PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.2, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo1014

Sombras de triângulos ao sol: uma demonstração algébrica elementar do Teorema de Lhuillier em geometria espacial

Victor Ibrahim Santos El Adji   Humberto José Bortolossi

Resumo

Recorte um triângulo ABC qualquer de uma folha de cartolina. Supondo um dia ensolarado em que os raios do Sol cheguem paralelos e perpendiculares a uma superfície plana, que tipo de sombras esse triângulo irá produzir nessa superfície, dependendo de como ele é segurado no espaço? Se o triângulo ABC não estiver paralelo aos raios solares, sua sombra será um triângulo. Mas, nesse caso, quais tipos de sombras triangulares podem ser produzidas? Seria possível, por exemplo, segurar o triângulo ABC (suposto qualquer) de forma que sua sombra seja um **triângulo equilátero**? A resposta é afirmativa, como atesta o teorema seguinte. Apresentaremos uma demonstração algébrica um pouco longa, mas elementar (isto é, acessivel a alunos do Ensino Médio), e de nosso conhecimento, inédita.

Palavras-chave: Geometria espacial, projeção ortogonal; Teorema de Lhuillier.

Abstract

Cut out any triangle ABC from a sheet of paper. Assuming a sunny day when the sun's rays are parallel and perpendicular to a flat surface, what kind of shadows will this triangle produce on this surface depending on how it is holded in the space? If the triangle ABC is not parallel to the sun's rays, its shadow will be a triangle. In this case, what types of triangular shadows could be produced? It would be possible, for example, to hold the triangle ABC (supposed any) so that its shadow is an **equilateral triangle**? The answer is affirmative, as the following theorem attests. we will present a ittle bit lenghty but elementary(that is, acessible to high school students) algebraic demonstration, of our knowledge, unpublished.

Keywords: Spatial Geometry, orthogonal Projection; Lhuillier's Theorem.

Teorema de Lhuillier. Dado um triângulo ABC qualquer, sempre é possível posicioná-lo no espaço $\mathbb{R}^3$ de tal forma que sua projeção ortogonal sobre o plano xy seja um triângulo equilátero.

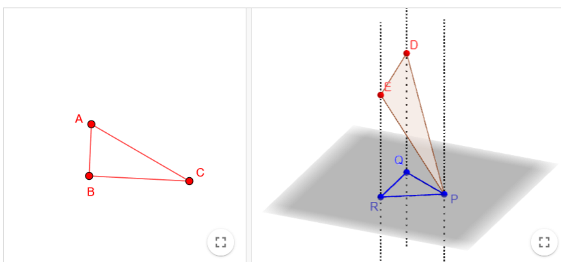
Demonstração. Considere, no plano xy, o triângulo equilátero de vértices

$$\mathrm{P} = (1, 0, 0), \qquad \mathrm{Q} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{R} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

Considere também as retas s e t perpendiculares ao plano xy nos pontos Q e R, respectivamente. Vamos provar que existem números reais $\beta \geq 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que os pontos

$$\mathrm{D} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \beta\right) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{E} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \gamma\right)$$

sobre as retas s e t formam um triângulo PDE que é semelhante ao triângulo ABC dado inicialmente. Uma mudança de escala apropriada transformará PDE em um triângulo congruente a ABC, cuja projeção ortogonal sobre o plano xy será um triângulo equilátero, estabelecendo assim o teorema.



Sejam $\mathrm{u} = \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, $\mathrm{v} = \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{C})$ e $\mathrm{w} = \mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$. Renomeando-se os pontos se necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathrm{u} \geq \mathrm{v} \geq \mathrm{w} > 0$. Para que PDE seja semelhante a ABC, então deve existir uma constante real $\mathrm{k} > 0$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{D}) & = & \mathrm{k\,u}, \\ \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{E}) & = & \mathrm{k\,v}, \\ \mathrm{d}(\mathrm{D}, \mathrm{E}) & = & \mathrm{k\,w}, \end{array}\right. \qquad \text{ou, ainda,} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{D})^2 & = & \mathrm{k}^2\,\mathrm{u}^2, \\ \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{E})^2 & = & \mathrm{k}^2\,\mathrm{v}^2, \\ \mathrm{d}(\mathrm{D}, \mathrm{E})^2 & = & \mathrm{k}^2\,\mathrm{w}^2. \end{array}\right.$$

Mas, $\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{D})^2 = 3 + \beta^2$, $\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{E})^2 = 3 + \gamma^2$ e $\mathrm{d}(\mathrm{D}, \mathrm{E})^2 = 3 + (\beta - \gamma)^2$. Sendo assim, o triângulo PDE é semelhante ao triângulo ABC se, e somente se, o seguinte sistema de três equações e três variáveis ($\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ e $\mathrm{k} > 0$) possui pelo menos uma solução:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3 + \quad \beta^2 & = & \mathrm{k}^2\,\mathrm{u}^2, \\ 3 + \quad \gamma^2 & = & \mathrm{k}^2\,\mathrm{v}^2, \\ 3 + (\beta - \gamma)^2 & = & \mathrm{k}^2\,\mathrm{w}^2. \end{array}\right.$$

Destacamos duas ideias fundamentais da prova algébrica que será apresentada: (1) "quem fatora, fatura" no sentido de que por meio de várias fatorações adequadas será possível estabelecer que várias expressões são ≥ 0 e (2) baixar a dimensão: $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ para $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 1)$ e, depois, para $\mathrm{y} + \alpha$, com α um parâmetro.

Expandindo-se a terceira equação, obtemos que $3+\beta^2-2\,\beta\gamma+\gamma^2=\mathrm{k}^2\mathrm{w}^2$. Mas, das duas primeiras equações, segue-se que $\beta^2=\mathrm{k}^2\mathrm{u}^2-3$ e $\gamma^2=\mathrm{k}^2\mathrm{v}^2-3$. Portanto,

$$\begin{aligned} 3+\beta^2-2\,\beta\gamma+\gamma^2=\mathrm{k}^2\mathrm{w}^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3+(\mathrm{k}^2\mathrm{u}^2-3)-2\beta\gamma+(\mathrm{k}^2\mathrm{v}^2-3)=\mathrm{k}^2\mathrm{w}^2\\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\beta\gamma=\mathrm{k}^2(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)-3.\end{aligned}$$

Mas, se $2\,\beta\gamma=\mathrm{k}^2(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)-3$, então, elevando-se ao quadrado os dois lados da equação (observe que os dois lados da equação são não negativos, pois $\beta\geq 0$, $\gamma\geq 0$ e $\mathrm{k}^2(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)-3=(\mathrm{k}^2\mathrm{u}^2-3)+\mathrm{k}^2(\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)=\beta^2+\mathrm{k}^2(\mathrm{u}-\mathrm{v})(\mathrm{u}+\mathrm{v})\geq 0$), segue-se que, de forma equivalente, que

$$\begin{aligned} 4\,\beta^2\gamma^2 &= (\mathrm{k}^2(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)-3)^2\\ &= \mathrm{k}^4(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2-6\,\mathrm{k}^2(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)+9.\end{aligned}$$

Dado que $4\,\beta^2\gamma^2=4\,(\mathrm{k}^2\mathrm{u}^2-3)(\mathrm{k}^2\mathrm{v}^2-3)=4\,\mathrm{k}^4\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-12\mathrm{k}^2(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2)+36$. Consequentemente,

$$\begin{gathered} 4\,\beta^2\gamma^2=\mathrm{k}^4(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2-6\,\mathrm{k}^2(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)+9\\ \Updownarrow\\ 4\,\mathrm{k}^4\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-12\mathrm{k}^2(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2)+36=\mathrm{k}^4(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2-6\,\mathrm{k}^2(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)+9\\ \Updownarrow\\ [4\,\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2]\,\mathrm{k}^4\;-6\,(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)\,\mathrm{k}^2+27=0.\end{gathered}$$

agora, note que

$$4\,\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2=(\mathrm{v}+\mathrm{w}-\mathrm{u})\,(\mathrm{u}+\mathrm{w}-\mathrm{v})\,(\mathrm{u}+\mathrm{v}-\mathrm{w})\;\;(\mathrm{u}+\mathrm{v}+\mathrm{w})>0$$

pois u, v e w são medidas dos lados de um triângulo, as quais, portanto, devem satisfazer as desigualdades triangulares. Assim, a equação

$$[4\,\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2]\,\mathrm{k}^4\;-6\,(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)\,\mathrm{k}^2+27=0 \qquad (*)$$

é, de fato, uma equação quadrática em k^2. Dado que

$$\begin{aligned} \Delta &= [-6\,(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)]^2-4[4\,\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2][27]\\ &= 144\,\left(\mathrm{u}^4-\mathrm{u}^2\,\mathrm{v}^2-\mathrm{u}^2\,\mathrm{w}^2+\mathrm{v}^4-\mathrm{v}^2\,\mathrm{w}^2+\mathrm{w}^4\right)\\ &= 72\left[(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2)^2+(\mathrm{u}^2-\mathrm{w}^2)^2+(\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2\right]\geq 0.\end{aligned}$$

Tal equação quadrática em k^2 possui soluções reais, a maior delas dada por

$$\mathrm{k}^2=\frac{3\,(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)+3\sqrt{2}\sqrt{(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2)^2+(\mathrm{u}^2-\mathrm{w}^2)^2+(\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2}}{4\,\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2}.$$

Note que, como $4\,\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2>0$, então

$$\frac{\overbrace{3\,(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)}^{>0}+\overbrace{3\sqrt{2}\sqrt{(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2)^2+(\mathrm{u}^2-\mathrm{w}^2)^2+(\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2}}^{\geq 0}}{\underbrace{4\,\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2}_{>0}}>0.$$

Para obter os valores de β e γ a partir das equações $\beta^2 = k^2u^2 - 3$ e $\gamma^2 = k^2v^2 - 3$, precisamos mostrar que $k^2u^2 - 3 \geq 0$, $k^2v^2 - 3 \geq 0$ e $k^2w^2 - 3 \geq 0$. Como $u \geq v \geq w$, basta mostrar que $k^2w^2 - 3 \geq 0$. Escrevendo

$$T(u, v, w) = \sqrt{2}\sqrt{(u^2 - v^2)^2 + (u^2 - w^2)^2 + (v^2 - w^2)^2},$$

temos que

$$\begin{aligned} k^2w^2 - 3 &= \frac{3\,(u^2 + v^2 + w^2) + 3\,T(u, v, w)}{4\,u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2}\, w^2 - 3 \\ &= 3\left[\frac{(u^2 + v^2 + w^2 + T(u, v, w))\, w^2}{4\,u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2} - 1\right] \\ &= 3[F(u, v, w) - 1], \end{aligned}$$

com a função F definida por

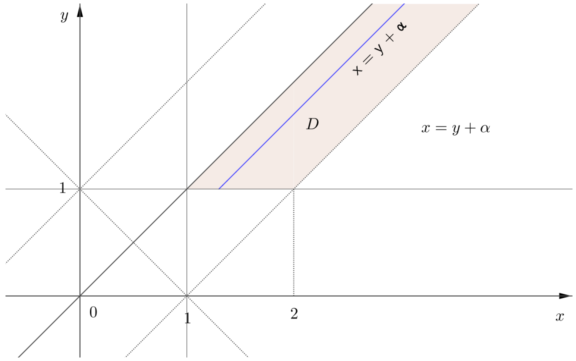
$$F(u, u, w) = \frac{(u^2 + v^2 + w^2 + T(u, v, w))\, w^2}{4\,u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2}.$$

Devemos mostrar que $F(u, v, w) \geq 1$ para todo $u, v, w \in]0, +\infty[$ com $u + v > w$, $u + w > v$ e $v + w > u$ e $u \geq v \geq w > 0$. Note que F é uma função homogênea, pois para todo $\lambda > 0$, vale que $F(\lambda\, u, \lambda v, \lambda w) = F(u, v, w)$. Assim,

$$F(u, v, w) = F\left(\frac{1}{w}\, u, \frac{1}{w}\, v, \frac{1}{w}\, w\right) = F(x, y, 1),$$

com $x = u/w$ e $y = v/w$. Dessa maneira, basta mostrar que $F(x, y, 1) \geq 1$ para todo $x, y \in [1, +\infty[$ com $x + y > 1$, $x + 1 > y$ e $y + 1 > x$ e $x \geq y \geq 1$. O conjunto dos pares ordenados que satisfazem simultaneamente essas desigualdades pode ser escrito da seguinte maneira:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + \alpha \text{ com } 0 \leq \alpha < 1 \text{ e } y \geq 1\}.$$



Assim, é suficiente mostrar que $F(x, y, 1) = F(y + \alpha, y, 1) \geq 1$ para todo $0 \leq \alpha < 1$ e $y \geq 1$. Escrevendo:

$$\begin{aligned} N_1 &= y^2 + (\alpha + y)^2 + \sqrt{2}\,\sqrt{(y^2 - 1)^2 + ((\alpha + y)^2 - 1)^2 + (-y^2 + (\alpha + y)^2)^2} + 1, \\ D_1 &= 4\,y^2\,(\alpha + y)^2 - (y^2 + (\alpha + y)^2 - 1)^2, \\ N_2 &= 1, \\ D_2 &= 1 - \alpha^2, \end{aligned}$$

vamos mostrar que

$$\mathrm{F}(\mathrm{y}+\alpha,\mathrm{y},1)-\frac{1}{1-\alpha^2}=\frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{D}_1}-\frac{\mathrm{N}_2}{\mathrm{D}_2}=\frac{\mathrm{N}_1\,\mathrm{D}_2-\mathrm{N}_2\,\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2}\geq 0,$$

pois, nesse caso, $\mathrm{F}(\mathrm{y}+\alpha,\mathrm{y},1)$ seria maior do que ou igual a $1/(1-\alpha^2)$ que é maior do que ou igual a 1 dado que $0\leq\alpha<1$. Uma vez que $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2>0$, resta mostrar que $\mathrm{N}_1\mathrm{D}_2-\mathrm{N}_2\mathrm{D}_1\geq 0$. Mas,

$$\mathrm{N}_1\mathrm{D}_2-\mathrm{N}_2\mathrm{D}_1=-2\;(\alpha-1)\;(\alpha+1)\;\mathrm{E}=2\,(1-\alpha^2)\;\mathrm{E},$$

onde

$$\mathrm{E}=\sqrt{\alpha^4+4\,\alpha^3\,\mathrm{y}+5\,\alpha^2\,\mathrm{y}^2-\alpha^2+2\,\alpha\,\mathrm{y}^3-2\,\alpha\,\mathrm{y}+\mathrm{y}^4-2\,\mathrm{y}^2+1}-\mathrm{y}^2-\mathrm{y}\,\alpha+1.$$

Dado que $2\,(1-\alpha^2)\geq 0$, resta mostrar que $\mathrm{E}>0$ e, para isso, é suficiente mostrar que

$$\sqrt{\alpha^4+4\,\alpha^3\,\mathrm{y}+5\,\alpha^2\,\mathrm{y}^2-\alpha^2+2\,\alpha\,\mathrm{y}^3-2\,\alpha\,\mathrm{y}+\mathrm{y}^4-2\,\mathrm{y}^2+1}\geq\mathrm{y}^2+\mathrm{y}\alpha-1.$$

Visto que $\mathrm{y}^2+\mathrm{y}\alpha-1\geq 0$ para todo $0\leq\alpha<1$ e $\mathrm{y}\geq 1$, a condição anterior é equivalente a

$$\left(\sqrt{\alpha^4+4\,\alpha^3\,\mathrm{y}+5\,\alpha^2\,\mathrm{y}^2-\alpha^2+2\,\alpha\,\mathrm{y}^3-2\,\alpha\,\mathrm{y}+\mathrm{y}^4-2\,\mathrm{y}^2+1}\right)^2\geq(\mathrm{y}^2+\mathrm{y}\alpha-1)^2$$

ou, ainda,

$$\alpha^4+4\,\alpha^3\,\mathrm{y}+5\,\alpha^2\,\mathrm{y}^2-\alpha^2+2\,\alpha\,\mathrm{y}^3-2\,\alpha\,\mathrm{y}+\mathrm{y}^4-2\,\mathrm{y}^2+1-(\mathrm{y}^2+\mathrm{y}\alpha-1)^2\geq 0.$$

Mas,

$$\alpha^4+4\,\alpha^3\,\mathrm{y}+5\,\alpha^2\,\mathrm{y}^2-\alpha^2+2\,\alpha\,\mathrm{y}^3-2\,\alpha\,\mathrm{y}+\mathrm{y}^4-2\,\mathrm{y}^2+1-(\mathrm{y}^2+\mathrm{y}\alpha-1)^2=$$
$$\alpha^2(\alpha^2+4\,\mathrm{y}^2+4\,\alpha\,\mathrm{y}-1).$$

Mas $\alpha^2+4\alpha\mathrm{y}\geq 0$ e $4\,\mathrm{y}^2-1\geq 3$, de modo que $\alpha^2(\alpha^2+4\,\mathrm{y}^2+4\,\alpha\,\mathrm{y}-1)\geq 0$. ■

Existe uma prova geométrica sintética do Teorema de Lhuillier, disponível no clássico livro *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*, de Heinrich Dörrie. Uma vantagem da nossa prova algébrica é que ela nos ensina como posicionar exatamente o triângulo ABC para que sua projeção ortogonal no plano xy seja um triângulo equilátero. Uma versão interativa dessa construção feita no GeoGebra está disponível neste endereço: <https://ggbm.at/ukycq8ch. Um vídeo exibindo este a*pplet* do GeoGebra em ação pode ser visto aqui: https://youtu.be/yyxOcRAQFLA.

Uma outra maneira de se interpretar o Teorema de Lhuillier é a seguinte: seções planas adequadas de um prisma "infinito" cuja base é um triângulo equilátero (uma barra de chocolate troblerone infinito) reproduzem, a menos de semelhança, qualquer triângulo especificado.

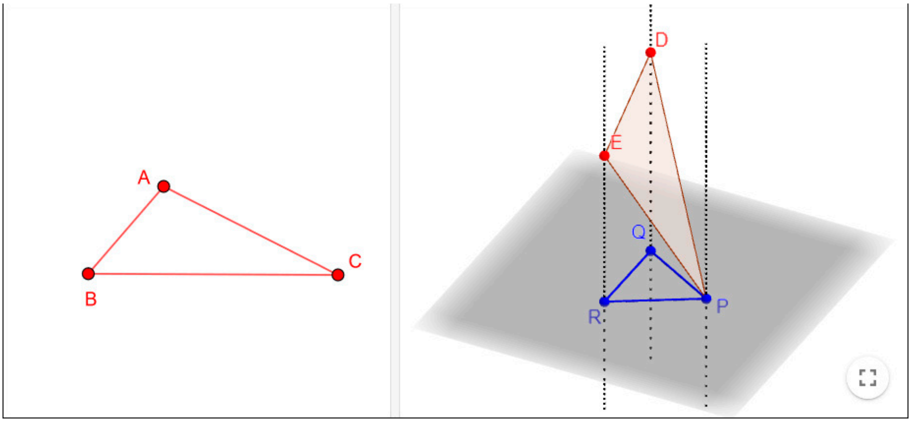


Figura: implementação do Teorema de Lhuillier no GeoGebra.

O Teorema de Lhuiller é frequentemente usado como um lema para a demonstração do Teorema Fundamental da Axonometria (o Teorema de Pohlke): dados três segmentos arbitrários $\overline{\mathrm{OU}}$, $\overline{\mathrm{OV}}$ e $\overline{\mathrm{OW}}$ em um plano π, com mesma origem O e que não estão todos contidos em uma mesma reta, podem ser considerados como uma projeção paralela das três arestas OU, OV e OW de um cubo no espaço (Klein, 2016). É esse teorema que garante que os desenhos de sistemas ortonormais no $\mathbb{R}^3$ que se costuma fazer nas aulas de Geometria Analítica estão todos corretos.

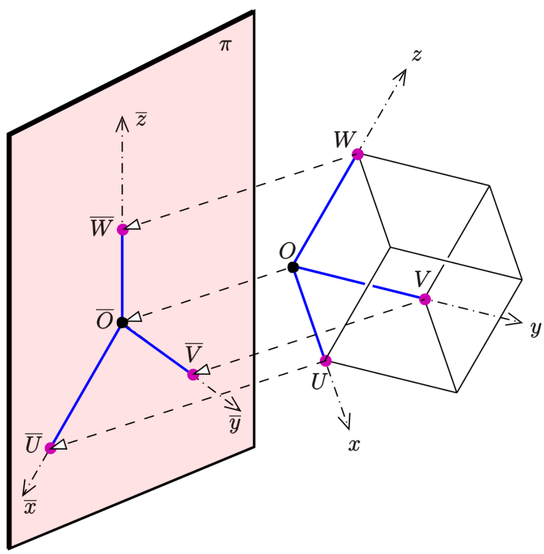


Figura: o Teorema Fundamental da Axonometria.

Observação: esse trabalho foi motivado por uma das atividades do capítulo de vistas ortogonais e projeções em perspectiva do Projeto Livro Aberto de Matemática da Obmep/Impa (https://www.umlivroaberto.com/).

Observamos que a outra solução de(*), a saber, $\mathrm{k}^4 = \frac{3\,(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)-3\sqrt{2}\sqrt{(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2)^2+(\mathrm{u}^2-\mathrm{w}^2)^2+(\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2}}{4\,\mathrm{u}^2\mathrm{v}^2-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2-\mathrm{w}^2)^2}$ pode eventualmente ser negativa e, então, deve ser descartada (tome, por exemplo $\mathrm{u} = 3/2$, $\mathrm{v} = 1$ e $\mathrm{w} = 1$, de modo que $\mathrm{k}^2 = 4/3$, com $\mathrm{k}^2\mathrm{w}^2 - 3 < 0$, o que não convém!).

Segundo o *site* MacTutor https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lhuilier/, Simon Antoine Jean Lhuilier (1750-1840) foi um matemático suíço que trabalhou em análise, topologia e probabilidade. Simon Lhuilier (às vezes escrito Simon L'Huilier) era filho de Laurent Lhuilier, um joalheiro e ourives. Sua mãe, Suzanne-Constance Matte, era a segunda esposa de Laurent Lhuilier e havia três filhos mais velhos na família. Os Lhuilier eram uma família huguenote, originária de Mâcon, mas depois que o Édito de Nantes (que concedeu liberdade religiosa aos huguenotes) foi revogado por Luís XIV em 1685, eles tiveram que fugir. Eles se estabeleceram em Genebra em 1691.

Lhuilier foi um aluno excepcional do ensino médio e passou a estudar matemática na Academia Calvin, onde aprendeu matemática com um dos ex-alunos de Euler, Louis Bertrand, e física com Georges-Louis Le Sage. Foi por meio de Le Sage que Lhuilier obteve seu primeiro cargo como tutor da família Rilliet-Plantamour, cargo que ocupou por dois anos.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Projeto Livro aberto (https://umlivroaberto.org/) (de onde a questão nasceu) e à Faperj pela bolsa de iniciação científica concedida ao autor El Adji. Os autores agradecem a Carlos Tomei, Josy Santos e Caroline Fagundes pela revisão do texto . Agradecenos também ao parecerista anônimo pelas importantes considerações feitas.

Referências

[1] Dörrie, Heinrich. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. New York: Dover Publications, Inc., 1965.

[2] Klein, Felix. *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*. Volume II: Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2016.

Victor Ibrahim Santos El Adji
Universidade Federal Fluminense
<victoribrahim@id.uff.br>

Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
<humbertobortolossi@id.uff.br>

Recebido: 15/01/2021
Publicado: 26/05/2022