PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.2, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo1015

Relacionando critérios de divisibilidades com sistemas de numeração

Thiago Rodrigues Cavalcante[1] Rafael Pimenta Alves

Resumo

Neste trabalho vamos relacionar a divisibilidade de um número com o sistema de numeração desse em uma dada base. Mais precisamente, determinamos quando um número escrito em uma dada base r é divisível por (r−1) e (r+1). Partimos dessa generalização e obtemos os conhecidos critérios de divisibilidade por 9 e por 11, quando o número em questão está escrito na base r = 10. Utilizamos tais conceitos para resolver exercícios de olimpíadas de matemática, questões de pós-graduação e desvendar algumas *brincadeiras* comuns nas rodas de amigos, em que as respostas secretas, estão diretamente ligadas a sistemas de numeração.

Palavras-chave: sistema de numeração; divisibilidade por 9 e por 11;

Abstract

In this work we are going to relate the divisibility of a number to its numbering system on a given basis. More precisely, we determine when a number written on a given base r is divisible by (r − 1) and (r + 1). We started from this generalization and obtained the well-known divisibility criteria for 9 and 11, when the number in question is written in the base r = 10. We use these concepts to solve math olympics exercises, graduate questions and unveil some common *games* in the circles of friends that, the *secret* answers, are directly linked to numbering systems.

Keywords: numbering system;divisibility by 9 and by 11;

1. Introdução

Sistema de numeração e divisibilidade são temas recorrentes em questões de diversas olimpíadas de matemática em diversos níveis, além de estarem presentes em disciplinas da graduação e pós-graduações, bem como exames de qualificação de programas de pós-graduação. Nosso principal objetivo deste trabalho foi o de relacionar esses dois temas, de modo a obter um padrão e, desse, deduzirmos os conhecidos critérios de divisibilidade por 9 e por 11. O que está "escondido"nesses dois critérios é que o número a ser verificada sua divisibilidade tanto por 9, quanto por 11 esta representado na base 10.

Ao escrevermos um numero, precisamos reconhecer em que base numérica estamos trabalhando. Apesar de usualmente trabalharmos com a base decimal (base 10), podemos pensar em outras

[1]Parcialmente apoiado pela Propesq 05/2021

bases, as quais possuem várias aplicações e historicamente vêm sendo utilizadas e deixam resquícios até os dias atuais.

Na computação, por exemplo, temos a utilização da base binária (onde utilizam-se apenas os algarismos 1 e 2). Outro sistema de numeração conhecido é o sexagenal, o qual tem resquícios na medição de uma hora com 60 minutos e na circunferência contendo 360. Do sistema duodecimal (com doze unidades), ainda utilizamos para a contagem de uma dúzia e, no sistema inglês, temos que 1 pé equivale a 12 polegadas.

Uma brincadeira interessante envolvendo sistemas de numeração é sobre a escolha de uma peça de dominó. Para o leitor que não conhece uma peça de dominó, trata-se de um retângulo dividido ao meio, no qual em cada um dos seus lados existe uma quantidade de pontos, de 0 a 6 pontos. Dois amigos encontram-se e um deles pede ao segundo para escolher uma peça de dominó, a qual possui dois algarismos, $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, combinados dois a dois. O primeiro pede que este escolha uma da duas quantidades e multiplique-a por 5. Em um segundo momento, some 3 ao resultado, e, no que segue, some o número obtido por 2. Por fim, pede-se que some o resultado final com o outro número da peça e pergunta-se qual o resultado. A partir desse, é possível determinar a peça do dominó escolhida pelo amigo.

Trabalhando matematicamente a brincadeira citada, consideremos $\mathrm{n} = \mathrm{xy}$ um número de dois algarismos, onde x e y representam a quantidade de pontos da peça do dominó. Vamos estudar todos os passos da brincadeira e, partindo de uma resposta aleatória, tentar obter a peça do dominó.

i) Escolher um dos algarismos x ou y e multiplicá-lo por 5. Sem perda de generalidade, vamos escolher x. Portanto obtemos $5\mathrm{x}$, como resultado.

ii) Somar 3 ao resultado, resultando em $5\mathrm{x}+3$.

iii) Multiplicar o número obtido por 2, ficando com $2(5\mathrm{x}+3)$

iv) Some o resultado final ao segundo número da peça e fale o valor final, ou seja, $2(5\mathrm{x}+3)+\mathrm{y}$.

Supondo que o resultado final seja 52, então teremos que

$$\begin{aligned} 2(5\mathrm{x}+3)+\mathrm{y} &= 52 \\ 10\mathrm{x}+6+\mathrm{y} &= 52 \\ 10\mathrm{x}+\mathrm{y} &= 46, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\mathrm{x} = 4$ e $\mathrm{y} = 6$, pois podemos reescrever $46 = 4 \cdot 10 + 6$.

Uma outra atividade interessante é o *O Nove Misterioso*, que consiste em:

Peça para alguém escolher, em segredo, um número natural com, pelo menos, três algarismos (no sistema decimal,é claro). Peça, ainda, para que efetue uma permutação qualquer dos seus algarismos, obtendo um novo número, e que subtraia o menor do maior desses dois números. Finalmente, peça ao seu parceiro de jogo para reter um dos algarismos diferentes de zero desse novo número e divulgar os restantes. É possível adivinhar o algarismo retido!

Vamos analisar matematicamente, o que acontece nessa atividade. Sejam $\mathrm{a} = (\mathrm{r}_2\mathrm{r}_1\mathrm{r}_0)_{10}$ o número escolhido e $\mathrm{b} = (\bar{\mathrm{r}}_2\bar{\mathrm{r}}_1\bar{\mathrm{r}}_0)_{10}$ o número obtido pela permutação dos algarismos de a. Para que fique mais claro, vamos dar um exemplo. Suponho que $\mathrm{a} = 530$, então um possível b, seria $\mathrm{b} = 305$.

Temos que $a = (r_2r_1r_0)_{10} = r_2 10^2 + r_1 10 + r_0$, logo

$$\begin{aligned} a - (r_2 + r_1 + r_0) &= (r_2 10^2 + r_1 10 + r_0) - (r_2 + r_1 + r_0) \\ &= r_2(10^2 - 1) + r_1(10 - 1). \qquad (1) \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ é múltiplo de 9. Portanto, segue de (1) que:

$$a = (r_2 + r_1 + r_0) + 9q \ \text{ e, obrigatoriamente}$$

$$b = (r_2 + r_1 + r_0) + 9q'.$$

Portanto, supondo sem perda de generalidade que $a < b$, temos que

$$b - a = 9(q' - q) = 9k.$$

Finalmente, para adivinhar o algarismo omitido na resposta do seu parceiro, basta descobrir o quanto devemos somar à soma dos dois dígitos divulgados para que tal soma seja divisível por 9.

Além dessas duas particularidades, podemos encontrar outras que envolvem diretamente o estudo de sistemas de numerações e divisibilidade. Motivados por essas *brincadeiras* comuns em redes sociais e rodas de amigos, onde um sabe a resposta e os demais não sabem diretamente o motivo por trás dessas, que é um estudo dos sistemas de numerações e divisibilidade com certas adaptações, realizamos este trabalho no qual relacionamos estes conteúdos, abordando-os em exercícios de olimpíadas e aplicações interessantes.

De modo a não tornar o texto extenso e de leitura cansativa, vamos supor que o leitor esteja familiarizado com algumas definições e propriedades estudadas nos cursos de Aritmética, no quesito Divisibilidade, Congruência e Sistemas de Numeração. Entretanto, para que o texto seja autocontido, os Teoremas e as Proposições necessários para a demonstração dos principais resultados farão parte das Preliminares deste trabalho.

Neste trabalho, não fazemos apenas uma dedução do critério de divisibilidade de um número escrito na base 10, por 9 ou por 11, utilizando sistemas de numerações. Aqui generalizamos este, para um caso geral de um número escrito em uma base $r \in \mathbb{N}$ ser ou não divisível por $(r - 1)$ ou por $(r + 1)$. Dessa generalização, seguem diretamente os critérios, para o caso em que o número esteja na base $r = 10$, o caso da divisibilidade por 9 e por 11.

Além das atividades interessantes pré-citadas, este trabalho é motivado por questões oriundas de olimpíadas, adaptadas para o nosso tema. Dentre elas destacamos:

Problema 1.1. Mostre que $2 \nmid (1120122)_3$, quando é representado na base 10.

Problema 1.2. Sobre qual condição o número $(abc)_6$ é divisível por 5?

Problema 1.3. Usando os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, construímos vários números de sete dígitos distintos. Existem dois deles, distintos, tais que um divida o outro?

Note que, nos dois primeiros problemas citados, estamos relacionando um número em uma certa base r com sua divisibilidade por $(r - 1)$ e/ou $(r + 1)$. O terceiro problema é bastante interessante e estará ligado ao estudo de congruência. Além de resolver tais questões, vamos provar nossos principais resultados e exemplificar, utilizando sistemas de numeração relacionando estes com divisibilidade, provando que são de grande relevância para o estudo de divisibilidade de um inteiro, escrito em uma certa base, por um número fixado.

De modo a tornar o texto autocontido, enunciaremos e demonstraremos alguns dos resultados utilizados neste trabalho, utilizando técnicas de indução e a familiaridade do leitor com as noções de aritmética e matemática discreta.

2. Preliminar

Antes de partimos para algumas proposições e resultados interessantes e que estão ligados aos principais resultados deste texto, vamos definir o que vem a ser um número estar escrito em uma certa base $\beta > 1$ qualquer. Dizemos que um número $\alpha \in \mathbb{R}_+$ está expresso na base β se ele é escrito na forma:

$$\alpha := (\alpha)_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n,$$

em que a_n são inteiros entre 0 e $(\beta - 1)$.

No que segue, vamos ilustrar o conceito de sistemas de numeração com dois exemplos, um mais simples e o segundo com um pouco mais de detalhes.

Exemplo 2.1. Considerando $\beta = 5$ vamos escrever o número 3421 na base 5. Nesse caso, temos que $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$ e $a_3 = 3$. Portanto:

$$(3421)_5 = 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0.$$

De onde segue que $(3421)_5 = (486)_{10} = 486$.

Ao analisarmos alguns problemas oriundos de olimpíadas que envolvem divisibilidade e sistema de numeração, deparamo-nos com a seguinte situação:

Observação 1. Note que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(a+1)^3 = (a+1) \cdot (a+1) \cdot (a+1).$$

Ao analisarmos o termo do lado direito da identidade anterior, verificamos que se trata de um produto de três termos idênticos, onde em cada um temos duas possibilidade de números a serem escolhidos, o número a e o 1. Não é difícil verificar que temos 8 possíveis escolhas dos números, já que são três produtos, com 2 elementos em cada a e 1. Para continuar com nossos propósitos, vamos listar as possibilidades a seguir:

$$\begin{array}{rcl}
a \cdot a \cdot a & = & a^3 \text{ onde escolhemos } (a, a, a) \\
a \cdot a \cdot 1 & = & a^2 \text{ onde escolhemos } (a, a, 1) \\
a \cdot 1 \cdot a & = & a^2 \text{ onde escolhemos } (a, 1, a) \\
a \cdot 1 \cdot 1 & = & a \text{ onde escolhemos } (a, 1, 1) \\
1 \cdot a \cdot a & = & a^2 \text{ onde escolhemos } (1, a, a) \\
1 \cdot a \cdot 1 & = & a \text{ onde escolhemos } (1, a, 1) \\
1 \cdot 1 \cdot a & = & a \text{ onde escolhemos } (1, 1, a) \\
1 \cdot 1 \cdot 1 & = & 1 \text{ onde escolhemos } (1, 1, 1)
\end{array}$$

Portanto, temos 8 termos dos quais os 7 primeiros são múltiplos de a e o último termo vale 1. E consequentemente,

$$(a+1)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 + 3 \cdot a + 1 = (a^2 + 3 \cdot a + 3) \cdot a + 1 = k \cdot a + 1,$$

onde $k = k(a) \in \mathbb{Z}$.

Se aumentarmos a potência, utilizando o mesmo raciocínio para $(a+1)^4$, vamos obter 16 elementos, dos quais 15 são múltiplos de a e um termo vale 1. Em um modo geral, $(a+1)^n$ possui 2^{n-1} múltiplos de a e um termo vale 1. Sobre tal perspectiva, vamos ao seguinte resultado

Proposição 1. *Sejam* $a \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então, existe* $k = k(a) \in \mathbb{Z}$ *tal que*

$$(a+1)^n = k \cdot a + 1.$$

Demonstração. Dá-se a demonstração utilizando o critério de indução sobre o natural n. Mais precisamente, temos que para $n = 1$, $(a+1)^1 = a \cdot 1 + 1$ e portanto o resultado é verdadeiro.

Suponha que

$$P(n) : (a+1)^n = k \cdot a + 1$$

seja verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que o mesmo é satisfeito para o sucessor de n, ou seja, $P(n+1) : (a+1)^{n+1} = \overline{k} \cdot a + 1$, para algum $\overline{k} \in \mathbb{Z}$.

Note que

$$\begin{aligned} (a+1)^{n+1} &= (a+1)^n \cdot (a+1)^1 \\ &= (k \cdot a + 1) \cdot (a+1) \\ &= k \cdot a^2 + k \cdot a + a + 1 \\ &= a \cdot (k \cdot a + k + 1) + 1 \\ &= \overline{k} \cdot a + 1, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Uma pergunta que cabe aqui é como seria se em vez de determinarmos o valor de $(a+1)^n$, procurássemos saber quanto vale $(b-1)^n$, para um número arbitrário $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Esse caso é um pouco mais detalhado, pois dependendo da paridade do natural n obtemos um resultado, e, para outra, um outro, devido à potenciação do termo negativo.

Para estudar tal caso, vamos realizar um estudo sobre o *Binômio de Newtow*. Claramente o binômio, tem relação direta com a **Proposição 1**, entretanto, na nossa pesquisa, não encontramos a demonstração da forma que segue.

Antes de o apresentarmos a demonstração do *Binômio de Newtow*, é necessário lembrar da definição de número binomial:

Definição 2.1 (Número Binomial). Tal número, que também representa a combinação simples de n elementos tomados k a k, é denotado por C_n^p ou $\binom{n}{p}$ e definido como:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ é o fatorial de $n \in \mathbb{N}$. Se $p < 0$ ou $p > n$, admitimos que $\binom{n}{p} = 0$ e por convenção denotamos $0! = 1$.

Proposição 2 (Binômio de Newton)**.** *Sejam* x *e* y *inteiros e* n *um natural. Então:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k \tag{2}$$

Demonstração. Para demonstrar esta expansão por Binômio de Newton, vamos precisar utilizar a seguinte relação, conhecida como Relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}. \tag{3}$$

Demonstração. A demonstração dessa identidade pode ser encontrada em Hefez [2]. □

Inicialmente, vamos escrever a expansão (2) :

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

A técnica utilizada será indução sobre a potência $n \in \mathbb{N}$. Para evitar qualquer contrariedade, a base de indução será verificada para $n = 0$ e $n = 1$

i) $[n = 0]$ Supondo que a soma $x + y \neq 0$, vemos que $(x+y)^0 = 1$ e, por outro lado, $\binom{n}{0}x^0 = 1$, donde segue que a base indutiva é satisfeita.

ii) $[n = 1]$ Para $n = 1$, temos que $(x+y)^1 = x + y$. Na expansão, temos que $\binom{1}{0}x^1 + \binom{1}{1}y^1 = x + y$, portanto o resultado é verdadeiro para $n = 1$.

A hipótese de indução será que o resultado é válido para um certo $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$(x+y)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y^1 + \ldots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + \binom{k}{k}y^k \tag{4}$$

e provar que continua sendo satisfeito para o sucessor $(k+1)$.

Inicialmente, vamos multiplicar (4) por $(x+y)$, obtendo:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)\cdot\left[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y^1 + \ldots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + \binom{k}{k}y^k\right] \\
(x+y)^{k+1} &= \left[\binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k y + \ldots + \binom{k}{k-1}x^2y^{k-1} + \binom{k}{k}xy^k\right] + \\
&+ \left[\binom{k}{0}x^k y + \binom{k}{1}x^{k-1}y^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}\right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Analisando os termos em (5), temos que, tirando o primeiro termo da expansão $\binom{k}{0}x^{k+1}$ e o último $\binom{k}{k}y^{k+1}$, os demais podem ser agrupados, da seguinte forma:

$$(x+y)^{k+1} = \left[\binom{k}{0}x^{k+1} + \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right)x^k y + \ldots + \left(\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right)xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}\right] \tag{6}$$

Aplicando a relação de Relação de Stifel (3) em cada um dos termos entre parênteses de (6) obtemos:

$$(x+y)^{k+1} = \left[\binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \ldots + \binom{k+1}{k}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}\right]. \tag{7}$$

Como $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1$ e $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$, então podemos substituir os mesmos em (7):

$$(x+y)^{k+1} = \left[\binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \ldots + \binom{k+1}{k}xy^k + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1}\right],$$

verificando assim a hipótese de indução. □

Segue diretamente da expansão dada em (2), para $x = a$ e $y = 1$, que

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k\\
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.\\
(a+1)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}(1)^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}(1)^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2(1)^{n-2} + \binom{n}{n-1}a(1)^{n-1} + \binom{n}{n}(1)^n
\end{aligned}$$

que, da **Proposição 1**, obtemos que $(a+1)^n = k(a)\cdot a + 1$. Nesse caso, não obtemos alteração com a paridade de n, pois o segundo membro da expansão (2), $y = 1$, é positivo. Para determinarmos o valor de $(b-1)^n$, para um número arbitrário $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar $x = b$ e $y = (-1)$ em (2), obtendo:

$$\begin{aligned}
(b-1)^n = [b+(-1)]^n &= \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}b^{n-1}(-1)^1 + \binom{n}{2}b^{n-2}(-1)^2 + \binom{n}{3}b^{n-3}(-1)^3 + \binom{n}{4}b^{n-4}(-1)^4 + \ldots\\
&+ \binom{n}{n-2}b^2(-1)^{n-2} + \binom{n}{n-1}b(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n
\end{aligned}$$

Analisando o termo do lado direito da última igualdade, verificamos que esse dependerá diretamente da paridade de n. Por exemplo, se $n = 4$ temos que

$$\begin{aligned}
(b-1)^4 &= \binom{4}{0}b^4 + \binom{4}{1}b^3(-1)^1 + \binom{4}{2}b^2(-1)^2 + \binom{4}{3}b^1(-1)^3 + \binom{4}{4}b^0(-1)^4\\
&= b^4 - 4b^3 + 6b^2 - 4b + 1,
\end{aligned}$$

de onde temos que os sinais dos coeficientes que multiplicam b alternam-se em positivos e negativos, com o último termo que multiplica b tem sinal negativo $(-4b)$ e o final somamos 1. De modo que, obtemos

$$(b-1)^4 = k_n(b)\cdot b + 1,$$

onde $k_n(b)$ depende de b e da paridade de n.

Supondo $n = 5$ temos que

$$\begin{aligned}
(b-1)^5 &= \binom{5}{0}b^5 + \binom{5}{1}b^4(-1)^1 + \binom{5}{2}b^3(-1)^2 + \binom{5}{3}b^2(-1)^3 + \binom{5}{4}b^1(-1)^4 + \binom{5}{5}b^0(-1)^5\\
&= b^5 - 5b^4 + 10b^3 - 10b^2 + 5b - 1.
\end{aligned}$$

Novamente, temos que o sinais dos coeficientes são alternados, e, aqui, o último termo que multiplica b tem sinal positivo (+5b) e subtraímos 1. De onde segue que

$$(b-1)^5 = \overline{k}_n(b) \cdot b - 1,$$

$\overline{k}_n(b)$ depende de b e da paridade de n. Utilizando este raciocínio e a demonstração da **Proposição 1**, somos capazes de provar o seguinte resultado:

Proposição 3. *Sejam* $b \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então, existe* $k = k_n(b) \in \mathbb{Z}$ *tal que*

$$(b-1)^n = k_n(b) \cdot b \pm 1,$$

onde $k_n(b)$ *depende de* b *e da paridade de* n. *Mais precisamente se* n *for par, temos que*

$$(b-1)^n = k_n(b) \cdot b + 1$$

e quando n *for ímpar*

$$(b-1)^n = \overline{k}_n(b) \cdot b - 1$$

O próximo exemplo irá utilizar algumas noções básicas de congruência modular. Mais precisamente, vamos precisar da seguinte definição:

Definição 2.2. Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se

$$a \equiv b \mod m.$$

Segue da *Definição 2.2* o seguinte resultado:

Proposição 4. *Sejam* $a, b, m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$. *Tem-se que* $a \equiv b \mod m$ *se, e somente se,* $m|(b-a)$.

Demonstração. A demonstração dessa identidade pode ser encontrada em Hefez [2]. □

Exemplo 2.2. Vamos encontrar os dois últimos algarismos, em representação decimal, do número 3^{200}.

Temos que um número real positivo a escrito na base 10, ou em representação decimal, é dado por:

$$a = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} \quad = \quad a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Como estamos atrás dos dois últimos algarismos desse número, vamos trabalhar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} &= 10^2(a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \dots a_2) + (10a_1 + a_0) \\ &= 100(a_n a_{n-1} \dots a_2)_{10} + (a_1 a_0)_{10}. \end{aligned} \tag{8}$$

Portanto, segue de (8), que para determinar os dois últimos algarismos de 3^{200} basta determinarmos o resto da divisão desse por 100, pois dai teremos $(a_1 a_0)_{10} = a_1 \cdot 10 + a_0$, onde a_1 é o algarismo das dezenas e a_0 da unidade.

Note que

$$3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100} = (10-1)^{100}.$$

Segue de (8), para $b = 10$ e $n = 100$, que

$$\begin{aligned}
(10-1)^{100} &= \binom{100}{0}10^{100} + \binom{100}{1}10^{99}(-1)^1 + \binom{100}{2}b^{98}(-1)^2 + \binom{100}{3}b^{97}(-1)^3 + \binom{100}{4}10^{96}(-1)^4 + \ldots \\
&+ \binom{100}{98}10^2(-1)^{98} + \binom{100}{99}b(-1)^{99} + \binom{100}{100}(-1)^{100} \\
&= 10^{100} - 100 \cdot 10^{99} + \frac{100 \cdot 99}{2!} \cdot 10^{98} - \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} \cdot 10^{97} + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{4!} \cdot 10^{96} - \ldots \\
&+ \frac{100 \cdot 99}{2!} \cdot 10^2 - 100 \cdot 10 + 1,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$3^{200} \equiv 1 \mod 100.$$

Portanto, temos que $(a_1a_0)_{10} = 0 \cdot 10 + 1$, de onde segue que os dois últimos algarismos desses número são 01.

Na próxima sessão, vamos enunciar e demonstrar os principais resultados do trabalho, bem como exemplificá-los de modo a tornar os resultados interessantes para o leitor.

3. Resultados Principais

Aqui se encontra a parte principal e a que, de certa forma, motivou a construção deste texto. Inicialmente, vamos construir a ideia do critério de divisibilidade por 9, utilizando dois problemas que geram um resultado com uma propriedade bastante curiosa, a qual é enunciada e demonstrada. Essa propriedade possibilitará a construção de um critério de divisibilidade de um número escrito numa base r por $(r-1)$. Além disso, também deduzimos um critério de divisibilidade de um número escrito numa base r por $(r+1)$, de onde segue o conhecido critério de divisibilidade por 11. Para tais construções, vamos começar com dois problemas, citados na introdução, de modo a motivar as deduções dos critério que serão demostrados

Problema 3.1. Mostre que $2 \nmid (1120122)_3$, quando esse é representado na base 10.

Solução 3.1. Antes de partir pra solução do problema propriamente dito, observe que estamos analisando um número na base $r = 3$ e verificando se é ou não divisível por $(r-1) = 2$.

Realizando a mudança de base do número $(1120122)_3$ para a base 10, temos

$$\begin{aligned}
(1120122)_3 &= 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \\
&= 729 + 243 + 162 + 9 + 6 + 2 \\
&= (1151)_{10} \qquad (9)
\end{aligned}$$

De fato, o número $(1151)_{10}$ não é divisível por 2.

Embora seja esse um problema simples, ele foi escolhido de forma conveniente para podermos conjecturar um padrão que relaciona o número escrito na base 3, com sua divisibilidade por 2.

Mais precisamente, vamos resolver o mesmo problema de outra forma. Primeiramente, vamos utilizar a **Proposição** 1 na decomposição de $(1120122)_3$. Reescrevendo esse número, temos que

$$\begin{aligned}
(1120122)_3 &= 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \\
&= 1 \cdot (2+1)^6 + 1 \cdot (2+1)^5 + 2 \cdot (2+1)^4 + 0 \cdot (2+1)^3 + 1 \cdot (2+1)^2 + 2 \cdot (2+1)^1 + 2
\end{aligned}$$

Pela **Proposição 1**, temos para cada potência de $(2+1)$, que existem inteiros $k_1, k_2, k_3, k_4 k_5$ e k_6 tais que

$$\begin{aligned}(102012)_3 &= 1\cdot(2\cdot k_1+1)+1\cdot(2\cdot k_2+1)+2\cdot(2\cdot k_3+1)+0\cdot(2\cdot k_4+1)+\\ &+ 1\cdot(2\cdot k_5+1)+2\cdot(2\cdot k_6+1)+2\\ &= 2\cdot(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6)+(1+1+2+0+1+2+2)\end{aligned} \tag{10}$$

Como $2\cdot(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6)$ é múltiplo de 2, então segue de (10) que $2 \mid (102012)_3$ se, e somente se, $2 \mid (1+1+2+0+1+2+2)$, o que não é verdade, já que $2 \nmid 9$.

O segundo problema em destaque irá ilustrar, de forma mais abstrata, o nosso resultado principal:

Problema 3.2. Sobre qual condição o número $(abc)_6$ é divisível por 5?

Solução 3.2. Fazendo a mudança de base do número $(abc)_6$ para a base 10, temos

$$\begin{aligned}(abc)_6 &= a\cdot 6^2+b\cdot 6^1+c\cdot 6^0\\ &= a\cdot(5+1)^2+b\cdot(5+1)^1+c\cdot(5+1)^0\end{aligned}$$

Portanto, pela **Proposição 1**, temos que existe $k_1 \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\begin{aligned}(abc)_6 &= a\cdot(5k_1+1)+b\cdot(5+1)+c\\ &= a\cdot 5\cdot k_1+a+b\cdot 5+b+c\\ &= 5(a\cdot k_1+b)+(a+b+c)\end{aligned} \tag{11}$$

Logo, segue de (11) que $(abc)_6$ será divisível por 5 se a soma $(a+b+c)$ for múltipla de 5. Note novamente que a soma $(a+b+c)$ é exatamente a soma dos algarismos do número $(abc)_6$. Essa propriedade não acontece por acaso, ela é generalizada no seguinte resultado:

Teorema 1. *Um número* a *escrito na base* $r \in \mathbb{N}$, $a = (a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0)_r$ *é divisível por* $(r-1)$ *se, e somente se, a soma* $(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$ *for divisível por* $(r-1)$*.*

Demonstração. Por hipótese, o número a representado na base r, ou seja,

$$a = (a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0)_r.$$

Reescrevendo a, temos que

$$\begin{aligned}a &= a_n(r)^n + a_{n-1}(r)^{n-1}+\cdots+a_1(r)^1+a_0(r)^0 \qquad (12)\\ a &= a_n[(r-1)+1]^n + a_{n-1}[(r-1)+1]^{n-1}+\cdots+a_1[(r-1)+1]^1+a_0.\end{aligned}$$

Note que, em (12), apenas reescrevemos a base numérica $r = (r-1)+1$.

Segue da **Proposição 1** que existem $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\begin{aligned}a &= a_n[k_n(r-1)+1]+a_{n-1}[k_{n-1}(r-1)+1]+\cdots+a_1[(r-1)+1]+a_0\\ a &= (r-1)(a_n k_n + a_{n-1}k_{n-1}+\cdots+a_1)+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)\end{aligned} \tag{13}$$

Em (13), aplicamos a distributiva e colocando o termo $(r-1)$ em evidência. Portanto, como o primeiro termo do lado direito de (13) é divisível por $(r-1)$, a será divisível por $(r-1)$ se, e somente se, a soma $(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$ for divisível por$(r-1)$. □

O critério de divisibilidade por 9 é, na verdade, um caso particular do **Teorema 1**, para o caso de $r = 10$. Mais precisamente,

Proposição 5. *Um número* $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)$ *escrito na base* 10 *é divisível por* 9 *se, e somente se a soma* $(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$ *for divisível por* 9.

Exemplo 3.1. Seja $(21101)_3$. Segue do **Teorema 1** que $(2 = 3-1) \mid (21101)_3$ se, e somente se, $2 \mid (2+1+1+0+1) = 5$. Como $2 \nmid 5$, então obrigatoriamente $2 \nmid (21101)_3$. Vamos verificar tal fato, realizando a expansão de $(21101)_3$ na base 10,

$$(21101)_3 = 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 199,$$

que claramente não é divisível por 2.

Nesse momento, vamos relacionar um número escrito em uma base r com sua divisibilidade por $(r+1)$, com o objetivo de obter um padrão, e, desse, para o caso $r = 10$, deduzirmos o critério de divisibilidade por 11. Mais precisamente, vamos ao seguinte resultado:

Teorema 2. *Um número* $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_r$ *é divisível por* $(r+1)$ *se, e somente se, a soma* $(a_n - a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0)$ *for divisível por* $(r+1)$.

Demonstração. De forma análoga à demonstração do **Teorema 1**, escrevemos um número arbitrário a na base r,

$$a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_r,$$

como:

$$\begin{aligned} a &= a_n (r)^n + a_{n-1}(r)^{n-1} + \cdots + a_1 (r)^1 + a_0 (r)^0 \\ &= a_n [(r+1)-1]^n + a_{n-1}[(r+1)-1]^{n-1} + \cdots + a_1 [(r+1)-1]^1 + a_0. \end{aligned} \tag{14}$$

Nesse caso, dividiremos o problema em duas situações, pra o caso onde o número tenha uma quantidade ímpar de algarismos, ou seja, quando n for ímpar e o outro caso, para n par. Mais precisamente, se n for um natural par segue da **Proposição 3** que

$$[(r+1)-1]^n = [k_n((r+1)) \cdot (r+1)] + 1$$

e se n for um natural ímpar, então

$$[(r+1)-1]^n = [\overline{k}_n((r+1)) \cdot (r+1)] - 1.$$

Sem perda de generalidade, supondo n ímpar, segue de (14) e da **Proposição 1**, que existem $k_1, \overline{k}_1, k_2, \overline{k}_2, \ldots, k_n, \overline{k}_n, \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\begin{aligned} a &= a_n [(r+1)-1]^n + a_{n-1}[(r+1)-1]^{n-1} + \ldots + a_1 [(r+1)-1]^1 + a_0 \\ &= a_n [\overline{k}_n \cdot (r+1) - 1] + a_{n-1}[k_{n-1}(r+1)+1] + a_{n-2}[\overline{k}_{n-2} \cdot (r+1) - 1] + \ldots + a_1 [(r+1)-1]^1 + a_0 \\ &= (r+1)[a_n \overline{k}_n + a_{n-1} k_{n-1} + a_{n-2}\overline{k}_{n-2} + \ldots + a_1] - [a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots + a_1 - a_0]. \end{aligned} \tag{15}$$

Como $(r+1)$ divide o primeiro termo da identidade (15), segue que a é divisível por $(r+1)$ se, e somente se, a soma $(a_n - a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0)$ for divisível por $(r+1)$. Fica a cargo do leitor verificar tal resultado supondo que n seja um natural par. □

Exemplo 3.2. Seja $(50431)_6$ um número escrito na base 6. Segue do **Teorema 2** que $(7 = 6+1) \mid (50431)_6$ se, e somente se, $7 \mid (5-0+4-3+1) = 7$. Como $7 \mid 7$, então obrigatoriamente $7 \mid (50431)_6$.

Vamos verificar que $7 \mid (50431)_6$, realizando a expansão de $7 \mid (50431)_6$ na base 10:

$$\begin{aligned}(50431)_6 &= 5\cdot 6^4 + 0\cdot 6^3 + 4\cdot 6^2 + 3\cdot 6^1 + 1\cdot 6^0\\ &= 6480 + 144 + 18 + 1\\ &= 6643\end{aligned}$$

e $6643 = 949 \cdot 7$.

Segue que o critério de divisibilidade por 11 é, na verdade, um caso particular do **Teorema 2**, para o caso de $r = 10$. Mais precisamente,

Proposição 6. *Um número* $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)$ *escrito na base* 10 *é divisível por* 11 *se, e somente se, a soma* $(a_n - a_{n-1} + \ldots - a_1 + a_0)$ *for divisível por* 11

Utilizando os **Teoremas 1 e 2**, vamos resolver dois problemas que, a princípio, não tem consonância com o conteúdo dos resultados, mas a resolução fica mais clara quando aplicamos os Teoremas.

Exemplo 3.3. Descubra o último número divisível por 11 menor que $a = 23412$.

Solução 3.3. Aplicando o critério de divisibilidade por 11, temos que $2-3+4-1+2 = 4$, como $11 \nmid 4$, então $11 \nmid 23412$. Agora, vamos verificar a divisibilidade por 11, dos números menores do que $a = 23412$.

Note que, denotando $a_1 = (a-1) = (23412) - 1 = 23411$, temos que

$$11 \mid a_1 \Leftrightarrow 11 \mid (2-3+4-1+1) = 3,$$

o que não é verdade. Para $a_2 = (a-2) = (23412) - 2 = 23410$,

$$11 \mid a_2 \Leftrightarrow 11 \mid (2-3+4-1+0) = 2$$

como $11 \nmid 2$, então $11 \nmid 23410$. Fazendo $a_3 = (a-3) = (23412) - 3 = 23409$,

$$11 \mid a_3 \Leftrightarrow 11 \mid (2-3+4-0+9) = 12$$

e, de $11 \nmid 12$, segue que $11 \nmid 23409$. Portanto, o último número menor do que 23412 que é divisível por 11 é $a_4 = 23408$, já que $(2-3+4-0+8 = 11)$ e $11|11$.

No exemplo que segue, vamos utilizar algumas definições, consequências e propriedades de congruência modular. Mais precisamente, vamos precisar do seguinte resultado:

Proposição 7. *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$ *e* $m, n, m_1, \cdots, m_r$ *inteiros maiores do que 1. Então, temos que*

i) Se $a \equiv b \mod m$ *e* $n|m$, *então* $a \equiv b \mod n$*;*

ii) $a \equiv b \mod m_i\ \forall i = 1, 2, \cdots r \Leftrightarrow a \equiv b \mod [m_1, \cdots, m_r]$*;*

iii) Se $a \equiv b \mod m$*, então* $(a, m) = (b, m)$*, onde* $(a.m)$ *denota o máximo divisor comum entre* a *e* m*, e* $[m_1, \cdots, m_r]$ *o mínimo múltiplo comum entre* $m_1, \cdots, m_r$

Demonstração. A demonstração desta Proposição pode ser vista em Hefez [2]. □

Exemplo 3.4. Usando os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, construímos vários números de sete dígitos distintos. Existem dois deles, distintos, tais que um divide o outro?

Solução 3.4. Suponha por absurdo que existam dois desses números inteiros distintos m e n que possuem 7 dígitos cada, tais que $m|n$. Sem perda de geralidade, podemos supor que $m < n$. Como $m|m$ e, por hipótese $m|n$, então segue diretamente que $m|(n - m)$.

Inicialmente, note que a soma dos algarismos $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ e $9 \nmid 28$, portanto $9 \nmid m$ e $9 \nmid n$, pois a soma dos algarismos de m e n são iguais a 28 e, caso $9 \mid m$ e $9 \mid n$, pelo critério de divisibilidade por 9, 9 deveria ter que dividir 28.

Por outro lado, como $28 \equiv 1 \mod 9$, então

$$\begin{aligned} m &\equiv 1 \mod 9 \\ n &\equiv 1 \mod 9 \\ n - m &\equiv 0 \mod 9 \Rightarrow 9|n - m \end{aligned} \tag{16}$$

usando o item *ii)* da Proposição (7) em (16), teremos

$$n - m \equiv 0 \mod [m, 9]$$

mas como $9 \nmid m$ e $m > 9$, então $\text{mdc}(m, 9) = 1$ o que implica $[m, 9] = 9m$, portanto $9m|n-m$, assim $n - m = 0$ que é impossível, pois $m \neq n$ ou $|9m| \leq |n - m|$, logo

$$\begin{aligned} |9m| &\leq |n - m| \\ 9m &\leq n - m \\ 10m &\leq n. \end{aligned} \tag{17}$$

Nesse caso (17) é absurdo, pois m e n possuem a mesma quantidade de algarismos, portanto $10m$ possuirá um algarismo a mais que n; na verdade temos que $10m \geq n$, ou seja, é absurdo supor a existência do m, n, tais que $m|n$.

4. Considerações Finais

Este trabalho inicia-se na elaboração de uma dissertação de mestrado profissional em matemática, com tema principal divisibilidade. Durante a elaboração do texto, nas demonstrações dos critérios de divisibilidade, deparamo-nos com o estudo de sistemas de numeração. Pesquisamos sobre trabalhos que relacionam os dois temas e não encontramos algo como pensávamos e daí surgiu a ideia de elaborar este texto.

Pesquisamos sobre questões que envolvessem os dois conteúdos divisibilidade e bases numéricas, encontramos diversos exemplos de questões e algumas *brincadeiras entre amigos*, em que no fundo as soluções baseavam-se em divisibilidade e sistemas de numeração.

Surgiu a ideia do texto e as demonstrações foram sendo formuladas juntamente com os resultados principais. Esperamos que este trabalho auxilie discentes e professores do ensino básico, médio e superior. Acreditamos que este texto contenha exemplos e conteúdos de suma importância no estudo de divisibilidades e sistemas de numeração e o pode ser suporte para a elaboração de outros trabalhos acadêmicos.

O autor deste artigo agradece a Propesq/UFT pelo apoio financeiro referente ao edital 05/2021.

Referências

[1] RIBEIRO, H. S; TÁBOAS, C. M. G. *RPM 06 - Sobre critério de divisibilidade.* São Carlos, SP, 2020.

[2] HEFEZ, Abramo. *Aritmética.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

[3] SILVA, T. P; *Critérios de divisibilidade: usuais, incomuns e curiosos.* Mestrado Profissional - PROFMAT, João Pessoa, PB, 2019.

[4] LOPES, D; *Bézout e Outros Bizus.* 18ª Semana Olímpica – São José do Rio Preto, SP, 2017.

[5] SANT'ANNA, I. K; *A Aritmética Modular como Ferramenta para as Séries Finais do Ensino Fundamental.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – Rio de Janeiro, RJ, 2013.

Thiago Rodrigues Cavalcante
Universidade Federal do Tocantins
<thiago.cavalcante@mail.uft.edu.br>

Rafael Pimenta Alves
Universidade Federal do Tocantins

Recebido: 12/04/2021
Publicado: 30/05/2022