surpreendente.

2. Fundamentos Teóricos

Nesta seção apresentamos os rudimentos básicos e acessíveis aos estudantes do terceiro ano do Ensino Médio para que compreendam os métodos de aproximação de zeros de funções.

Apresentamos logo abaixo os conceitos de continuidade e derivabilidade. Ver (GUIDORIZZI, 2016) para uma abordagem elementar desses conceitos.

Definição 1 (Continuidade). Seja uma função f definida em um intervalo aberto contendo x_0 . f é dita contínua em x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Uma função é contínua em um intervalo se é contínua em todo ponto desse intervalo.

Definição 2 (A Derivada). Seja uma função f definida em um intervalo aberto contendo x_0 . A derivada de f em x_0 , denotada por $f'(x_0)$, é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

se esse limite existir.

Entre as funções contínuas e deriváveis figuram os polinômios, as exponenciais, as funções trigonométricas, entre outras funções apresentadas no ensino médio.

2.1. Cálculo de Zeros de Funções Reais

Um dos problemas que ocorrem mais frequentemente no cotidiano é calcular as soluções (que são chamadas de raízes) de equações da forma: $f(x) = 0$. Em alguns casos, por exemplo, de equações polinomiais, os valores de x que anulam $f(x)$ podem ser reais ou complexos. Em raros casos é possível obter as raízes exatas de $f(x) = 0$, como ocorre, por exemplo, supondo-se $f(x)$ um polinômio fatorável.

Resolver a equação $f(x) = 0$ consiste em determinar a solução (ou soluções) real ou complexa, p , tal que $f(p) = 0$. Porém, estamos interessados somente nos zeros reais de $f(x)$, que são representados graficamente pelas abscissas dos pontos onde uma curva intercepta o eixo x .

2.2. Localização das Raízes de Polinômios

Na grande maioria dos problemas cotidianos é necessário recorrer a métodos numéricos para calcular aproximações para as raízes reais de uma dada equação. No que segue, apresentaremos algumas técnicas interessantes para determinar a localização dos zeros de uma classe particular de funções, a saber, os polinômios. Representaremos um polinômio real de grau n da seguinte forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais e $a_n \neq 0$.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Um polinômio real de grau n tem exatamente n raízes (algumas eventualmente idênticas) que podem ser reais ou complexas.*

O leitor pode encontrar uma demonstração desse teorema em (HEFEZ, 2018).

Teorema 2 (Teorema de Bolzano). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em (NETO, 2015).

Teorema 3 (Regra dos Sinais de Descartes I). *O número N_+ de raízes reais positivas de um polinômio real $p(x)$ não excede o número V de variações de sinal dos seus respectivos coeficientes não nulos, e o valor $V - N_+$ é par.*

O leitor encontrará uma demonstração elementar desse resultado em (DESCARTES, 1954) ou em língua portuguesa (ASSIS, 2020).

Teorema 4 (Regra dos Sinais de Descartes II). *O número N_- de raízes reais negativas de um polinômio real $p(x)$ não excede o número V de variações de sinal dos coeficientes não nulos do polinômio $q(x) = p(-x)$, e o valor $V - N_-$ é par.*

Demonstração. Consequência direta da regra anterior. □

Teorema 5 (Regra do Máximo). *Todas as raízes z , reais ou complexas, de um polinômio $p(x)$ na forma*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

verificam a desigualdade $|z| < R$, onde

$$R = 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|. \quad (1)$$

Em particular, se $p(x)$ tiver raízes reais, elas pertencem ao intervalo $] -R, R[$.

O leitor pode acessar uma demonstração em (ASSIS, 2020).

2.3. Isolamento das Raízes

Nesta seção, usando o teorema de Bolzano enunciado na seção anterior, apresentaremos uma forma de determinar intervalos finitos $[a, b]$ de sorte que a raiz p pertença a tal intervalo. Para tal faz-se uma análise gráfica da função f , e para isso usamos o seguinte artifício: para f uma função contínua, buscamos um intervalo $[a, b]$ no qual se tenha $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ou seja, $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários), e assim garantimos que existe pelo menos uma raiz real de f no intervalo $[a, b]$.

Além disso, se f é contínua e diferenciável em $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ e se f' não troca de sinal em $[a, b]$, ou seja, $f' > 0$ ou $f' < 0$, então f possui uma única raiz em tal intervalo.

2.4. Refinamento

O refinamento da solução pode ser feito utilizando vários métodos numéricos. A forma como deve-se efetuar o refinamento é o que diferencia os métodos. Todos eles pertencem à classe dos métodos iterativos. Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos (laços) até que um critério de parada seja satisfeito.

2.5. Critério de parada

Idealmente, queremos parar quando a diferença entre a solução aproximada e a solução exata (e desconhecida) for muito pequena. A tolerância (ϵ) é uma estimativa para o erro absoluto dessa aproximação. Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ as aproximações para a raiz p na iteração n que um determinado método realiza, o critério de parada é uma regra preestabelecida para interromper a sequência de aproximantes gerada pelos métodos iterativos a partir de um certo instante. Esse deve avaliar quando um aproximante está suficientemente próximo da raiz exata. Assim, o processo iterativo é interrompido quando pelo menos um dos seguintes critérios é satisfeito:

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

ou

$$|f(x_n)| < \epsilon$$

ou

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \epsilon$$

Outros critérios de parada podem ser utilizados, mas sem adicional conhecimento sobre f ou p , a desigualdade (7) é o melhor critério de parada a ser aplicado porque chega mais perto de testar o erro relativo.

O leitor interessado em completar o conhecimento sobre esse tópico pode encontrar tais temas em (CHAPRA; CANALE, 2008) ou (RUGGIER; LOPES, 1997).

3. Métodos Numéricos Iterativos

Neste capítulo, consideramos um dos problemas mais básicos da aproximação numérica, o problema de busca de raiz. Esse processo envolve encontrar uma raiz, ou solução, de uma equação na forma

$f(x) = 0$, para uma dada função f . Uma raiz dessa equação também é chamada de zero da função f . Segundo (BERRY; SWETZ, 2012), o problema de encontrar uma aproximação da raiz de uma equação data de aproximadamente 1700 a.C. Uma tabela cuneiforme da Coleção Babilônica de Yale que data daquele período fornece um número sexagesimal equivalente a 1.414222 como uma aproximação para $\sqrt{2}$ e essa aproximação tem uma precisão de ordem 10^{-5} .

O leitor pode encontrar mais dados sobre os temas tratados aqui em (CHAPRA; CANALE, 2008) ou (RUGGIERO; LOPES, 1997).

3.1. Método da Bissecção

Seja a função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Suponha que o intervalo (a, b) contenha uma única raiz. O método indica que devemos dividir ao meio o intervalo utilizado, testar suas extremidades e escolher aquele subintervalo que cumpre as condições do teorema de Bolzano. Repetindo essa estratégia seremos capazes de localizar o subintervalo contendo o zero da função. A Figura 1 abaixo ilustra o processo.

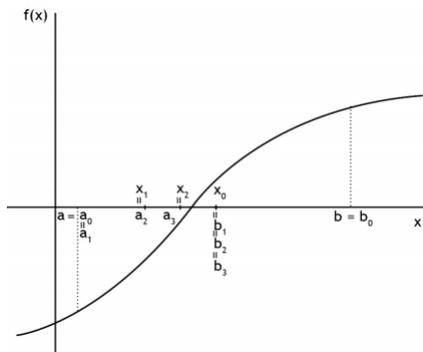


Figura 1: Interpretação geométrica do Método da Bissecção

Tecnicamente, a redução da amplitude do intervalo faz-se pela sucessiva divisão de $[a, b]$ ao meio, ou seja, pelo ponto médio $x_n = \frac{(a_n + b_n)}{2}$, gerando uma sequência de intervalos encaixados da forma: $\{[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_n, b_n]\}$, mantendo a cada iteração o subintervalo que contém o zero desejado e desprezando o outro subintervalo. A escolha do subintervalo que será mantido é feita de modo simples: calculamos o valor da função f no ponto médio $x_n = \frac{(a_n + b_n)}{2}$. Temos assim três possibilidades:

- $f(x_n) = 0$. Nesse caso x_n é o zero (exato) de f e não temos mais nada a fazer. Em geral, não é isso que ocorre.
- $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$. Aqui o zero de f está entre a_n e x_n . O intervalo a ser mantido será, então, $[a_n, x_n]$, e definem-se $a_n = a_{n+1}$ e $x_n = b_{n+1}$.
- $f(a_n) \cdot f(x_n) > 0$. Nesse caso, desde que $f(a_n)$ e $f(b_n)$ têm sinais opostos, teremos também $f(x_n) \cdot f(b_n) < 0$. Assim, o zero de f está entre x_n e b_n , e o intervalo a ser mantido será, então, $[x_n, b_n]$, e definem-se $x_n = a_{n+1}$ e $b_n = b_{n+1}$.

3.2. Descrição do algoritmo da bissecção

Dados um intervalo $[a_0, b_0]$, uma função real de uma variável real f contínua em $[a_0, b_0]$ tal que $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ e uma precisão ϵ . A rotina do cálculo das aproximações é:

$$n = 0.$$

Enquanto $b_n - a_n > \epsilon$, faça

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Se $f(a_n) \cdot f(x_n) = 0$, faça $p = x_n$. PARE.

Se $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$, faça $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = x_n$.

Caso contrário, faça $a_{n+1} = x_n$ e $b_{n+1} = b_n$.

$$n = n + 1.$$

Faça $\bar{x} = \frac{a_n + b_n}{2}$. PARE.

Terminando o processo iterativo, teremos um intervalo $[a, b]$ que contém o zero p de f e, caso $n < N$ para N preestabelecido, encontraremos também uma aproximação \bar{x} de p que satisfaz o primeiro critério de parada, ou seja, tal que $|p - \bar{x}| < \epsilon$.

3.3. Convergência linear

A cada passo, o erro absoluto é reduzido pela metade, e assim o método converge linearmente. Especificamente, se $c_1 = \frac{(a+b)}{2}$ é o ponto médio do intervalo, e c_n é o ponto médio do intervalo da n -ésima iteração, então a diferença entre c_n e uma solução c é limitada por

$$|c_n - c| \leq \frac{|b - a|}{2^n}$$

Assim, se ϵ_n for a estimativa do erro absoluto na n -ésima iteração, então

$$\epsilon_{n+1} \leq \frac{\epsilon_n}{2}$$

e assim notamos que o método da bissecção tem convergência linear, o que veremos ser lento (computacionalmente), comparado a outros métodos.

3.4. Experimentando o método

Considere a função $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x - 4$. Isole suas raízes reais e calcule sua maior raiz positiva com precisão 10^{-2} .

Proposta de Solução: Pela Regra do Máximo, ver equação (1), todas as raízes z reais do polinômio, se existirem, situam-se em $] -5, 5[$. Calculando as respectivas imagens dos inteiros no intervalo $[-5, 5]$, temos:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	261	72	5	-6	-3	-4	-3	30	149	432	981

Tabela 1: Imagens dos inteiros no intervalo $[-5,5]$

Fazendo a escolha dos subintervalos de $[-5,5]$, tais que as imagens possuam sinais opostos, verifica-se que apenas os intervalos $(-3,-2)$ e $(1,2)$ possuem raízes reais. Além disso, o intervalo $(-3,-2)$ possui exatamente uma raiz real, pois:

1. Pela Regra dos Sinais de Descartes II, o número de raízes reais negativas, N_- , não excede as variações de sinais de $f(-x) = x^4 - 3x^3 + 3x - 4$, $V = 3$, e $V - N_-$ é par. Logo, $N_- \in \{1, 3\}$.
2. Pelas Relações de Girard, o produto das raízes é 4.

Logo, não podemos ter três raízes reais negativas no intervalo $(-3,-2)$, pois assim o produto das raízes seria negativo. Ademais, pela Regra dos Sinais de Descartes I, podemos afirmar que o intervalo $(1,2)$ possui uma única raiz positiva.

Dessa forma, está claro que temos uma raiz real negativa no intervalo $(-3,-2)$ e uma raiz real positiva no intervalo $(1,2)$ e duas raízes complexas.

Agora, vejamos as iterações no Visual Cálculo Numérico (VCN) para calcular a maior raiz positiva. Primeiramente, acessamos a aba Cálculo de Raízes, em seguida, selecionamos o Método da Bissecção, a interface irá abrir, selecionamos o critério de parada $|x_n - x_{n-1}| < precisão$ e preenchemos os campos da função, do intervalo considerado $(1,2)$ e da precisão 10^{-2} , e por fim clicamos em Calcular para obter a tabela de iterações da raiz aproximada, obtendo $\bar{x} = 1,226$. Ver Figura 2.

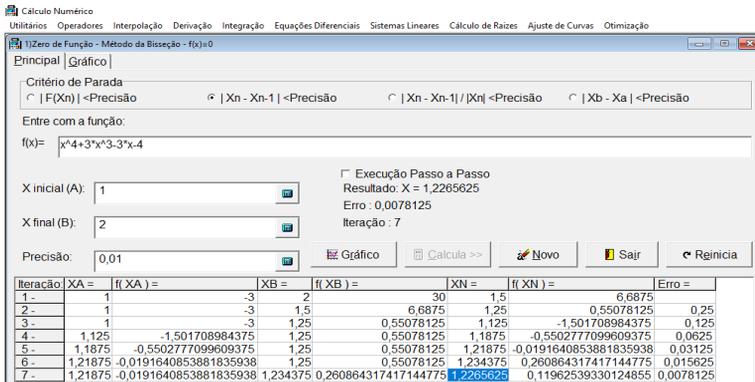


Figura 2: Tela do vcn.exe para método da bissecção

4. Método da Falsa Posição

Suponha $y = f(x)$, onde f seja uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ e com uma única raiz no intervalo considerado. Enquanto no método da bissecção é feita uma média aritmética simples (sem ponderação) dos valores a e b , o método da falsa posição faz uma média ponderada desses valores com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente, ou seja, o ponto que divide o intervalo $[a, b]$ é dado por

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}. \quad (2)$$

A segunda igualdade segue do fato de que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários.

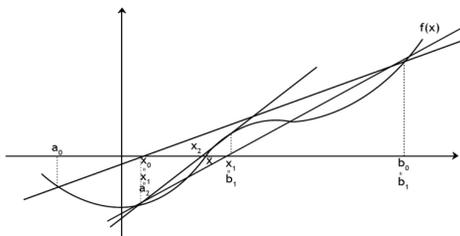


Figura 3: Interpretação geométrica do Método da Falsa Posição

Tecnicamente, a redução da amplitude do intervalo faz-se pela sucessiva divisão de $[a, b]$ pelo ponto $x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$, gerando uma sequência de intervalos encaixados da forma: $\{[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots\}$. Uma vez obtido x_n a cada iteração, é preciso verificar em qual dos subintervalos $[a_n, x_n]$ ou $[x_n, b_n]$ está a raiz procurada. Para isso examina-se o sinal de $f(a) \cdot f(x_n)$. Se for negativo, a raiz está no intervalo $[a_n, x_n]$, e definimos $x_n = b_n$; caso contrário, está em $[x_n, b_n]$, e definimos $x_n = a_n$.

4.1. Fórmula de iteração

Na verdade, o que se faz no método da posição falsa é substituir o gráfico de f no intervalo de cada iteração por um segmento de reta. Nesse caso, a aproximação dada pelo número \bar{x} , obtido por meio da equação (2), é o ponto de intersecção da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ com o eixo OX .

De fato, a equação da reta $y = Ax + B$ que passa por esses dois pontos, pode ser obtida por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De onde segue:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Como $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos, podemos tomar

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}.$$

Defina $a_0 = a$ e $b_0 = b$. E observe que, a cada iteração, os limites do intervalo são alterados obedecendo o Teorema de Bolzano – isso pode ser observado no gráfico da Figura 3. Logo, na iteração n um novo intervalo, $[a_n, x_n]$ ou $[x_n, b_n]$, será considerado por conter a raiz, onde também definimos $x_n = a_n$ ou $x_n = b_n$. Dessa forma, por indução, temos a fórmula iterativa:

$$x_n = \frac{a_n|f(b_n)| + b_n|f(a_n)|}{|f(b_n)| + |f(a_n)|}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Observe que esse método sintetizado em (3) procura beneficiar a busca do menor $f(x)$ gerado por a_n ou b_n , sendo equivalente a localizar uma raiz aproximada por meio da média ponderada entre a_n e b_n , utilizando como pesos $|f(a_n)|$ e $|f(b_n)|$.

4.2. Descrição do algoritmo da Falsa Posição

O algoritmo para tal método pode ser o mesmo que o utilizado para o método da bissecção, alterando-se apenas a fórmula de iteração para $x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$.

4.3. Experimentando o método

Exemplo: Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Encontrar a raiz de $f(x)$ do intervalo $I = [0, 1]$ usando a precisão $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ e o critério de parada $|f(x_n)| < \epsilon$.

Proposta de Solução: Primeiramente, isolemos as raízes. Pela Regra do Máximo, ver equação (1), todas as raízes z reais do polinômio, se existirem, situam-se em $] - 10, 10[$. Mas, basta observar as respectivas imagens dos inteiros no intervalo $[-4, 4]$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-25	3	13	11	3	-5	-7	3	31

Tabela 2: Imagens dos inteiros no intervalo $[-4,4]$

Fazendo a escolha dos subintervalos de $[-4,4]$, tais que as imagens dos extremos possuam sinais opostos, verifica-se que todas as três raízes do polinômio são reais e localizam-se nos intervalos $(-4, -3)$, $(0, 1)$ e $(2, 3)$. Dessa forma, fica claro que o intervalo $[0, 1]$ possui exatamente uma raiz real.

Agora, vejamos as iterações no Visual Cálculo Numérico (VCN). Primeiramente, acessamos a aba Cálculo de Raízes e, em seguida, selecionamos o Método da Falsa Posição. A interface irá abrir e em seguida selecionamos o critério de paragem $|f(x_n)| < precisão$ e preenchemos os campos da função, do intervalo considerado $(0, 1)$ e da precisão $5 \cdot 10^{-4}$, e por fim clicamos em Calcular para obter a tabela de iterações da raiz aproximada, obtendo $\bar{x} = 0,33765$. Ver Figura 4.

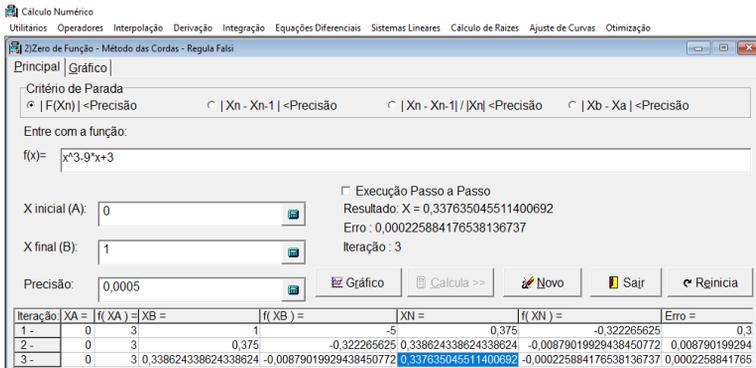


Figura 4: Tela do vcn.exe para método da falsa posição

4.4. Método de Newton-Raphson

O método de Newton (ou de Newton-Raphson) é um dos métodos numéricos mais poderosos e conhecidos para a solução de problemas de busca de resultados. Existem muitas maneiras de introduzir o método, e uma delas é baseada nos polinômios de Taylor. A derivação específica do desenvolvimento produz não apenas o método, mas também um limite para o erro da aproximação. Suponha que $f \in C^2[a, b]$. Denote por $x_0 \in [a, b]$ uma aproximação para a raiz exata p de tal modo que $f'(x_0) \neq 0$ e $|p - x_0|$ é pequeno. Considere o primeiro polinômio de Taylor para $f(x)$ expandido em torno de x_0 e avaliado em torno de $x = p$:

$$f(p) = f(x_0) + (p - x_0)f'(x_0) + \frac{(p - x_0)^2}{2}f''(\xi(p)). \quad (4)$$

onde $\xi(p)$ está entre p e x_0 . Uma vez que $f(p) = 0$, de (4) temos:

$$0 = f(x_0) + (p - x_0)f'(x_0) + \frac{(p - x_0)^2}{2}f''(\xi(p)).$$

O método de Newton é derivado supondo que $|p - x_0|$ é pequeno, e assim o termo envolvendo $(p - x_0)^2$ é muito menor. Donde

$$0 \approx f(x_0) + (p - x_0)f'(x_0),$$

e portanto temos

$$p \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =: x_1.$$

Isso prepara o cenário para o método de Newton, que começa com uma aproximação inicial x_0 e gera a sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ por meio da seguinte fórmula:

$$x_n \approx x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

4.5. Interpretação Geométrica

A figura abaixo ilustra como as aproximações são obtidas com tangentes sucessivas. Começando com a aproximação inicial x_0 , a aproximação x_1 é a x-interceptação da linha tangente para o gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$. A aproximação x_2 é a x-interceptação da linha tangente para o gráfico de f em $(x_1, f(x_1))$ e assim por diante.

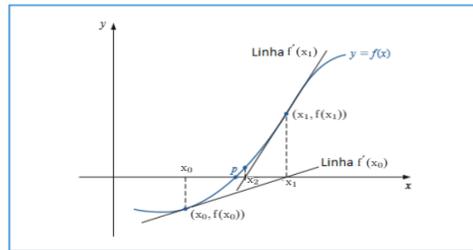


Figura 5: Interpretação Geométrica do Método de Newton

4.6. Descrição do método de Newton

Considere a equação $f(x) = 0$. Suponha que $f'(p) \neq 0$, e que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam contínuas num intervalo I que contém a raiz $x = p$.

Dados: x_0 (aproximação inicial), ϵ_1 e ϵ_2 (precisões) e N (máximo de iterações). Para $n = 0$ até $n = N$ faça $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Se $|f(x_{n+1})| < \epsilon_1$ ou $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon_2$, então $\bar{x} = x_{n+1}$, e terminamos. Se $n = N$, então terminamos, e a seqüência de aproximações gerada pelo método não converge para a solução.

4.7. Condições de convergência

Segundo Newton, para haver a convergência a uma raiz em seu método, bastaria que o intervalo (a, b) em análise fosse suficientemente pequeno. Contudo, Raphson e Fourier concluíram que um intervalo pequeno é aquele que contém uma e somente uma raiz.

Haverá convergência a uma raiz no intervalo (a, b) se, e somente se, $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(a) \cdot f'(b) > 0$ e $f''(a) \cdot f''(b) > 0$

Teorema 6 (Condição suficiente de convergência para o método de Newton). *Seja (a, b) um intervalo que contém uma só raiz da equação $f(x) = 0$. A sucessão de valores x_i gerados pelo método de Newton-Raphson é monótona e limitada (e portanto convergente) se:*

1. $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$;
2. $f''(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$;

O leitor pode encontrar uma demonstração de tal resultado em (ALVES, 2001).

Observação 1. Notamos que em casos específicos é interessante que o domínio da função seja o intervalo fechado e o valor inicial seja um dos seus extremos. Neste contexto, precisamos de uma condição extra, a saber, que o extremo escolhido x_0 satisfaça $f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$.

4.8. Convergência quadrática

Nesta subseção verificaremos que a convergência no método de Newton é mais rápida (computacionalmente) e assim mais interessante para fins de programação.

Lembre que a fórmula de iteração do método de Newton, ver (5), é dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6)$$

se $f'(x_n)$ existir e for não nula, $n \geq 0$.

De acordo com o teorema de Taylor, se f tem derivadas até segunda ordem em um intervalo I , então f pode ser representada pela expansão em torno de um ponto próximo da raiz de f . Suponhamos que p seja a raiz. Então pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos, para algum ξ que esteja entre x_n e p :

$$f(p) = f(x_n) + f'(x_n)(p - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(p - x_n)^2$$

Como p é raiz, então $f(p) = 0$ e portanto

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(p - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(p - x_n)^2.$$

E assim

$$-f''(\xi) \frac{(p - x_n)^2}{2f'(x_n)} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (p - x_n).$$

Mas, usando equação (6) temos:

$$\frac{-f''(\xi)(p - x_n)^2}{2f'(x_n)} = (x_n - x_{n+1}) + (p - x_n),$$

o qual pode ser reescrito por

$$p - x_{n+1} = \frac{-f''(\xi)(p - x_n)^2}{2f'(x_n)}.$$

Denotando o erro $p - x_n$ por E_n , obtemos que:

$$|E_{n+1}| = \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} \right| |E_n|^2.$$

4.9. Experimentando o método

Nesta subseção apresentamos um exemplo utilizando o método de Newton de aproximação de raízes.

Vamos determinar a maior raiz real da equação $f(x) = x^3 - 2x - 1 = 0$ com erro inferior a 10^{-3} .

Proposta de Solução: Utilizando a Regra do Máximo, ver (1), temos que suas raízes (reais ou complexas), se existirem, têm módulo menor que 3. Assim, calculando as imagens dos inteiros no intervalo $[-3, 3]$ temos:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-22	-5	0	-1	-2	3	20

Tabela 3: Imagens dos inteiros no intervalo $[-3,3]$

Observe que o intervalo $[1, 2]$ é o que se encontra mais à direita no eixo positivo OX, tal que os extremos possuem imagens de sinais contrários; logo contém a maior raiz real positiva. Além disso, essa raiz é única, pois pela Regra de Sinais de Descartes I, o número de raízes reais positivas não excede o número V de variações de sinal dos coeficientes não nulos de $f(x)$, que é igual a 1.

Demonstrado que o intervalo $(1, 2)$ possui uma única raiz, podemos verificar as condições de convergência:

- $f(1) \cdot f(2) < 0$;
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e daí temos $f'(1) \cdot f'(2) = 1 \cdot 10 > 0$;
- $f''(x) = 6x > 0$ em todo o intervalo.

Para a escolha do melhor extremo, observe que $f(2) \cdot f''(2) > 0$. Então, escolhamos $x_0 = 2$.

Com esse quarto ponto também verificado, estão cumpridas as condições de convergência. Agora, vejamos as iterações no Visual Cálculo Numérico (VCN). Primeiramente, acessamos a aba Cálculo de Raízes e em seguida selecionamos o Método de Newton. A interface abrirá e escolhemos um critério de parada (que pode ser $|x_n - x_{n-1}| < \text{precisão}$) e preenchemos os campos da função, da derivada, do ponto inicial $x_0 = 2$ e da precisão 10^{-3} , e por fim clicamos em Calcular para obter a tabela de iteração. Ver Figura 6.

Logo, a maior raiz é aproximadamente 1,618, com erro menor que 10^{-3} .

5. Considerações importantes sobre os métodos

- No método da Bissecção, as iterações não envolvem cálculos laboriosos, porém pode ser difícil encontrar um intervalo $[a,b]$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, em equações com raízes de multiplicidade par ou raízes muito próximas umas das outras. Assim, na prática, o método é mais utilizado para diminuir o intervalo que contém a raiz, pois se o intervalo inicial é tal que $b_0 - a_0 \gg \epsilon$, e se ϵ for muito pequeno, o número de iterações n tende a ser muito grande, tornando a convergência bastante lenta;

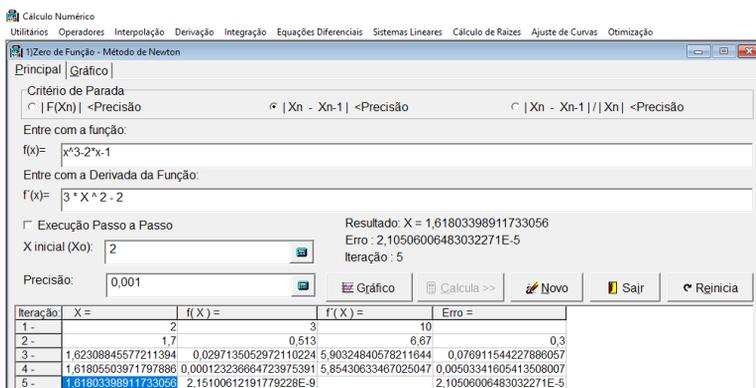


Figura 6: Tela do vcn.exe para o método de Newton

- O método da Falsa Posição utiliza mais informação para gerar as iteradas e é, em geral, de convergência mais rápida que o método da Bissecção. Entretanto, quando a convergência para a raiz só se faz a partir de um extremo do intervalo $[a, b]$, e a imagem desse extremo tem um valor muito elevado, a convergência é lenta. Esta situação ocorre sempre que o gráfico da função apresenta a concavidade voltada para cima ou para baixo no intervalo em estudo, podendo tornar a velocidade de convergência bastante lenta, até mesmo mais lenta que no método da Bissecção;
- Embora o método de Newton tenha uma convergência muito boa, proporcionando geralmente um número pequeno de iterações (considerado o mais rápido entre os apresentados aqui), este se apresenta mais exigente que os demais, pois exige que $f'(x) \neq 0$ no intervalo (a, b) .

6. Propostas de atividades para o Ensino Médio

A seguir, apresentamos três atividades sobre o cálculo de raízes aproximadas através dos métodos iterativos apresentados. A primeira atividade enriquece o desenvolvimento do conteúdo dos Métodos da Bissecção e da Falsa Posição, quando requisita ao aluno a utilização do Excel, onde ele deverá entender sobre condicionais, fórmulas de iteração e a construção de algoritmos para encontrar uma solução aproximada. A segunda atividade traz uma alternativa para o cálculo da raiz quadrada. E a terceira atividade potencializa a capacidade de o aluno observar a construção de resultados, através de identificação de regularidades dentro de um determinado método, e até mesmo busca comparar os métodos através de seus erros e convergências.

6.1. Métodos Iterativos no Excel

Atividade 1: Considere o polinômio $x^4 + x^2 - 9x + 3$. Em uma planilha Excel, use as ferramentas para produzir um algoritmo do método da bissecção e da falsa-posição que nos dê a raiz aproximada no intervalo $[1, 2]$ com erro menor que 10^{-3} . Observação: utilize o critério de parada $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$.

Proposta de Solução. Na planilha Excel da Figura 7, primeiramente preparamos a linha 1 (cabeçalho), onde:

i: i-ésima iteração;

a: extremo esquerdo do intervalo;

f(a): imagem do extremo esquerdo do intervalo;

x_i : ponto médio do intervalo da i-ésima iteração;

f(x_i): imagem do ponto médio da i-ésima iteração;

b: extremo direito do intervalo;

f(b): imagem do extremo direito intervalo;

ϵ : erro.

Em seguida, preparemos a linha 2 da planilha.

Então, começamos pela iteração 0, a célula A2 recebe o valor 0, a célula B2 recebe o valor 1, a célula C2 recebe a fórmula: $= B2^4 + B2^2 - 9 \cdot B2 + 3$, a célula D2 recebe a fórmula: $= (B2 + F2)/2$, a célula E2 recebe a fórmula: $= D2^4 + D2^2 - 9 \cdot D2 + 3$, a célula F2 recebe o valor 2, a célula G2 recebe a fórmula: $= F2^4 + F2^2 - 9 \cdot F2 + 3$. Observação: o erro na iteração 0 existe, porém não é calculado.

Em seguida, preparemos a linha 3 da planilha.

Vamos agora para a iteração 1, para encontrar o novo valor de a é necessária uma estrutura condicional, utilizemos a estrutura SE. No caso, a célula B3 recebe a fórmula: $= SE(C2 \cdot E2 < 0; B2; D2)$, ou seja, se $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, então a raiz está contida no intervalo (a, x_1) , devemos então tomar como verdadeiro o valor de a e tomar como falso o valor de x_1 . Na célula F3, utilizemos a mesma fórmula: $= SE(E2 \cdot G2 < 0; F2; D2)$, ou seja, se $f(b) \cdot f(x_1) < 0$, então a raiz está contida no intervalo (x_1, b) . Devemos, assim, tomar como verdadeiro o valor de b e tomar como falso o valor de x_1 .

As fórmulas de f(a), x_i e f(x_i) na linha 3 são iguais à da linha 2; podemos então simplesmente utilizar a alça de preenchimento para baixo. No caso do erro na linha 3, podemos calcular da seguinte maneira: $= ABS(D3 - D2)$, pois estamos tratando do módulo da diferença entre o valor atual e anterior da raiz.

Por fim, basta agora selecionar a linha 3, e utilizando a alça de preenchimento arrastar para baixo até chegar à iteração 9 onde obtemos erro menor que 10^{-3} . Ver Figura 7.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	a	f(a)	x_i	f(x_i)	b	f(b)	ϵ
2	0	1	-4	1,5	-3,1875	2	5	
3	1	1,5	-3,1875	1,75	-0,30859	2	5	0,25
4	2	1,75	-0,30859	1,875	2,000244	2	5	0,125
5	3	1,75	-0,30859	1,8125	0,764908	1,875	2,000244	0,0625
6	4	1,75	-0,30859	1,78125	0,208589	1,8125	0,764908	0,03125
7	5	1,75	-0,30859	1,765625	-0,05481	1,78125	0,208589	0,015625
8	6	1,765625	-0,05481	1,773438	0,075675	1,78125	0,208589	0,0078125
9	7	1,765625	-0,05481	1,769531	0,010129	1,773438	0,075675	0,00390625
10	8	1,765625	-0,05481	1,767578	-0,02242	1,769531	0,010129	0,001953125
11	9	1,767578	-0,02242	1,768555	-0,00616	1,769531	0,010129	0,000976563

Figura 7: Excel para o método da Bissecção

Logo, pelo método da Bissecção, na iteração 9, obtemos 1,768 como raiz com erro menor que 10^{-3} . Para o método da Falsa Posição, a única mudança está na fórmula iterativa, logo a célula

D2 recebe a fórmula: $= F2 - \frac{(G2(F2-B2))}{(G2-C2)}$. Todos os demais passos são os mesmos que o método da Bissecção. E como resultado obteremos a planilha da Figura 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	a	f(a)	x_i	$f(x_i)$	b	f(b)	ϵ
2	0	1	-4	1,444444	-3,56043	2	5	
3	1	1,444444	-3,56043	1,67551	-1,39114	2	5	0,231065215
4	2	1,67551	-1,39114	1,74614	-0,36982	2	5	0,070630741
5	3	1,74614	-0,36982	1,763624	-0,08785	2	5	0,017483242
6	4	1,763624	-0,08785	1,767705	-0,0203	2	5	0,004081566
7	5	1,767705	-0,0203	1,768645	-0,00466	2	5	0,00093951

Figura 8: Excel para o método da Falsa Posição

Logo, pelo método da Falsa Posição, na iteração 5, obtemos 1,768 como raiz com erro menor que 10^{-3} .

6.2. Raiz quadrada

Atividade 2: Como \sqrt{A} é uma solução da equação $x^2 - A = 0$, podemos usar o método de Newton para estimar \sqrt{A} (Figura 9).

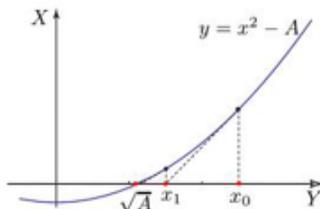


Figura 9: A sucessão converge para a raiz para qualquer valor $x_0 > 0$

1. Utilize o fato que a inclinação da reta tangente à função $y = ax^2 + bx + c$ no ponto (x_0, y_0) é dada por $2ax_0 + b$, para verificar que a fórmula de iteração para obter a estimativa da raiz quadrada é dada por $x_{n+1} = 0,5(x_n + \frac{A}{x_n})$.

Proposta de Solução: Dando continuidade à sucessão, temos que a inclinação θ da reta tangente no ponto x_n é tal que $\tan \theta = 2x_n$. Logo,

$$\frac{y_n}{x_n - x_{n+1}} = 2x_n \Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{y_n}{2x_n} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{y_n}{2x_n}.$$

Como $y_n = x_n^2 - A$, temos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n}.$$

Dessa forma, $x_{n+1} = 0,5(x_n + \frac{A}{x_n})$.

2. Estime $\sqrt{2}$ e $\sqrt{1000999}$ com ao menos cinco decimais exatos. Utilize para isso a fórmula de iteração em uma planilha do Excel.

Proposta de Solução: Na Figura 9 abaixo, temos duas planilhas Excel. Para a primeira planilha utilizamos uma aproximação inicial (1,5) e a fórmula de iteração como fórmula de referência. Assim, na célula C8, temos a seguinte fórmula de referência: $= 0,5(B8 + (2/B8))$ para aproximar $\sqrt{2}$. Para a segunda planilha utilizamos a aproximação uma inicial (1000) e a fórmula de referência: $= 0,5(B8 + 1000999/B8)$ na célula C8 para $\sqrt{1000999}$. Em seguida, deslocamos a alça de preenchimento para baixo até obter na aproximação ao menos cinco decimais exatos.

Dessa forma, $\sqrt{2} \approx 1,41421$ e $\sqrt{1000999} \approx 1000,49937$.

The figure shows two Excel spreadsheets side-by-side. The left spreadsheet is for finding the square root of 2, and the right is for finding the square root of 1,000,000. Both use the iterative formula $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

Iteração	Xn	Xn+1
1	1.5	1,416667
2	1,416667	1,414216
3	1,414216	1,414214
4	1,414214	1,414214
5	1,414214	1,414214
6	1,414214	1,414214
7	1,414214	1,414214
8	1,414214	1,414214
9	1,414214	1,414214
10	1,414214	1,414214

Iteração	Xn	Xn+1
1	1000	1000,499500
2	1000,5	1000,499375
3	1000,499	1000,499375
4	1000,499	1000,499375
5	1000,499	1000,499375
6	1000,499	1000,499375
7	1000,499	1000,499375
8	1000,499	1000,499375
9	1000,499	1000,499375
10	1000,499	1000,499375

Figura 10: Raiz quadrada no Excel

6.3. Métodos iterativos no Visual Cálculo Numérico

Atividade 3: Considere a função polinomial $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Encontrar a raiz de $f(x)$ do intervalo $I = [0, 1]$ usando a precisão $\epsilon = 10^{-3}$ e o critério de parada $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. Utilizando o Visual Cálculo Numérico para os métodos da Bissecção, Falsa Posição e de Newton, responda:

1. Em qual método foi utilizado menor número de iterações? Em qual método foi utilizado o maior número de iterações?

Proposta de Solução. Utilizando o vcn.exe, verificamos 10 iterações pelo método da Bissecção, conforme a figura 11 abaixo:

The screenshot shows the VCN software interface for the Bisection method. The function is $f(x) = x^3 - 9x + 3$. The initial interval is $[0, 1]$ and the precision is 0,001. The results show 10 iterations, with the final root being $X = 0,3369140625$ and an error of $0,0009765625$.

Iteração	XA =	f(XA) =	XB =	f(XB) =	XN =	f(XN) =	Erro =
1	0	3	1	-5	0,5	-1,375	0,25
2	0	3	0,5	-1,375	0,375	-0,32265625	0,125
3	0,25	0,765625	0,5	-1,375	0,375	-0,32265625	0,0625
4	0,25	0,765625	0,375	-0,32265625	0,3125	0,21801758125	0,03125
5	0,3125	0,21801758125	0,375	-0,32265625	0,34375	-0,053131103515625	0,015625
6	0,3125	0,21801758125	0,34375	-0,053131103515625	0,328125	0,082202911376953125	0,0078125
7	0,328125	0,082202911376953125	0,34375	-0,053131103515625	0,3359375	0,0144743919372558594	0,00390625
8	0,3359375	0,0144743919372558594	0,34375	-0,053131103515625	0,33984375	-0,0193439126014709473	0,001953125
9	0,3359375	0,0144743919372558594	0,33984375	-0,0193439126014709473	0,337890625	-0,00243862718343734741	0,0009765625
10	0,3359375	0,0144743919372558594	0,337890625	-0,00243862718343734741	0,3369140625	0,00061691845804452896	0,0009765625

Figura 11: Tela do VCN para o método da Bissecção

Pelo método da Falsa Posição verificamos 3 iterações, conforme Figura 12 abaixo.

E pelo método de Newton sendo $x_0 = 0$ o valor inicial, verificamos 4 iterações, conforme Figura 13.

Nesse caso, o método que utiliza o menor número de iterações é o da Falsa Posição, e o método que utiliza o maior número de iterações é o da Bissecção. Salientamos que se utilizássemos o valor inicial $x = 1$, teríamos 5 iterações para o método de Newton, mas a solução continuaria a mesma.

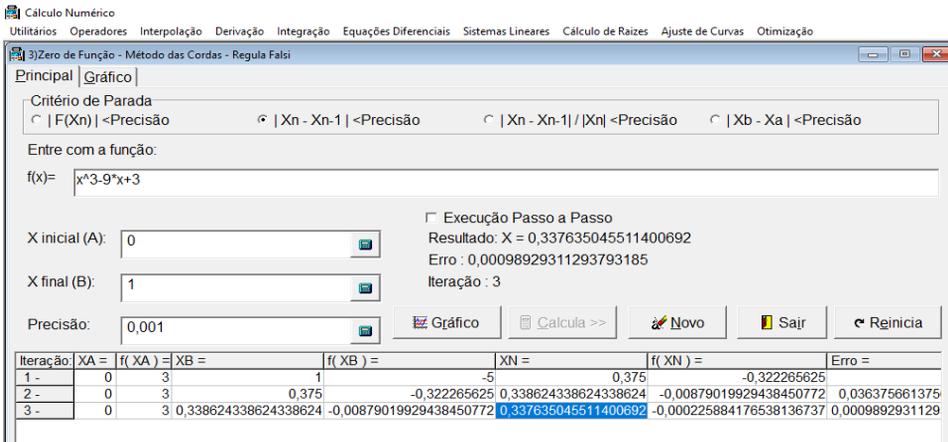


Figura 12: Tela do VCN para o método da Falsa Posição

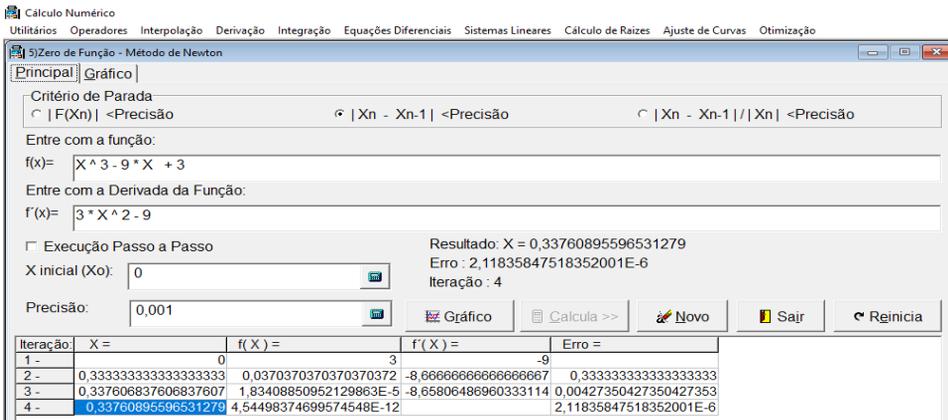


Figura 13: Tela do VCN para o método de Newton

2. Observando os métodos numéricos em questão, o que podemos observar no tocante ao surgimento dos dígitos significativos corretos a cada iteração?

Proposta de Solução: Observe a Figura 13. Podemos identificar que, no método de Newton em questão, os dígitos corretos começam a surgir a partir da primeira iteração, e a quantidade de dígitos corretos duplica à medida que os valores da sequência aproximam-se da raiz. Isso ocorre porque o método tem convergência quadrática.

3. Observando os métodos numéricos em questão, quanto à precisão, o que se pode dizer?

Proposta de Solução: É possível observar na Figura 11 que o erro reduz-se à metade a cada iteração no método da Bissecção. Nos demais métodos não é fácil ver alguma regularidade.

7. Considerações finais

Alguns desafios podem ser encontrados durante a execução deste trabalho com alunos do 3º ano do ensino médio. No conteúdo temos uma gama de conceitos que normalmente são tratados nos anos iniciais do ensino superior, mas que se levados para um projeto de extensão ou laboratório de ensino podem ser muito frutíferos. Visto que a BNCC vem mudando a praxe de alguns anos atrás na busca por uma educação científica e tecnológica com base sólida, fazem-se necessários textos nessa direção para auxiliar os professores na elaboração de suas aulas. No tocante ao uso de tecnologias, devemos considerar que muitas escolas possuem uma infraestrutura precária, e muitas vezes não dispõem de laboratórios de informática ou de *softwares* disponíveis. Recomenda-se o uso do *software* Libre Office Calc, que faz parte de uma suíte gratuita e livre, no caso da não existência do Microsoft Excel, que necessita de licença comercial. E, como não é possível a utilização do Visual Cálculo Numérico através de *smartphones*, sugerimos o uso de *tablets* na sala de aula, pois adaptaremos o aluno à realidade do mundo digital de forma criativa.

Alguns autores consideram a formação de professores o maior desafio da atualidade para a educação 4.0. Uma formação diferenciada é essencial para acompanhar tamanha maré de desenvolvimento. O cenário é o de desenvolver competências, e assim o professor deixa de ser o especialista em determinado conteúdo para tornar-se um propulsor para o desenvolvimento do conhecimento, usando metodologias interativas para conduzir os estudantes na busca de informações, geração de soluções e avaliação do trabalho realizado. As salas de aula tornam-se espaços para a construção de conhecimento, e o professor será um líder-pesquisador, que, ao lado dos alunos, engaja-se na busca de soluções para novos problemas.

O ensino sobre métodos iterativos para encontrar raízes não se encerra apenas com a aplicação das atividades que foram propostas, cabe aos professores a elaboração de novas atividades relacionadas, possibilitando que o estudante cada vez mais desenvolva o pensamento computacional. Nesse sentido, a BNCC ressalta a importância de se trabalharem as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer o *referee* pela leitura cuidadosa e por todas as sugestões que levaram ao trabalho ser mais preciso e claro em seus tópicos. O segundo autor é parcialmente financiado pelo CNPq, Brasil, auxílio 303613/2018-1, e ambos os autores foram parcialmente financiados pela Capes, Brasil, Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] Alves, C. J. S. *Fundamentos de Análise Numérica (I): Secção de Folhas*. Aeist, 2001.
- [2] Assis, M. P. *Aproximação de raízes de funções polinomiais através de métodos numéricos iterativos*. Trabalho de Conclusão de Curso - Profmat, 2020.
- [3] Berry, J.L.; Swetz, F. J. *The Best Known Old Babylonian Tablet?*. United States, 2012. Disponível em: <<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet>>. Acesso em: 20 de junho de 2020.

- [4] Chapra, S.C.; Canale, R.P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 5^a ed São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
- [5] Descartes, R. *The Geometry of René Descartes with a Facsimile of the First Edition*. New York: Dover, 1954.
- [6] Hefez, A.; Villela, M. L. T. *Polinômios e Equações Algébricas*. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018.
- [7] Guidorizzi, L. H. *Um Curso de Cálculo: Volume 1*. 5^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- [8] Neto, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [9] Ruggiero, M.A. G.; Lopes, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2^a ed. Editora Pearson, 1997.

Marlon Péricles da Silva Assis
Universidade Federal de Alagoas
57072-970 Maceió, Alagoas, Brasil
<pericles.uast@gmail.com>

Márcio Batista
Universidade Federal de Alagoas
57072-970 Maceió, Alagoas, Brasil
<mhbs@mat.ufal.br>

Recebido: 11/12/2020
Publicado: 23/06/2021

Explorando os teoremas de Menelaus e Ceva em questões de olimpíadas de matemática

Jhonata Avelar dos Santos ¹ 

Pedro Victor S. Freitas ² 
Thiago Yukio Tanaka ⁴ 

Gilson S. Ferreira Jr. ³ 

Resumo

Neste trabalho discutiremos sobre os Teoremas de Menelaus e de Ceva, que são dois resultados relacionados, respectivamente, com problemas envolvendo colinearidade entre pontos e concorrência de retas ou segmentos. Mais especificamente, exploraremos o uso desses dois teoremas na busca por soluções de problemas em Olimpíadas de Matemática nacionais e internacionais. Além do uso desses resultados no contexto olímpico, outro objetivo é contribuir com a formação e despertar o interesse de professores(as) e alunos(as) em competições olímpicas de Matemática, de forma que possa ser utilizado como material de apoio para o treinamento pelos docentes e um material de pesquisa para os discentes interessados.

Palavras-chave: Teorema de Ceva; Teorema de Menelaus; Olimpíadas de Matemática; Geometria.

Abstract

In this paper, we will discuss the Menelaus and Ceva Theorems, which are two results related, respectively, with problems involving collinearity between points and concurring lines or segments. More specifically, we will explore the use of these two theorems in the search for solutions to national and international Mathematical Olympiad problems. In addition to the use of these results in the Olympic context, another goal of is to contribute to the training and to arouse the interest of teachers and students in Olympic mathematical competitions, so that it can be used as support material for training by teachers and research material for interested students.

Keywords: Ceva's Theorem; Menelaus's Theorem; Math Olympiads; Geometry

1. Introdução

Os Teoremas de Menelaus e de Ceva são dois teoremas de épocas diferentes, mas intimamente ligados. Antes de começar a falar sobre os teoremas, vamos conhecer um pouco da história desses dois matemáticos e, conseqüentemente, de seus teoremas. Menelaus nasceu em 70 d.C. na cidade de Alexandria, no norte do Egito. Ele trouxe importantes contribuições na área de Geometria e dentre

¹Discente do curso de graduação em Matemática da UFRPE.

²Discente do curso de graduação em Matemática da UFRPE.

³Docente do Departamento de Matemática da UFRPE.

⁴Docente do Departamento de Matemática da UFRPE.

suas publicações destacam-se a obra *Sphaerica* [12], que trata de superfícies esféricas, e um teorema que leva o seu nome, que será um dos objetos de estudo deste trabalho. O Teorema de Menelaus lida com triângulos e proporções que uma reta gera ao intersectar seus lados e/ou prolongamentos de lados. Aproximadamente 15 séculos depois do nascimento de Menelaus, nasce na Itália, Giovanni Ceva. Estudante promissor, tornou-se matemático, físico e engenheiro hidráulico [12]. Em 1678 publicou o livro *De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio*, onde demonstrou um resultado que mais tarde ficou conhecido como Teorema de Ceva. Neste mesmo livro há citação do Teorema de Menelaus. O Teorema de Ceva trata de uma relação envolvendo um triângulo e as suas cevianas. A critério de curiosidade, na época de sua publicação, o resultado de Giovanni Ceva não teve grande repercussão e somente mais tarde o matemático francês Joseph Diaz Gergonne o redescobriu, e o autor, já falecido, ganhou os devidos méritos pela sua obra, como podemos ver em [4].

Apesar de não serem tão abordados no currículo de Matemática do Ensino Básico e até mesmo nos cursos de nível de graduação em Matemática, os Teoremas de Menelaus e de Ceva têm tido um destaque relevante nas Olimpíadas de Matemática. Em nível nacional, esses resultados são abordados, por exemplo, nos programas de treinamento olímpico em matemática, tais como o Programa de Iniciação Científica Jr. para a Obmep (PIC-Obmep) e o Programa Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (Poti). Internacionalmente também está presente em grande parte dos programas de treinamento para Olimpíadas de Matemática como podemos ver em [15].

No contexto nacional, diversos trabalhos abordando questões olímpicas de Matemática têm sido desenvolvidos no decorrer dos últimos anos, promovendo o interesse por tais competições. Por trazerem novas abordagens para temáticas antigas ou até mesmo inovações de técnicas de soluções, esses trabalhos são fortes ferramentas matemáticas e imprescindíveis para aqueles que se desafiam em Olimpíadas de Matemática. Destacamos a nacionalmente conhecida *Revista Eureka!*, atualmente com 41 edições, trazendo artigos com temáticas diversas e direcionadas especificamente para a OBM. Menos conhecida, mas com um conteúdo totalmente direcionado para Olimpíadas de Matemática em geral, há o jornal *É Matemática, Oxente!*, atualmente com 18 edições, desenvolvidos por um grupo de professores da UFRPE. Na revista *Professor de Matemática On-line* (PMO) há dois artigos que trazem temáticas semelhantes à que abordaremos neste trabalho. Em [6] os autores solucionam três problemas da IMO que envolvem o tema bases numéricas, com organização de ideias e estratégias de suporte matemático para que seja possível trabalhar essas questões. Por outro lado, com um cunho mais focado nas técnicas, [2] faz uma discussão sobre alguns tópicos da Álgebra e da Teoria dos Números, direcionando a implementação da teoria para a resolução de questões olímpicas. Por fim, não em contextos olímpicos, mas diretamente relacionados com o conteúdo deste trabalho, podemos citar [1, 3, 4, 14] com uma vasta teoria sobre os Teoremas de Ceva e de Menelaus.

Inspirados nos trabalhos acima citados, nosso objetivo principal é mostrar a utilidade dos Teoremas de Menelaus e de Ceva na resolução de questões olímpicas de Matemática, abordando também entre alguns outros conteúdos de Geometria que são acessíveis desde o Ensino Básico, o que pode estimular professores e alunos no âmbito das competições de Matemática. Além disso, esses resultados têm como consequências outros resultados intimamente ligados com o contexto olímpico como os Teoremas de Desargues, de Pascal, de Pappus, e até mesmo a forma trigonométrica do Teorema de Ceva, que podem ser encontrados em [1] e [3]. Como curiosidade final, resolveremos uma questão olímpica que ilustra a ligação existente entre os dois resultados.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: na Seção 2 discutimos o Teorema de Menelaus e na Seção 3 o Teorema de Ceva. Na Seção 4 discutimos a relação existente entre os dois resultados

e, por fim, na Seção 5 trazemos uma série de problemas complementares.

No decorrer deste trabalho, dados quaisquer dois pontos A e B, denotaremos por AB o segmento de reta que une os pontos A e B; por \overline{AB} , a medida do segmento de reta AB, e por \overleftrightarrow{AB} a reta que passa por A e B. Denotaremos também por $\triangle ABC$ o triângulo definido por três pontos não colineares A, B e C; por $\angle \widehat{ABC}$ o ângulo definido por AB e BC. Ademais, a área de $\triangle ABC$ será denotada por $[ABC]$, e quando $\triangle ABC$ for semelhante a $\triangle XYZ$, escreveremos $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$. Todas as figuras ilustradas aqui foram desenvolvidas pelos autores no *software* livre GeoGebra.

2. O Teorema de Menelaus

A demonstração do Teorema de Menelaus será feita utilizando o conceito de semelhança de triângulos. É importante destacar que há outras maneiras de demonstrar esse resultado utilizando diversas ferramentas como o Teorema de Tales, medidas de áreas, Trigonometria (lei dos senos), Geometria Analítica, entre outras (ver [4, 14]). Sendo assim, observamos que esse tema é bastante acessível ainda no Ensino Básico.

Teorema 1 (Menelaus). *Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, sejam X um ponto no prolongamento do lado BC, Y e Z pontos pertencentes aos lados AC e AB, respectivamente (ver Figura 1).*

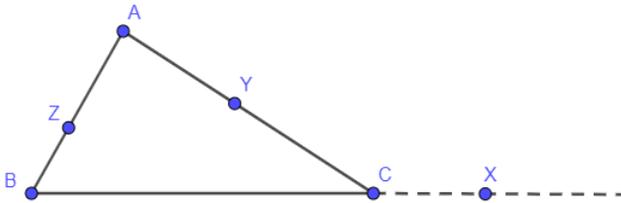


Figura 1: Figura suporte para o enunciado do Teorema 1. (Fonte: Autores.)

Os pontos X, Y e Z são colineares, se e somente se,

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1.$$

Nessa situação a Figura 1 assume o seguinte formato

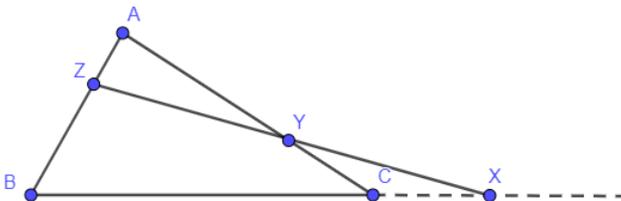


Figura 2: Situação em que os pontos X, Y e Z são colineares. (Fonte: Autores.)

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que os pontos X, Y e Z são colineares. Construa um ponto $G \in \overleftrightarrow{XZ}$ de modo que o segmento CG seja paralelo ao lado AB, como ilustra a Figura 3.

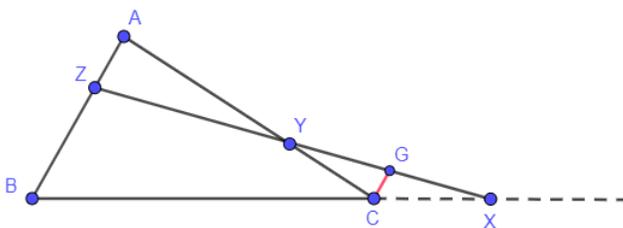


Figura 3: Figura suporte para demonstração do Teorema 1. (Fonte: Autores.)

Além disso, ainda pela Figura 3, observamos através do caso de semelhança Ângulo-Ângulo (A.A.) que $\triangle CGY \sim \triangle AZY$, e portanto, $\frac{\overline{AZ}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{CY}}$. Para forçar o aparecimento da identidade que desejamos provar, multiplicaremos a identidade anterior por $\frac{\overline{CG}}{\overline{BZ}}$ e ficaremos com:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{CG}} \cdot \frac{\overline{CG}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{CY}} \cdot \frac{\overline{CG}}{\overline{BZ}}.$$

Na identidade acima, simplificando o termo \overline{CG} do lado esquerdo da igualdade e, em seguida, passando todos os termos do lado direito para o lado esquerdo da igualdade, ficamos com

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BZ}}{\overline{CG}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1.$$

Ainda pelo caso Ângulo-Ângulo (A.A.), temos que $\triangle CGX \sim \triangle BZX$, e portanto, $\frac{\overline{BZ}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$. Fazendo essa substituição na equação anterior, obtemos a identidade desejada, isto é,

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1.$$

(\Leftarrow) Assumindo agora que $\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1$, provaremos que os pontos X, Y e Z são colineares. Seja Z' um ponto sobre o lado AB tal que X, Y e Z' são colineares como mostra a Figura 4. Provaremos que $Z = Z'$.

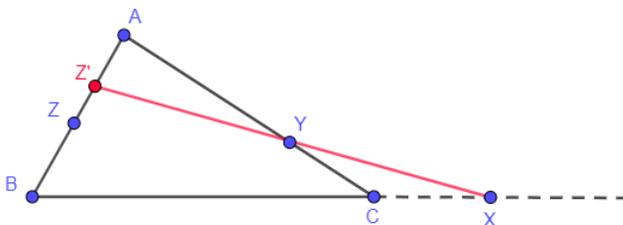


Figura 4: Figura suporte da demonstração do Teorema 1. (Fonte: Autores.)

Pela primeira parte da demonstração (que já demonstramos ser verdade), como os pontos X, Y e Z' são colineares, vale a equação $\frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1$. Portanto,

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1 = \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}},$$

após a simplificação dos termos em comum, concluímos que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}}. \quad (1)$$

Como Z e Z' são pontos pertencentes ao lado AB, temos que a única possibilidade da equação (1) ocorrer é $Z = Z'$, como queríamos demonstrar. \square

Observação. Note que, no caso em que X, Y e Z pertencem todos aos prolongamentos dos lados do triângulo ΔABC , o teorema ainda é válido.

As questões mais comuns para aplicação de Menelaus são do tipo em que há uma série de construções geométricas e no fim pede-se para mostrar que determinados pontos estão sob uma mesma reta ou segmento de reta, ou seja, são ligados diretamente com problemas envolvendo colinearidade de pontos.

Exemplo 1 (IMO/1982). As diagonais AC e CE de um hexágono regular ABCDEF são divididas internamente pelos pontos M e N, respectivamente, na razão

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = r.$$

Encontre o valor r uma vez que B, M e N são pontos colineares.

Solução. Construa a diagonal BE e seja P o ponto de interseção dessa diagonal com a diagonal AC, conforme a construção abaixo:

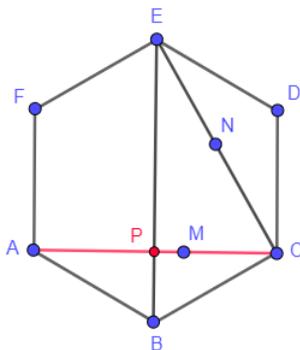


Figura 5: Figura do exemplo 1. (Fonte: Autores.)

Utilizando agora o Teorema de Menalaus considerando o triângulo ΔCEP e os pontos B, M e N (que por hipótese são colineares), obtemos que

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MP}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{EN}}{\overline{NC}} = 1. \quad (2)$$

Vamos agora descobrir os valores dessas três razões. Utilizando o princípio aditivo, perceba que podemos reescrever os tamanhos dos segmentos CM e MP em termos dos segmentos AM e AC da seguinte forma:

$$\overline{CM} = \overline{AC} - \overline{AM} \quad (3)$$

e

$$\overline{MP} = \overline{AM} - \overline{AP} = \overline{AM} - \frac{\overline{AC}}{2}. \quad (4)$$

Assim, reescrevendo a expressão $\frac{\overline{CM}}{\overline{MP}}$ em termos de (3) e (4), em seguida, forçando o aparecimento de $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = r$, ficamos com

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AM}}{\overline{AM} - \frac{\overline{AC}}{2}} = \frac{\frac{\overline{AC} - \overline{AM}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{AM} - \frac{\overline{AC}}{2}}{\overline{AC}}} = \frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{AC}}{2\overline{AC}}} = \frac{1 - r}{r - \frac{1}{2}} = \frac{2 - 2r}{2r - 1}. \quad (5)$$

Para a segunda razão, observaremos a diagonal BE. Uma primeira observação é que ela mede o dobro da medida do lado do hexágono. Note também que essa diagonal divide o ângulo interno $\angle ABC$ em duas medidas congruentes, e assim o ângulo $\angle ABP = 60^\circ$. Utilizando trigonometria no triângulo ΔABP , concluímos que

$$\overline{PB} = \overline{AB} \cos(60^\circ) = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\frac{\overline{BE}}{2}}{2} = \frac{\overline{BE}}{4}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BE}} = \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Por fim, novamente pelo princípio aditivo, perceba que $\overline{EN} = \overline{CE} - \overline{CN}$. Dividindo essa igualdade por \overline{CN} (para forçar aparecer a razão que queremos) e usando que $\frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = r$, ficamos com

$$\frac{\overline{EN}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CN}} - \frac{\overline{CN}}{\overline{CN}} = \frac{1}{r} - 1 = \frac{1 - r}{r}. \quad (7)$$

Substituindo na identidade (2) as informações obtidas em (5), (6) e (7), obtemos

$$\frac{2 - 2r}{2r - 1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - r}{r} = 1.$$

Segue desta igualdade que $(1 - r)^2 = 4r^2 - 2r$, que é uma equação quadrática cujas soluções são $r = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Sabendo que r é um número maior que zero, pois é a razão de duas medidas, temos que a única solução é $r = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Veremos no exemplo a seguir que nem sempre o Teorema de Menelaus dá-nos a solução mais simples e direta para um determinado problema. Isso é um alerta. Mesmo tendo essa ferramenta em mãos, é importante não esquecer que se pode usar quaisquer outros artifícios quando for resolver uma questão olímpica.

Exemplo 2 (POTI - Geometria - Nível 2). O lado AB de um quadrado é prolongado no sentido de A para B até o ponto P tal que $\overline{BP} = 2\overline{AB}$. Sendo M o ponto médio de CD , desenhe PM intersectando AC em um ponto Q . Sabendo que PQ corta BC em um ponto R , calcule $\overline{CR}/\overline{RB}$.

Solução. Neste exemplo iremos construir duas soluções, uma utilizando o Teorema de Menelaus e outra não.

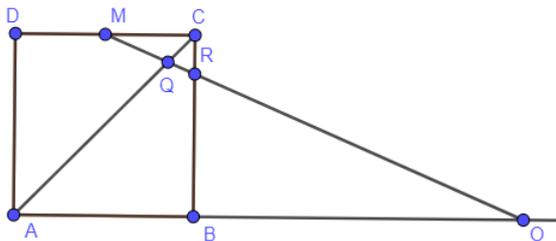


Figura 6: Figura de suporte para o exemplo 2. (Fonte: Autores.)

Denote por x o comprimento do lado do quadrado em questão. Para a solução com o Teorema de Menelaus, primeiramente observe que pelo caso Ângulo-Ângulo (A.A.) os triângulos $\triangle APQ$ e $\triangle CQM$ são semelhantes. Isso nos garante que

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{AP}} = \frac{\frac{x}{2}}{3x} = \frac{1}{6}.$$

Como os pontos P , R e Q são colineares, podemos aplicar o Teorema de Menelaus ao triângulo $\triangle ABC$ com o segmento PQ e concluir que

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BR}}{\overline{CR}} = 1.$$

Além disso, como $\overline{BP} = 2\overline{AB}$, então

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{3}{2}.$$

Utilizando as informações que temos, podemos concluir que

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\overline{BR}}{\overline{CR}} = 1$$

e assim,

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{BR}} = \frac{1}{4}.$$

Uma outra solução que é mais simples do que a apresentada acima, é observar que, pelo caso Ângulo-Ângulo (A.A.) os triângulos $\triangle CRM$ e $\triangle BPR$ são semelhantes. Daí temos que

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BP}} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 3 (Retirado de [7]). Em um paralelogramo $ABCD$ com ângulo $\angle B\hat{A}D < 90^\circ$, o círculo com diâmetro AC intersecta as retas \overline{CB} e \overline{CD} nos pontos E e F respectivamente, e a reta tangente a esse círculo no ponto A intersecta \overline{BD} no ponto P . Prove que P , F e E são colineares.

Solução. Sem perda de generalidade, suponha que B , D e P estão nessa ordem ao longo de BD .

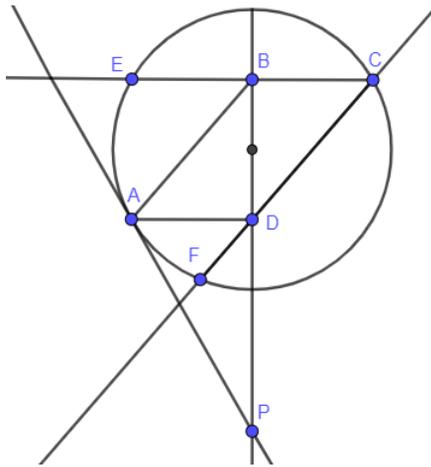


Figura 7: Figura de suporte para o exemplo 3. (Fonte: Autores.)

Sejam G e H a segunda interseção de AD e AB , respectivamente, com o círculo. Pelo Teorema de Menelaus com o triângulo $\triangle CBD$ e a reta suporte \overline{EF} , é suficiente mostrar que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} = 1.$$

Primeiramente, usando lei dos senos, note que:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DP}} = \frac{\text{sen}(\angle B\hat{A}P)}{\text{sen}(\angle A\hat{P}B)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle A\hat{P}D)}{\text{sen}(\angle D\hat{A}P)} = \frac{\text{sen}(\angle B\hat{A}P)}{\text{sen}(\angle D\hat{A}P)},$$

como AP é tangente ao círculo, perceba que $\angle B\hat{A}P = \angle H\hat{A}P = \pi - \angle H\hat{A}C = \pi - \angle F\hat{A}C$. De maneira análoga, $\angle D\hat{A}P = \angle G\hat{C}A = \angle E\hat{A}C$ e assim concluímos que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DP}} = \frac{\text{sen}(\angle F\hat{A}C)}{\text{sen}(\angle E\hat{A}C)} = \frac{\overline{FA}}{\overline{EC}}.$$

Finalmente, temos que

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}},$$

pois os triângulos $\triangle AFD$ e $\triangle AEB$ possuem os mesmos ângulos em B e D, sendo assim são semelhantes.

Finalizaremos esta seção com a utilização do Teorema de Menelaus para demonstrar outro resultado utilizado em Olimpíadas de Matemática que é o Teorema de Pascal.

Teorema 2 (Pascal). *Seja ABCDEF um hexágono inscrito em uma circunferência. Então, os pontos de interseções $\overline{AB} \cap \overline{DE}$, $\overline{BC} \cap \overline{EF}$ e $\overline{CD} \cap \overline{FA}$ são colineares.*

Demonstração. Para esta demonstração iremos denotar por X, Y, Z, respectivamente as interseções $\overline{AB} \cap \overline{DE}$, $\overline{BC} \cap \overline{EF}$ e $\overline{CD} \cap \overline{FA}$.

Sejam M a interseção de \overline{CD} com \overline{EF} , N a interseção de \overline{AB} com \overline{CD} e O a interseção de \overline{AB} com \overline{EF} . Como mostra a Figura 8

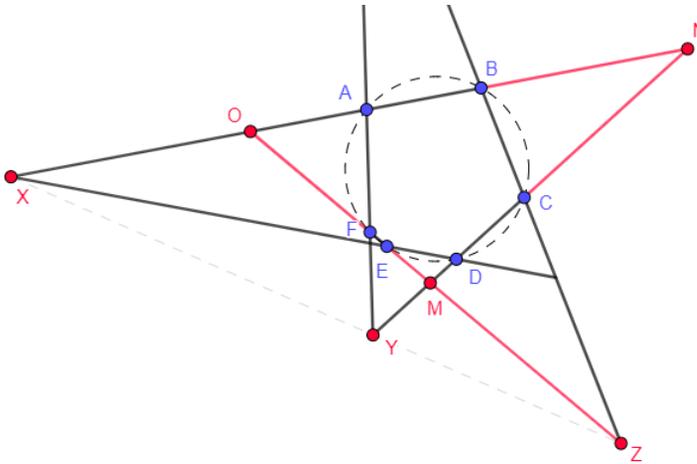


Figura 8: Figura suporte para a demonstração do Teorema de Pascal. (Fonte: Autores.)

Logo, aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo $\triangle MNO$ e nos pontos colineares X, D, E, temos:

$$\frac{\overline{NX}}{\overline{OX}} \cdot \frac{\overline{OE}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{ND}} = 1, \quad (8)$$

de maneira análoga, podemos fazer para o mesmo triângulo $\triangle MNO$ e nos pontos colineares Y, C, B, e teremos:

$$\frac{\overline{YM}}{\overline{OY}} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{MC}} = 1, \quad (9)$$

e ainda para o triângulo ΔMNO nos pontos colineares Z, F, A

$$\frac{\overline{NZ}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{OF}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{NA}} = 1. \quad (10)$$

Unindo as equações (8), (9) e (10), teremos

$$\frac{\overline{NX}}{\overline{OX}} \cdot \frac{\overline{OE}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{ND}} \cdot \frac{\overline{OY}}{\overline{YM}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{MZ}}{\overline{NZ}} \cdot \frac{\overline{OF}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{OA}} = 1. \quad (11)$$

Reorganizando, teremos,

$$\left(\frac{\overline{NX}}{\overline{OX}} \cdot \frac{\overline{OY}}{\overline{YM}} \cdot \frac{\overline{MZ}}{\overline{NZ}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{OE}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{ND}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{OF}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{OA}} \right) = 1. \quad (12)$$

Usando a condição da potência do ponto, teremos que o lado direito de (12) pode ser calculado da seguinte maneira

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{ND}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{OF}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OE} \cdot \overline{OF}}{\overline{OB} \cdot \overline{OA}} \cdot \frac{\overline{MD} \cdot \overline{MC}}{\overline{ME} \cdot \overline{MF}} \cdot \frac{\overline{NB} \cdot \overline{NA}}{\overline{ND} \cdot \overline{NC}} = 1. \quad (13)$$

Logo, por (12) e (13),

$$\frac{\overline{NX}}{\overline{OX}} \cdot \frac{\overline{OY}}{\overline{YM}} \cdot \frac{\overline{MZ}}{\overline{NZ}} = 1. \quad (14)$$

E como os pontos X, Y, Z pertencem aos prolongamentos dos lados do triângulo ΔMNO , podemos afirmar pelo Teorema de Menelaus que X, Y, Z são colineares, demonstrando assim o Teorema de Pascal. □

Observação 1. No Teorema acima o hexágono não precisa ser convexo, ou seja, também pode ser degenerado.

3. O Teorema de Ceva

Vamos, nessa seção, enunciar e demonstrar o Teorema de Ceva. Comentaremos também sobre o Ponto de Gergonne (o mesmo da introdução deste trabalho). Começaremos definindo o conceito de ceviana.

Definição 1. Uma ceviana de um triângulo é um segmento de reta que liga um dos vértices a um ponto do lado oposto a esse vértice ou ao prolongamento desse lado.

Portanto, se X, Y e Z são pontos nos lados BC, AC e AB ou nos seus prolongamentos, respectivamente, de um triângulo ΔABC , os segmentos AX, BY e CZ são denominados de cevianas, como mostra a Figura 9

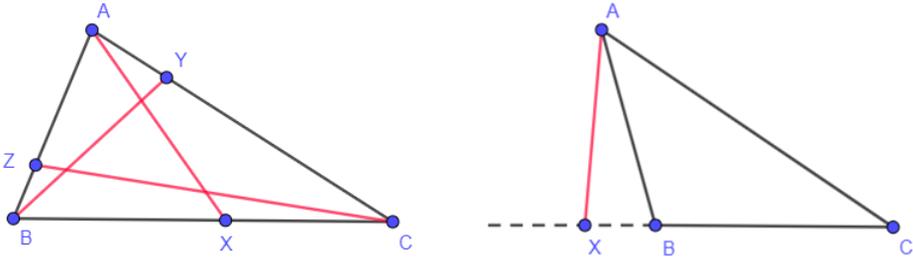


Figura 9: Figura de representação de cevianas. (Fonte: Autores.)

Agora, utilizando o Teorema de Menelaus, demonstraremos o Teorema de Ceva.

Teorema 3 (Ceva). *Dado um triângulo ΔABC qualquer, considere as cevianas AX , BY e CY , conforme a Figura 10. As cevianas são concorrentes, se e somente se,*

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1.$$

Como mostra a figura abaixo

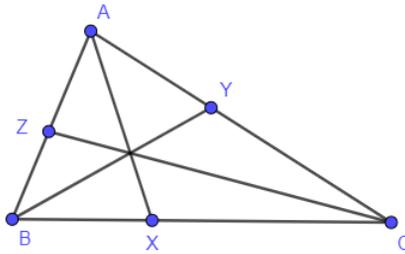


Figura 10: Teorema de Ceva. (Fonte: Autores.)

Demonstração. Como queremos demonstrar uma equivalência, primeiramente iremos supor que as cevianas \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes no ponto P , e a partir disso provaremos que $\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1$. Da nossa hipótese podemos construir os triângulos conforme a figura abaixo

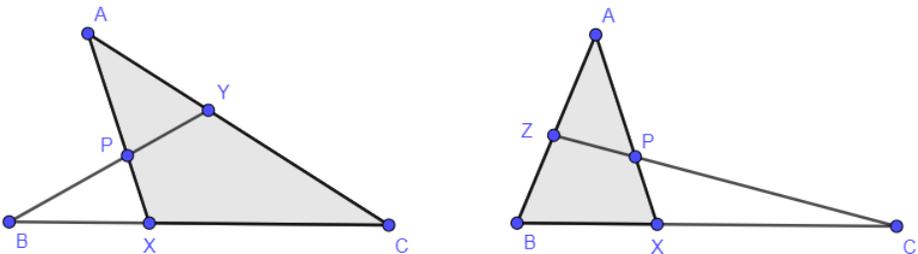


Figura 11: Triângulos ΔAXC e ΔBAX . (Fonte: Autores.)

Aplicando o Teorema de Menelaus, respectivamente, para os triângulos ΔAXC com o segmento BY e ΔBAX com o segmento CZ , obtemos

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PX}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{CA}} = 1, \quad (15)$$

e

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{PX}}{\overline{PA}} = 1. \quad (16)$$

Multiplicando (15) e (16), e simplificando os termos em comum, obtemos:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1, \quad (17)$$

o que prova uma das implicações. Resta mostrar a recíproca do teorema, ou seja, mostrar que se vale (17) então as cevianas são concorrentes em um único ponto. No entanto, essa parte da demonstração é análoga ao que fizemos para a volta do Teorema de Menelaus. Sendo assim, iremos omiti-la. \square

Observe que como o Teorema de Menelaus foi usado na demonstração do Teorema de Ceva, então podemos usar os mesmos métodos da demonstração que usamos no Teorema Menelaus para demonstrar o Teorema de Ceva.

As questões a serem exploradas a seguir decorrem do Teorema 3 e estão ligadas à concorrência entre segmentos e/ou retas. Nosso primeiro exemplo será uma curiosidade bastante interessante sobre este resultado.

Exemplo 4 (Autores). Apressado para chegar na prova de desenho geométrico, Victor Avelar percebeu que havia esquecido sua régua e seu compasso, e seu único instrumento era um par de esquadros que até serviria de régua, mas não possuía marcação. Na primeira questão de sua prova eram dados dois pontos A e B e pedia-se para encontrar o ponto médio do segmento AB . Vendo o desespero do seu amigo, Ferreira Yukio entregou-lhe secretamente um bilhete escrito “lembre do Teorema de Ceva”. Em seguida, Victor Avelar, apenas com seu lápis e o par de esquadros conseguiu obter a solução para esse problema. Como ele fez isso?

Solução. Victor Avelar fez uma série de construções para aplicar o Teorema de Menelaus. Primeiramente, usando um de seus esquadros como régua, ele criou uma reta que passava pelos pontos A e B e, em seguida, usando o par de esquadros ele construiu uma reta paralela à primeira reta, conforme a figura abaixo:

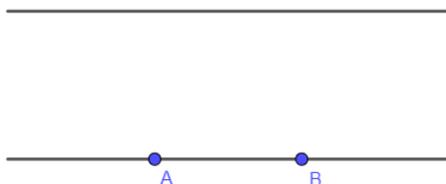


Figura 12: Figura da prova de Victor Avelar. (Fonte: Autores.)

Ele pegou um ponto C acima das duas retas, construiu um triângulo ΔABC e, em seguida, lembrando do Teorema de Ceva, traçou as cevianas BE e CF ; passando pela interseção dessas cevianas, construiu a terceira ceviana CM , como mostra a Figura 13

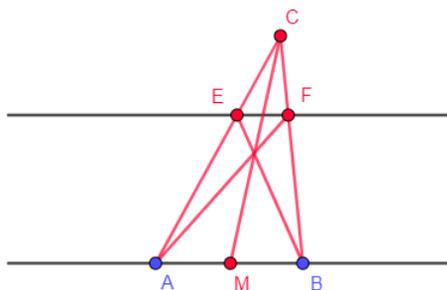


Figura 13: Figura da resposta de Victor Avelar. (Fonte: Autores.)

Daí, utilizando o Teorema de Ceva, Victor Avelar sabe que é verdadeira a seguinte identidade

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = 1. \quad (18)$$

Como a reta \overline{AB} é paralela à \overline{EF} , usando o Teorema de Tales temos que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = 1. \quad (19)$$

Substituindo (19) em (18), obtém-se que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = 1,$$

ou seja, $\overline{AM} = \overline{BM}$, o que prova que Victor Avelar conseguiu o ponto médio do segmento AB.

Como aplicação do Teorema de Ceva, explicaremos em detalhes um fato que frequentemente utilizamos nas aulas de Desenho Geométrico, que é o fato de as três alturas de um triângulo intersectarem-se em um mesmo ponto (o ortocentro).

Exemplo 5 (Poti - Geometria - Nível 2). Prove que as três alturas de um triângulo são concorrentes em um único ponto.

Solução. Sejam o triângulo ΔABC e AX, BY e CZ suas alturas, conforme a figura abaixo:

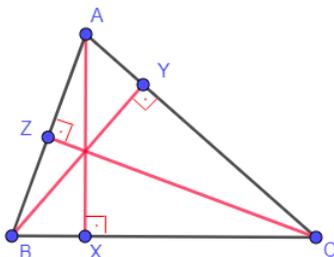


Figura 14: Alturas do triângulo ΔABC . (Fonte: Autores.)

Pelo caso Ângulo-Ângulo (A.A.) de semelhança, os triângulos ΔACZ e ΔABY são semelhantes, pois ambos possuem o ângulo no vértice A e um ângulo igual 90° , assim, pela razão de semelhança, temos que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Analogamente, temos as seguintes relações de semelhança: $\Delta ABX \sim \Delta BCZ$ e $\Delta BCY \sim \Delta ACX$, valendo assim as relações

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CY}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Multiplicando todas essas identidades no mesmo sentido vamos obter:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, as alturas são concorrentes em um único ponto.

Analogamente, pode-se mostrar que as bissetrizes e as medianas de um triângulo intersectam-se em um único ponto, mas isso ficará como um dos Problemas Propostos ao fim do trabalho. Falaremos agora sobre um tema olímpico decorrente do Teorema de Ceva.

Exemplo 6 (Ponto de Gergonne). Sejam D, E e F os pontos de contato da circunferência inscrita com os lados BC, CA e AB, respectivamente, do triângulo ΔABC . Prove que AD, BE e CF são concorrentes em um ponto (que se chama Ponto de Gergonne).

Solução. Observe que $\overline{BD} = \overline{BF}$, $\overline{AE} = \overline{AF}$, $\overline{CD} = \overline{CE}$. Daí podemos concluir que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, temos que AD, BE e CF são concorrentes em um ponto (que se chama Ponto de Gergonne), como mostra a figura abaixo.

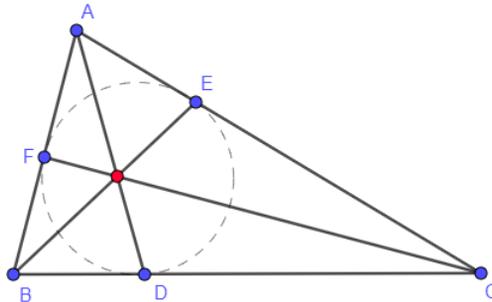


Figura 15: O ponto de Gergonne. (Fonte: Autores.)

□

Exemplo 7 (*Bulgaria National Constest/1996*). Os círculos k_1 e k_2 cujos centros são respectivamente os pontos O_1 e O_2 , são tangentes externas em um ponto C, enquanto que o círculo k com

centro em O é tangente externa a k_1 e k_2 . Seja l a reta tangente tanto a k_1 e k_2 passando por C , e seja AB o diâmetro de k que é perpendicular a l . Assuma que O e A estão do mesmo lado de l . Prove que as retas $\overrightarrow{AO_1}$, $\overrightarrow{AO_2}$ e l duas a duas possuem um ponto em comum.

Demonstração. A seguir construímos uma figura para melhor visualização do problema em questão:

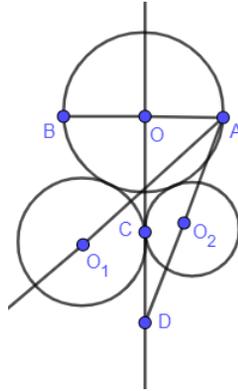


Figura 16: Figura para resolução do exemplo 7. (Fonte: Autores.)

Tome r , r_1 , r_2 que são respectivamente os raios de k , k_1 , k_2 e também considere M e N a interseção \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} com o k . Como mostra a figura abaixo.

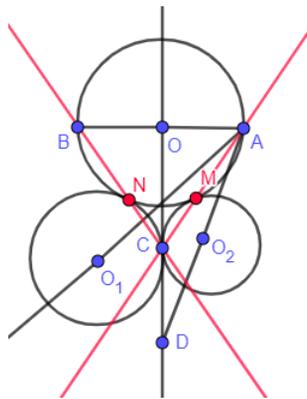


Figura 17: Figura para resolução do exemplo 7. (Fonte: Autores.)

Daí temos que ΔAMB é um triângulo retângulo e o triângulo ΔAMO é isósceles e

$$\angle AMO = \angle OAM = \angle O_1CM = \angle CMO_1.$$

Segue que O , M , O_1 são colineares e

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{MO_1}} = \frac{r}{r_1}.$$

De maneira análoga, O, N, O_2 são colineares e

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{NO_2}} = \frac{r}{r_2}.$$

Seja P a interseção de l com AB . Os segmentos AN, BM, CP são concorrentes no ortocentro do triângulo ΔABC , e, pelo Teorema de Ceva aplicado ao triângulo ΔABC , temos

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{CN}} = 1,$$

de maneira que isolando a primeira razão ficamos com

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (20)$$

A identidade (20) acima pode ser reescrita como

$$\frac{r_1}{\overline{PB}} = \frac{r_2}{\overline{AP}}.$$

Agora tome D_1 e D_2 as interseções de l com BO_1 e AO_2 . Então,

$$\frac{\overline{CD_1}}{\overline{D_1P}} = \frac{\overline{O_1C}}{\overline{PB}} = \frac{r_1}{\overline{PB}},$$

e, similarmente,

$$\frac{\overline{CD_2}}{\overline{D_2P}} = \frac{r_2}{\overline{PA}}.$$

Portanto, temos que

$$\frac{\overline{CD_1}}{\overline{D_1P}} = \frac{\overline{CD_2}}{\overline{D_2P}},$$

o que nos leva a concluir que $D_1 = D_2$. Dessa maneira, AO_2, BO_1 e l tem o único ponto $D_1 = D_2$ em comum. \square

Finalizaremos esta seção com uma variação do Teorema de Ceva que é bastante utilizada no contexto olímpico, que é a sua forma trigonométrica.

Exemplo 8 (Forma Trigonométrica de Ceva). Dado um triângulo ΔABC qualquer, considere as cevianas AX, BY e CZ , conforme a Figura 18.

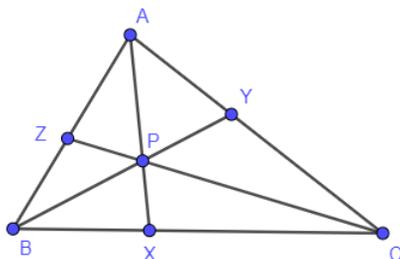


Figura 18: Triângulo com cevianas concorrentes. (Fonte: Autores.)

As cevianas são concorrentes, se e somente se,

$$\frac{\text{sen}(\angle \widehat{ABY})}{\text{sen}(\angle \widehat{CBY})} \cdot \frac{\text{sen}(\angle \widehat{BCZ})}{\text{sen}(\angle \widehat{ACZ})} \cdot \frac{\text{sen}(\angle \widehat{CAX})}{\text{sen}(\angle \widehat{BAX})} = 1.$$

Demonstração. Primeiramente observe que, pelo Teorema de Ceva, as cevianas são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1.$$

Perceba que a identidade anterior é equivalente a

$$\frac{[\text{APZ}]}{[\text{BPZ}]} \cdot \frac{[\text{BPX}]}{[\text{CPX}]} \cdot \frac{[\text{CPY}]}{[\text{APY}]} = 1.$$

Para perceber esse fato, note que os triângulos ΔAPZ e ΔBPZ possuem a mesma altura h em relação ao vértice P , portanto,

$$\frac{[\text{APZ}]}{[\text{BPZ}]} = \frac{\overline{AZ} \cdot h}{\overline{BZ} \cdot h} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}},$$

e de maneira análoga para os outras duas razões. Além disso, usando a fórmula da área de um triângulo que utiliza dois lados e o ângulo entre eles, temos que

$$[\text{APZ}] = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AZ} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{BAX})}{2};$$

de mesmo modo, para as outras áreas, portanto,

$$\frac{[\text{APZ}]}{[\text{BPZ}]} = \frac{\frac{\overline{AP} \cdot \overline{AZ} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{BAX})}{2}}{\frac{\overline{BP} \cdot \overline{BZ} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{ABY})}{2}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AZ} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{BAX})}{\overline{BP} \cdot \overline{BZ} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{ABY})}.$$

Analogamente para as outras duas razões,

$$\frac{[\text{BPX}]}{[\text{CPX}]} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{BX} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{CBY})}{\overline{CP} \cdot \overline{CX} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{BCZ})} \quad \text{e} \quad \frac{[\text{CPY}]}{[\text{APY}]} = \frac{\overline{CP} \cdot \overline{CY} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{ACZ})}{\overline{AP} \cdot \overline{AY} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{CAX})}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{[\text{APZ}]}{[\text{BPZ}]} \cdot \frac{[\text{BPX}]}{[\text{CPX}]} \cdot \frac{[\text{CPY}]}{[\text{APY}]} \\ &= \frac{\overline{AZ} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{BAX})}{\overline{BZ} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{ABY})} \cdot \frac{\overline{BX} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{CBY})}{\overline{CX} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{BCZ})} \cdot \frac{\overline{CY} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{ACZ})}{\overline{AY} \cdot \text{sen}(\angle \widehat{CAX})} \\ &= \left(\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \right) \cdot \frac{\text{sen}(\angle \widehat{BAX})}{\text{sen}(\angle \widehat{ABY})} \cdot \frac{\text{sen}(\angle \widehat{CBY})}{\text{sen}(\angle \widehat{BCZ})} \cdot \frac{\text{sen}(\angle \widehat{ACZ})}{\text{sen}(\angle \widehat{CAX})} \\ &= \frac{\text{sen}(\angle \widehat{BAX})}{\text{sen}(\angle \widehat{ABY})} \cdot \frac{\text{sen}(\angle \widehat{CBY})}{\text{sen}(\angle \widehat{BCZ})} \cdot \frac{\text{sen}(\angle \widehat{ACZ})}{\text{sen}(\angle \widehat{CAX})}. \end{aligned}$$

Tomando o inverso multiplicativo em cada lado e organizando a expressão acima, obtemos a identidade desejada. □

4. Representações distintas de um mesmo resultado?

Já sabemos nesse ponto do trabalho que o resultado do Teorema de Menelaus trata sobre colinearidade de pontos, e o de Ceva aborda concorrência de retas ou segmentos. Ainda assim, a escrita, imagens, hipóteses e teses dos dois teoremas, por serem muito parecidos, induzem-nos a pensar que esses dois resultados podem ser equivalentes, ou seja, do ponto de vista matemático, representam um mesmo resultado. Observe que na primeira implicação da demonstração do Teorema de Ceva, utilizamos o Teorema de Menelaus. É possível mostrar a recíproca, ou seja, assumido o Teorema de Ceva, conseguimos demonstrar o Teorema de Menelaus (ver [10]). Isso nos diz que os Teoremas são equivalentes, respondendo, portanto, a pergunta que nomeia esta seção. Mostraremos, porém, que não obtemos os mesmos objetos quando aplicamos os dois teoremas sob um mesmo triângulo, mas, ainda assim, esses objetos possuem uma determinada ligação.

Definição 2. Sejam A, B, M e N pontos distribuídos em uma reta, todos distintos conforme a disposição da Figura 19



Figura 19: Representação de conjugados harmônicos. (Fonte: Autores.)

Dizemos que os pontos M e N dividem *harmonicamente* o segmento AB se

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}},$$

ou seja, quando M e N dividem o segmento AB na mesma razão. Nessa situação M e N são ditos *conjugados harmônicos* na razão k sobre AB.

Em posse dessa definição veremos como é possível relacionar os Teoremas de Menelaus e Ceva, respondendo assim o título da seção. Para relacionar esses teoremas iremos resolver o seguinte exemplo.

Exemplo 9 (SIMO - Singapore Mathematical Society - Training Problems/2005). Seja um quadrilátero CBZY onde P é o ponto de interseção das retas \overline{CZ} e \overline{BY} , A é a interseção das retas \overline{CY} e \overline{BZ} , X_1 é a interseção das retas \overline{YZ} e \overline{CB} e X o ponto de interseção das retas \overline{AP} e \overline{CB} . Prove que X e X_1 são conjugados harmônicos do segmento CB.

Solução. Traduzindo as informações acima em uma figura temos

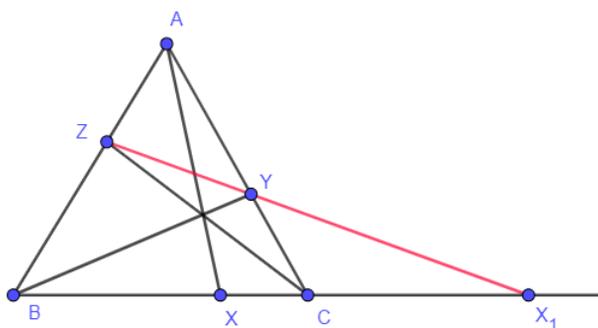


Figura 20: Figura para visualização do exemplo 9. (Fonte: Autores.)

Aplicando o Teorema de Ceva ao triângulo ΔABC com os segmentos CZ, BY e AX , temos:

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1. \quad (21)$$

Pelo Teorema de Menelaus no ΔABC com pontos Y, Z, X_1 , obtemos

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX_1}}{\overline{CX_1}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1. \quad (22)$$

Combinando as equações (21) e (22) e simplificando os termos em comum nas expressões, concluímos que

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{BX_1}}{\overline{CX_1}},$$

e como X e X_1 são pontos distintos eles então são conjugados harmônicos.

Com isso concluímos que embora os Teoremas de Ceva e de Menelaus sejam equivalentes, aplicando os teoremas ao mesmo triângulo, produzimos objetos X e X_1 que não são iguais, mas estes intimamente ligados pois são conjugados harmônicos de razão k para algum $k \in \mathbb{R}$ sobre o lado AB do triângulo ΔABC .

5. Problemas Complementares

Nesta seção fizemos uma seleção de alguns problemas que podem ser solucionados com as técnicas que foram apresentadas e que consolidam os conhecimentos abordados aqui, para que os leitores interessados possam se desafiar na busca pelas soluções dessas questões olímpicas. Reforçamos que os quatro problemas iniciais complementam as ferramentas apresentadas e abrem possibilidades para novas questões olímpicas. Ressaltamos que as traduções dessas questões foram feitas pelos autores, então podem estar diferentes de outros materiais e adequamos as notações para que os enunciados ficassem condizentes com as notações utilizadas neste trabalho, de modo que não haja confusão de conceitos na interpretação de cada problema.

Problema 1 (Poti - Geometria - Nível 2). Prove que

1. As medianas de um triângulo são concorrentes em um único ponto (o baricentro).
2. As bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um único ponto (o incentro).

Problema 2 (O Teorema de Desargues). Utilizando o Teorema de Menelaus, prove que dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se as retas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são concorrentes em um único ponto O , então os pontos $P = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$, $Q = \overline{CA} \cap \overline{C'A'}$ e $R = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$ são colineares.

Problema 3 (O Teorema de Pappus). Utilizando o Teorema de Menelaus prove que se A_1, A_2 e A_3 são colineares e B_1, B_2 e B_3 também são colineares, então os pontos de interseção $A_1B_2 \cap A_2B_1$, $A_1B_3 \cap A_3B_1$ e $A_2B_3 \cap A_3B_2$ são colineares.

Problema 4 (Conjugado Isogonal do Ponto de Gergonne). Dado um triângulo $\triangle ABC$ e sejam D, E, F os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C respectivamente, construa as circunferências inscritas aos triângulos $\triangle AEF, \triangle BDF$ e $\triangle CDE$, e denote os pontos de tangência com os segmentos DE, EF e FD por C', A' e B' respectivamente. Prove que os segmentos AA', BB' e CC' são concorrentes. (**Dica:** Use a forma trigonométrica do Teorema de Ceva.)

Problema 5 (*IMO/1998 - Hong Kong Preliminary Selection Contest*). Dado um triângulo $\triangle ABC$, sejam E, F e G pontos sobre os lados AB, BC e CA , respectivamente e tais que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GA}} = \frac{1}{3}.$$

Sejam $K = \overline{AF} \cap \overline{CE}$, $L = \overline{BG} \cap \overline{AF}$ e $M = \overline{CE} \cap \overline{BG}$. Supondo que a área do triângulo $\triangle ABC$ seja 1, encontre a área do triângulo $\triangle KLM$.

Problema 6 (*APMO/1989 - Asian Pacific Mathematics Olympiad*). Dados A_1, A_2 e A_3 três pontos não colineares no plano, e por conveniência considere $A_4 = A_1$ e $A_5 = A_2$. Para $n = 1, 2$ e 3 , sejam B_n e C_n os pontos médios de A_nA_{n+1} e A_nB_n , respectivamente, e $D_n = A_nC_{n+1} \cap B_nA_{n+2}$ e $E_n = A_nB_{n+1} \cap C_nA_{n+2}$. Calcule a razão das medidas de área $[D_1D_2D_3]/[E_1E_2E_3]$.

Problema 7 (Austrália/1995). As retas unindo os três vértices do triângulo $\triangle ABC$ a um ponto nesse plano corta os lados opostos aos vértices A, B, C nos pontos K, L, M , respectivamente. Uma reta contendo o ponto M paralelo a KL corta BC em V e AK em W . Prove que $\overline{VM} = \overline{MW}$.

Problema 8 (Olimpíada do Cone Sul). Seja C uma circunferência de centro O , AB um diâmetro de C e R um ponto qualquer em C distinto de A e de B . Seja P a interseção da perpendicular traçada por O a AR . Sobre a reta \overline{OP} marca-se o ponto Q , de maneira que \overline{QP} é a metade de \overline{PO} e Q não pertence ao segmento OP . Por Q traçamos a paralela a AB que corta a reta \overline{AR} em T . Chamamos de H o ponto de interseção das retas \overline{AQ} e \overline{OT} . Prove que H, R e B são colineares. (**Dica:** Use o Teorema de Menelaus.)

Problema 9 (Canadá/1994). Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo. Seja AD a altura relativa ao lado BC e H um ponto qualquer sobre o segmento AD , de forma que as retas \overline{BH} e \overline{CH} intersectam AC e AB em E e F , respectivamente. Prove que $\angle EDH = \angle FDH$.

Problema 10 (Reino Unido/1998). No triângulo $\triangle ABC$, D é o ponto médio de AB e E é um ponto sobre o lado BC tal que $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{EC}$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor de $\angle BAC$.

Problema 11 (Korea/1997-1998). Em um triângulo agudo $\triangle ABC$ com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, seja V a interseção da bissetriz do ângulo $\angle BAC$ e seja D o pé da altura relativa ao vértice A . Se E e F são as interseções dos círculos circunscritos aos triângulos $\triangle AVD$ com CA e AB , respectivamente, mostre que AD, BE e CF são concorrentes. (**Dica:** Utilize o Teorema de Ceva.)

Problema 12 (Tchecoslováquia/1999). Dado um triângulo $\triangle ABC$, considere pontos K , L e M no interior dos lados BC , CA , AB , respectivamente, tais que os segmentos AK , BL e CM intersectem-se em um ponto U . Prove que se os triângulos $\triangle AMU$ e $\triangle KCU$ têm medida de área P e os triângulos $\triangle MBU$ e $\triangle CLU$ têm a medida de área Q , então $P = Q$.

Problema 13 (Zeitz/96). Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo (dados dois pontos no hexágono, o segmento definido por esses pontos está inteiramente contido no polígono) e circunscritível. Prove que AD , BE e CF são concorrentes se, e somente se, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EF} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{FA}$. (**Dica:** Use a forma trigonométrica do Teorema de Ceva).

Referências

- [1] BEZERRA, Yury. *Geometria Projetiva: algumas aplicações básicas para alunos do Ensino Médio*. 2014. Dissertação de Profmat-Ufam, Amazonas, 2014.
- [2] CHAVES, A. P. A. “Álgebra e teoria dos números para olimpíadas.” *Professor de Matemática On-line (PMO)*, v. 7, n° 1, p. 66-76, 2019.
- [3] COSTA, Thafarel. *O princípio da dualidade na geometria de Galileu*. 2018. Dissertação de Profmat-UnB, Brasília, 2018.
- [4] FERREIRA, Francisco. *Unificando os teoremas de Menelaus e Ceva*. 2017. Dissertação de Profmat-UFCA, Ceará, 2017.
- [5] International Mathematical Olympiad. Disponível em: [<https://www.imo-official.org/>](https://www.imo-official.org/). Acesso em 28 Jan. de 2021.
- [6] LÓPEZ, J. ; BRUNO-ALFONSO, A. ; BARBOSA, G. F. “Bases numéricas na olimpíada internacional de matemática.” *Professor de Matemática On-line (PMO)*, v. 7, n° 2, p. 195-204, 2019.
- [7] Math Olympiad teaching notes em: <https://www.math.cmu.edu/~plo/olympiad.shtml>. Acesso em 2 Jan. de 2021.
- [8] MIENTKA, walter. *Mathematical Olympiads (1995 - 1996) - Olympiads Problems Around the World*. IMO Advisory Broad.
- [9] Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em 29 Jan. de 2021.
- [10] Pollard, J. “Ceva = (Menelaus)².” *The Mathematical Gazette*, v. 84, n° 500, p. 268-271. 2000.
- [11] Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: <https://potiimpa.br/>. Acesso em 28 Jan. de 2021.
- [12] School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2020. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/>. Acesso em 10 Ago. de 2020.
- [13] Seleção Cone Sul. Disponível em: <https://sites.google.com/site/selecaoconesul/>. Acesso em 28 Jan. de 2021.
- [14] SILVA, José. *Os teoremas de Menelaus e Ceva*. 2015. Dissertação de Profmat-UFRPE, Recife, 2015.
- [15] The Korean Mathematical Olympiad. Disponível em: <http://www.kmo.or.kr/main.html>. Acesso em 28 Jan. de 2021.

Jhonata Avelar dos Santos
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática (DM-UFRPE)
Recife/PE
<jhonata.avelar@hotmail.com>

Pedro Victor S. Freitas
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática (DM-UFRPE)
Recife/PE
<pedro-victor@msn.com>

Gilson S. Ferreira Jr.
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática (DM-UFRPE)
Recife/PE
<gilson.simoesej@ufrpe.br>

Thiago Yukio Tanaka
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática (DM-UFRPE)
Recife/PE
<thiago.tanaka@ufrpe.br>

Recebido: 03/04/2021
Publicado: 24/06/2021

Sistema de amortização constante ou Tabela Price: Qual escolher no financiamento habitacional?

Keila Santos 

Rubens Ortega 

Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo detalhado e comparativo a respeito dos modelos matemáticos utilizados em financiamentos habitacionais no Brasil, a saber, o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema Francês de Amortização (Tabela Price). Para se chegar às conclusões que poderão auxiliar cidadãos na escolha de qual modelo é o mais adequado à sua realidade, faz-se uso dos aplicativos Excel e GeoGebra para observar padrões e formular conjecturas para, em seguida, comprovar matematicamente os resultados. Esse assunto está alinhado aos objetivos da Estratégia Nacional de Educação Financeira e à Base Nacional Comum Curricular, pois fornece subsídios para tomada de decisões financeiras racionais por parte dos cidadãos. O tema é parte do que foi desenvolvido em uma Dissertação de Mestrado do Profmat¹ [3].

Palavras-chave: Educação Financeira; Financiamento Habitacional; Sistema de Amortização Constante; Sistema Francês de Amortização; Tabela Price.

Abstract

The present work presents a detailed and comparative study about the mathematical models used in housing financing in Brazil, namely, the Constant Amortization System (CAS) and the French Amortization System (Price Table). In order to reach the conclusions that may help citizens in choosing which model is the most appropriate to their reality, Excel and GeoGebra software are used to observe patterns and formulate conjectures to then prove the results mathematically. This subject is in line with the objectives of the National Strategy for Financial Education and the Common National Curriculum Base, as it provides subsidies for citizens to make rational financial decisions. The theme is part of what was developed in a Master's Dissertation of the Profmat [3].

Keywords: Financial Education; Housing Finance; Constant Amortization System; French Amortization System; Price Table.

1. Introdução

Possuir imóvel próprio é desejo de grande parte da população brasileira. Por ser um bem de valor elevado quando comparado à renda média das pessoas, adquiri-lo à vista exigiria anos de espera,

¹Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - www.profmat-sbm.org.br/

eventualmente décadas, além de muita determinação na construção de uma poupança pessoal. Tal realidade faz com que as pessoas optem por contrair um financiamento habitacional.

Atualmente, no Brasil, são ofertadas duas maneiras para se pagar o empréstimo da aquisição da casa própria, processo que pode levar até 35 anos: o “Sistema de Amortização Constante” e a “Tabela Price”. O presente trabalho traz uma discussão matemática a respeito dos dois modelos, mostrando as diferenças entre eles, com objetivo de esclarecer o cidadão na tomada de decisão sobre qual escolher. Esse tema relevante de Educação Financeira² (SAC ou Price?) foi e continua sendo objeto de diversas abordagens na comunidade acadêmica (por exemplo, [2]), e a pergunta a ser respondida é: *No momento de realizar um financiamento habitacional, qual sistema de pagamento da dívida é o mais apropriado a cada um?*

De acordo com estudo técnico realizado pela Ecconit Consultoria Econômica [1], encomendado pela Abrainc (Associação Brasileira de Incorporadoras Imobiliárias), divulgado em novembro de 2020, o Brasil possuía *deficit* habitacional de aproximadamente 7,8 milhões de unidades em 2019, sendo que a demanda projetada para 2030 é de aproximadamente 11,4 milhões de unidades habitacionais. Esse cenário mostra a importância para a próxima década das políticas públicas voltadas à habitação, pois milhões de brasileiros precisam e precisarão do financiamento imobiliário para aquisição da casa própria.

Diante de tal realidade, é possível prever que muitos dos nossos jovens estudantes, em alguma fase da idade adulta, irão recorrer ao crédito imobiliário para realizarem o sonho do imóvel próprio. E ao contratar um financiamento habitacional, o cidadão precisa optar entre o SAC e a Tabela Price. É comum, porém, que não disponha de informações suficientes para realizar a escolha mais adequada ao seu perfil financeiro. Este artigo apresenta resultados que ajudam nessa tomada de decisão.

Desde a crise econômica global de 2008, ou crise do *subprime*³, a relevância do tema Educação Financeira foi acentuada, sendo que vários estudos sobre o impacto do seu ensino nas escolas vêm sendo conduzidos em diversos países. A partir da instituição da Enef em 2010, diversos projetos de lei para inserção da Educação Financeira de forma obrigatória nas escolas brasileiras foram discutidos. Esse movimento para incorporar a Educação Financeira na cultura da sociedade brasileira contribuiu para que o tema passasse a integrar a Base Nacional Comum Curricular⁴, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio.

Para finalizar esta Introdução, destacam-se os seguintes objetivos do trabalho:

1. Contribuir com o cidadão na sua vida real, mostrando as características e fazendo a comparação dos dois tipos de financiamento habitacional praticados atualmente no Brasil;
2. Contribuir com o Ensino de Educação Financeira no País, em alinhamento à Estratégia Nacional de Educação Financeira (Enef) e à Base Nacional Comum Curricular (BNCC);

²“A *Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF)* é uma mobilização em torno da promoção de ações de educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal no Brasil. O objetivo da ENEF, criada através do Decreto Federal 7.397/2010, e renovada pelo Decreto Federal nº 10.393, de 9 de junho de 2020, é contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes. A nova ENEF reúne representantes de 8 órgãos e entidades governamentais, que juntos integram o Fórum Brasileiro de Educação Financeira.” O site da ENEF é <https://www.vidaedinheiro.gov.br/>.

³A crise do *subprime* teve origem nos EUA, tendo sido motivada pela concessão de empréstimos hipotecários de alto risco, prática que levou vários bancos à insolvência, repercutindo fortemente sobre a Economia de todo o mundo.

⁴A *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, em todo o Brasil. O site da BNCC é <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

3. Contribuir com o Ensino de Matemática, mostrando, através de aplicativos de fácil acesso aos estudantes, como é possível conjecturar fatos para, na sequência, demonstrá-los matematicamente.

Para isso, na Seção 2 são apresentados os resultados básicos dos sistemas de amortização utilizados nos financiamentos habitacionais no Brasil. A Seção 3 faz uso de aplicativos para implementar cálculos e obter imagens de gráficos dos elementos envolvidos nos financiamentos, com objetivo de se observar padrões ao se comparar os sistemas de amortização e, a partir disso, conjecturar sobre a validade matemática desses padrões. Na Seção 4 são demonstrados os resultados que confirmam, matematicamente, as conjecturas levantadas na Seção 3.

2. Sistemas de Amortização

Atualmente, no Brasil, quando se contrata um financiamento habitacional, pode-se optar entre dois sistemas para o pagamento da dívida ao longo do tempo: o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema Francês de Amortização, mais conhecido como *Tabela Price*. Os elementos envolvidos nos cálculos são: o valor do financiamento (a dívida D), o tempo para sua quitação (n), a taxa de juros pactuada (i) e a prestação ou parcela mensal (P). É importante destacar que cada prestação paga tem duas componentes: uma parte abate o valor da dívida, chamada de amortização (A), e outra parte paga juros do empréstimo (J). Assim, tem-se em cada mês que

$$P = A + J.$$

2.1. Sistema de Amortização Constante (SAC)

O SAC é o método de pagamento de uma dívida em que a parcela de amortização (A) é constante e a parcela de juros (J), que incide sobre o saldo devedor, é decrescente ao longo do prazo de financiamento. Isto significa que a prestação (P) diminui a cada mês.

Teorema 1. *No SAC, sendo D_0 a dívida contraída, n o número de pagamentos e i a taxa de juros, tem-se*

$$\begin{aligned}
 A_k^{\text{SAC}} &= \frac{D_0}{n}, & D_k^{\text{SAC}} &= \frac{n-k}{n}D_0, \\
 J_k^{\text{SAC}} &= i \times D_{k-1}^{\text{SAC}}, & P_k^{\text{SAC}} &= A_k^{\text{SAC}} + J_k^{\text{SAC}}, \\
 \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} &= \left[1 + \frac{i}{2}(n+1) \right] D_0,
 \end{aligned}$$

onde:

A_k^{SAC} é a parcela de amortização no mês k (a mesma para todos os meses),

D_k^{SAC} é o valor da dívida após o pagamento do mês k ,

J_k^{SAC} é a parcela de juros no mês k ,

P_k^{SAC} é a prestação no mês k , e

$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}}$ é a soma de todas as parcelas do financiamento.

Demonstração. Como no SAC a amortização é a mesma em todas as n parcelas, basta dividir o valor do empréstimo por n , o que dá $A_k^{\text{SAC}} = \frac{D_0}{n}$. Após o pagamento de k parcelas, o total pago é $kA_k^{\text{SAC}} = k\frac{D_0}{n}$. Assim, a dívida atualizada neste momento é $D_k^{\text{SAC}} = D_0 - k\frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n}D_0$. Fazendo uso das relações para J_k^{SAC} e P_k^{SAC} , que são óbvias, e D_k^{SAC} , tem-se:

$$\begin{aligned} P_1^{\text{SAC}} &= \frac{D_0}{n} + iD_0, \\ P_2^{\text{SAC}} &= \frac{D_0}{n} + iD_1^{\text{SAC}} = \frac{D_0}{n} + i\frac{n-1}{n}D_0, \\ &\dots \\ P_n^{\text{SAC}} &= \frac{D_0}{n} + iD_{n-1}^{\text{SAC}} = \frac{D_0}{n} + i\frac{n-(n-1)}{n}D_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} &= n\frac{D_0}{n} + iD_0 \left[1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{n-(n-1)}{n} \right], \\ \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} &= D_0 + iD_0 \left(\frac{1}{n} \right) [n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1], \\ \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} &= D_0 + iD_0 \left(\frac{1}{n} \right) \left[\frac{(n+1)n}{2} \right] = \left[1 + \frac{i}{2}(n+1) \right] D_0. \end{aligned}$$

□

2.2. Sistema Francês de Amortização (Tabela Price)

A Tabela Price⁵ aplicada ao pagamento de uma dívida caracteriza-se por ter sua prestação mensal (P) constante durante todo o período de financiamento. Como a parcela de juros (J) decresce com o tempo, pois incide sobre o saldo devedor e a cada mês a dívida diminui, tem-se que a amortização (A) é crescente ao longo do tempo.

Para se entender a Tabela Price, é preciso conhecer o conceito de série uniforme.

Uma série uniforme de pagamentos é uma sequência de pagamentos iguais e igualmente espaçados no tempo. O valor A de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P , um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a

$$A = P \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

Para se ver isso, basta atualizar todas as n parcelas da série para o tempo 0 (momento em que se contrai a dívida). Assim, o valor A da série na época 0 (um tempo antes do primeiro pagamento) fica

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

⁵Este método foi apresentado em 1771 por Richard Price (Inglaterra, 1723-1791) em sua célebre obra da área financeira e atuarial, intitulada *Observations on Reversionary Payments*.

que é a soma de n termos de uma Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$. Tem-se

$$A = \left(\frac{P}{1+i} \right) \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}},$$

$$A = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

Essa última igualdade é a base para o resultado a seguir.

Teorema 2. *No Sistema Francês de Amortização, sendo D_0 a dívida contraída, n o número de pagamentos e i a taxa de juros, tem-se*

$$P_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} D_0,$$

$$D_k^{\text{Price}} = \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}} D_0,$$

$$J_k^{\text{Price}} = i D_{k-1}^{\text{Price}},$$

$$P_k^{\text{Price}} = A_k^{\text{Price}} + J_k^{\text{Price}},$$

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} D_0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}} = \frac{ni}{1 - (1+i)^{-n}} D_0.$$

onde:

A_k^{Price} é a parcela de amortização no mês k ,

D_k^{Price} é o valor da dívida após o pagamento do mês k ,

J_k^{Price} é a parcela de juros no mês k ,

P_k^{Price} é a prestação no mês k (a mesma para todos os meses), e

$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}}$ é a soma de todas as n parcelas do financiamento.

Demonstração. Substituindo A por D_0 e P por P_k^{Price} em $A = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$, obtém-se

$$D_0 = P_k^{\text{Price}} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow P_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} D_0.$$

Após o k -ésimo pagamento, o número de parcelas restantes para quitar o financiamento é $n - k$. Assim, a dívida atualizada nesse momento é

$$D_k^{\text{Price}} = P_k^{\text{Price}} \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo a fórmula de P_k^{Price} na igualdade anterior, tem-se

$$D_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} D_0 \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-(n-k)}}{i} \Leftrightarrow D_k^{\text{Price}} = \frac{1 - (1 + i)^{-(n-k)}}{1 - (1 + i)^{-n}} D_0.$$

Por outro lado, sendo $A_k^{\text{Price}} = P_k^{\text{Price}} - J_k^{\text{Price}}$, e usando as relações de P_k^{Price} , J_k^{Price} e D_{k-1}^{Price} , vem

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} D_0 - i D_{k-1}^{\text{Price}} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} D_0 - i \frac{1 - (1 + i)^{-(n-(k-1))}}{1 - (1 + i)^{-n}} D_0,$$

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} D_0 [1 - [1 - (1 + i)^{-n+k-1}]] = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} D_0 [(1 + i)^{-n+k-1}].$$

Multiplicando numerador e denominador por $(1 + i)^n$, obtém-se

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i(1 + i)^{k-1}}{(1 + i)^n - 1} D_0.$$

Para finalizar, posto que no Price a prestação é a mesma em todas as n parcelas, o cálculo da soma de todos os valores pagos é obtido multiplicando P_k^{Price} por n :

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}} = n P_k^{\text{Price}} = \frac{ni}{1 - (1 + i)^{-n}} D_0.$$

□

3. Exemplos comparativos entre financiamentos no SAC e na Tabela Price

Para ilustrar como funcionam os dois sistemas, a Figura 1 mostra a imagem de uma planilha comparativa entre o SAC e a Tabela Price, para um financiamento de R\$ 122.400,00 em 360 meses, a uma taxa de 0,57% ao mês.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Planilha Comparativa entre o SAC e a Tabela Price										
2	Esta planilha mostra o status comparativo das três primeiras e das três últimas prestações de um financiamento pelo SAC e pela Tabela Price.										
3	Na última linha, é possível ver os valores do financiamento no mês k , digitando na Célula A21 o mês desejado ($3 < k < n-2$).										
4											
5	D₀	R\$ 122.400,00									
6	n	360									
7	i	0,57%									
8											
9	SAC							Price			
10		Amortização	Saldo Devedor	Juros	Prestação			Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
11	k	A_k	D_k	J_k	P_k	k	P_k	J_k	A_k	D_k	
12	0		R\$ 122.400,00			0				R\$ 122.400,00	
13	1	R\$ 340,00	R\$ 122.060,00	R\$ 697,68	R\$ 1.037,68	1	R\$ 801,22	R\$ 697,68	R\$ 103,54	R\$ 122.296,46	
14	2	R\$ 340,00	R\$ 121.720,00	R\$ 695,74	R\$ 1.035,74	2	R\$ 801,22	R\$ 697,09	R\$ 104,13	R\$ 122.192,33	
15	3	R\$ 340,00	R\$ 121.380,00	R\$ 693,80	R\$ 1.033,80	3	R\$ 801,22	R\$ 696,50	R\$ 104,72	R\$ 122.087,60	
16											
17	358	R\$ 340,00	R\$ 680,00	R\$ 5,81	R\$ 345,81	358	R\$ 801,22	R\$ 13,55	R\$ 787,67	R\$ 1.588,84	
18	359	R\$ 340,00	R\$ 340,00	R\$ 3,88	R\$ 343,88	359	R\$ 801,22	R\$ 9,06	R\$ 792,16	R\$ 796,68	
19	360	R\$ 340,00	R\$ 0,00	R\$ 1,94	R\$ 341,94	360	R\$ 801,22	R\$ 4,54	R\$ 796,68	R\$ 0,00	
20											
21	180	R\$ 340,00	R\$ 61.200,00	R\$ 350,78	R\$ 690,78	180	R\$ 801,22	R\$ 514,83	R\$ 286,39	R\$ 90.034,19	
22											
23	SAC	Soma dos Valores Pagos no Financiamento SAC			R\$ 248.331,24	Price	Soma dos Valores Pagos no Financiamento Price			R\$ 288.439,36	

Figura 1: Planilha comparativa entre financiamentos no SAC e Tabela Price

Fonte: Os autores

Esta planilha, elaborada no Excel⁶, pode ser usada por quem queira simular um financiamento real, e funciona da seguinte maneira:

- (a) nas células B5, B6 e B7, respectivamente, o usuário digita o valor do empréstimo (D_0), o número de meses (n) do financiamento e a taxa mensal de juro (i) aplicada ao contrato;
- (b) a partir da linha 9, as colunas A, B, C, D e E mostram valores do SAC, enquanto que as colunas G, H, I, J e K mostram valores da Tabela Price;
- (c) as linhas 13, 14 e 15 mostram os valores da Amortização (A_k), do Saldo Devedor (D_k), dos Juros (J_k) e da Prestação (P_k) nos 3 primeiros meses do financiamento, tanto pelo SAC quanto pela Tabela Price, enquanto que as linhas 17, 18 e 19 fazem o mesmo para os 3 últimos meses;
- (d) ao digitar na célula A21 qualquer número inteiro k , $3 < k < n - 2$, pode-se ver, na linha 21, a posição no mês k de A_k , D_k , J_k e P_k , tanto para o SAC quanto para a Tabela Price (no exemplo, usou-se o mês $k = 180$, exatamente quando se completa metade das prestações);
- (e) as células E23 e H23 mostram as somas de todas as prestações do financiamento pagas pelo SAC e pela Tabela Price, respectivamente.

Observando todos os dados da planilha, destacam-se:

- (a) as 3 primeiras Prestações são maiores no SAC, sendo que a 180^a e as 3 últimas Prestações são maiores na Tabela Price;
- (b) as 3 primeiras e a 180^a Amortizações são maiores no SAC, sendo que as 3 últimas Amortizações são maiores na Tabela Price;
- (c) no segundo, no terceiro, no 180^o e nos 3 últimos meses, os Juros no SAC são menores que na Tabela Price;
- (d) em todos os meses da planilha, o Saldo Devedor no SAC é menor que na Tabela Price, com exceção, obviamente, do 360^o mês, quando se dá a quitação do financiamento;
- (e) após o pagamento da 180^a Prestação, o Saldo Devedor no SAC é exatamente 50% da dívida contraída (paga-se metade das prestações e quita-se metade da dívida), enquanto que na Tabela Price é pouco mais de 73% (neste exemplo, paga-se metade das prestações e quita-se apenas pouco mais de 26% da dívida);
- (f) a linha 23 mostra que a soma das prestações do financiamento no SAC é menor que na Tabela Price.

Uma vez que a planilha é dinâmica, o usuário pode rapidamente fazer diversas simulações pela simples escolha dos valores desejados para D_0 , n e i . Também é possível, ao variar k (célula A21) entre 3 e $n - 2$, obter os dados de todas as parcelas de um financiamento. Como resultado para qualquer composição escolhida, será observado que os destaques anteriormente citados, (a), (b), (c), (d), (e) e (f), irão se repetir todas as vezes.

Em resumo, sempre se terá que:

- (a) a Prestação no SAC começa maior que na Tabela Price, sendo que a partir de um determinado mês inverte-se tal relação e assim permanece até o final do contrato (o mesmo ocorre com a Amortização);

⁶Editor de planilhas produzido pela Microsoft.

(b) os valores dos Juros no SAC são sempre menores que na Tabela Price (com exceção do mês 1, que são iguais), o mesmo ocorrendo com os Saldos Devedores (com exceção do último mês, que são iguais a zero);

(c) a soma das prestações do financiamento pelo SAC é sempre menor que pela Tabela Price.

Apesar de não ser possível testar a planilha para todos os casos numéricos, pois são infinitos, a coincidência das conclusões em todas as simulações levam à conjectura de que, de fato, elas são verdadeiras e, portanto, possuem demonstração matemática.

Para fortalecer ainda mais essa ideia, a seguir são mostradas imagens de construções gráficas feitas no GeoGebra⁷, sendo uma para as Prestações, uma para as Amortizações, uma para as Somas das Amortizações e outra para os Saldos Devedores, sempre comparando o que ocorre nos dois sistemas.

A Figura 2 é de um gráfico que representa um financiamento de R\$ 1.000,00 em 12 prestações mensais com taxa de juros de 0,87% ao mês. Os pontos (P1, P2, ..., P12) na reta azul representam o comportamento das prestações na Tabela Price, enquanto que os pontos (S1, S2, ..., S12) na reta vermelha representam as prestações no SAC. Na Tabela Price as prestações são constantes e no SAC decrescem em Progressão Aritmética. No início, a prestação é maior no SAC mas, a partir de certo momento, passa a ser maior na Tabela Price, até o final do financiamento (Teorema 5 e Observação 2 da Seção 4). Como a figura é dinâmica, pode-se movimentar os valores de i (cursor preto), D_0 (cursor vermelho) e n (cursor verde) para observar as variações que ocorrem. Em particular, quanto mais se aumentar o valor da taxa de juros i , menos tempo irá levar para as prestações ficarem maiores na Tabela Price. As duas colunas, uma com valores em vermelho (B) e outra com valores em azul (D), que estão do lado esquerdo na Figura 2, representam, respectivamente, em reais, as prestações no SAC e na Tabela Price, sendo que a última linha, em preto, dá a soma dos valores pagos nos dois tipos de financiamentos. Aqui tem-se mais uma novidade: qualquer que seja a variação dada a i , D_0 e n , a soma do que se paga no SAC é sempre menor do que a soma do que se paga na Tabela Price. Tal fato será demonstrado no Teorema 4 da próxima Seção.

⁷Aplicativo de Geometria Dinâmica que pode ser obtido em <https://www.geogebra.org/>.

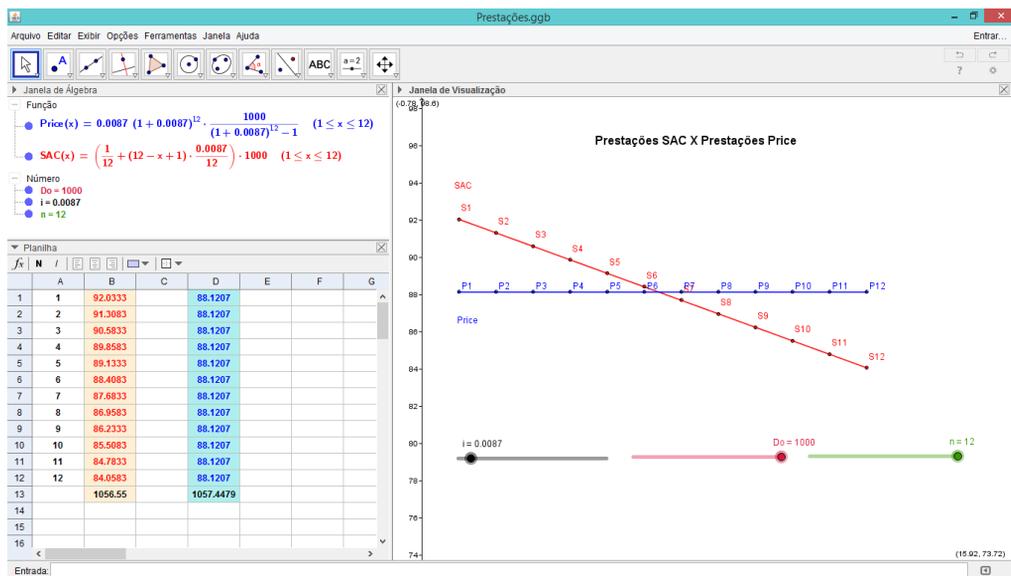


Figura 2: Prestações SAC X Prestações Tabela Price

Fonte: Os autores

Para o mesmo financiamento do caso anterior, a Figura 3 mostra o que acontece com as parcelas de amortizações no SAC e na Tabela Price. Aqui, os pontos (P1, P2, ..., P12) na curva azul representam o comportamento das amortizações na Tabela Price, enquanto que os pontos (S1, S2, ..., S12) na reta vermelha representam as amortizações no SAC. Na Tabela Price as amortizações vão aumentando exponencialmente (mesmo que o desenho, pela escala, pareça-se com reta) e no SAC são constantes. No início, a parcela de amortização é maior no SAC mas, a partir de certo momento, passa a ser maior na Tabela Price, até o final do financiamento (Teorema 6 e Observação 3 da Seção 4). Como a figura é dinâmica, pode-se movimentar os valores de i (cursor preto), D_0 (cursor vermelho) e n (cursor verde) para observar as variações que ocorrem. Em particular, quanto mais se aumentar o valor da taxa de juros i , mais tempo irá levar para as amortizações ficarem maiores na Tabela Price. As duas colunas, uma com valores em vermelho (B) e outra com valores em azul (D), que estão no lado esquerdo da Figura 3, representam, respectivamente, em reais, as amortizações no SAC e na Tabela Price, sendo que a última linha, em preto, dá a soma dos valores pagos nos dois tipos de financiamentos, que é justamente o valor financiado (R\$ 1.000,00).

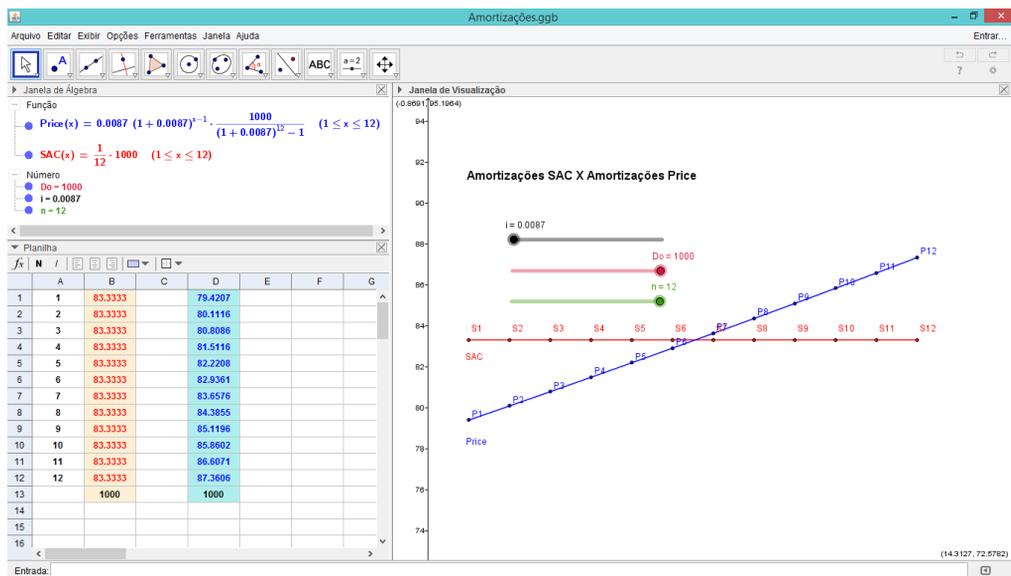


Figura 3: Amortizações SAC X Amortizações Tabela Price

Fonte: Os autores

A Figura 4 representa o mesmo financiamento de R\$ 1.000,00 em 12 prestações mensais, porém com uma elevada taxa de juros de 1.000% ao mês. A ideia é mostrar que, na Tabela Price, quanto maior for a taxa de juros, mais as amortizações do saldo devedor irão se concentrar perto do final do financiamento. No caso do SAC, as amortizações do saldo devedor acontecem linearmente ao longo do período de financiamento (Observação 4 da Seção 4). As duas colunas, uma com valores em vermelho (B) e outra com valores em azul (D), que estão no lado esquerdo da Figura 4, representam, respectivamente, em reais, as somas das amortizações no SAC e na Tabela Price. Nesse caso, até a prestação de número 10, as amortizações na Tabela Price são nulas ou quase insignificantes; na prestação 11 há ligeiro aumento, porém somente na última prestação é que acontece a amortização realmente significativa. O gráfico é dinâmico: se agora, ao contrário, a taxa de juros i (cursor preto) for considerada bem próxima de zero, os gráficos do SAC e da Tabela Price tendem a coincidir.

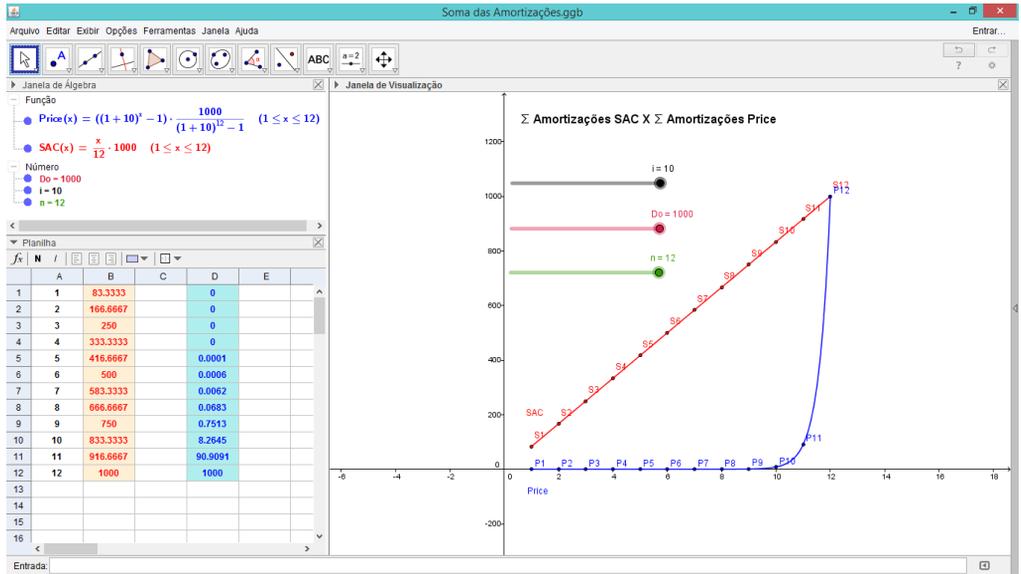


Figura 4: Soma das Amortizações SAC X Soma das Amortizações Tabela Price

Fonte: Os autores

Para concluir esta Seção, a Figura 5 refere-se ao mesmo financiamento das figuras 2 e 3, agora mostrando a diferença dos Saldos Devedores entre a Tabela Price e o SAC.

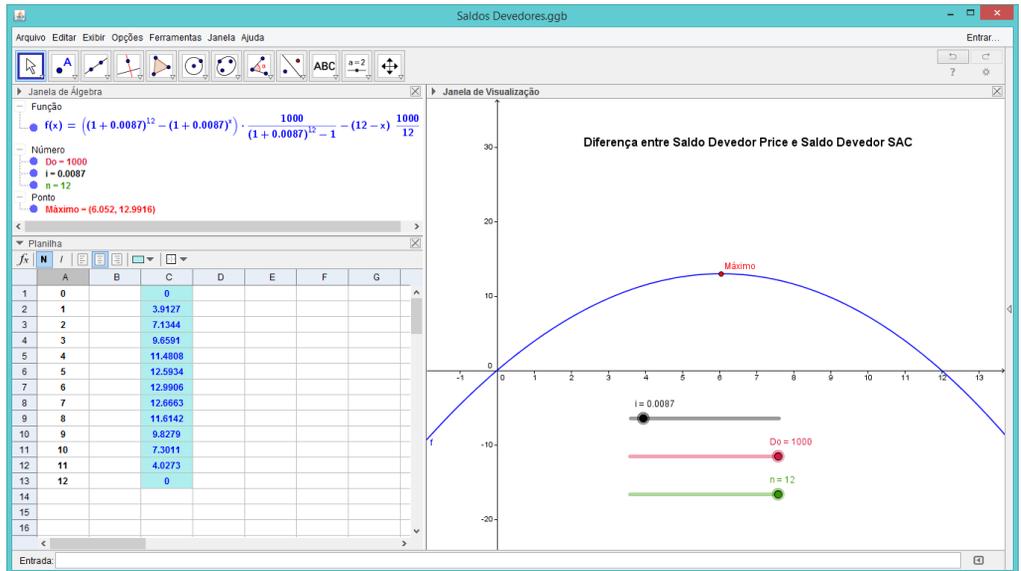


Figura 5: Diferença entre Saldo Devedor Tabela Price e Saldo Devedor SAC

Fonte: Os autores

A diferença é nula quando $k = 0$, depois cresce até atingir um valor máximo. Após esse ponto, diminui até zerar no pagamento da última parcela, que neste caso é $k = 12$. A coluna com valores em azul (C), que está no lado esquerdo da Figura 5, mostra, em reais, essas diferenças. O gráfico é dinâmico: pode-se alterar os valores da taxa i (cursor preto), do prazo n (cursor verde) e do financiamento D_0 (cursor vermelho), isoladamente ou em conjunto, que a curva permanece com as mesmas características (para valores maiores dessas variáveis, a diferença fica ainda mais acentuada). Tais fatos observados na função de diferença dos saldos devedores serão demonstrados no Teorema 3 da próxima Seção.

4. Resultados teóricos para SAC e Tabela Price

Nesta Seção serão enunciados e demonstrados resultados que comprovam as diversas conjecturas feitas na Seção 3 a respeito do SAC e da Tabela Price.

Lema 1. *Sejam i e D_0 números reais positivos, n um número natural e a função $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \frac{(1+i)^n - (1+i)^x}{(1+i)^n - 1} D_0 - \frac{n-x}{n} D_0.$$

Então $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, n)$.

Demonstração. É fácil ver que f é contínua e infinitamente derivável em \mathbb{R} , pois é a soma de uma função exponencial com uma função afim. Calculando suas derivadas primeira e segunda, obtém-se

$$f'(x) = -\frac{(1+i)^x \ln(1+i)}{(1+i)^n - 1} D_0 + \frac{1}{n} D_0$$

e

$$f''(x) = -\frac{(1+i)^x [\ln(1+i)]^2}{(1+i)^n - 1} D_0.$$

Como $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de f é côncavo para baixo em \mathbb{R} . Posto que $f(0) = f(n) = 0$, tem-se que o gráfico de f fica totalmente acima do eixo x no intervalo $(0, n)$, isto é, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, n)$. Além disso, fazendo $f'(x) = 0$, encontra-se como solução única

$$x = \log_{(1+i)} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)^n} \right],$$

que corresponde ao ponto de máximo absoluto de f em \mathbb{R} . □

Teorema 3. *Para todo k natural, $0 < k < n$, o Saldo Devedor no SAC é menor que o Saldo Devedor na Tabela Price.*

Demonstração. Sejam $D_k^{\text{SAC}} = (\frac{n-k}{n})D_0$ o saldo devedor no SAC e $D_k^{\text{Price}} = (\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}})D_0$ o saldo devedor na Tabela Price, após k pagamentos. É fácil ver que para $k = 0$ e $k = n$, os valores de D_k^{SAC} e D_k^{Price} são iguais a D_0 e 0, respectivamente. Considerando a função $f: \{0, 1, 2, \dots, n\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(k) = D_k^{\text{Price}} - D_k^{\text{SAC}} = \left(\frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}} \right) D_0 - \left(\frac{n-k}{n} \right) D_0,$$

vê-se que essa é uma restrição da função do Lema 1. Logo, pode-se concluir que $f(k) > 0$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, ou seja,

$$\left(\frac{n-k}{n}\right)D_0 < \left(\frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}}\right)D_0.$$

Portanto,

$$D_k^{\text{SAC}} < D_k^{\text{Price}}.$$

□

Teorema 4. Quando $n > 1$, a soma dos valores pagos ao longo de um financiamento utilizando o SAC será sempre menor que a soma dos valores pagos utilizando a Tabela Price.

Demonstração. Primeiro, observa-se que os juros pagos ao longo do financiamento utilizando o SAC serão sempre menores que os pagos utilizando a Tabela Price (salvo quando $k = 1$, que são iguais), pois ambos são calculados da mesma maneira, através da fórmula

$$J_k = iD_{k-1},$$

dependendo do saldo devedor que, pelo Teorema 3, sempre é menor no SAC. Como consequência, a soma dos juros pagos no SAC ao longo do financiamento será menor que a soma dos juros pela Tabela Price, isto é,

$$\sum_{k=1}^{k=n} J_k^{\text{SAC}} < \sum_{k=1}^{k=n} J_k^{\text{Price}}.$$

Por outro lado, como cada parcela P_k é formada pela adição da amortização com os juros, $P_k = A_k + J_k$, tem-se que

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} = \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^{\text{SAC}} + J_k^{\text{SAC}})$$

e

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}} = \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^{\text{Price}} + J_k^{\text{Price}}).$$

Posto que

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k^{\text{SAC}} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k^{\text{Price}} = D_0,$$

conclui-se que

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} < \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}}.$$

□

Observação 1. Outra forma de demonstrar esse resultado seria considerar que

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} = \left[1 + \frac{i}{2}(n+1)\right]D_0, \quad \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}} = \frac{ni}{1 - (1+i)^{-n}}D_0$$

(Teoremas 1 e 2), e mostrar que

$$1 + \frac{i}{2}(n+1) < \frac{ni}{1 - (1+i)^{-n}}$$

para todo n natural maior que 1.

Lema 2. *Sejam i um número real positivo e a função $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = ix(1+i)^x - (1+i)[(1+i)^x - 1].$$

Então $f(x) > 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$.

Demonstração. É fácil ver que f é contínua e infinitamente derivável em \mathbb{R} . Calculando sua derivada primeira, obtém-se

$$f'(x) = i(1+i)^x + ix(1+i)^x \ln(1+i) - (1+i)(1+i)^x \ln(1+i).$$

Para analisar o sinal de f' , resolve-se $f'(x) = 0$ e encontra-se como solução única

$$x_0 = \frac{(1+i)\ln(1+i) - i}{i \cdot \ln(1+i)} = 1 + \frac{1}{i} - \frac{1}{\ln(1+i)} < 1,$$

pois $i > \ln(1+i)$. Logo, f' terá sempre o mesmo sinal no intervalo $(x_0, +\infty) \supset [1, +\infty)$. Como

$$f'(1) = i(1+i) + i(1+i)\ln(1+i) - (1+i)(1+i)\ln(1+i),$$

$$f'(1) = i(1+i) + (1+i)\ln(1+i)[i - (1+i)],$$

$$f'(1) = i(1+i) - (1+i)\ln(1+i),$$

$$f'(1) = (1+i)[i - \ln(1+i)] > 0,$$

tem-se que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, +\infty) \supset [1, +\infty)$. Em consequência, f é crescente em $[1, +\infty)$. Como $f(1) = 0$, conclui-se que $f(x) > 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$. \square

A representação gráfica de

$$P_k^{\text{SAC}} = \left[\frac{1}{n} + \frac{n - (k-1)}{n} i \right] D_0$$

como função de k é um conjunto de n pontos sobre uma reta de inclinação $-\frac{i}{n}D_0$, enquanto que a de

$$P_k^{\text{Price}} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} D_0$$

é um conjunto de n pontos sobre uma reta de inclinação zero, uma vez que na Tabela Price a prestação é constante.

Teorema 5. Para $n = 1$, $P_1^{\text{SAC}} = P_1^{\text{Price}}$, e, para todo $n > 1$, $P_1^{\text{SAC}} > P_1^{\text{Price}}$ e $P_n^{\text{SAC}} < P_n^{\text{Price}}$.

Demonstração. Fazendo $n = 1$ e $k = 1$ nas fórmulas anteriores, obtém-se

$$P_1^{\text{SAC}} = P_1^{\text{Price}} = (1 + i)D_0.$$

Para $n > 1$ e $k = 1$, considera-se a seguinte sequência de desigualdades:

$$(1 + i)^n = 1 + ni + \dots + i^n > 1 + ni,$$

$$(1 + i)^n - 1 - ni > 0,$$

$$(1 + i)^n - 1 + ni(1 + i)^n - ni > ni(1 + i)^n,$$

$$(1 + ni)[(1 + i)^n - 1] > ni(1 + i)^n,$$

$$\frac{1 + ni}{n} > \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1},$$

$$\left(\frac{1}{n} + i\right)D_0 > \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}D_0.$$

Logo,

$$P_1^{\text{SAC}} > P_1^{\text{Price}}.$$

Para $n > 1$ e $k = n$, considera-se a função $f : \{2, 3, 4, \dots\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(n) = in(1 + i)^n - (1 + i)[(1 + i)^n - 1],$$

que é uma restrição da função do Lema 2. Logo, conclui-se que $f(n) > 0$ para todo $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$, ou seja,

$$in(1 + i)^n > (1 + i)[(1 + i)^n - 1],$$

$$\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} > \frac{1 + i}{n},$$

$$\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}D_0 > \frac{1 + i}{n}D_0.$$

Portanto,

$$P_n^{\text{SAC}} < P_n^{\text{Price}}.$$

□

Observação 2. Quando $n > 2$, pode-se concluir que existe k_0 , $1 < k_0 < n$, tal que $P_k^{\text{SAC}} < P_k^{\text{Price}}$ para todo k , com $k_0 \leq k \leq n$, posto que a sequência $(P_1^{\text{SAC}}, P_2^{\text{SAC}}, \dots, P_n^{\text{SAC}})$ é uma Progressão Aritmética decrescente de razão $-\frac{i}{n}D_0$, a sequência $(P_1^{\text{Price}}, P_2^{\text{Price}}, \dots, P_n^{\text{Price}})$ é constante, $P_1^{\text{SAC}} > P_1^{\text{Price}}$ e $P_n^{\text{SAC}} < P_n^{\text{Price}}$. Isto significa que sempre haverá um momento no qual a prestação do SAC torna-se menor que a prestação da Tabela Price, e a partir daí até o final do financiamento. Pelas características gráficas dos dois tipos de prestações (retas) e sabendo que $\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} < \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}}$, pode-se concluir que, se n é par, o menor k_0 será menor que (ou igual a) $\frac{n}{2} + 1$, e se n é ímpar, o

menor k_0 será menor que (ou igual a) $\frac{n+1}{2}$.

A representação gráfica de

$$A_k^{\text{SAC}} = \frac{1}{n}D_0$$

como função de k é um conjunto de n pontos sobre uma reta de inclinação zero, enquanto que a de

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}D_0$$

é um conjunto de n pontos sobre uma curva exponencial.

Teorema 6. Para $n = 1$, $A_1^{\text{SAC}} = A_1^{\text{Price}}$, e, para todo $n > 1$, $A_1^{\text{SAC}} > A_1^{\text{Price}}$ e $A_n^{\text{SAC}} < A_n^{\text{Price}}$.

Demonstração. Fazendo $n = 1$ e $k = 1$ nas fórmulas anteriores, obtém-se

$$A_1^{\text{SAC}} = A_1^{\text{Price}} = D_0.$$

Para $n > 1$ e $k = 1$, considera-se a seguinte sequência de desigualdades:

$$(1+i)^n = 1 + ni + \dots + i^n > 1 + ni,$$

$$(1+i)^n - 1 > ni,$$

$$\frac{1}{n} > \frac{i}{(1+i)^n - 1},$$

$$\frac{1}{n}D_0 > \frac{i}{(1+i)^n - 1}D_0.$$

Logo,

$$A_1^{\text{SAC}} > A_1^{\text{Price}}.$$

Para $n > 1$ e $k = n$, basta observar que $P_n^{\text{SAC}} = (1+i)A_n^{\text{SAC}}$ e $P_n^{\text{Price}} = (1+i)A_n^{\text{Price}}$, e usar que $P_n^{\text{SAC}} < P_n^{\text{Price}}$. \square

Observação 3. Quando $n > 2$, pode-se concluir que existe k_0 , $1 < k_0 \leq n$, tal que $A_k^{\text{SAC}} < A_k^{\text{Price}}$ para todo k , com $k_0 \leq k \leq n$, posto que a sequência $(A_1^{\text{SAC}}, A_2^{\text{SAC}}, \dots, A_n^{\text{SAC}})$ é constante, a sequência $(A_1^{\text{Price}}, A_2^{\text{Price}}, \dots, A_n^{\text{Price}})$ é uma Progressão Geométrica crescente de razão $1+i$, $A_1^{\text{SAC}} > A_1^{\text{Price}}$ e $A_n^{\text{SAC}} < A_n^{\text{Price}}$. Isso significa que sempre haverá um momento no qual a amortização do SAC torna-se menor que a amortização da Tabela Price, e a partir daí até o final do financiamento.

Sendo a amortização da Tabela Price no mês k dada por

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}D_0,$$

pode-se encontrar o total da amortização da dívida até o mês m da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{\text{Price}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} D_0 + \frac{i(1+i)}{(1+i)^n - 1} D_0 + \frac{i(1+i)^2}{(1+i)^n - 1} D_0 + \dots + \frac{i(1+i)^{m-1}}{(1+i)^n - 1} D_0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{\text{Price}} = [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{m-1}] \frac{i}{(1+i)^n - 1} D_0,$$

$$\sum A_m^{\text{Price}} = \sum_{k=1}^{k=m} A_k^{\text{Price}} = \frac{(1+i)^m - 1}{(1+i)^n - 1} D_0.$$

Para se saber o quanto da dívida D_0 já foi amortizada quando metade das prestações do financiamento foram quitadas (tal raciocínio aplica-se quando n é par), basta substituir m por $n/2$. Assim,

$$\sum A_{n/2}^{\text{Price}} = \frac{(1+i)^{n/2} - 1}{(1+i)^n - 1} D_0,$$

$$\sum A_{n/2}^{\text{Price}} = \frac{1}{(1+i)^{n/2} + 1} D_0 < \frac{1}{2} D_0.$$

Conclui-se que, na Tabela Price, nunca a metade da dívida será amortizada na metade do prazo, ou seja, na segunda metade sempre se amortiza mais do que na primeira metade do financiamento.

Como

$$\lim_{i \rightarrow 0} \left(\sum A_{n/2}^{\text{Price}} \right) = \frac{D_0}{2},$$

conclui-se que, quanto menor for a taxa de juro, mais próximo da metade do prazo dar-se-á a amortização de metade da dívida. Por outro lado, como

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum A_{n/2}^{\text{Price}} \right) = 0,$$

conclui-se que, quanto maior for a taxa de juro, mais próximo do final do prazo se dar-se-á a amortização de metade da dívida.

Para se saber em qual mês m se consegue igualar ou ultrapassar a amortização de metade da dívida, basta isolar m na desigualdade

$$\frac{(1+i)^m - 1}{(1+i)^n - 1} D_0 \geq \frac{1}{2} D_0,$$

que dá

$$m \geq \log_{(1+i)} \frac{(1+i)^n + 1}{2}.$$

Observação 4. A amortização do SAC é dada por

$$A_k^{\text{SAC}} = \frac{1}{n} D_0,$$

o que significa que

$$\sum A_m^{\text{SAC}} = \sum_{k=1}^{k=m} A_k^{\text{SAC}} = \frac{m}{n} D_0.$$

Dessa forma, no SAC sempre se terá amortizado a metade da dívida na metade do prazo. É fácil ver que, neste sistema, a amortização é proporcional ao número de parcelas pagas.

5. Componentes da prestação habitacional na prática

Como já visto, as prestações nos financiamentos imobiliários são os valores pagos mensalmente, com objetivo de liquidar a dívida no prazo estabelecido em contrato. São compostas de uma parcela de amortização e outra de juros. Nos casos práticos, aos valores das prestações calculados nas planilhas, muitas vezes é acrescentada uma taxa administrativa e uma taxa referente a seguros (seguro MIP, que cobre morte e invalidez permanente, e seguro DFI, que faz a cobertura de danos físicos no imóvel).

Dessa forma, as prestações habitacionais cobradas pelas instituições financeiras são formadas por parcelas de amortização e juros, por uma taxa de administração e pelos seguros MIP e DFI. A parcela de administração é fixa e conseqüentemente não vai mudar o fato de que o somatório dos valores pagos no SAC é menor que na Tabela Price. No caso do seguro DFI, esse é um fator multiplicado pelo valor da garantia atualizada do imóvel, logo será o mesmo valor de parcela tanto no SAC quanto na Tabela Price. Já o seguro MIP é sempre menor no SAC, visto que essa parcela é calculada multiplicando-se um fator – que depende da idade do proponente mais idoso (quando mais de uma pessoa faz parte do contrato) – pelo saldo devedor, que já se sabe ser menor no SAC. Assim sendo, na prática, mesmo a prestação habitacional não sendo composta apenas por uma parcela de juros e outra de amortização, como se considerou anteriormente nos modelos matemáticos, conclui-se também que o somatório total de valores pagos é sempre menor no SAC. Com isso, os resultados da Seção 4 permanecem válidos nos casos práticos.

6. SBPE e PCVA

As duas linhas de crédito mais utilizadas em financiamentos imobiliários no Brasil são o SBPE (Sistema Brasileiro de Poupança e Empréstimo), disponibilizado por ampla rede de instituições financeiras, e o PCVA (Programa Casa Verde e Amarela), subsidiado pelo Governo Federal e voltado a famílias com renda mensal de até R\$ 7.000,00. Não se objetiva neste texto detalhar as especificidades de cada linha de crédito, porém é importante destacar que, atualmente:

- a) no SBPE, o valor máximo da prestação fica limitado a 30% da renda mensal familiar comprovada para financiamentos pelo SAC, e a 25% pela Tabela Price;
- b) no SBPE, o prazo máximo de financiamento é 35 anos pelo SAC e 30 anos pela Tabela Price;
- c) no PCVA, a prestação máxima é 30% da renda mensal e o prazo máximo de financiamento é 30 anos, tanto para o SAC quanto para a Tabela Price.

Os exemplos a seguir serão referenciados nas considerações da próxima seção.

Exemplo A. Considere-se um cidadão com renda mensal de R\$ 8.100,00 que simula um financiamento pelo SBPE de R\$ 300.000,00 à taxa de juro mensal de 0,57%. Pelo SAC em 420 meses, a primeira prestação P_1^{SAC} seria R\$ 2.424,29 (dentro dos 30% da renda) e pela Tabela Price em 360 meses, a prestação inicial P_1^{Price} seria R\$ 1.963,78 (dentro dos 25% da renda).

Exemplo B. Considere-se um empréstimo pelo PCVA de um cidadão que possui renda mensal de R\$ 4.000,00, pelo prazo máximo de 30 anos (360 meses) com taxa de juro mensal de 0,57%. Como a prestação máxima permitida é 30% da renda, ou seja, R\$ 1.200,00, o valor máximo possível a ser financiado pela Tabela Price seria R\$ 183.320,00, enquanto que no SAC seria R\$ 141.547,00.

7. Considerações finais

Após toda discussão feita nas seções anteriores, é possível tirar conclusões que podem orientar com segurança o cidadão que for realizar um financiamento habitacional, na escolha da melhor opção dentro das suas condições de momento. De forma objetiva, tem-se:

1. Como já visto, para que a instituição que irá financiar o imóvel aprove o empréstimo, a primeira prestação do financiamento não pode comprometer mais do que X% do salário bruto do(s) proponente(s). Como $P_1^{\text{Price}} < P_1^{\text{SAC}}$ (Teorema 5), pode ocorrer, dependendo do valor a ser financiado, mesmo considerando contrato com prazo máximo permitido⁸, de que os X% da renda bruta sejam um valor entre P_1^{Price} e P_1^{SAC} . Nesse caso não há opção, e deve-se obrigatoriamente contratar pela Tabela Price.

2. Em qualquer momento do contrato, desde que a renda bruta do(s) proponente(s) seja suficiente, o sistema bancário permite trocar de Price para SAC e vice-versa, de acordo com o interesse do(s) contratante(s). Então, na situação do item anterior, caso em algum momento de vigência do contrato a prestação simulada no SAC ficasse igual ou inferior aos X% do salário bruto, o mesmo poderia ser mudado de Tabela Price para SAC.

3. Sendo a amortização no SAC proporcional ao número de parcelas pagas, $\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{\text{SAC}} = \frac{m}{n} D_0$ (Observação 4), esse sistema permite ao cidadão melhor controle sobre o que foi pago e o que resta pagar. Ainda, a quitação antecipada da dívida, em qualquer época, sempre será menor no SAC. Não é raro pessoas com contrato pela Tabela Price ficarem surpresas ao saberem que, mesmo tendo pago metade das prestações, o Saldo Devedor ainda é maior que 50%, uma vez que o Saldo Devedor no Price é sempre maior que no SAC (Teorema 3).

4. Uma forte razão para se optar pelo SAC é o fato de que a soma dos valores pagos ao longo do financiamento no SAC é sempre menor que na Tabela Price (Teorema 4). Na Figura 1 do início da Seção 3, as células E23 e H23 da planilha Excel mostram as somas dos valores pagos pelo SAC e pela Tabela Price, respectivamente. Para o financiamento de R\$ 122.400,00 em 360 meses do exemplo, paga-se pelo SAC aproximadamente R\$ 40.000,00 a menos. Não se pode negar que esse é um valor significativo. Ressalte-se, porém, que o fato de $\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} < \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}}$ não significa que será sempre vantajoso, financeiramente, optar pelo SAC. Em teoria, seria possível ao contratante que optou pela Tabela Price investir a diferença dos valores das prestações iniciais, $P_k^{\text{SAC}} - P_k^{\text{Price}}$, em aplicações com excelentes taxas de retorno, podendo, com esse procedimento, compensar a diferença $\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}} - \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}}$. Por outro lado, também é certo que, a partir do momento que a prestação do SAC fica menor que a da Tabela Price (Observação 2), poder-se-ia fazer o mesmo, agora com as diferenças $P_k^{\text{Price}} - P_k^{\text{SAC}}$. No mundo real, porém, é razoável acreditar que seria difícil, para a quase totalidade das pessoas, realizar essas aplicações altamente rentáveis, de forma que, mesmo teoricamente possível, na prática seria muito improvável.

5. O Exemplo A da seção anterior mostra que é preciso precaução antes de definir qual seria o sistema mais adequado. Para o mesmo valor financiado e mesma taxa de juro, em 35 anos pelo SAC e em 30 anos pela Tabela Price, com $P_1^{\text{SAC}} - P_1^{\text{Price}} = \text{R\$ } 460,51$, o cidadão poderia concluir rapidamente que a Tabela Price seria mais vantajosa. Porém, ainda aqui, tem-se que a soma de todas as prestações a serem pagas no SAC seria R\$ 659.955,00, enquanto que na Tabela Price seria R\$ 706.959,20, o que dá uma diferença de R\$ 47.004,20. Assim, vê-se que comparar apenas alguns dados do financiamento, sem levar em conta a metodologia que é usada para cada um dos sistemas

⁸Em todo o trabalho, os resultados teóricos foram obtidos considerando financiamentos de mesmo prazo n para os dois sistemas de amortização.

de amortização pode, eventualmente, levar a uma escolha precipitada. O ideal é conhecer as regras do contrato antes de assinar, mesmo que depois disso a decisão seja a mesma (no caso, pelo Price).

6. Para quem necessita maximizar o valor a ser financiado para poder adquirir o imóvel desejado, a melhor escolha seria a Tabela Price. O Exemplo B da seção anterior evidencia isso, posto que a diferença de R\$ 41.773,00 entre o que se poderia financiar pela Tabela Price (R\$ 183.320,00) e pelo SAC (R\$ 141.547,00), com o mesmo prazo e mesma prestação inicial, permitiria a compra de um imóvel de padrão mais elevado. Note-se que, neste caso, $P_k^{\text{Price}} > P_k^{\text{SAC}}$ para todo k , $1 < k \leq 360$.

7. Quando se leva em consideração outros aspectos, diferentes do somatório de valores pagos ou do saldo devedor, pode ser mais adequado financiar na Tabela Price. Por exemplo, para profissionais mais jovens que possuam boas expectativas de aumento salarial, sem condições de assumir prestações maiores no início do contrato, a Tabela Price pode ser mais indicada, pois nesse sistema as prestações iniciais são menores (Teorema 5). Ainda existe o caso das pessoas que possuem valores consideráveis a serem recebidos em curto prazo e precisam, enquanto isto não acontece, de uma prestação menor. Um exemplo dessa situação são os compradores que estão vendendo o imóvel onde residiam anteriormente. Por outro lado, para quem pode assumir uma prestação maior no início do financiamento e tem como perspectiva o aumento das despesas no médio e longo prazos – como filhos, mensalidades escolares e planos de saúde – o SAC deve ser a opção considerada pois, como já visto, as prestações começam maiores e vão decrescendo ao longo do tempo.

Referências

- [1] ABRAINC. *Estudo Técnico Dedicado à Atualização das Necessidades Habitacionais no Brasil – 2004-2030*, ECCONIT, novembro, 2020. Disponível em: <https://www.abrainc.org.br/estudos/2020/12/21/estudo-tecnico-dedicado-a-atualizacao-das-necessidades-habitacionais-no-brasil-2004-2030/>. Acesso em: 30 de maio de 2021.
- [2] Ferreira, D. B. “SAC ou Price?”, RPM - *Revista do Professor de Matemática*, nº 85, p. 42-45, SBM, Rio de Janeiro, 2014.
- [3] Santos, K. M. B. *A Matemática do Financiamento Habitacional*. Dissertação, Mestrado Profissional em Rede Nacional - Profmat, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, 2015.

Keila Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<keilamb@gmail.com>

Rubens Ortega
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<rubensortega@utfpr.edu.br>

Recebido: 12/04/2021
Publicado: 30/06/2021

O jogo roleta probabilística como possibilidade interdisciplinar para o ensino de probabilidade

Josevandro Barros Nascimento  Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos 
Sérgio de Carvalho Bezerra 

Resumo

Este texto é um recorte de uma pesquisa de mestrado, relacionada a área da Educação Matemática e Ensino de Ciências e Modelagem Matemática. Neste artigo, o objetivo é apresentar o jogo “Roleta Probabilística” e as orientações pedagógicas presentes em cada fase. Considerando as indicações das pesquisas na área da Educação/Educação Matemática/Ensino de Ciências relativas ao ensino de probabilidade que emergem na interação entre os alunos do Ensino Fundamental, professor-pesquisador e os jogos pedagógicos digitais, observar se há a motivação dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental no processo de ensino e aprendizagem de probabilidade frente ao jogo pedagógico digital “Roleta Probabilística”. Para alcançar tais objetivos, a metodologia presente neste estudo tem perspectiva qualitativa. Além disso, pode ser pensado como um recurso pedagógico inclusivo, pois alunos com diferentes níveis de conhecimento matemático podem desenvolvê-lo.

Palavras-chave: Jogos digitais; Probabilidades; Inclusão; Educação Matemática.

Abstract

This text is an excerpt from a master's research, related to the area of Mathematical Education and Teaching of Sciences and Mathematical Modeling. In this article, the objective is to present the game “Roulette Probabilística” and the pedagogical guidelines present in each phase. With the indications of research in the area of Education / Mathematical Education / Science Teaching regarding the teaching of probability that emerge in the interaction between elementary school students, teacher-researcher and digital pedagogical games and observe if there is the motivation of 6th graders year of elementary school in the process of teaching and learning probability in face of the digital pedagogical game “Roulette Probabilística”. To achieve these objectives, the methodology present in this study has a qualitative perspective. In addition, it can be thought of as an inclusive pedagogical resource, as students with different levels of mathematical knowledge can develop it.

Keywords: Digital games; Probabilities; Inclusion; Mathematical Education.

1. Introdução

A sugestão do presente trabalho é uma discussão acerca das reais necessidades da matemática nos contextos da diversidade da sala de aula e da inclusão digital. Relaciona-se ao recorte de uma

pesquisa de mestrado sobre quais contribuições as pesquisas em Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências trazem para a elaboração de jogos digitais.

Uma das propostas que vêm sendo utilizadas como ferramenta no processo de inclusão é o uso dos jogos computacionais [12]. O uso de jogos digitais nas práticas de ensino desenvolve uma aprendizagem lúdica e proporciona uma aula interativa com fases no processo de aprendizagem [13].

A contribuição circunstancial das características do jogo em situação que envolva o ensino evidencia-se ante o fato de que o jogo torna-se uma atividade lúdica que contribui para o envolvimento do estudante, uma vez que há o desejo e interesse do jogador pela própria ação do jogo. Segundo [9], quando passamos a utilizar os jogos nas aulas de matemática envolvemos os alunos em competição saudável e desafios que os motivam a conhecer os seus limites e suas possibilidades de conquistas. Além disso, estudos sobre os conceitos de probabilidades são indispensáveis no contexto em que vivemos e em momentos futuros. Neste sentido o cidadão moderno necessita de habilidades que facilitem uma leitura diversificada para compreender a realidade e desenvolver intervenções.

Para a compreensão da probabilidade é importante desenvolver reflexões de situações presentes no cotidiano das pessoas pelo viés dos conceitos matemáticos escolares. Nesse sentido, o ensino da probabilidade pode requerer o desenvolvimento intelectual da crítica e da autonomia, além das concepções dos conceitos matemáticos presentes [11].

Baseando-se nessas ideias, a presente pesquisa buscou contribuições das pesquisas em Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências para a elaboração pedagógica de dois jogos e dos princípios da modelagem computacional que é aplicada à computação gráfica como recurso para sua construção. Neste trabalho, apresentamos o jogo “Roleta Probabilística” que tem como propósito a reflexão e a experimentação de uma situação relacionada à concepção probabilística clássica ou laplaciana.

Na sequência, apresentamos o referencial teórico a partir do qual nos pautamos.

2. O ensino da matemática e das probabilidades: Algumas Possibilidades

Muitos são os questionamentos sobre o ensino e aprendizagem da matemática. São discutidos os porquês de os alunos não apreenderem conceitos de matemáticos, pois não demonstram os conhecimentos “adquiridos” em anos anteriores e saberes fundamentais da matemática [7].

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que o trabalho pedagógico seja pautado na contextualização sociocultural, onde deve ser estimulada a interação do aluno com a sua realidade:

Num mundo como o atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa: Saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir; Enfrentar problemas de diferentes naturezas; Participar socialmente, de forma prática e solidária; Ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e, especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado [3]

Assim, ao pensarmos nas aulas de matemática precisamos levar em conta possibilidades que estimulem os alunos a aprenderem.

Os Objetos de Aprendizagem, como ferramentas de ensino, podem trazer para a sala de aula muitas possibilidades de aprendizagem que passam por novas abordagens de conteúdos e também pela motivação à aprendizagem em função da mídia em que

são produzidos. No caso dos jogos educacionais digitais ou softwares educacionais, a interação permitida entre conteúdo e aluno e a possibilidade de aprender usando recursos digitais podem favorecer a apreensão de conteúdo e o interesse pela tarefa. Esse conteúdo, então, é facilmente compreendido e compartilhado entre os alunos-usuários de forma interativa, o que exige, desses estudantes, uma atitude responsiva ativa [2]

Os PCNs apresentam caminhos para “fazer Matemática”, que são: modelagem, etnomatemática, história da matemática, as tecnologias na comunicação e os jogos. Além disso, a resolução de problema é colocada, no referido documento, como ponto de partida para o ensino da matemática. As pesquisas quanto ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) indicam que elas podem promover uma abordagem experimental com o seu conhecimento da matemática, favorecendo a investigação em ambiente de ensino e aprendizagem.

Segundo [1], a utilização das tecnologias digitais nas aulas de matemática possibilita que o aluno encare um novo estilo de atividade educacional em que são desafiados a desenvolver a sua autonomia.

Para [5], o uso do computador faz com que a matemática deixe de ser uma associação de conhecimento pronto, que é transmitido aos alunos, e passe a ser um instrumento importante no processo de constituição de conceitos matemáticos. Segundo o referido autor, espera-se que as metodologias com o uso específico dos computadores promovam a competência criativa e o pensamento matemático.

Além disso, o conhecimento probabilístico é de suma importância para o cotidiano das pessoas, pois a sociedade está cercada de informações, as quais têm que interpretar e organizar dados para a compreensão da realidade e tomada de decisões. Dessa forma, pesquisas sobre tais conhecimentos foram desenvolvidas em diversos países. Dentre essas pesquisas, as que envolvem a linguagem destacam-se, uma vez que possibilitam compreender como os alunos estão entendendo a probabilidade.

De acordo com as pesquisas de [10], os estudos em probabilidade não têm um atributo concreto dos conceitos, mas em muitas das vezes sua percepção tornar ampla que são expressas por meio de notação formal da matemática. Para esse acontecimento é necessário o conhecimento escolar estar ligado ao mundo crítico. [16] afirma que a probabilidade está presente em diferentes contextos associadas em atitudes de mensurar as probabilidades.

Para o ensino de probabilidade, [14] ainda sugere que ele seja desenvolvido, por meio de situações relacionadas à resolução de problemas, em um contexto dinâmico que favoreça a simulação e a experimentação. Dessa forma, os jogos digitais parecem ser um instrumento favorável. Além disso, a autora atenta-nos aos diferentes conceitos probabilísticos.

O conceito clássico ou laplaciano da probabilidade surgiu a partir dos estudos de Laplace. Nesse contexto, a probabilidade é desenvolver o determinismo absoluto e, de acordo com [6], “[...] assume-se implicitamente a equiprobabilidade de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral”. A principal característica do Conceito frequentativo ou empírico da probabilidade está associado ao processo de experimentação. É utilizado o método de repetições que não nos permite obter a probabilidade exata dos acontecimentos, mas apenas uma estimativa de seus resultados [4]. O Conceito subjetivista está presente no ideário do sujeito quando ele recorre a seus conhecimentos reais para determinar a probabilidade de um sucesso [15].

O conceito lógico da probabilidade pode estar relacionado ao conceito clássico ou frequencalista. Nesse conceito probabilístico há uma indução – definida por uma semelhança lógica entre o enunciado evidente e as hipóteses que permite uma generalização das conclusões implícitas e contraditórias. Neste conceito, o nível de confirmação é expresso em situações extremas entre certo ou

impossível [15].

No conceito formal ou axiomático, dado um espaço amostral E e um subconjunto S de E a probabilidade do evento S é definida pelo quociente entre a medida de S e a medida de E [8]. Particularmente, a probabilidade é um número entre 0 e 1, i.e., $0 < P(S) < 1$, dessa forma, a probabilidade do espaço amostral impossível é definida por $P(E) = 0$, e uma certa por $P(E) = 1$.

O conceito geométrico envolve questões análogas à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas.

Segundo [14], os conceitos probabilísticos estão presentes no ideário dos alunos da educação básica, mesmo daqueles “que ainda não tiveram a oportunidade de vivenciar teoricamente conceitos relacionados à probabilidade como medida, ideia de aleatoriedade, probabilidade condicional etc”. A autora também ressalta ser importante pensar nas diferentes concepções probabilísticas no trabalho pedagógico com os alunos da educação básica, e para tanto é importante que sejam utilizadas metodologias adequadas.

Pensando em tais considerações, elaboramos dois jogos que se inserem no campo da computação gráfica, uma área de ciência da computação, usando a interface gráfica do Graphical User Interface, que objetiva a geração de imagens e permite o desenvolvimento de interação com dispositivos digitais para o desenvolvimento de jogos.

3. Metodologia

Neste trabalho apresentamos um recorte do primeiro momento de nossa pesquisa, que foi o desenvolvimento de jogos digitais para a formação de conceitos probabilísticos de alunos do Ensino Fundamental a partir dos apontamentos de pesquisas desenvolvidas na área da Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências.

Assim, nosso primeiro passo foi organizar questões norteadoras, que foram: quais as contribuições que as pesquisas em Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências trazem para a elaboração de jogos digitais? O que as pesquisas indicam sobre a formação de conceitos sobre probabilidade na Educação Básica? Que elementos precisam ter os jogos digitais para a formação de conceitos sobre probabilidade em aulas do Ensino Fundamental?

Na sequência realizamos uma revisão bibliográfica visando responder tais questionamentos e, a partir dos apontamentos teóricos, elaboramos dois jogos pedagógicos digitais. Neste artigo, apresentamos o jogo Roleta Probabilística.

4. Dados e resultados

O jogo “Roleta probabilística” proporciona aos jogadores reflexões e experimentação dos conceitos probabilísticos clássico e frequentista. Além disso, o aluno é levado a aprender os conceitos probabilísticos ao mesmo tempo em que se diverte.

O jogo contém três fases, e cada uma foi organizada da seguinte forma: instruções, desenvolvimento do jogo, resultado das jogadas, questionamento e *feedback*. Na Figura 1 temos a janela de visualização e de escolha de jogos. O aluno deve optar por um dos dois jogos (Figura 1), Roleta Probabilística ou Meteorito. Junto ao nome dos jogos, apresentamos uma breve explicação sobre o mesmo, para que o aluno tenha ciência do conteúdo matemático envolvido.

Ao optar pelo jogo Roleta Probabilística, o aluno será remetido às telas da Figura 2 e se deparará com uma situação que envolve a análise das chances de números pares e ímpares a serem sorteados

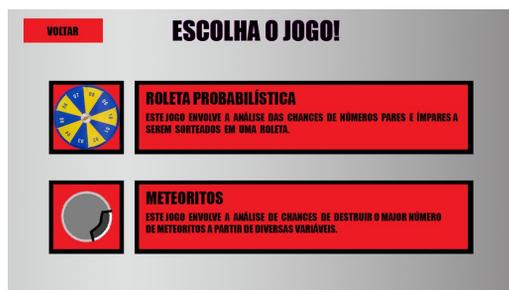
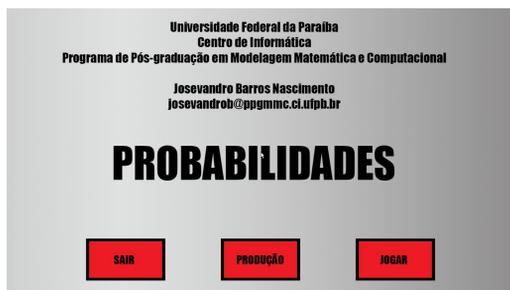


Figura 1: Janela de visualização e escolha do jogo.

em uma roleta.

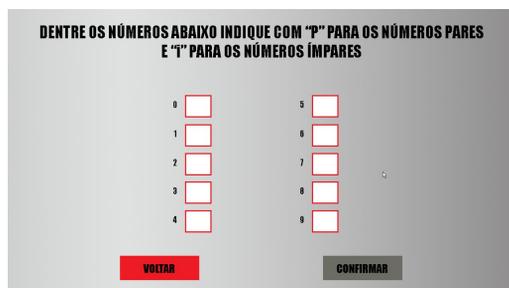
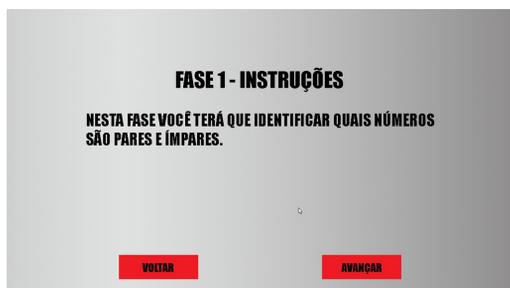


Figura 2: Fase 1: instruções e identificação de números pares e ímpares

Na primeira tela o aluno terá as instruções da fase 1, indicando a ação que irá realizar. Na fase 1 ele terá que identificar os números que são pares ou ímpares, por meio das letras “P” ou “I”, tal como apresentado na segunda tela.

Optamos por essa verificação, pois caso o aluno não tenha tal compreensão, ele pode fazer uma avaliação equivocada das chances de sorteios apresentados nas próximas fases. Na seqüência os alunos são encaminhados à tela do *feedback*.



Figura 3: *Feedback* à resposta do aluno a fase 1

Constatamos em nossos estudos que a comunicação – o *feedback* dos acertos e erros – deve fazer parte do processo de ensino de matemática e contribui para a formação de conceitos, uma vez que o aluno começa a refletir sobre o porquê do erro e do acerto.

Dessa forma, incluímos em todas as fases do jogo, depois de cada jogada, um *feedback* ao jogador. Se ele acertou a jogada, depois do *feedback*, ele pode voltar e jogar novamente ou avançar para a próxima fase. Caso tenha errado, ele deverá jogar novamente. Espera-se, com essa possibilidade, que ele reflita sobre seu erro.



Figura 4: Fase 2: instruções e escolha

Como na fase anterior, no início da fase 2, o jogador tem as instruções (Figura 4). Nessa ele observará os números pares e ímpares que há na roleta e escolherá uma resposta a pergunta “Ao girar a roleta qual o resultado mais provável?”. Ele tem como opção de resposta: ímpares, pares ou ambos.

Essa fase contribui para a formação do conceito probabilístico clássico, pois as chances de resultados pares e ímpares no jogo são equiprováveis e ele precisa refletir sobre essa questão para optar por uma resposta. Depois que responder, o jogador será remetido a uma tela com o *feedback*.

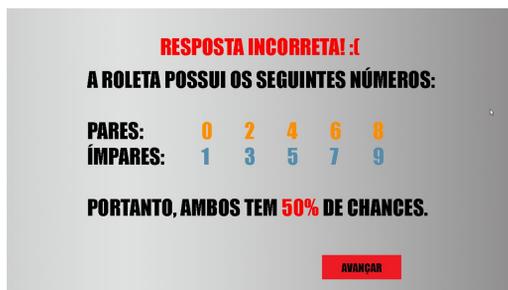
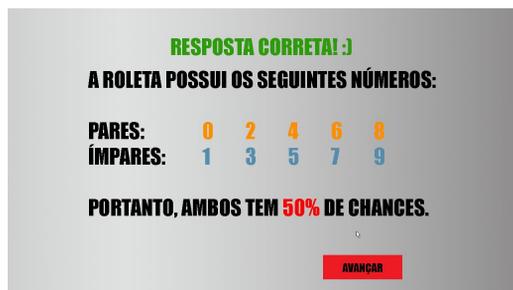


Figura 5: Fase 2: *feedback*

Na fase 2, o *feedback* para quem dá a resposta correta ou incorreta é o mesmo. Ele tem a informação dos números da roleta que são pares, dos que são ímpares e o percentual de chances. Nesse caso, ambos têm as mesmas: 50%. Com essa informação o jogador que acertou tem a confirmação que sua hipótese estava correta; e o que errou, a explicação do porquê de a resposta não ser a que ele escolheu.

Depois que o jogador analisou as chances de os números pares e ímpares serem sorteados, ele vai para a fase 3 para verificar se as chances estimadas na fase anterior acontecem em experimentos .

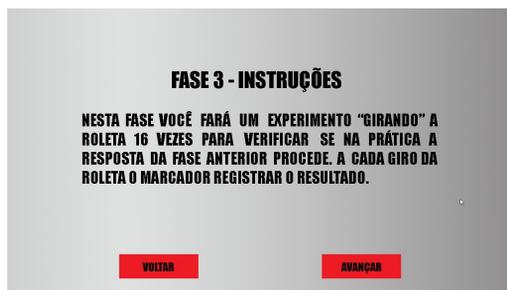


Figura 6: Fase 3: instruções

Quando inicia a fase 3, o jogador depara-se com uma tela que contém a ação que ele deve realizar, que é clicar na roleta para ela girar. Contadores farão a marcação automática dos resultados pares e ímpares obtidos nas jogadas (Figura 7). Essa fase é encerrada após 16 jogadas (giros da roleta).

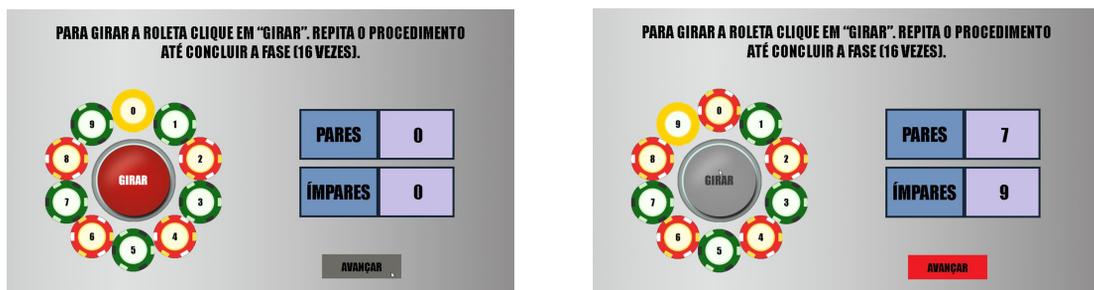


Figura 7: Roleta probabilística: primeiro experimento

Esta fase tem por objetivo envolver o jogador em um contexto em que o conceito probabilístico frequentista faz-se presente. Assim, após “girar” a roleta 16 vezes, o jogo irá parar e o jogador não conseguirá mais girar a roleta e deverá clicar em “avançar”. Ao realizar essa ação, será encaminhado à tela com o resultado do experimento.

Optamos por 16 giros, pensando na possibilidade de chegar no resultado estimado e não deixar o jogo monótono com um número excessivo de jogadas. O resultado da roleta é aleatório.

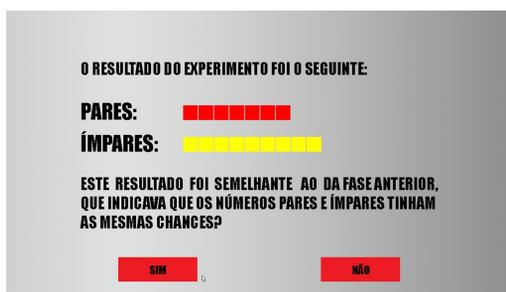


Figura 8: Fase 3: primeiro resultado do experimento

O resultado do experimento é apresentado por meio de um gráfico de barras vertical visando auxiliar na comparação dos resultados obtidos. A pergunta “este resultado foi semelhante ao da fase anterior, que indicava que os números pares e ímpares tinham as mesmas chances?” é apresentada abaixo do resultado, com a opção “sim” ou “não” como resposta. Essa questão tem por objetivo que o aluno reflita sobre as probabilidades estimadas e experimentadas. Com isso, poderá desenvolver noções sobre o conceito de probabilidade frequentista.

Depois de optar pela resposta “sim” ou “não”, o jogador será encaminhado à tela do *feedback*.

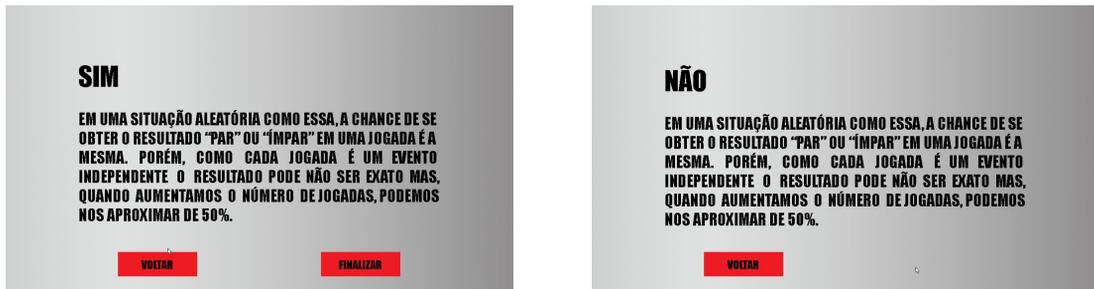


Figura 9: Fase 3: *Feedback*

Ambas as respostas, sim ou não, trazem as mesmas explicações “Em uma situação aleatória como essa, a chance de se obter o resultado “par” ou “ímpar” em uma jogada é a mesma, porém, como cada jogada é um evento independente, o resultado pode não ser exato; mas, quando aumentamos o número de jogadas, podemos nos aproximar de 50%”. Independentemente da resposta, o jogador pode continuar o experimento que já havia realizado (Figura 9), clicando na palavra “voltar”. A diferença nas telas é que se o aluno responder não, ele não terá a opção para finalizar o jogo. O objetivo de continuar o experimento é que o jogador tenha a possibilidade de constatar que, quando ampliamos o número de jogadas, podemos nos aproximar das probabilidades estimadas.

5. Considerações finais

Nossa pesquisa teve como objetivo geral desenvolver jogos pedagógicos digitais para o ensino de probabilidade. Para tanto, pautamo-nos em orientações de pesquisas na área, que nos indicaram que o jogo digital pode ser um recurso pedagógico importante o ensino da Matemática. Além disso, as orientações sobre o ensino de probabilidade apontaram-nos que há diferentes concepções sobre probabilidade – clássica, frequentista, subjetivista, axiomática, lógica e geométrica – e que é importante que situações de ensino possibilitem reflexões sobre as mesmas.

No jogo Roleta Probabilística, o jogador que tiver como estratégia principal a análise das chances das situações poderá ter melhor desempenho no jogo. A elaboração de jogos digitais não é simples: além de questões pedagógicas sobre o ensino da matemática, é preciso conhecimento específica na área de computação gráfica. E não apenas: é importante o diálogo entre as diferentes áreas. Tal fator foi preponderante para o desenvolvimento dos referidos jogos. De mais a mais, preocupamo-nos em desenvolver os jogos em sala de aula com alunos da Educação Básica, que manifestaram adrenalina e sentimento de prazer em realizar as fases.

Entendemos que o jogo pelo jogo pode não trazer os resultados pedagógicos esperados; é muito importante a mediação do professor e intervenções didáticas, como a discussão coletiva dos resultados e hipóteses. Além de outras propostas de experimentos, como lançamentos de moedas, lançamento de dados etc. Quanto ao jogo, concordamos com [9] em que, para que o jogador jogue com competência, é preciso jogar várias vezes, para que possa analisar as suas jogadas e do adversário, bem como elaborar e testar diferentes estratégias. Consideramos que essa questão possa ser realizada em pesquisas futuras.

Consideramos que a estrutura como os jogos foram organizados – instruções, desenvolvimento do jogo, resultado das jogadas, questionamento e *feedback*, assim como as diferentes variáveis e con-

ceitos probabilísticos podem contribuir com a formação do pensamento probabilístico dos alunos no ensino fundamental.

Concordamos com [14, 15], que considera que o desenvolvimento do pensamento probabilístico é fruto de reflexões e intervenções didáticas desenvolvidas em todo o período escolar. Assim, consideramos que “roleta probabilística” pode contribuir com esse desenvolvimento. Além disso, entendemos que os jogos digitais são ferramentas para uma inclusão na diversidade, e as relações só nos faz refletir a importância da investigação em jogos pedagógicos digitais.

Referências

- [1] ALMIRO, João. Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular*, 2004.
- [2] ARAUJO, NukáciaMeyre Silva; RIBEIRO, Fernanda Rodrigues and SANTOS, Suellen Fernandes dos. *Jogos pedagógicos e responsividade: ludicidade, compreensão leitora e aprendizagem*. Bakhtiniana, Rev. Estud. Discurso [online]. 2012, vol.7, n.1. ISSN 2176-4573.
- [3] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- [4] CIRINO M. M. *A intermediação da noção de probabilidade na construção de conceitos relacionados à cinética química no Ensino Médio*. 2007. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência). Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2007.
- [5] D’AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje. *Temas e Debates. SBEM. Ano II*, v. 2, 1989.
- [6] FERNANDES, José Antônio. *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.o ano de escolaridade*. 1999. 461 f. Tese (Doutorado em Educação) -Universidade do Minho, Braga, 1999
- [7] FIORENTINI, Dario *et al.* Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. *Boletim da SBEM-SP*, v. 4, n. 7, 1990.
- [8] GODINO, Juan; BATANERO, Maria Carmen; CAÑIZARES, Maria José. *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis, 1996.
- [9] GRANDO, Regina Célia et al. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. 2000.
- [10] GAL, Iddo. Towards probability literacy for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: Jones, Graham. (Ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*. Nova York: Springer, 2005.
- [11] RENATA MORAES DE SANTANA, Michaelle. *O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental*. 2011.
- [12] REBOUÇAS, A. D. D. S.; Marques, D. L.; Costa, L. F. S.; Silva, M. A. A. (2010) “*Aprendendo a Ensinar Programação Combinando Jogos e Python*”. In: XXI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação – SBIE.
- [13] SÁ, E. J. V; Teixeira, J. S. F; Fernandes, C. T. (2007) “*Design de atividades de aprendizagem que usam Jogos como princípio para Cooperação*”. In: XVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação – SBIE.

- [14] SANTOS, Jaqueline. *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental*. 2010. 183f. Dissertação (Mestrado em Educação)–Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2010.
- [15] SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. *A produção de significações sobre combinatoria e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora*. 2015. 191 p. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.
- [16] WATSON, Jane M. *Statistical literacy at school: growth na goals*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2006.

Josevandro Barros Nascimento
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática (CI)
<josevandrob@ppgmmc.ci.ufpb.br>

Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos
Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste (CAA)
<jaquelisantos@ig.com.br>

Sérgio de Carvalho Bezerra
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática (CI)
<sergio@ci.ufpb.br>

Recebido: 19/04/2021
Publicado: 06/07/2021

Sobre como Arquimedes obteve suas aproximações $223/71$ e $22/7$ para o número π : uma abordagem histórica

Márcio Soares Albertino 

Humberto José Bortolossi 

Resumo

Já é bem difundido no âmbito escolar o fato de Arquimedes ter obtido aproximações para o número π usando polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma dada circunferência. Contudo, o encaminhamento normalmente apresentado é anacrônico, isto é, com o uso de recursos que não estavam disponíveis na época de Arquimedes. Neste trabalho, apresentamos como Arquimedes obteve suas famosas aproximações racionais $223/71$ e $22/7$ para π seguindo os passos descritos originalmente em sua obra *A Medida do Círculo*. Mostramos também como obter uma aproximação melhor do que $223/71$, ainda seguindo a técnica de Arquimedes, mas fazendo outras escolhas em etapas intermediárias do seu argumento original.

Palavras-chave: História da Matemática; o número pi; aproximações racionais; Arquimedes.

Abstract

It is already well-known in the school context that Archimedes obtained approximations for the number π using regular polygons inscribed and circumscribed to a given circle. However, the procedure normally presented is anachronic, that is, with the use of resources that were not available at the time of Archimedes. In this work, we present how Archimedes obtained his famous rational approximations $223/71$ and $22/7$ for π following the steps originally described in his work “The Measure of The Circle”. We also show how to get a better approximation than $223/71$, still following Archimedes’ technique, but making other choices at intermediate stages of his original argument.

Keywords: History of Mathematics; the number pi; rational approximations; Archimedes.

1. Introdução

Os livros de História da Matemática normalmente usados nos cursos de formação de professores costumam trazer a informação de que Arquimedes obteve aproximações para o número π usando polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma dada circunferência. Considere, por exemplo, as páginas 43 de [2], 142 de [6], 101 de [7] e 59 de [12]. Contudo, tais referências não fornecem os detalhes de como, exatamente, Arquimedes fez isso. Outros trabalhos, como [4], [9] e [10], fazem uso de técnicas que não estavam disponíveis na época de Arquimedes, como o cálculo das expressões

trigonométricas $\cos(360^\circ/n)$ e $\operatorname{tg}(180^\circ/n)$ em $n\sqrt{2-2\cos(360^\circ/n)} < 2\pi < 2n\operatorname{tg}(180^\circ/n)$, para n natural maior do que ou igual a 6.

Neste contexto, nosso principal objetivo aqui é apresentar o raciocínio empregado originalmente por Arquimedes em sua obra “A Medida do Círculo” para obter as seguintes estimativas para o número π :

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Além disso, mostramos como obter uma aproximação por baixo para π melhor do que $223/71$, ainda seguindo a técnica de Arquimedes, mas fazendo outras escolhas em etapas intermediárias do seu argumento original. Antes de iniciarmos, destacamos algumas observações importantes.

- Nossa exposição segue os passos descritos por Arquimedes mas, para fins de melhor compreensão e conexão com o currículo escolar atual, tomamos a liberdade de usar notações e leituras modernas, como os Lemas 2 e 3, que podem ser interpretados em termos de cossecante e cotangente.
- É preciso ficar atento para a notação de número misto ao longo de todo o texto. Assim, por exemplo, $3\frac{10}{71}$ significa $3 + \frac{10}{71}$ e não $3 \cdot \frac{10}{71}$. Com números mistos, as desigualdades $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ são escritas como $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.
- No processo descrito por Arquimedes, ele obtém estimativas melhores do que $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$:

$$3\frac{10}{71} < 3\frac{1137}{8069} < \pi < 3\frac{1335}{9347} < 3\frac{1}{7}.$$

Dessa maneira, a questão não parece ser apenas obter aproximações para π mas, sim, aproximações com frações com denominadores pequenos.

- Arquimedes não escreve todos os detalhes de cada cálculo. Em algumas situações ele explicita os primeiros casos e apenas enuncia os demais. Mesmo com o risco de tornar o texto repetitivo, optamos por incluir os vários detalhes omitidos para evidenciar o aspecto algorítmico da abordagem de Arquimedes.
- A ideia central de Arquimedes consiste de, a partir de um hexágono regular, circunscrever e inscrever polígonos regulares com 12, 24, 48 e 96 lados em uma circunferência unitária (isto é, de raio 1). O semiperímetro desses polígonos fornece, então, aproximações inferiores (para os polígonos inscritos) e superiores (para os polígonos circunscritos) para π .
- Logo de início, Arquimedes utiliza as seguintes aproximações racionais para $\sqrt{3}$, sem explicar como as obteve ([1]):

$$1\frac{112}{153} = \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} = 1\frac{571}{780}.$$

Existem, contudo, autores que levantam algumas conjecturas em como Arquimedes poderia ter conseguido essas aproximações de $\sqrt{3}$ ([3]).

- Usamos como fonte as traduções para o inglês feitas por [1], [5], [8] e [11] para a obra *A Medida do Círculo* de Arquimedes.

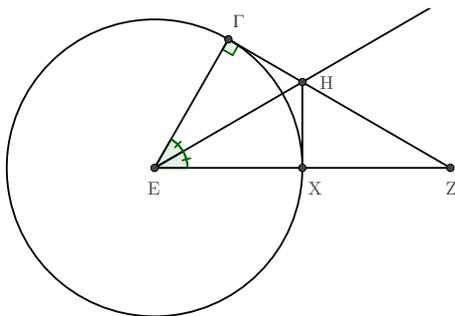
2. Três lemas de Arquimedes

Os três lemas a seguir são do trabalho original de Arquimedes. Contudo, ele apresenta uma demonstração apenas para os dois últimos.

Lema 1. Seja $Z\Gamma E$ um triângulo retângulo, com ângulo reto em Γ . Trace, a partir de E , a bissetriz de $Z\Gamma E$ que intercepta o lado $Z\Gamma$ em H . Então

$$\frac{ZH}{\Gamma H} = \frac{ZE}{\Gamma E}.$$

Demonstração. Construa a circunferência de centro em E passando por Γ . Como $Z\Gamma E$ é um triângulo retângulo, com ângulo reto em Γ , segue-se que $Z\Gamma$ é tangente à circunferência. Seja X o ponto de interseção da circunferência com EZ .



Pelo critério LAL, os triângulos $HE\Gamma$ e HEX são congruentes. Desse modo, o segmento XH é tangente à circunferência em X , pois o ângulo HXE é reto em X . Pelo critério AA, o triângulo ZXH é semelhante ao triângulo $Z\Gamma E$. Portanto, $\frac{ZE}{\Gamma E} = \frac{ZH}{HX}$. Como $HX = \Gamma H$, concluímos que $\frac{ZE}{\Gamma E} = \frac{ZH}{\Gamma H}$. \square

Lema 2. Nas condições do Lema 1, vale que

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma H} = \frac{ZE + E\Gamma}{\Gamma Z}.$$

Demonstração. Pelo Lema 1, temos que

$$\frac{ZH}{\Gamma H} = \frac{ZE}{\Gamma E}.$$

Agora,

$$\frac{ZH}{\Gamma H} = \frac{ZE}{\Gamma E} \Rightarrow \frac{ZH + \Gamma H}{\Gamma H} = \frac{ZE + \Gamma E}{\Gamma E}.$$

Uma vez que $ZH + \Gamma H = ZH + H\Gamma = Z\Gamma = \Gamma Z$, podemos concluir que

$$\frac{\Gamma Z}{\Gamma H} = \frac{ZE + \Gamma E}{\Gamma E}.$$

Multiplicando-se por ΓE e dividindo-se por ΓZ , obtemos o resultado

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma H} = \frac{ZE + E\Gamma}{\Gamma Z}.$$

Observação. Se x é o ângulo $Z\Gamma E$, então

$$\cotg(x/2) = \frac{\Gamma E}{\Gamma H} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec}(x) + \cotg(x) = \frac{ZE}{\Gamma Z} + \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{ZE + E\Gamma}{\Gamma Z},$$

de modo que este lema pode ler lido, usando-se notação moderna, como a identidade trigonométrica

$$\cotg(x/2) = \operatorname{cosec}(x) + \cotg(x). \quad (1)$$

Lema 3. Nas condições do Lema 1, vale que

$$\frac{(HE)^2}{(\Gamma H)^2} = \frac{(\Gamma E)^2 + (\Gamma H)^2}{(\Gamma H)^2}.$$

Demonstração.

HE é a hipotenusa do triângulo retângulo HEΓ. Pelo Teorema de Pitágoras, $(HE)^2 = (\Gamma E)^2 + (\Gamma H)^2$ e, desse modo, $\frac{(HE)^2}{(\Gamma H)^2} = \frac{(\Gamma E)^2 + (\Gamma H)^2}{(\Gamma H)^2}$. □

Observação. Se x é o ângulo HEΓ, então

$$\operatorname{cosec}^2(x) = \left(\frac{HE}{\Gamma H}\right)^2 = \frac{(HE)^2}{(\Gamma H)^2} \quad \text{e} \quad \cotg^2(x) + 1 = \left(\frac{\Gamma E}{\Gamma H}\right)^2 + 1 = \frac{(\Gamma E)^2 + (\Gamma H)^2}{(\Gamma H)^2},$$

de modo que esse lema pode ler lido, usando-se notação moderna, como a identidade trigonométrica

$$\operatorname{cosec}^2(x) = 1 + \cotg^2(x). \quad (2)$$

3. Argumento de Arquimedes para estabelecer que $\pi < \frac{22}{7}$

Considere um hexágono regular circunscrito a uma circunferência unitária de centro E. Seja Γ um ponto de tangência entre o hexágono regular e a circunferência. Seja Z uma das extremidades do lado do hexágono regular em que Γ é ponto médio. Observe que o triângulo ZΓE é retângulo. Construa, recursivamente, os pontos H, Θ, K e Λ no segmento ΓZ de modo que as semirretas EH, EΘ, EK e EΛ sejam bissetrizes, respectivamente, dos ângulos ΓEZ, ΓEH, ΓEΘ e ΓEK. Se H', Θ', K' e Λ' são, nesta ordem, os simétricos de H, Θ, K e Λ com relação a Γ, então HH', ΘΘ', KK' e ΛΛ' são lados de polígonos regulares com 12, 24, 48 e 96 lados, respectivamente, todos circunscritos à circunferência unitária de centro em E (conforme a Figura 1).

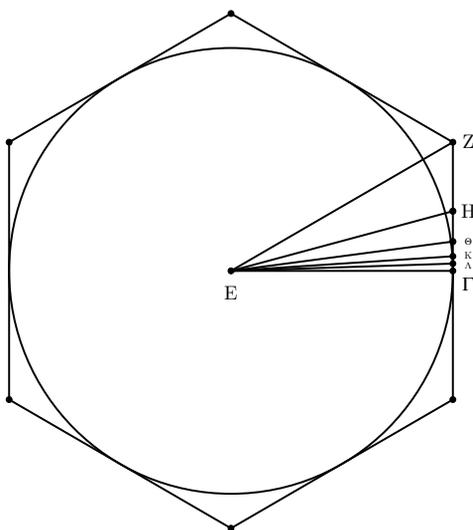


Figura 1: polígonos regulares circunscritos a uma circunferência.

Como o ângulo ΓEZ é igual a 30° , segue-se que

$$\cotg(\Gamma EZ) = \cotg(30^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Agora, como $\Gamma EH = \Gamma EZ/2$, pelo Lema 2, interpretado pela identidade trigonométrica (1), segue-se que

$$\cotg(\Gamma EH) = \cotg(\Gamma EZ) + \operatorname{cossec}(\Gamma EZ) \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} + \frac{EZ}{\Gamma Z} \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} + 2$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} > \frac{265}{153} + 2 = \frac{571}{153} = 3 \frac{112}{153}.$$

Por sua vez, $\Gamma E\Theta = \Gamma EH/2$. Assim, podemos empregar novamente a identidade (1) para obter

$$\cotg(\Gamma E\Theta) = \cotg(\Gamma EH) + \operatorname{cossec}(\Gamma EH) \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H} + \frac{EH}{\Gamma H} \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} > \frac{571}{153} + \frac{EH}{\Gamma H}.$$

Para estimar $\frac{EH}{\Gamma H}$, Arquimedes usa o Lema 3, aqui reescrito pela identidade (2):

$$\operatorname{cossec}^2(\Gamma EH) = 1 + \cotg^2(\Gamma EH) \Rightarrow \left(\frac{EH}{\Gamma H}\right)^2 = 1 + \left(\frac{E\Gamma}{\Gamma H}\right)^2 > 1 + \left(\frac{571}{153}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{EH}{\Gamma H}\right)^2 > \underbrace{\frac{153^2 + 571^2}{153^2}}_{\frac{349450}{23409}} \Rightarrow \frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591}{153} \frac{1}{8}.$$

A última implicação segue-se do fato de que $153^2 + 571^2 > (591 \frac{1}{8})^2$, mas Arquimedes não justifica a escolha do " $\frac{1}{8}$ ". Por exemplo, como $153^2 + 571^2 > (591 \frac{1}{7})^2$, também é verdade que

$$\frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591}{153} \frac{1}{7}$$

e

$$\frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591}{153} \frac{1}{7} > \frac{591}{153} \frac{1}{8}.$$

Agora, uma vez que $\frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591}{153} \frac{1}{8}$, obtemos que

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} > \frac{571}{153} + \frac{EH}{\Gamma H} > \frac{571}{153} + \frac{591}{153} \frac{1}{8} = \frac{1162}{153} \frac{1}{8}.$$

Vamos agora repetir o processo para obter uma estimativa para $\frac{E\Gamma}{\Gamma K}$. Uma vez que $\Gamma EK = \Gamma E\Theta/2$, tem-se

$$\cotg(\Gamma EK) = \cotg(\Gamma E\Theta) + \operatorname{cossec}(\Gamma E\Theta) \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma K} = \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} + \frac{E\Theta}{\Gamma\Theta} \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma K} > \frac{1162}{153} \frac{1}{8} + \frac{E\Theta}{\Gamma\Theta}.$$

Mas

$$\operatorname{cossec}^2(\Gamma E\Theta) = 1 + \cotg^2(\Gamma E\Theta) \Rightarrow \left(\frac{E\Theta}{\Gamma\Theta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta}\right)^2 > 1 + \left(\frac{1162}{153} \frac{1}{8}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{E\Theta}{\Gamma\Theta}\right)^2 > \frac{153^2 + (1162\frac{1}{8})^2}{153^2} \Rightarrow \frac{E\Theta}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

$\frac{1085585}{18496}$

Arquimedes novamente não dá explicações para a escolha de “ $\frac{1}{8}$ ”. Outras frações poderiam ser usadas, como $\frac{1}{7}$:

$$\frac{E\Theta}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{7}}{153} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

Uma vez que $\frac{E\Theta}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$, obtemos que

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma K} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} + \frac{E\Theta}{\Gamma\Theta} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} + \frac{1172\frac{1}{8}}{153} = \frac{2334\frac{1}{4}}{153}.$$

Repetindo o processo mais uma vez: dado que $\Gamma E\Lambda = \Gamma EK/2$, tem-se

$$\cot g(\Gamma E\Lambda) = \cot g(\Gamma EK) + \operatorname{cosec}(\Gamma EK) \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma\Lambda} = \frac{E\Gamma}{\Gamma K} + \frac{EK}{\Gamma K} \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma K} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153} + \frac{EK}{\Gamma K}.$$

Mas

$$\operatorname{cosec}^2(\Gamma EK) = 1 + \cot g^2(\Gamma EK) \Rightarrow \left(\frac{EK}{\Gamma K}\right)^2 = 1 + \left(\frac{E\Gamma}{\Gamma K}\right)^2 > 1 + \left(\frac{2334\frac{1}{4}}{153}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{EK}{\Gamma K}\right)^2 > \frac{153^2 + (2334\frac{1}{4})^2}{153^2} \Rightarrow \frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}.$$

$\frac{87554113}{374544}$

Uma vez que $\frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$, obtemos que

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Lambda} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153} + \frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153} + \frac{2339\frac{1}{4}}{153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Desta maneira, como $E\Gamma$ tem medida 1, podemos escrever que

$$\Gamma\Lambda < \frac{153}{4673\frac{1}{2}} E\Gamma = \frac{153}{4673\frac{1}{2}}.$$

$\frac{306}{9347}$

Como $2\Gamma\Lambda$ é a medida do lado do polígono regular de 96 lados circunscrito à circunferência unitária de centro E, segue-se que

$$2\pi < 96(2\Gamma\Lambda) \Rightarrow \pi < 96 \left(\frac{153}{4673\frac{1}{2}} \right) = \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

$\frac{29376}{9347}$ $\frac{1335}{9347}$

4. Argumento de Arquimedes para estabelecer que $\frac{223}{71} < \pi$

Considere agora um hexágono regular inscrito em uma circunferência unitária. Seja ΓB um dos lados deste hexágono. Construa um diâmetro da circunferência com uma extremidade em Γ . Nomeie a outra extremidade de A (necessariamente um outro vértice do hexágono regular). Observe que o triângulo $\Gamma B A$ é retângulo. Construa agora, na circunferência, de forma sucessiva, pontos H, Θ, K e Λ de modo que $AH, A\Theta, AK$ e $A\Lambda$ sejam bissetrizes dos ângulos $\Gamma A B, \Gamma A H, \Gamma A \Theta$ e $\Gamma A K$, respectivamente. Como ΓB é lado do hexágono regular inscrito na circunferência, os segmentos $\Gamma H, \Gamma \Theta, \Gamma K$ e $\Gamma \Lambda$ são lados de polígonos regulares com 12, 24, 48 e 96 lados, respectivamente, todos inscritos na mesma circunferência (conforme Figura 2).

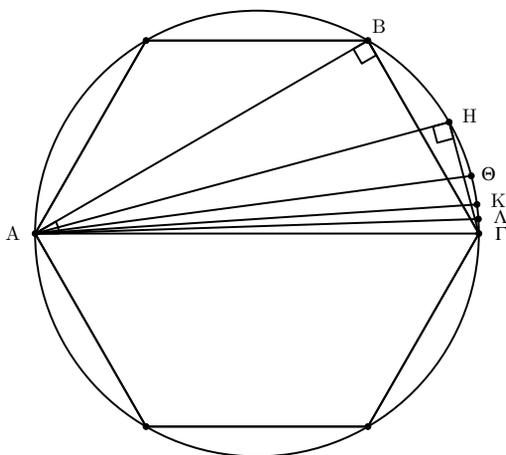


Figura 2: polígonos regulares inscritos em uma circunferência.

Como a medida do ângulo $\Gamma B A$ é igual a 60° e $A B \Gamma$ é reto, segue-se que o ângulo $\Gamma A B$ é igual a 30° . Assim,

$$\cotg(\Gamma A B) = \cotg(30^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{A B}{B \Gamma} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Agora, como $\Gamma A H = \Gamma A B / 2$, pelo Lema 2, interpretado pela identidade trigonométrica (1), segue-se que

$$\cotg(\Gamma A H) = \cotg(\Gamma A B) + \operatorname{cosec}(\Gamma A B) \Rightarrow \frac{A H}{H \Gamma} = \frac{A B}{B \Gamma} + \frac{A \Gamma}{B \Gamma} \Rightarrow \frac{A H}{H \Gamma} = \frac{A B}{B \Gamma} + 2$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{A H}{H \Gamma} < \frac{1351}{780} + 2 = \frac{2911}{780} = 3 \frac{571}{780}.$$

Por sua vez, $\Gamma A \Theta = \Gamma A H / 2$. Assim, podemos empregar novamente a identidade (1) para obter

$$\cotg(\Gamma A \Theta) = \cotg(\Gamma A H) + \operatorname{cosec}(\Gamma A H) \Rightarrow \frac{A \Theta}{\Theta \Gamma} = \frac{A H}{H \Gamma} + \frac{A \Gamma}{H \Gamma} \Rightarrow \frac{A \Theta}{\Theta \Gamma} < \frac{2911}{780} + \frac{A \Gamma}{H \Gamma}.$$

Para estimar $\frac{A \Gamma}{H \Gamma}$, Arquimedes usa o Lema 3, aqui reescrito pela identidade (2):

$$\operatorname{cosec}^2(\Gamma A H) = 1 + \cotg^2(\Gamma A H) \Rightarrow \left(\frac{A \Gamma}{H \Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{A H}{H \Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{2911}{780}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{A\Gamma}{H\Gamma}\right)^2 < \frac{780^2 + 2911^2}{\underbrace{780^2}_{\frac{9082321}{608400}}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013 \frac{3}{4}}{780}.$$

A última implicação segue-se do fato de que $780^2 + 2911^2 < (3013 \frac{3}{4})^2$, mas Arquimedes não justifica a escolha do “ $\frac{3}{4}$ ”. Por exemplo, $780^2 + 2911^2 < (3013 \frac{9}{13})^2$, também é verdade que

$$\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013 \frac{9}{13}}{780}$$

e

$$\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013 \frac{9}{13}}{780} < \frac{3013 \frac{3}{4}}{780}.$$

Uma vez que $\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013 \frac{3}{4}}{780}$, obtemos que

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{2911}{780} + \frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{2911}{780} + \frac{3013 \frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}.$$

Vamos agora repetir o processo para obter uma estimativa para $\frac{AK}{K\Gamma}$. Uma vez que $\Gamma AK = \Gamma A\Theta/2$, tem-se

$$\cotg(\Gamma AK) = \cotg(\Gamma A\Theta) + \operatorname{cosec}(\Gamma A\Theta) \Rightarrow \frac{AK}{K\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} \Rightarrow \frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1823}{240} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}.$$

Mas

$$\operatorname{cosec}^2(\Gamma A\Theta) = 1 + \cotg^2(\Gamma A\Theta) \Rightarrow \left(\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{1823}{240}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}\right)^2 < \frac{240^2 + 1823^2}{\underbrace{240^2}_{\frac{3380929}{57600}}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1838 \frac{9}{11}}{240}.$$

Arquimedes novamente não dá explicações para a escolha de “ $\frac{9}{11}$ ”. Outras frações poderiam ser usadas, por exemplo, $\frac{3}{4}$:

$$\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1838 \frac{3}{4}}{240} < \frac{1838 \frac{9}{11}}{240}.$$

Uma vez que $\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1838 \frac{9}{11}}{240}$, obtemos que

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1823}{240} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1823}{240} + \frac{1838 \frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}.$$

Repetindo o processo mais vez: dado que $\Gamma A\Lambda = \Gamma AK/2$, tem-se

$$\cotg(\Gamma A\Lambda) = \cotg(\Gamma AK) + \operatorname{cosec}(\Gamma AK) \Rightarrow \frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} = \frac{AK}{K\Gamma} + \frac{A\Gamma}{K\Gamma} \Rightarrow \frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} < \frac{1007}{66} + \frac{A\Gamma}{K\Gamma}.$$

Mas

$$\operatorname{cosec}^2(\Gamma AK) = 1 + \cotg^2(\Gamma AK) \Rightarrow \left(\frac{A\Gamma}{K\Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{AK}{K\Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{1007}{66}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{A\Gamma}{K\Gamma}\right)^2 < \underbrace{\frac{66^2 + 1007^2}{66^2}}_{\frac{1018405}{4356}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{K\Gamma} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}.$$

Consequentemente,

$$\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} < \frac{1007}{66} + \frac{A\Gamma}{K\Gamma} < \frac{1007}{66} + \frac{1009\frac{1}{6}}{66} = \underbrace{\frac{2016\frac{1}{6}}{66}}_{\frac{12097}{396}}.$$

Por fim,

$$\operatorname{cosec}^2(\Gamma A\Lambda) = 1 + \cot^2(\Gamma A\Lambda) \Rightarrow \left(\frac{A\Gamma}{\Lambda\Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{2016\frac{1}{6}}{66}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Lambda\Gamma}\right)^2 < \underbrace{\frac{66^2 + (2016\frac{1}{6})^2}{66^2}}_{\frac{146494225}{156816}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{\Lambda\Gamma} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66} \Rightarrow \Lambda\Gamma > \frac{66 A\Gamma}{2017\frac{1}{4}} = \frac{132}{2017\frac{1}{4}},$$

pois $A\Gamma = 2$. Lembrando que $\Lambda\Gamma$ é lado do polígono regular de 96 lados inscrito na circunferência unitária, segue-se que $2\pi > 96 \Lambda\Gamma$ e, sendo assim,

$$2\pi > 96 \Lambda\Gamma \Rightarrow \pi > \frac{96 \Lambda\Gamma}{2} = 48 \left(\frac{132}{2017\frac{1}{4}}\right) = \frac{25344}{8069} = 3 \frac{1137}{8069} > 3 \frac{10}{71} = \frac{223}{71}.$$

5. Obtendo uma aproximação para π por baixo melhor do que $\frac{223}{71}$

Como vimos, em alguns cálculos intermediários, Arquimedes não justifica suas escolhas e, de fato, nem sempre elas são ótimas. Que estimativas para π seriam obtidas com outras escolhas? Vimos que, para o caso de polígonos regulares inscritos, Arquimedes estabelece inicialmente que

$$\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{1351}{780} \quad \text{e} \quad \frac{AH}{H\Gamma} < \frac{2911}{780}.$$

Para obter uma estimativa para $\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}$, ele usa (sem explicações) que

$$\left(\frac{A\Gamma}{H\Gamma}\right)^2 < \underbrace{\frac{780^2 + 2911^2}{780^2}}_{\frac{9082321}{608400}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

O número inteiro 3013 deve-se ao fato de que $3013^2 < 780^2 + 2911^2 < 3014^2$. Mas, por que $\frac{3}{4}$? Procurando por frações da forma expressão $\frac{a}{b}$, com $1 \leq b \leq 99$ e $1 \leq a \leq b$, que tornam a expressão

$$\left(3013 \frac{a}{b}\right)^2 - 780^2 - 2911^2$$

positiva e menor possível, encontramos, por inspeção, $\frac{51}{74}$. Assim,

$$\left(\frac{A\Gamma}{H\Gamma}\right)^2 < \underbrace{\frac{780^2 + 2911^2}{780^2}}_{\frac{9082321}{608400}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013 \frac{51}{74}}{780},$$

de modo que

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{2911}{780} + \frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{2911}{780} + \frac{3013 \frac{51}{74}}{780} = \frac{438427}{57720} = \frac{1822 \frac{472}{481}}{240}.$$

Uma vez que $\Gamma AK = \Gamma A\Theta/2$, tem-se

$$\cotg(\Gamma AK) = \cotg(\Gamma A\Theta) + \operatorname{cosec}(\Gamma A\Theta) \Rightarrow \frac{AK}{K\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} \Rightarrow \frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1822 \frac{472}{481}}{240} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}.$$

Mas

$$\operatorname{cosec}^2(\Gamma A\Theta) = 1 + \cotg^2(\Gamma A\Theta) \Rightarrow \left(\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{1822 \frac{472}{481}}{240}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}\right)^2 < \underbrace{\frac{240^2 + (1822 \frac{472}{481})^2}{240^2}}_{\frac{195549832729}{3331598400}}.$$

Posto que $1838^2 < 240^2 + (1822 \frac{472}{481})^2 < 1839^2$, vamos procurar por fração $\frac{a}{b}$, com $1 \leq b \leq 99$ e $1 \leq a \leq b$ tal, que a expressão

$$\left(1838 \frac{a}{b}\right)^2 - 240^2 - \left(1822 \frac{472}{481}\right)^2$$

seja positiva e seja a menor possível. Por inspeção, encontramos $\frac{a}{b} = \frac{42}{59}$. Assim,

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma}\right)^2 < \underbrace{\frac{240^2 + (1822 \frac{472}{481})^2}{240^2}}_{\frac{195549832729}{3331598400}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1838 \frac{42}{59}}{240},$$

de modo que

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1822 \frac{472}{481}}{240} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1822 \frac{472}{481}}{240} + \frac{1838 \frac{42}{59}}{240} = \frac{1006 \frac{109613}{113516}}{66}.$$

Agora, dado que $\Gamma A\Lambda = \Gamma AK/2$, tem-se

$$\cotg(\Gamma A\Lambda) = \cotg(\Gamma AK) + \operatorname{cosec}(\Gamma AK) \Rightarrow \frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} = \frac{AK}{K\Gamma} + \frac{A\Gamma}{K\Gamma} \Rightarrow \frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} < \frac{1006 \frac{109613}{113516}}{66} + \frac{A\Gamma}{K\Gamma}.$$

Mas

$$\operatorname{cosec}^2(\Gamma AK) = 1 + \cotg^2(\Gamma AK) \Rightarrow \left(\frac{A\Gamma}{K\Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{AK}{K\Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{1006 \frac{109613}{113516}}{66}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{A\Gamma}{K\Gamma}\right)^2 < \frac{66^2 + \left(1006 \frac{109613}{113516}\right)^2}{66^2}.$$

$$\frac{108447558888577}{463891761216}$$

Posto que $1009^2 < 66^2 + \left(1006 \frac{109613}{113516}\right)^2 < 1010^2$, vamos procurar por fração $\frac{a}{b}$, com $1 \leq b \leq 99$ e $1 \leq a \leq b$ tal que a expressão

$$\left(1009 \frac{a}{b}\right)^2 - 66^2 - \left(1006 \frac{109613}{113516}\right)^2$$

seja positiva e seja a menor possível. Por inspeção, encontramos $\frac{a}{b} = \frac{12}{95}$. Assim,

$$\left(\frac{A\Gamma}{K\Gamma}\right)^2 < \frac{66^2 + \left(1006 \frac{109613}{113516}\right)^2}{66^2} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{K\Gamma} < \frac{1009 \frac{12}{95}}{66},$$

$$\frac{108447558888577}{463891761216}$$

de modo que

$$\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} < \frac{1006 \frac{109613}{113516}}{66} + \frac{A\Gamma}{K\Gamma} < \frac{1006 \frac{109613}{113516}}{66} + \frac{1009 \frac{12}{95}}{66} = \frac{2016 \frac{991407}{10784020}}{66}.$$

$$\frac{7247191909}{237248440}$$

Por fim,

$$\operatorname{cosec}^2(\Gamma A\Lambda) = 1 + \cotg^2(\Gamma A\Lambda) \Rightarrow \left(\frac{A\Gamma}{\Lambda\Gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}\right)^2 < 1 + \left(\frac{2016 \frac{991407}{10784020}}{66}\right)^2,$$

de modo que

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Lambda\Gamma}\right)^2 < \frac{66^2 + \left(2016 \frac{991407}{10784020}\right)^2}{66^2}.$$

$$\frac{52578077388157497881}{56286822282433600}$$

Posto que $2017^2 < 66^2 + \left(2016 \frac{991407}{10784020}\right)^2 < 2018^2$, vamos procurar por fração $\frac{a}{b}$, com $1 \leq b \leq 99$ e $1 \leq a \leq b$ tal que a expressão

$$\left(2017 \frac{a}{b}\right)^2 - 66^2 - \left(2016 \frac{991407}{10784020}\right)^2$$

seja positiva e seja a menor possível. Por inspeção, encontramos $\frac{a}{b} = \frac{16}{93}$. Assim,

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Lambda\Gamma}\right)^2 < \frac{66^2 + \left(2016 \frac{991407}{10784020}\right)^2}{66^2} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{\Lambda\Gamma} < \frac{2017 \frac{16}{93}}{66},$$

$$\frac{52578077388157497881}{56286822282433600}$$

de modo que

$$\frac{A\Gamma}{\Lambda\Gamma} < \frac{2017 \frac{16}{93}}{66} \Rightarrow \Lambda\Gamma > \frac{66 A\Gamma}{2017 \frac{16}{93}} = \frac{132}{2017 \frac{16}{93}},$$

pois $\Lambda\Gamma = 2$. Lembrando que $\Lambda\Gamma$ é lado do polígono regular de 96 lados inscrito na circunferência unitária, segue-se que $2\pi > 96\Lambda\Gamma$ e, sendo assim,

$$\pi > \frac{96\Lambda\Gamma}{2} = 48 \left(\frac{132}{2017 \frac{16}{93}} \right) = \frac{589248}{187597} = 3 \frac{26457}{187597}.$$

Vamos agora procurar por fração $\frac{a}{b}$ com $1 \leq b \leq 99$ e $1 \leq a \leq b$ tal que a expressão

$$\frac{26457}{187597} - \frac{a}{b}$$

seja positiva e a menor possível. Por inspeção, a resposta é $\frac{a}{b} = \frac{11}{78}$. Como

$$\frac{223}{71} < \frac{245}{78} < \pi,$$

segue-se que a fração $\frac{245}{78} = 3 \frac{11}{78}$ é uma estimativa melhor e de denominador com a mesma ordem grandeza da estimativa indicada originalmente por Arquimedes, sendo obtida por meio de sua própria técnica.

E para o caso da estimativa obtida por meio de polígonos regulares circunscritos? Fazendo outras escolhas ótimas nas etapas intermediárias, obteríamos uma aproximação racional por cima para π e com denominador não superior a 99 melhor do que $\frac{22}{7}$? A resposta é não. De fato, entre todas as frações do tipo $3 \frac{a}{b}$ com $1 \leq b \leq 99$, $1 \leq a \leq b$ e $\pi < 3 \frac{a}{b}$, por inspeção, é a fração $3 \frac{1}{7}$ que está mais próxima de π .

6. Considerações finais

No processo descrito por Arquimedes, observamos que escolhas ótimas em cada etapa intermediária podem não implicar uma aproximação melhor no final do processo. O leitor encontrará um exemplo desse fenômeno, se proceder com as contas para aproximações obtidas por polígonos circunscritos.

Enquanto na seção anterior obtivemos uma aproximação por baixo para π melhor do que a de Arquimedes, existe uma fração ainda melhor: $\frac{311}{99} = 3 \frac{14}{99}$. De fato, entre todas as frações do tipo $3 \frac{a}{b}$ com $1 \leq b \leq 99$, $1 \leq a \leq b$ e $3 \frac{a}{b} < \pi$, é $3 \frac{14}{99}$ que está mais próxima de π .

Arquimedes considerou polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados. Que aproximações seriam obtidas caso o polígono regular de 192 lados fosse usado? E o polígono regular de 384 lados? Para o caso de polígonos regulares circunscritos, vimos que entre todas as frações do tipo $3 \frac{a}{b}$ com $1 \leq b \leq 99$, $1 \leq a \leq b$ e $\pi < 3 \frac{a}{b}$, por inspeção, é a fração $3 \frac{1}{7}$ que está mais próxima de π . Para o caso de polígonos regulares inscritos, o leitor poderá verificar que, seguindo o método proposto por Arquimedes, o polígono regular inscrito de 192 lados fornece a aproximação $\frac{289}{92} = 3 \frac{13}{92} < \pi$ e o polígono regular inscrito de 382 lados, por sua vez, gera a aproximação $\frac{311}{99} = 3 \frac{14}{99} < \pi$, que é a melhor possível entre as frações de denominador entre 1 e 99.

Observe que o uso das identidades trigonométricas nas deduções feitas anteriormente dá-se apenas por conveniência. De fato, elas podem ser removidas sem prejuízo algum, e cada passo pode ser iniciado com a versão original em termos de razões. Assim, o anacronismo das identidades trigonométricas em nosso texto é em forma e não em conteúdo. Também são anacronismos em forma de emprego de frações com numerador maior do que o denominador (as assim denominadas “frações impróprias”) e da adoção da notação “/” e não “:” para indicar razões (por exemplo, $\frac{3013 \frac{51}{74}}{780}$ no lugar de $3013 \frac{51}{74} : 780$).

Em termos de representações decimais, observe que $\pi = 3,14159265\dots$, $\frac{22}{7} = 3 \frac{1}{7} = 3,14285714\dots$, $\frac{223}{71} = 3 \frac{10}{71} = 3,14084507\dots$, $\frac{245}{78} = 3 \frac{11}{78} = 3,14102564\dots$ e $\frac{311}{99} = 3 \frac{14}{99} = 3,14141414\dots$

Os cálculos simbólicos e a pesquisa por inspeção das frações foram realizados com a Janela CAS do GeoGebra e planilhas eletrônicas.

Como trabalho futuro, pretendemos investigar como outras aproximações para $\sqrt{3}$ usadas no início do processo afetam as aproximações obtidas para π seguindo o método proposto por Arquimedes.

Agradecimentos

Agradecemos a Andreza da Costa Gonçalves, Thatianne da Silva Souza, Carlos Tomei e Lhaylla dos Santos Crissaff pela leitura e pelas várias sugestões dadas para aprimorar o texto.

Referências

- [1] Berggren, L., Borwein, J., Borwein, P. *Pi: A Source Book*. Third Edition. Springer-Verlag, 2004.
- [2] Boyer, C. B. *História da Matemática*. Edgar Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- [3] Davies, E. B. *Archimedes' Calculations of Square Roots*. arXiv, 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1101.0492.pdf>>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.
- [4] Dias, M. M. *De Trabalhos de Arquimedes: Estudos e Aplicações*. Dissertação de Mestrado, Profmatt, Universidade Estadual de Londrina, 2016.
- [5] Dijksterhuis, E. J. *Archimedes*. Princeton University Press, 1987.
- [6] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*. Editora Unicamp, 2011.
- [7] Katz, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. Third Edition, Pearson Education, Inc., 2009.
- [8] Lit, L. W. C. E. "The Measurement of The Circle" of Archimedes in Naşır al-Dīn al-Ṭūsī's Revision of The 'Middle Books' (*Tahrīr al-Mutawassiṭāt*). Bachelor Thesis, Utrecht University, 2008. Disponível em: <<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.145.9039&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.
- [9] Marangon, M. D. *O Número π* . Dissertação de Mestrado Profmatt, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2017.
- [10] Ribeiro, M. *O Número π na Educação*. Dissertação de Mestrado Profmatt, Universidade Federal do ABC, 2014.
- [11] Rosenberg, B. *Archimedes and Pi*. University of Miami, 2003. Disponível em: <https://www.cs.miami.edu/home/burt/manuscripts/archimedes/meas_circle.pdf>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.
- [12] Stillwell, J. *Mathematics and Its History*. Third Edition, Springer-Verlag, 2010.

Márcio Soares Albertino
Escola Estadual Embaixador Raul Fernandes
<marcio.44180446@prof.educa.rj.gov.br>

Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
<humbertobortolossi@id.uff.br>

Recebido: 16/01/2021

Publicado: 13/07/2021

Conheça os quadriláteros iso-ortodiagonais

Isabelle Garcia da Silva¹ 

Rogério César dos Santos 

Resumo

Neste artigo, definimos os quadriláteros iso-ortodiagonais e demonstramos uma interessante propriedade que eles possuem. Para a demonstração da propriedade, utilizamos os conteúdos de Geometria Euclidiana Clássica e Números Complexos. Para a construção das figuras, utilizamos o renomado *software* GeoGebra. Mostramos também que o referido quadrilátero iso-ortodiagonal aparece no notável Teorema de Van Aubel. Consideramos que o assunto apresentado aqui é um tema rico para ser explorado no Ensino Médio, visto agregar belamente os conteúdos de Geometria Plana e Números Complexos.

Palavras-chave: Geometria Plana; Teorema de Van Aubel; Quadrilátero iso-ortodiagonal.

Abstract

In this article, we define the iso-orthodiagonals quadrilaterals and demonstrate an interesting propriety they have. For the proof of the propriety, we use Classical Euclidean Geometry and Complex Numbers contents. We utilize the well known software GeoGebra to construct the figures. We also show that the iso-orthodiagonal quadrilateral presented shows up on the remarkable Van Aubel's Theorem. We consider the subject introduced here as a rich theme to be explored in High School, since it beautifully aggregates Plane Geometry and Complex Numbers contents.

Keywords: Plane Geometry; Van Aubel's Theorem; Iso-orthodiagonal quadrilateral.

1. Introdução

Neste artigo falaremos dos quadriláteros iso-ortodiagonais. Veremos uma interessante propriedade do mesmo e onde eles podem aparecer. São facilmente manipuláveis em *softwares* geométricos e por isso podem ser explorados pelo professor junto aos alunos, tanto no ensino fundamental quanto no médio.

Um quadrilátero é chamado de iso-ortodiagonal se possui diagonais congruentes e perpendiculares, como ilustra a Figura 1, em que $AC = BD$ e $AC \perp BD$.

¹Bolsista de Iniciação Científica do CNPq

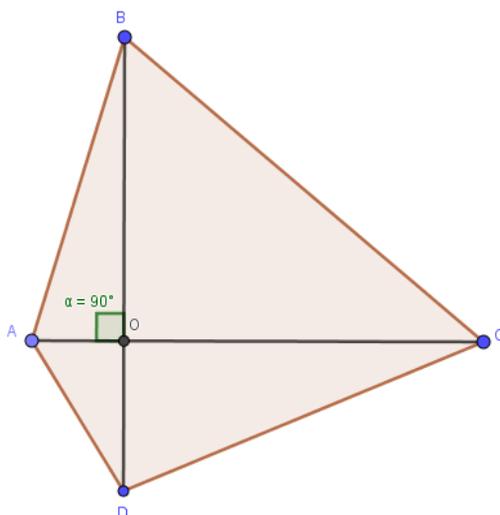


Figura 1: Um quadrilátero iso-ortodiagonal convexo.

Se O é o ponto de interseção das duas diagonais, então uma propriedade imediata desse quadrilátero, por Pitágoras, é que:

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2}{2}.$$

Isto é, a soma dos quadrados das distâncias de seus vértices ao ponto O é igual à semissoma dos quadrados dos seus lados.

Porém, estamos aqui para vislumbrar uma outra propriedade desse tipo de quadrilátero, tanto no caso convexo quanto no não convexo.

2. Uma interessante propriedade

A propriedade que iremos provar é a seguinte: *os pontos médios dos lados de um quadrilátero iso-ortodiagonal formam um quadrado.*

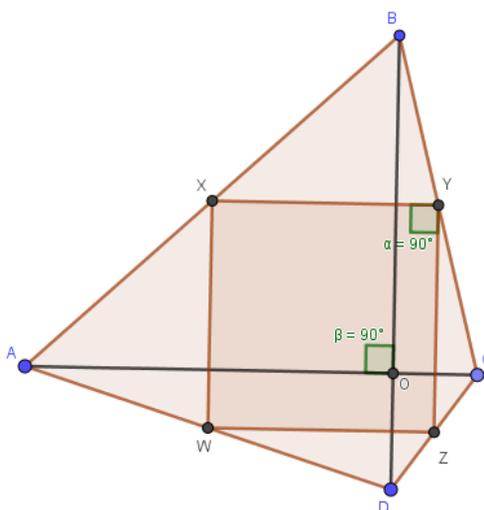


Figura 2: $XYZW$ é um quadrado.

Para a prova do caso convexo, vamos nos basear na Geometria Euclidiana clássica, e a demonstração é bem simples. Para o caso mais geral, convexo ou não convexo, faremos uso das propriedades dos números complexos.

Demonstração.

□

Caso convexo.

Tome X, Y, Z e W , os pontos médios de, respectivamente, AB, BC, CD e DA , da Figura 2.

Pelo Teorema da Base Média nos triângulos ABC e ACD , temos que XY e WZ são iguais a $\frac{AC}{2}$. Já nos triângulos BCD e ABD , temos que YZ e XW são iguais a $\frac{BD}{2}$. Porém, $\frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$. Logo, os lados de $XYZW$ são todos congruentes e medem metade do valor das diagonais do quadrilátero $ABCD$.

Assim, $XYZW$ é um losango (e, em particular, um paralelogramo). Resta-nos provar que seus ângulos internos medem 90° .

Considere F e G os pontos de interseção de AC com YZ e de BD com WZ , respectivamente, como podemos ver na Figura 3. Pelo fato de WZ ser paralelo a AC , e de YZ ser paralelo a BD , concluímos que $OFZG$ é um paralelogramo. Assim, possui ângulos opostos congruentes.

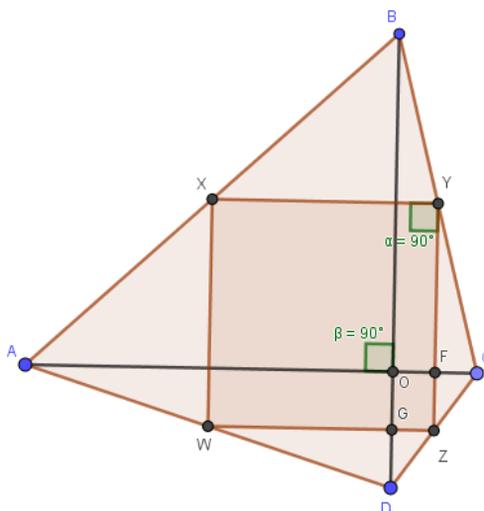


Figura 3: OFZG é um paralelogramo.

Como $\widehat{FOG} = 90^\circ$, então $\widehat{YZW} = \widehat{FZG} = 90^\circ$. Realizando a mesma análise para os demais ângulos internos de XYZW, concluímos que XYZW é um quadrado, e a prova termina.

Caso geral

Observe o leitor que consideramos, na Figura 3, se ABCD convexo. Ora, o resultado vale, mesmo quando o quadrilátero não é convexo ou quando possui autointerseção. Porém, nessa situação, o ponto F interseção de AC com YZ, por exemplo, pode não existir, e fica comprometida a visualização do paralelogramo FZGO, como mostra a Figura 4.

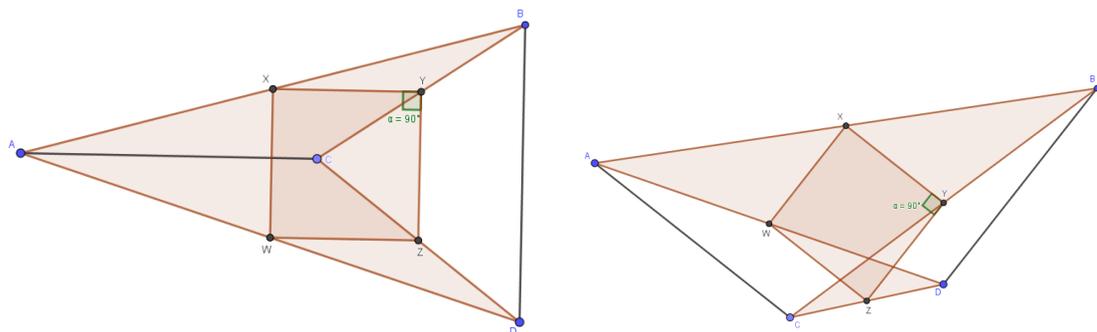


Figura 4: Dois quadriláteros ABCD iso-ortodiagonais não convexos, o da direita com autointerseção.

Logo, faz-se necessária uma prova para o caso geral em que ABCD pode ou não ser convexo. Para tanto, vamos recorrer aos Números Complexos, ferramenta sempre aliada à Geometria Euclidiana,

como podemos ver, por exemplo, em [1].

Insiram os um sistema de Eixos Cartesianos no quadrilátero da esquerda (poderia ser também no da direita) da Figura 4, com origem em algum ponto arbitrário fixo, do Plano. Assim, o vértice A está agora localizado no Plano Cartesiano: $A = (a_1, a_2)$, sendo a_1 e a_2 números reais.

Dados dois pontos quaisquer do plano $E = (e_1, e_2)$ e $F = (f_1, f_2)$, lembremos que o vetor \overrightarrow{EF} é equivalente ao vetor $\overrightarrow{O(F-E)}$, cujas extremidades são a origem $O = (0, 0)$ e o ponto diferença $F - E$. Isto é, \overrightarrow{EF} e $\overrightarrow{O(F-E)}$ possuem mesmo comprimento e mesmo ângulo com o eixo x das abscissas, pois:

$$EF = \sqrt{(f_1 - e_1)^2 + (f_2 - e_2)^2} = O(F - E),$$

e $\frac{f_2 - e_2}{f_1 - e_1}$ é a tangente do ângulo que ambos os vetores \overrightarrow{EF} e $\overrightarrow{O(F-E)}$ fazem com o eixo das abscissas.

Assim, voltando à Figura 4, a rotação do vetor \overrightarrow{AC} em 90° no sentido anti-horário, em torno de A, resulta em um vetor equivalente ao vetor \overrightarrow{DB} , pois \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{DB} são ortogonais e congruentes. O mesmo ocorrendo, portanto, com seus equivalentes localizados na origem, isto é, a rotação do vetor $\overrightarrow{O(C-A)}$, em torno de O, resultará em um equivalente ao vetor $\overrightarrow{O(B-D)}$. Como esses estão localizados na origem, serão na verdade coincidentes.

Chamando de $a = a_1 + a_2i$ o número complexo associado ao ponto $A = (a_1, a_2)$, de $b = b_1 + b_2i$ o número complexo associado ao ponto $B = (b_1, b_2)$, de $c = c_1 + c_2i$ ao ponto $C = (c_1, c_2)$ e de $d = d_1 + d_2i$ ao ponto $D = (d_1, d_2)$, concluímos do parágrafo anterior que:

$$i(c - a) = b - d, \tag{1}$$

pois sabemos que multiplicar um número complexo por i implica rotacioná-lo 90° no sentido anti-horário, mantendo o módulo. Guardemos essa equação para o que vem a seguir.

Tomaremos agora os números complexos $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{b+c}{2}$, $z = \frac{c+d}{2}$ e $w = \frac{a+d}{2}$, associados aos vértices do quadrilátero XYZW. Para os segmentos WZ e WX, temos, pela equação 1 acima, que:

$$\begin{aligned}
 i(z - w) - (x - w) &= \\
 i\left(\frac{c+d}{2} - \frac{a+d}{2}\right) - \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+d}{2}\right) &= \\
 \frac{1}{2}[i(c-a) - (b-d)] &= 0,
 \end{aligned}$$

isto é, $i(z - w) = x - w$, o que significa que o vetor resultante da rotação de $\overrightarrow{O(Z-W)}$ em 90° no sentido anti-horário é o vetor $\overrightarrow{O(X-W)}$. Assim, a rotação do vetor \overrightarrow{WZ} em 90° no sentido anti-horário em torno do ponto W resulta em um equivalente a \overrightarrow{WX} . Em verdade, serão coincidentes por terem origem no ponto comum W. Tal fato implica duas coisas: que $WZ = WX$ e também que $WZ \perp WX$.

Fazendo o mesmo para todos os demais pares de lados adjacentes de XYZW, concluímos que se trata de um quadrado.

A recíproca desse resultado também é verdadeira, isto é, se um quadrilátero ABCD possui pontos médios de seus lados denotados por $X = \frac{A+B}{2}$, $Y = \frac{B+C}{2}$, $Z = \frac{C+D}{2}$ e $W = \frac{D+A}{2}$, e se XYZW

é um quadrado, então o quadrilátero $ABCD$ é iso-ortodiagonal, isto é, suas diagonais AC e BD são congruentes e perpendiculares. A demonstração é feita invertendo-se os argumentos da prova direta: considere os números complexos a, b, c, d, x, y, z e w definidos como nos parágrafos anteriores. Ora, por hipótese, $XYZW$ é um quadrado, logo, $i(z - w) = x - w$. Substituindo, temos $i\left(\frac{c+d}{2} - \frac{d+a}{2}\right) = \frac{a+b}{2} - \frac{d+a}{2}$. Simplificando, temos: $i(c - a) = b - d$, o que implica que as diagonais AC e BD são ortogonais e congruentes, isto é, $ABCD$ é iso-ortodiagonal, como queríamos provar.

Observação. E se $ABCD$ não for iso-orto-diagonal, se for um quadrilátero qualquer? O que se poderia dizer do quadrilátero $XYZW$ cujos vértices são os pontos médios de $ABCD$? Nesse caso, apenas se garante que $XYZW$ é um paralelogramo. O argumento para nos convencermos disso é o mesmo que utilizamos no início da prova de nossa propriedade, isto é, o Teorema da Base Média.

3. Onde aparece

Eis uma aparição do quadrilátero iso-ortodiagonal. O notável Teorema de Van Aubel [2] diz que, dado um quadrilátero $ABCD$ sobre cujos lados são construídos quadrados externamente, então, os segmentos MO e NP que unem os centros M, N, O e P dos quadrados opostos são ortogonais e congruentes (Figura 5). Ou seja, $MNOP$ é um quadrilátero iso-ortodiagonal.

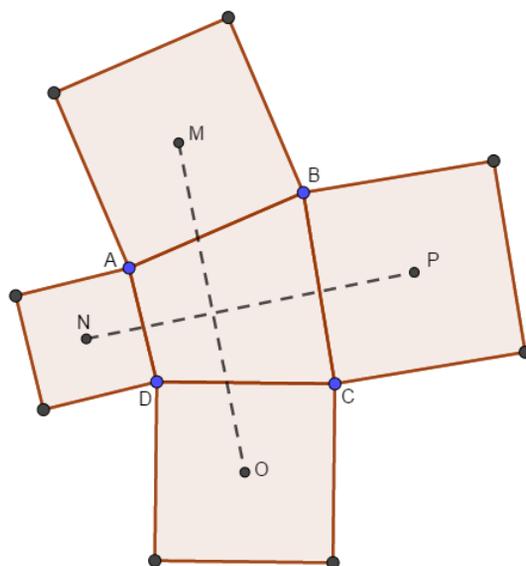


Figura 5: Teorema de Van Aubel: $MNOP$ é iso-ortodiagonal.

A prova também pode ser realizada por meio das propriedades dos números complexos e pode ser encontrada na referência citada, para deleite do leitor.

E então, cara(o) professora(or), que tal instigar os alunos a explorarem os quadriláteros iso-ortodiagonais com o GeoGebra, em sala?

Referências

- [1] Neves, Robson Coelho Neves. Aplicações de Números Complexos em Geometria. *Dissertação*. Impa. Profmat. Rio de Janeiro. Fevereiro de 2014.
- [2] NISHIYAMA, Y. Beautiful Theorems of Geometry as Van Aubel's Theorem. Department of Business Information. Faculty of Information Management. Osaka University of Economics. Osumi Higashiyodogawa. Osaka. Japan, 2010.
- [3] Villiers , Michael de. "Dual Generalizations of Van Aubel's theorem." *The Mathematical Gazette*. Copyright Mathematical Association. Nov. 405-412. 1998. University of Durban-Westville, South Africa

Isabelle Garcia da Silva
Faculdade UnB Planaltina
<isabellegarciasilva1@gmail.com>

Rogério César dos Santos
Faculdade UnB Planaltina
<professorrogeriocesar@gmail.com>

Recebido: 22/04/2021
Publicado: 23/08/2021