PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.2, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1017

Determinante nulo e sistemas lineares

Claudemir Aniz   João Vitor Campos Torrezan

Resumo

A função determinante associa a toda matriz quadrada A o número det A, definido por meio de somas dos produtos de seus termos. Tal número carrega características da matriz, por exemplo, se $\det A \neq 0$, a matriz é invertível e sistemas lineares que têm os coeficientes dados por A têm uma única solução. A interpretação de $\det A = 0$ e suas consequências no conjunto solução de sistemas lineares são pouco exploradas em geral. Esse é o caso que abordaremos.

Palavras-chave: Combinação Linear; Regra de Cramer; Teorema de Laplace

Abstract

The determinant function associates to every square matrix A the number det A, defined through of sums of the products of its terms. Such number carries characteristics of the matrix, for example, if $\det A \neq 0$, the matrix is invertible and linear systems that has the coefficients given by A has a unique solution. The interpretation of $\det A = 0$ and its consequences in the solution set of linear systems are little explored in general. This is the case we will cover.

Keywords: Linear Combination; Cramer's Rule; Laplace's Theorem

1. Introdução

A Regra de Cramer é um método tradicional que fornece a única solução de um sistema linear quadrado por meio do uso de determinantes, no caso de a matriz dos coeficientes ter determinante diferente de zero. Se a matriz dos coeficientes tem determinante nulo é usual recorrer ao escalonamento para encontrar o conjunto solução. Essa mudança de procedimento gera a crença de que não é possível utilizar a teoria de determinantes para resolver sistemas lineares no segundo caso. Contrariando esse pensamento, na seção 5, apresentaremos um algoritmo para resolver alguns sistemas lineares com determinante da matriz dos coefiecientes nulos através de determinantes, cobrindo um pouco dessa lacuna. O algoritmo surge em decorrência da interpretação do determinante nulo, dada na seção 4. Para o entendimento deste artigo é necessário apenas o conhecimento da álgebra básica de matrizes, os demais pré-requisitos são apresentados na seção 2 e 3. Para finalizar, na seção 6, discutiremos o uso de determinantes para resolver também sistemas lineares não quadrados. Este trabalho contém partes do capítulo 3 de [4] e um dos seus objetivos é fornecer uma ferramenta adicional as técnicas usuais para a compreensão e resolução de sistemas lineares.

2. Propriedades do determinante

Em geral os livros apresentam as propriedades do determinante utilizando as linhas da matriz;

optamos por utilizar as colunas, por ser mais adequado ao objetivo deste artigo. As propriedades podem ser encontradas em [1, 4].

Para uma matriz real quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n, denotaremos por $A^{(j)}$ os seus vetores coluna, isto é,

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \text{ e escreveremos } A = \left[A^{(1)} \cdots A^{(n)}\right].$$

Propriedade 1. $\det A = \det A^t$, *onde* A^t *é a matriz transposta de* A.

A propriedade 1, garante que em todas as propriedades do determinante a palavra "coluna"pode ser substituída por "linha"e vice-versa.

Propriedade 2. *A função determinante é linear como função de cada coluna separadamente.*

i) $\det\left[A^{(1)} \cdots B^{(j)} + C^{(j)} \cdots A^{(n)}\right] = \det\left[A^{(1)} \cdots B^{(j)} \cdots A^{(n)}\right] + \det\left[A^{(1)} \cdots C^{(j)} \cdots A^{(n)}\right]$

ii) $\det\left[A^{(1)} \cdots \alpha \cdot A^{(j)} \cdots A^{(n)}\right] = \alpha \cdot \det\left[A^{(1)} \cdots A^{(j)} \cdots A^{(n)}\right]$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriedade 3. *Se uma matriz* A *tiver duas colunas iguais, então* $\det A = 0$.

Propriedade 4. *Se a matriz* B *é obtida da matriz* A *pela troca da ordem de duas colunas, então* $\det B = -\det A$.

Propriedade 5. **(Teorema de Laplace)** *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* n, $n \geq 2$. *O determinante de* A *é dado por:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \ \textit{para} \ j = 1, \ldots, n$$

ou

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \ \textit{para} \ i = 1 \ldots, n,$$

sendo a matriz A_{ij} *de ordem* $n-1$, *obtida da matriz* A *pela exclusão da* i-*ésima linha e* j-*ésima coluna.*

3. Sistemas lineares e Regra de Cramer

Definição 1. Sejam m e n números naturais maiores ou iguais a um. Um sistema linear S de ordem $m \times n$ é um conjunto de m equações lineares em n incógnitas, consideradas simultaneamente

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Uma n-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é uma *solução* de S, quando satisfaz simultaneamente todas as m equações. O *conjunto solução (CS)* de S é formado por todas as suas soluções.

Um sistema linear $m \times n$ é dito *homogêneo* quando todos os termos independentes são nulos, isto é, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. A n-upla $(0, 0, 0, ..., 0)$ é uma solução do sistema linear homogêneo, chamada *solução trivial*. Um sistema linear é dito *quadrado* quando o número de equações é igual ao número de incógnitas.

O sistema linear S pode ser expresso na forma matricial pela equação $A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$, onde A é a *matriz de coeficientes*, X a *matriz das incógnitas* e B a *matriz dos termos independentes*. Mais precisamente

$$S\ :\ \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

Outra maneira de apresentar o sistema linear S é o formato vetorial,

$$A^{(1)} \cdot x_1 + A^{(2)} \cdot x_2 + \cdots + A^{(n)} \cdot x_n = B.$$

Definição 2. Para matrizes de mesmo tamanho $D_1, D_2, \ldots, D_n$, E, dizemos que E é combinação linear de $D_1, D_2, \ldots, D_n$ se existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$D_1 \cdot \alpha_1 + D_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + D_n \cdot \alpha_n = E.$$

Do formato vetorial e da definição de combinação linear, o sistema linear S possui solução se, e somente se, a matriz B é combinação linear dos vetores coluna $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$.

Lema 1. *Se um sistema linear homogêneo* $A \cdot X = 0$ *possuir uma solução não trivial, então ele terá infinitas soluções.*

Demonstração. Seja $X_0 \neq 0$ uma solução de $A \cdot X = 0$. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, αX_0 é solução de $A \cdot X = 0$, dado que
$$A \cdot (\alpha \cdot X_0) = \alpha \cdot (A \cdot X_0) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Logo o conjunto solução CS_h de $A \cdot X = 0$ contém αX_0 para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. O fato de $\alpha_1 X_0 \neq \alpha_2 X_0$ sempre que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, implica que o conjunto formado pelos αX_0 com α percorrendo $\mathbb{R}$ é infinito. □

Lema 2. *Seja* $A \cdot X = B$ *um sistema linear e* $A \cdot X = 0$ *seu sistema homogêneo associado. Considere* CS *e* CS_h *os conjuntos solução desses sistemas, respectivamente. Se* X_0 *é uma solução particular de* $A \cdot X = B$ *então* $CS = X_0 + CS_h$*, onde* $X_0 + CS_h = \{X_0 + X' \mid X' \in CS_h\}$.

Demonstração. i) Provemos que $X_0 + CS_h \subset CS$. De fato, para $X_1 \in X_0 + CS_h$ existe $X' \in CS_h$ tal que $X_1 = X_0 + X'$. A igualdade

$$A \cdot (X_0 + X') = A \cdot X_0 + A \cdot X' = B + 0 = B,$$

acarreta que $X_1 \in CS$.

ii) Provemos que $CS \subset X_0 + CS_h$. Se $X_2 \in CS$, então

$$A \cdot (X_2 - X_0) = A \cdot X_2 - A \cdot X_0 = B - B = 0.$$

Portanto $X_2 - X_0 \in CS_h$ e $X_2 = X_0 + (X_2 - X_0) \in X_0 + CS_h$.

De (i) e (ii), segue a igualdade dos conjuntos CS e $X_0 + CS_h$. □

Proposição 1. *Se um sistema linear* $A \cdot X = B$ *possuir duas soluções distintas, então ele terá infinitas soluções.*

Demonstração. Sejam X_0 e X_1 soluções distintas de $A \cdot X = B$, então

$$A \cdot (X_0 - X_1) = A \cdot X_0 - A \cdot X_1 = B - B = 0,$$

ou seja, $X_0 - X_1 \in CS_h$ e $X_0 - X_1 \neq 0$. Pelo lema 1, o conjunto CS_h é infinito, e pelo lema 2, $CS = X_0 + CS_h$, também é infinito. □

Como consequência da proposição 1, há três possibilidades para o conjunto solução de um sistema linear:

i) *Sistema possível e determinado*, quando possuir uma única solução;

ii) *Sistema possível e indeterminado*, quando possuir infinitas soluções;

iii) *Sistema impossível*, quando não possuir solução.

Para um sistema linear $A \cdot X = B$, quadrado de ordem n, a matriz A_j denotará a matriz obtida de A substituindo a j-ésima coluna por B.

Proposição 2. (Regra de Cramer) *Se* $\det A \neq 0$*, então o sistema linear* $A \cdot X = B$ *possui uma única solução, sendo dada por:*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

4. Determinante nulo

A Regra de Cramer é um resultado clássico que garante a existência de uma única solução quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Porém, se o determinante da matriz dos coeficientes for nulo, não é possível classificar o conjunto solução apenas com tal informação. Um erro comum entre estudantes e professores, e até mesmo presente em livros didáticos, é classificar um sistema linear $A \cdot X = B$ que possui $\det A = 0$ e $\det A_1 = \det A_2 = \cdots = \det A_n = 0$, como sistema possível e indeterminado. Segundo Elon Lages Lima [3], isso acontece porque pela Regra de Cramer, sob essas hipóteses, a solução do sistema seria $X_0 = \left(\frac{0}{0}, \cdots, \frac{0}{0}\right)^t$, e como $\frac{0}{0}$ é uma indeterminada diz-se, erroneamente, que o sistema é possível e indeterminado. O exemplo a seguir comprova a falsidade de tal afirmação.

Exemplo 1. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

Note que $\det A = \det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = 0$, pois estas matrizes possuem duas linhas iguais. Porém, esse sistema é impossível, dado que

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot (x + y + z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e não existe $x + y + z \in \mathbb{R}$ que satisfaça tal igualdade.

Na linguagem da matemática, o exemplo mostra que a hipótese $\det A = \det A_1 = \cdots = \det A_n = 0$ não é suficente para garantir que o sistema é possível e indeterminado. Porém, elas são necessárias conforme o próximo resultado.

Proposição 3. *Seja* $A \cdot X = B$ *um sistema linear de ordem* n *tal que* $\det A = 0$*. Se* $A \cdot X = B$ *tem solução, então* $\det A_1 = \det A_2 = \cdots = \det A_n = 0$.

Demonstração. Seja $X_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ uma solução de $A \cdot X = B$, ou seja,

$$\alpha_1 \cdot A^{(1)} + \alpha_2 \cdot A^{(2)} + \cdots + \alpha_n \cdot A^{(n)} = B.$$

Pela linearidade da função determinante em cada coluna,

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \det \begin{bmatrix} B & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot A^{(1)} + \alpha_2 \cdot A^{(2)} + \cdots + \alpha_n \cdot A^{(n)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} \\ &= \alpha_1 \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(2)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} \\ &+ \cdots + \alpha_n \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(n)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como matrizes com duas colunas iguais tem determinante nulo, então $\det A_1 = \alpha_1 \cdot \det A = 0$. Analogamente, $\det A_2 = \cdots = \det A_n = 0$. □

A proposição 3 fornece um critério para detectar sistemas impossíveis no caso de a matriz dos coeficientes ter determinante nulo.

Corolário 1. *Seja* $A \cdot X = B$ *um sistema linear de ordem* n *e* $\det A = 0$*. Se existir* $j \in \{1, ..., n\}$ *tal que* $\det A_j \neq 0$*, então* $A \cdot X = B$ *não tem solução.*

Exemplo 2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ -3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Nesse caso, $\det A = 0$ e $\det A_1 = -35$. Portanto, pelo corolário 1, o sistema linear é impossível.

Teorema 1. *Se a matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* n *é tal que* $\det A = 0$ *e* $\det A_{ij} \neq 0$ *para algum* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*, então* j*-ésima coluna de* A*, é combinação linear das outras colunas.*

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, $i = j = n$, e provar que a n-ésima coluna é combinação linear das demais colunas. Partindo de $\det A_{nn} \neq 0$, pela Regra de Cramer existem únicos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ reais tais que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{(n-1)n} \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{aligned} a_{1n} &= a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1(n-1)}\lambda_{n-1} \\ a_{2n} &= a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2(n-1)}\lambda_{n-1} \\ &\vdots \\ a_{(n-1)n} &= a_{(n-1)1}\lambda_1 + a_{(n-1)2}\lambda_2 + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\lambda_{n-1} \end{aligned}$$

Provemos que $a_{nn} = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{n(n-1)}\lambda_{n-1}$. Como $\det A = 0$, o Teorema de Laplace utilizado na n-ésima linha, fornece

$$\sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot (-1)^{n+j} \cdot \det A_{nj} = 0 \tag{1}$$

Vamos agora analisar o determinante da primeira parcela deste somatório. Note que

$$\det A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix},$$

ou ainda,

$$\det A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1(n-1)}\lambda_{n-1} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2(n-1)}\lambda_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)1}\lambda_1 + a_{(n-1)2}\lambda_2 + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\lambda_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pelas propriedades 2 e 3, temos:

$$\det A_{n1} = \lambda_1 \cdot \det \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)1} \end{vmatrix}$$

Podemos então realizar $n-2$ trocas ordenadas entre as colunas, duas a duas da direita para a esquerda, de modo que, considerando tais trocas:

$$\det A_{n1} = \lambda_1 \cdot (-1)^{n-2} \cdot \det A_{nn}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, e fazendo as trocas necessárias, obtemos

$$\begin{aligned} \det A_{n2} &= \lambda_2 \cdot (-1)^{n-3} \cdot \det A_{nn} \\ \det A_{n3} &= \lambda_3 \cdot (-1)^{n-4} \cdot \det A_{nn} \\ &\vdots \\ \det A_{n(n-1)} &= \lambda_{n-1} \cdot (-1)^{0} \cdot \det A_{nn} \end{aligned}$$

Da equação (1),

$$\begin{aligned} a_{n1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \lambda_1 \cdot (-1)^{n-2} \cdot \det A_{nn} &\quad + \\ a_{n2} \cdot (-1)^{n+2} \cdot \lambda_2 \cdot (-1)^{n-3} \cdot \det A_{nn} &\quad + \\ a_{n3} \cdot (-1)^{n+3} \cdot \lambda_3 \cdot (-1)^{n-4} \cdot \det A_{nn} &\quad + \\ \cdots &\quad + \\ a_{n(n-1)} \cdot (-1)^{n+n-1} \cdot \lambda_{n-1} \cdot (-1)^{0} \cdot \det A_{nn} &\quad + \\ a_{nn} \cdot (-1)^{n+n} \det A_{nn} &\quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Colocando $\det A_{nn} \neq 0$ em evidência e simplificando,

$$a_{n1} \cdot \lambda_1 \cdot (-1)^{2n-1} + a_{n2} \cdot \lambda_2 \cdot (-1)^{2n-1} + \cdots + a_{n(n-1)} \cdot \lambda_{n-1} \cdot (-1)^{2n-1} + a_{nn} \cdot (-1)^{2n} = 0.$$

Como $(-1)^{2n-1} = -1$ e $(-1)^{2n} = 1$, então

$$a_{nn} = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{n(n-1)}\lambda_{n-1}.$$

Portanto, a n-ésima coluna de A é combinação linear das demais colunas de A. Caso tenhamos $\det A_{ij} \neq 0$ com $i \neq n$ ou $j \neq n$ podemos trocar ordenadamente, duas a duas, na matriz A as linhas ou as colunas, respectivamente, de modo que a linha i fique na linha n ou a coluna j fique na coluna n, processo que transformará A em A', onde $A'_{nn} = A_{ij}$ e $\det A' = \det A = 0$. □

A demonstração do teorema 1 traz como informação adicional que na combinação linear

$$\lambda_1 A^{(1)} + \cdots + \lambda_{j-1} A^{(j-1)} + \lambda_{j+1} A^{(j+1)} + \cdots + \lambda_n A^{(n)} = A^{(j)} \tag{2}$$

os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots \lambda_n$ são únicos e dados pela Regra de Cramer.

Corolário 2. *Se a matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* n *é tal que* $\det A = 0$ *e* $\det A_{ij} \neq 0$ *para algum* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*, então o sistema linear* $A \cdot X = 0$ *é possível e indeterminado.*

Demonstração. A equação (2) significa que a n-upla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, -1, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ é uma solução de $A \cdot X = B$, dado que

$$\lambda_1 A^{(1)} + \cdots + \lambda_{j-1} A^{(j-1)} - A^{(j)} + \lambda_{j+1} A^{(j+1)} + \cdots + \lambda_n A^{(n)} = 0.$$

Pelo lema 1, $A \cdot X = 0$ é possível e indeterminado. □

O teorema 1 e o corolário 2 podem ser enunciados com algumas adequações retirando da hipótese a condição $\det A_{ij} \neq 0$, como foi feito em [2], capítulo 1, teorema 13, sem a utilização da teoria de determinante. Como o objetivo aqui é explorar o uso de determinantes na resolução de sistemas lineares, optamos por acrescentar esta hipótese, pois ela torna as demonstrações mais claras, não constitui uma restrição que invalida a solução da maioria dos sistemas lineares do cotidiano do ensino médio e fornece um algoritmo para resolvê-los.

Proposição 4. *Seja* $A \cdot X = B$ *um sistema linear de ordem* n *tal que* $\det A = 0$. *Se* $\det A_{ij} \neq 0$ *e* $\det A_j = 0$, *então* $A \cdot X = B$ *é um sistema possível e indeterminado.*

Demonstração. De $\det A_{ij} \neq 0$ e $\det A_j = 0$, segue do teorema 1, que existem números reais únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n$ tais que

$$\lambda_1 A^{(1)} + \cdots + \lambda_{j-1} A^{(j-1)} + \lambda_{j+1} A^{(j+1)} + \cdots + \lambda_n A^{(n)} = B$$

Assim, a n-upla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, 0, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n)$ é uma solução do sistema $A \cdot X = B$. O fato de $\det A = 0$, juntamente ao lema 2 e ao corolário 2, permite concluir que o sistema linear $A \cdot X = B$ é possível e indeterminado. □

Na proposição 4, a hipótese $\det A_{ij} \neq 0$ é essencial para garantir que o sistema tenha solução, visto que, no exemplo 1 a matriz dos coeficientes não satisfaz tal condição e o sistema não tem solução mesmo tendo $\det A_j = 0$ para $j = 1, 2, 3$.

Teorema 2. *Suponha* $\det(A) = 0$ *e* $\det A_{ij} \neq 0$ *para algum* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. *O sistema linear* $A \cdot X = B$ *é possível e indeterminado se, e somente se,* $\det A_j = 0$.

Demonstração. Pela proposição 4, se $\det A_j = 0$, então o sistema linear $A \cdot X = B$ é possível e indeterminado. Pela proposição 3, se $A \cdot X = B$ tem solução, então $\det A_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. □

O raciocínio usado na demonstração do teorema 1, dá-nos um método para resolver alguns sistemas lineares quadrados com determinante da matriz dos coeficientes nulo usando determinantes.

Exemplo 3. Considere o sistema linear

$$S : \begin{cases} 5x + 6y + 7z = 8 \\ -3x - 2y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Cálculos de rotina produz,

$$\det A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0, \quad \det A_{33} = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0 \text{ e } \det A_3 = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

Pela proposição 4, o sistema S é possível e indeterminado. Para cada $z \in \mathbb{R}$, o sistema linear S' nas incógnitas x e y é possível e determinado pois $\det A_{33} \neq 0$.

$$S' : \begin{cases} 5x + 6y = 8 - 7z \\ -3x - 2y = z \end{cases}$$

Aplicando a Regra de Cramer em S',

$$\det(A_{33})_1 = \det\begin{bmatrix} 8-7z & 6 \\ z & -2 \end{bmatrix} = 8z-16 \implies x = \frac{\det(A_{33})_1}{\det A_{33}} = \frac{8z-16}{8} = z-2$$

$$\det(A_{33})_2 = \det\begin{bmatrix} 5 & 8-7z \\ -3 & z \end{bmatrix} = 24-16z \implies y = \frac{\det(A_{33})_2}{\det A_{33}} = \frac{24-16z}{8} = 3-2z$$

Assim, o terno $(z-2, 3-2z, z)$ é solução da primeira e da segunda equação de S, para qualquer valor de z. Por fim, a demonstração do teorema 1 garante que essas soluções irão satisfazer também a terceira equação, pois

$$\det\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7z-8 \\ -3 & -2 & -z \\ 1 & 2 & 3z-4 \end{bmatrix} = z \cdot \det\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 5 & 6 & -8 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} = 0$$

Portanto, o conjunto solução de S é $\{(z-2, 3-2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

5. Algoritmo

Seja $S: A \cdot X = B$ um sistema linear quadrado de ordem n tal que $\det A = 0$ e $\det A_{ij} \neq 0$ para algum $i,\ j \in \{1, \ldots, n\}$.

i) Se $\det A_j \neq 0$, o sistema S é impossível.

ii) Se $\det A_j = 0$, o sistema S é possível e indeterminado e para encontrar seu conjunto solução, seguimos os seguintes passos:

(a) Seja $S_1 : A' \cdot X = B'$ o sistema linear obtido de S pela exclusão da i-ésima equação.

(b) Seja $S_2 : A'' \cdot X = B''$ o sistema de ordem $n-1$, sendo A'' obtida de A' pela exclusão da j-ésima coluna e $B'' = B' - (A')^j x_j$.

(c) Use a Regra de Cramer para determinar a solução do sistema S_2 em função da incógnita x_j.

(d) O conjunto solução de S será $\{(x_1(x_j), \ldots, x_{j-1}(x_j), x_j, x_{j+1}(x_j) \ldots, x_n(x_j)) | x_j \in \mathbb{R}\}$.

A definição de determinante garante que $x_k(x_j)$ para $k \neq j$ são funções afins na variável x_j. A escolha de A_{ij} não é única, mas não altera o conjunto solução do sistema linear; para exemplificar, vamos resolver o sistema linear S do exemplo 3 escolhendo a submatriz A_{32}. Nesse caso,

$$S_2 : \begin{cases} 5x + 7z = 8 - 6y \\ -3x - z = 2y \end{cases}$$

Aplicando a Regra de Cramer em S_2,

$$\det(A_{32})_1 = \det\begin{bmatrix} 8-6y & 7 \\ 2y & -1 \end{bmatrix} = -8y-8 \implies x = \frac{\det(A_{32})_1}{\det A_{32}} = \frac{-8y-8}{16} = \frac{-1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$\det(A_{32})_2 = \det\begin{bmatrix} 5 & 8-6y \\ -3 & 2y \end{bmatrix} = -8y+24 \implies z = \frac{\det(A_{32})_2}{\det A_{32}} = \frac{-8y+24}{16} = \frac{-1}{2}y + \frac{3}{2}$$

Assim, o conjunto solução de S é $\left\{\left(\frac{-1}{2}y - \frac{1}{2}, y, \frac{-1}{2}y + \frac{3}{2}\right) \mid y \in \mathbb{R}\right\}$. Note que a escolha de sub-matrizes diferentes pode gerar conjuntos soluções com apresentações distintas (aparência), mas representam o mesmo conjunto.

6. Considerações finais

A interpretação de $\det A = 0$ dada pelo teorema 1 é o resultado central deste artigo e pode ser usado para resolver também sistemas lineares não quadrados usando determinantes. Considere o sistema linear

$$S : \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = 1 \\ 4x + 5y + 6z + 9t = 1 \\ 7x + 8y + 9z + 15t = 1 \end{cases}$$

O sistema linear nas incógnitas x e y

$$S' : \begin{cases} x + 2y = 1 - 3z - 3t \\ 4x + 5y = 1 - 6z - 9t \end{cases}$$

possui uma única solução para cada z e t fixados, pois $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -3$. A Regra de Cramer aplicada a S' dá-nos, $x = -1 + z - t$ e $y = 1 - 2z - t$. O fato de

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-3z-3t \\ 4 & 5 & 1-6z-9t \\ 7 & 8 & 1-9z-15t \end{bmatrix} = \underbrace{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}}_{0} + z \cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}}_{0} + t \cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -9 \\ 7 & 8 & -15 \end{bmatrix}}_{0} = 0$$

garante que x e y são soluções automaticamente da terceira equação de S. Assim, o conjunto solução de S é $\{(-1 + z - t, 1 - 2z - t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$.

Agradecimentos

Este trabalho foi feito com o suporte da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. O segundo autor contou com o apoio da Capes, Brasil, Código de Financiamento 001.

Referências

[1] Hefez, A. e Fernandez, C. F. *Introdução à Álgebra Linear*. Coleção Profmat, SBM, 2016.

[2] Hoffman, H. e Kunze, R. *Álgebra Linear*. Segunda edição, Tradução de Renate Watanabe, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

[3] Lima, E. L. "Sobre o Ensino de Sistemas Lineares". *Revista do Professor de Matemática*, RPM 23, p.8-18, 1993.

[4] Torrezan, J. V. C. *Determinante - Teoria e Aplicações*. Dissertação do Profmat, UFMS-Campo Grande, 2020.

Claudemir Aniz
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS
<claudemir.aniz@ufms.br>

João Vitor Campos Torrezan
Faculdade Novoeste, Campo Grande, MS
<professorjoao96@hotmail>

Recebido: 10/12/2021
Publicado: 03/06/2022