PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.2, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1020

# Parábolas versus logaritmos: intersecções

José Carlos Magossi     Antônio César da Costa Barros

**Resumo**

Uma pergunta muito comum entre alunos universitários é: *Por que estudar Cálculo?* Nos dias de hoje, mesmo com todas as tecnologias que se apresentam, essa pergunta ainda se torna frequente, e sua resposta, mais complicada, haja vista que nem sempre é fácil esclarecer a conexão entre uma determinada tecnologia e a matemática necessária para implementá-la. Do lado da matemática a situação é semelhante, nem sempre é fácil determinar qual é a matemática necessária para solucionar um determinado problema. Neste artigo expõe-se um problema sobre a intersecção entre parábolas e logaritmos, para o qual, no sentido geométrico, a percepção da solução é rapidamente visualizada, sem a necessidade de conhecimento matemático. No entanto, para mostrar que essa intuição visual coincide com a resposta correta, deve-se necessariamente considerar a matemática ensinada nos cursos de Cálculo. Isso abre espaço para discussões acerca do ensino de Cálculo e também das diferenças entre a matemática vista no ensino médio e aquela vista na universidade.

**Palavras-chave:** cálculo; intuição geométrica; ensino; intersecção de curvas.

**Abstract**

A very common question among university students is: *Why study Calculus?* Nowadays, even with all the current technologies, this question still becomes frequent, and its answer more complicated, since it is not always easy to clarify the connection between a given technology and the mathematics necessary to implement it. From the point of view of mathematics the situation is similar, it is not always easy to determine which mathematics is necessary to solve a given problem. In this article we present a problem about the intersection between parabolas and logarithms in which, in the geometric sense, the perception of the solution is quickly visualized, without the need to know mathematics. However, to show that this visual intuition coincides with the correct answer, one must necessarily consider the mathematics taught in Calculus courses. This opens space for discussions about the teaching of Calculus and also the differences between the mathematics seen in high school and the one seen in university.

**Keywords:** calculus; geometric intuition; teaching; intersecting curves.

## 1. Introdução

Uma questão que vez ou outra vem à tona é: Por que é preciso estudar Cálculo? Acredita-se que sua importância e necessidade sejam, nos dias de hoje, bem aceitas, haja vista a realidade de toda a tecnologia presente na sociedade moderna, o que de certa forma justifica a existência da "matemática aplicada". Mas, por mais que possamos utilizar aparelhos de telefonia celular, viajar de avião, utilizar ressonância magnética, construir edifícios, viajar ao espaço etc., ainda fica uma pontinha de dúvida sobre a relevância da matemática, uma vez que não é simples mensurar o quanto de matemática se tem em cada tecnologia. Há muitos "serve para isso" que poderiam ser utilizados para responder a essa pergunta, e há inúmeros fatores que se inserem nos "porquês" das dificuldades em estudar Cálculo. Neste artigo, opta-se por uma estratégia que se volta a outras perguntas. Como resolver problemas sem as ferramentas do Cálculo? A matemática do ensino médio dá conta de resolver os problemas que nos são apresentados? Estaríamos em apuros no quesito "problemas de matemática e tecnologia", caso não tivéssemos à disposição a matemática do Cálculo, diga-se, *Cálculo Diferencial e Integral*? Para auxiliar na resposta dessas perguntas, mostra-se um simples exemplo de um problema matemático, uma discussão sobre um problema geométrico que, com a matemática do ensino médio, teria uma solução bem difícil, talvez impossível, mas, com a matemática do Cálculo, ela se torna acessível. Mais ainda, é um problema que, no sentido da intuição geométrica, tem a solução rapidamente visualizada, mesmo para quem não conhece matemática. No entanto, essa visualização geométrica de uma propensa resposta não garante correção, pois, para alcançar uma resposta com rigor, torna-se necessário lançar mão das ferramentas de uma matemática contínua, própria dos cursos de Cálculo. Com isso, justifica-se que a matemática do ensino médio é necessária para um bom acompanhamento dos cursos de Cálculo, mas ela não é suficiente [5]. Nessa mesma esteira, pode-se argumentar que a matemática do ensino médio é necessária para o avanço tecnológico, mas também não é suficiente, haja vista as inúmeras tecnologias que se fundamentam em uma matemática mais sofisticada que a do ensino médio. A exposição neste texto tem um viés matemático cujo objetivo é mostrar como as ferramentas matemáticas presentes em um curso de Cálculo, de funções de uma variável real, podem ser utilizadas na solução de problemas aparentemente simples.

## 2. Parábolas e logaritmos: propriedades

O gráfico da função $y = x^2$ é uma parábola que corta o eixo x em $x = 0$, no ponto $(0, 0)$. Essa função é clássica na literatura e apresenta-se sob muitas formas na matemática do ensino médio [4]. Sua versão mais geral tem a forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Para determinar suas raízes leva-se em conta a famosa fórmula de Bhaskara: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Com as parábolas iniciam-se também os primeiros passos na determinação de pontos em que a função tem seu valor máximo (caso em que a parábola tem concavidade para baixo) e pontos em que a função tem seu valor mínimo (caso em que a parábola tem concavidade para cima), isto é, busca-se pelo ponto que representa o vértice $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ da parábola. Por outro lado, logaritmos (e diga-se, sua contraparte, a função exponencial $y = e^x$) também são clássicos na literatura e na matemática do ensino médio [4]. A função $y = \log_a x$ é a função logarítmica, em que $0 < x \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. As propriedades clássicas da função logarítmica são estudadas no colégio e podem ser observadas em [3, 4], tais como $\log x^\alpha = \alpha \log x$, $\log x + \log y = \log(x.y)$ e $\log x - \log y = \log(\frac{x}{y})$. Além disso, se $a > 1$, a função logarítmica é uma função crescente que corta o eixo dos x em $x = 1$, caso em que $\log 1 = 0$. Os logaritmos podem ser escritos em bases diferentes da base 10, tais como $y = \log_2 x$ e $y = \log_e x$ (isto é, $y = \ln x$). Nota-se também que a função $y = \ln x$ tem sua concavidade voltada para baixo, isto é, o ponto médio de qualquer corda (reta secante) da curva $y = \ln x$ encontra-se abaixo, ou sobre a curva $y = \ln x$. Com base nisso, para logaritmos na base e, isto é, para $y = \ln x$, tem-se uma importante desigualdade, $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$, para todo $x > 0$, que auxilia na dedução do número e ([4], p.201).

## 3. Parábolas e logaritmos: uma visão intuitiva

Na sequência, apresenta-se um problema matemático cuja formulação é simples e prepara-se o raciocínio para uma extensão sua, mais complicada, cuja solução pode ser obtida com base na matemática ensinada em cursos de Cálculo, num sistema de números reais.

**Problema 1):** Quais são os pontos de intersecção, se existirem, entre a parábola $y = x^2$ e a função logarítmica, na base e, $y = \ln x$?

O gráfico da função $y = x^2$ e o da função $y = \ln x$ podem ser observados na figura 1. Com base nessa figura, e também em uma simples análise de valores de ambas as funções, é possível inferir que o gráfico de $y = x^2$ não cruza o gráfico da função $y = \ln x$. Isso significa que $x^2 = \ln x$ é uma equação cuja solução em $\mathbb{R}$ é o conjunto vazio. Essa solução pode ser avalizada, no sentido da intuição geométrica, no sentido visual, sem a necessidade *a priori* de conhecimento matemático.

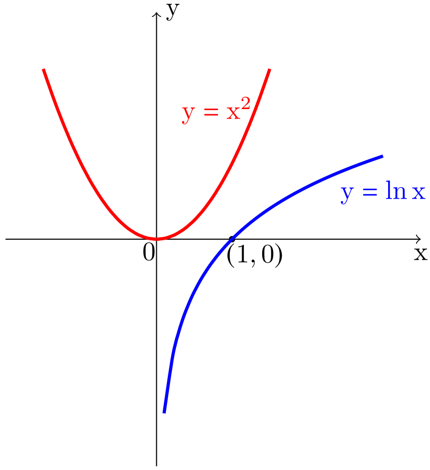


Figura 1: Gráficos de $y = \ln x$ e $y = x^2$

Ao observar o gráfico da figura 1, é possível notar, com base na intuição geométrica, que, se a parábola tiver sua concavidade mais aberta, existirá intersecção com a função logarítmica. Mais ainda, como essa abertura é arbitrária, pode-se deduzir que existem infinitas parábolas, do tipo $y = kx^2$, que têm intersecção com a função $y = \ln x$, para algum valor apropriado de $0 < k \in \mathbb{R}$.

Como identificar os pontos de intersecção entre as parábolas do tipo $y = kx^2$ e a função logarítmica $y = \ln x$? Mais ainda, qual seria o valor de k para que haja um único ponto de intersecção?

Indica-se uma solução para essas perguntas ao considerar, tal como nos cursos de Cálculo, a existência da derivada de uma função de números reais, e tendo em conta que a derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto $(a, f(a))$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. Essa inclinação [2], que substitui a inclinação da curva $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ pela inclinação da reta tangente à $y = f(x)$ em $(a, f(a))$, pode ser vista como a derivada de $f(x)$ em $x = a$. O conceito de derivada, brevemente exposto nestas linhas, é a grande contribuição de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), em fins do século XVII, que fez com que eles sejam considerados os inventores do Cálculo [1].

### 3.1. Intersecção de uma reta com a função logarítmica

Antes de abordar o problema principal desse artigo, qual seja intersecção entre parábola e logaritmo, inicia-se, como preparação de raciocínio, a investigação da intersecção entre uma reta e a função logarítmica.

No sentido intuitivo e geométrico é possível estimar que a reta $r(x) = mx$ cruza a função logarítmica em vários pontos, de acordo com a inclinação da reta $r(x) = mx$, ou seja, de acordo com o valor da constante $m \in \mathbb{R}$. Há, no entanto, um ponto em que essa reta é tangente à curva logarítmica, isto é, há um único ponto de intersecção[1]. Essa intersecção ocorre quando a inclinação da reta $r(x) = mx$ coincide com a inclinação da reta $g(x) = \ln x$. Nesse caso, a inclinação da reta $r(x) = mx$ é dada pelo seu coeficiente angular, isto é, pelo valor $m$. A inclinação da curva $g(x) = \ln x$, em $x = c$, é dada pela derivada $g'(c)$. Assim, como $g'(x) = \frac{1}{x}$, tem-se então que $g'(c) = \frac{1}{c}$. Portanto, a reta $r(x) = mx$ e a curva $g(x) = \ln x$ terão a mesma inclinação no caso em que $\frac{1}{c} = m$. Tendo em conta que a reta e a curva têm um ponto de intersecção em $x = c$, então, como $m = \frac{1}{c}$, tem-se:

$$r(c) = g(c) \quad \Rightarrow \quad mc = \ln c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}.c = \ln c \quad \Rightarrow \quad 1 = \ln c \quad \Rightarrow \quad c = e^1 = e.$$

Assim, para $m = \frac{1}{e}$ a reta $r(x) = mx$ e a curva $g(x) = \ln x$ terão a mesma inclinação e, além disso, um único ponto de intersecção em $x = e$, conforme pode ser observado na figura 2. Para $x = e$ tem-se que $r(e) = g(e) = 1$.

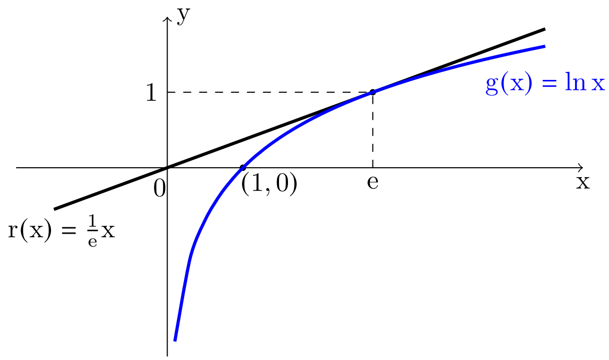


Figura 2: Gráficos de $y = \ln x$ e $y = \frac{1}{e}x$

O objetivo da discussão nesta seção foi o de preparar o raciocínio para as perguntas que virão na sequência, perguntas sobre a intersecção não de retas e logaritmos, mas entre parábolas e logaritmos.

## 4. Parábolas e logaritmos: intersecção

É possível notar, com base no sentido geométrico, no desenho dos gráficos, que parábolas com vértice na origem têm sim pontos de intersecção com a função logarítmica. No entanto, como precisar qual é o ponto em que as duas curvas interceptam-se, tendo em conta a abertura da concavidade das parábolas?

[1]Convém indicar que esse ponto é a solução da equação em que $mx = \ln x$, ou seja, escrito de outra forma, é a solução da equação $x = e^{mx}$.

**Problema 2):** Sejam $f(x) = kx^2$ e $g(x) = \ln x$ funções de números reais. Determinar o valor positivo de $k \in \mathbb{R}$, para o qual existe um e um único $x = c$ tal que $f(c) = g(c)$.

No sentido geométrico é possível observar que a intersecção entre as funções $f(x) = kx^2$ e $g(x) = \ln x$ vai depender do valor de $k > 0$. Um caso particular, em que $k = 1$, situação de não intersecção, apresenta-se na figura 1. A existência da intersecção vai depender da abertura da parábola. Uma parábola com concavidade muito fechada, e positiva, não vai cruzar a função logarítmica. Assim, almeja-se determinar quão aberta deve ser a concavidade da parábola para que haja uma única intersecção com a função logarítmica. A abertura da parábola depende do valor de k. Quanto menor for o valor de k, mais aberta será a parábola; quanto maior for o valor de k, mais fechada será a parábola.

O objetivo é determinar um valor $x = c$ tal que as retas tangentes em $f(x) = kx^2$ e $g(x) = \ln x$ tenham a mesma inclinação, isto é, mesmo coeficiente angular. Além disso, esse valor $x = c$ deve ser a abscissa do ponto de intersecção dos dois gráficos, isto é, $f(c) = g(c)$. A derivada de $f(x)$, em $x = c$, indica a inclinação da reta tangente à curva $f(x) = kx^2$, e a derivada de $g(x)$, ainda em $x = c$, indica também a inclinação da reta tangente à curva $g(x) = \ln x$. Nota-se que duas retas quaisquer r e s são paralelas, ou coincidentes, se ambas tiverem a mesma inclinação, isto é, se ambas tiverem o mesmo coeficiente angular, $m_r = m_s$, em que $m_r$ e $m_s$ são os coeficientes angulares das retas r e s, respectivamente. Assim, $f'(c) = g'(c)$ indica o valor, se existir, em que as duas curvas terão a mesma inclinação[2], tendo em conta que $x = c$ pertença tanto à função $f(x)$ quanto à função $g(x)$. Se $f(x) = kx^2$, então $f'(x) = 2kx$, e se $g(x) = \ln x$, então $g'(x) = \frac{1}{x}$. Segue-se, então, que

$$f'(c) = g'(c) \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 2kc = \frac{1}{c} = g'(c).$$

Desse modo,

$$2kc = \frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2c^2}.$$

Portanto, quando $k = \frac{1}{2c^2}$, as duas curvas terão a mesma inclinação em $x = c$. Logo, para que $x = c$ pertença a ambas as curvas, tem-se:

$$f(c) = g(c) \quad \Rightarrow \quad kc^2 = \ln c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2c^2}.c^2 = \ln c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \ln c.$$
$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{e}.$$

Resta agora determinar o valor de k. Tendo em conta que $k = \frac{1}{2c^2}$ e $c = \sqrt{e}$, segue-se que:

$$k = \frac{1}{2c^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2(\sqrt{e})^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2e}.$$

Assim, para $x = \sqrt{e}$ e $k = \frac{1}{2e}$, tem-se que:

$$y = kx^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2e}.(\sqrt{e})^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}.$$

Em síntese, o valor de k onde as duas curvas se cruzam é $k = \frac{1}{2e}$, e o valor de x dessa intersecção é $x = \sqrt{e}$ com $y = \frac{1}{2}$. No gráfico da figura 3 é possível observar essa intersecção das duas curvas no ponto $(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$.

[2]Nota-se que $h(x) = x^2$ e $g(x) = \ln x$ têm a mesma inclinação em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, uma vez que, para $h'(x) = 2x = \frac{1}{x} = g'(x)$, se tem que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. No entanto $h(\frac{\sqrt{2}}{2}) \neq g(\frac{\sqrt{2}}{2})$, ou seja, não há intersecção entre as curvas $h(x) = x^2$ e $g(x) = \ln x$.

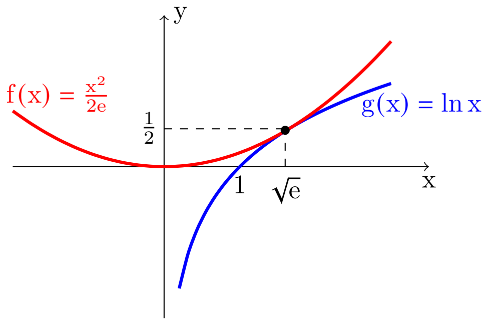


Figura 3: Gráfico da intersecção entre $f(x) = \frac{x^2}{2e}$ e $g(x) = \ln x$

## 5. Parábolas e logaritmos: abordagem numérica

Com base no gráfico da figura 4 percebe-se que há situações em que dois pontos de intersecção ocorrem entre a parábola e a função logarítmica. Isso sugere o seguinte problema, abordado neste texto de modo numérico, via auxílio de *softwares* computacionais:

**Problema 3):** No sentido intuitivo é possível estimar os valores de $k > 0$ para os quais se tem intersecção com a função logarítmica?

Com base no gráfico da figura 4, é possível analisar as intersecções entre a parábola $f(x) = kx^2$ e a função logarítmica $g(x) = \ln x$ de acordo com a variação dos valores positivos de k, isto é, de acordo com a abertura da concavidade da parábola.

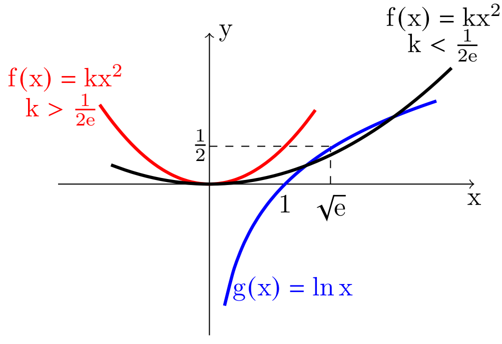


Figura 4: Gráfico de $f(x) = kx^2$ ($k < \frac{1}{2e}$ e $k > \frac{1}{2e}$) e $g(x) = \ln x$

Assim, se $k > \frac{1}{2e}$, a concavidade da parábola será mais fechada e não haverá intersecção entre as curvas $f(x) = kx^2$ e $g(x) = \ln x$. Se $0 < k < \frac{1}{2e}$, a concavidade da parábola será mais aberta e haverá dois pontos de intersecção. Nota-se que, com base na tabela 1, se $k \to 0$, então a parábola estará em seu limite de abertura e, desse modo, a intersecção tende a dois pontos: por um lado, o ponto $(1, 0)$ e, por outro, para pontos com valores crescentes de x e de $f(x)$. Determinar esses valores no sentido analítico implicaria resolver a equação $kx^2 = \ln x$ para valores de $0 < k < \frac{1}{2e}$, o que implicaria uma análise mais cuidadosa, além do escopo deste artigo.

| $k$ | $x_1$ | $f(x_1) \approx g(x_1)$ | $x_2$ | $f(x_2) \approx g(x_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2e} \approx 0,1839$ | $\sqrt{e} \approx 1,6487$ | $0,4999$ | $\sqrt{e} \approx 1,6487$ | $\frac{1}{2}$ |
| $0,1$ | $1,1384$ | $0,1296$ | $3,5656$ | $1,2713$ |
| $0,01$ | $1,0103$ | $0,0102$ | $16,7963$ | $2,8212$ |
| $0,001$ | $1,001$ | $0,001$ | $64,5565$ | $4,1675$ |
| $0,0001$ | $1,0001$ | $0,0001$ | $233,523$ | $5,4533$ |
| $0,00001$ | $1,00001$ | $0,00001$ | $819,031$ | $6,7081$ |

Tabela 1: Valores de $k \leq \frac{1}{2e}$ e as raízes de $kx^2 = \ln x$

**Problema 4):** No sentido intuitivo e geométrico, é possível estimar os valores de $k < 0$ para os quais se tem, sempre, intersecção com a função logarítmica, isto é, existe $x$ tal que $kx^2 = \ln x$?

Conforme mostrado na figura 5, é intuitivo pensar que haverá sempre uma intersecção entre essas duas curvas. Na tabela 2 é possível observar os valores de $x$ para os quais há sempre intersecção entre a parábola e a função logarítmica, desde que os valores de $k$ sejam negativos e não nulos[3]. Com base na tabela 2, nota-se que, quanto mais aberta for a parábola (concavidade voltada para baixo), mas próximo do ponto $(1, 0)$ estará a intersecção. Quanto mais fechada for a parábola (ainda com a concavidade voltada para baixo), mais os valores de $x$ e $f(x)$ $(= g(x))$ tornam-se pequenos.

| $k$ | Ponto de intersecção |
|---|---|
| $-0,0001$ | $(0,9999; -0,0001)$ |
| $-0,001$ | $(0,9990; -0,0010)$ |
| $-0,01$ | $(0,9902; -0,0098)$ |
| $-0,1$ | $(0,9190; -0,0845)$ |
| $-1$ | $(0,6529; -0,4263)$ |
| $-2$ | $(0,5482; -0,6011)$ |
| $-3$ | $(0,4886; -0,7162)$ |
| $-4$ | $(0,4480; -0,8029)$ |

Tabela 2: Valores de $k < 0$ e as raízes de $kx^2 = \ln x$

## 6. Parábolas e logaritmos: um pouco mais de matemática

Com base na figura 5, torna-se evidente, no sentido visual, que, para cada parábola em que $k < 0$, ou seja, para parábolas com a concavidade voltada para baixo, haverá sempre uma intersecção com a função logarítmica. No entanto, como provar esse fato?

[3]Essa tabela foi construída com auxílio de *softwares* matemáticos.

**Problema 5):** Seja $\lambda > 0$ um número real. Provar que, independentemente do valor de $\lambda$, sempre existirá um número $\xi \in (0,1)$, tal que $-\lambda\xi^2 = \ln\xi$.

O objetivo é provar matematicamente que, no intervalo $(0,1)$, as duas curvas sempre terão um ponto de intersecção, conforme pode ser observado na figura 5.

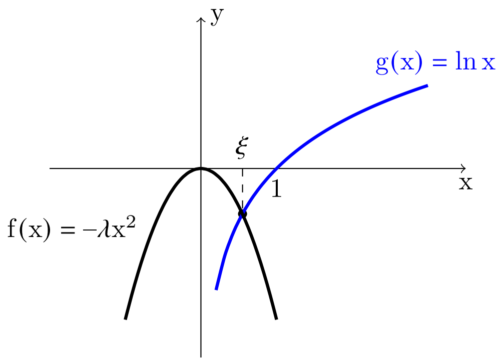


Figura 5: Gráfico da intersecção entre $f(x) = -\lambda x^2$ e $g(x) = \ln x$

Na sequência, prova-se, para $\lambda > 0$, que:

$$\exists \xi \in (0,1) \text{ tal que } -\lambda\xi^2 = \ln\xi.$$

Para isso, consideram-se as funções $u(x) = -\lambda x^2 - \ln x$ e $v(x) = \ln x + \lambda x^2$.

**Análise da função** $u(x) = -\lambda x^2 - \ln x$. A derivada de $u(x)$ será utilizada para analisar o crescimento, ou decrescimento, da função $u(x)$. Assim,

$$u'(x) = -2\lambda x - \frac{1}{x}.$$

Tendo em conta que $\lambda > 0$, para qualquer valor de $x \in (0,1)$, tem-se que $u'(x) < 0$. Portanto, a função $u(x)$ é uma função decrescente em $(0,1)$, ([2], p. 237), conforme pode ser observado na figura 6.

Tendo em conta uma análise intuitiva e geométrica da função $u(x)$, tem-se que, se $x \to 0^+$, então $u(x) \to +\infty$. Por outro lado, se $x \to 1^-$, então $u(x) \to -\lambda$, que é um valor negativo. Assim, para valores próximos de 0, a função assume valores positivos, e para valores próximos de 1, ela assume valores negativos. Assim, como a função é decrescente, e contínua em $(0,1)$, ela corta o eixo x em algum ponto $\xi$. Desse modo, com base na intuição e na aplicação do teorema do valor intermediário ([2], p. 111), tem-se que existe $\xi \in (0,1)$ tal que $g(\xi) = 0$, ou seja, $0 = u(\xi) = -\lambda\xi^2 - \ln\xi$. Assim, tem-se que:

$$-\lambda\xi^2 = \ln\xi.$$

Para provar o escrito acima, considera-se, para $x_1 \in (0,1)$, que $u(x_1) > 0$, ou seja, $-\lambda x_1^2 - \ln x_1 > 0$, ou ainda, $-\lambda x_1^2 > \ln x_1$. Como a função $\ln x$ é uma função crescente, contínua e bijetora para todo $x \in (0,1)$ com imagem em $(-\infty, 0)$, tem-se que existe um valor real $x_2 \in (0,1)$ com $\ln x_2 = -\lambda x_1^2$ e

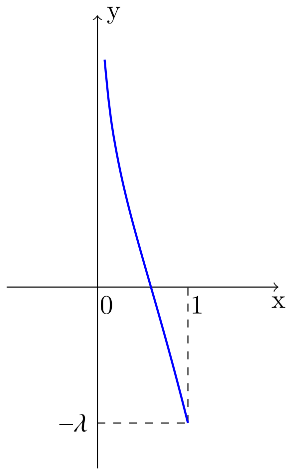


Figura 6: Gráfico de $u(x) = -\lambda x^2 - \ln x$

tal que $\ln x_2 > \ln x_1$. Nota-se que $-\lambda x_1^2 \in (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. Assim, como $\ln x_2 > \ln x_1$, então $x_2 > x_1$. Por outro lado, como a função $-\lambda x^2$ é uma função decrescente e contínua em $(0,1)$, tem-se, então,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 < -\lambda x_1^2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 < \ln x_2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 - \ln x_2 < 0 \Rightarrow u(x_2) < 0.$$

Assim, $u(x_1) > 0$ e $u(x_2) < 0$ para $x_1 < x_2$, com $x_1, x_2 \in (0,1)$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $\xi \in [x_1, x_2]$ tal que $u(\xi) = 0$, ou seja, $-\lambda\xi^2 - \ln\xi = 0$, isto é, $-\lambda\xi^2 = \ln\xi$.

**Análise da função** $v(x) = \ln x + \lambda x^2$. A derivada de $v(x)$ será utilizada, tal como para a função $u(x)$, para analisar seu crescimento ou decrescimento. Assim,

$$v'(x) = \frac{1}{x} + 2\lambda x.$$

Tendo em conta que $\lambda > 0$, para qualquer valor de $x \in (0,1)$, tem-se que $v'(x) > 0$. Portanto, a função $v(x)$ é uma função crescente em $(0,1)$, ([2], p. 237), conforme pode ser observado na figura 7. Se $x \to 0^+$, então $v(x) \to -\infty$. Por outro lado, se $x \to 1^-$, então $v(x) \to \lambda$, que é um valor positivo.

Assim, para valores próximos de 0, a função assume valores negativos, e para valores próximos de 1, assume valores positivos. Assim, como ela é crescente, e contínua em $(0,1)$, ela corta o eixo x em algum ponto $\xi$. Desse modo, com base na intuição e no teorema do valor intermediário ([2], p. 111), tem-se que existe $\xi \in (0,1)$ tal que $v(\xi) = 0$, ou seja, $0 = v(\xi) = \ln\xi + \lambda\xi^2$. Assim, tem-se que:

$$-\lambda\xi^2 = \ln\xi.$$

Para comprovar o escrito no parágrafo acima, considera-se, para $x_1 \in (0,1)$, que $v(x_1) < 0$, ou seja, $\ln x_1 + \lambda x_1^2 < 0$, ou ainda, $\ln x_1 < -\lambda x_1^2$. Como a função $\ln x$ é uma função crescente, contínua e bijetora para todo $x \in (0,1)$ com imagem em $(-\infty, 0)$, tem-se que existe um valor real $x_2 \in (0,1)$ com $\ln x_2 = -\lambda x_1^2$ e tal que $\ln x_2 > \ln x_1$. Nota-se que $-\lambda x_1^2 \in (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. Assim, como $\ln x_2 > \ln x_1$,

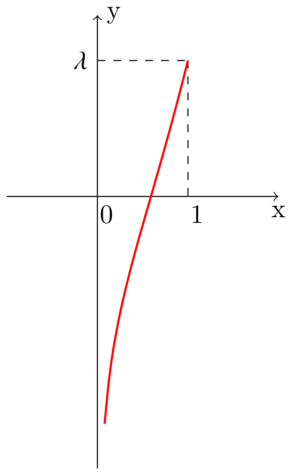


Figura 7: Gráfico de $v(x) = \ln x + \lambda x^2$

então $x_2 > x_1$. Por outro lado, como a função $-\lambda x^2$ é uma função decrescente e contínua em $(0, 1)$, tem-se, então,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 < -\lambda x_1^2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 < \ln x_2 \Rightarrow \ln x_2 + \lambda x_2^2 > 0 \Rightarrow v(x_2) > 0.$$

Assim, $v(x_1) < 0$ e $v(x_2) > 0$ para $x_1 < x_2$, com $x_1, x_2 \in (0, 1)$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $\xi \in [x_1, x_2]$ tal que $v(\xi) = 0$, ou seja, $\lambda\xi^2 + \ln \xi = 0$, isto é, $\ln \xi = -\lambda\xi^2$.

Provou-se o problema 5, ou seja, provou-se que sempre vai existir um ponto $\xi \in (0, 1)$ tal que $-\lambda\xi^2 = \ln \xi$.

## 7. Conclusão

A exposição neste artigo não deixa de ser uma justificativa da importância dos cursos de Cálculo na formação de estudantes da área de exatas, mesmo que seja com base num simples problema. Existem outros exemplos, análogos ao exposto neste texto, em que é possível caracterizar um certo divisor de águas entre a matemática do ensino médio e a matemática dos cursos de Cálculo. No exemplo deste texto mostrou-se que para alguns problemas é possível obter uma solução visual, sem ter que lançar mão de uma matemática mais sofisticada. No entanto, fica sempre a dúvida sobre se a solução visual está correta. A discussão neste artigo vem ao encontro de avalizar as possíveis interações entre a intuição geométrica e as respostas com rigor, as respostas consistentes no sentido da matemática. De acordo com a história da matemática, o rigor matemático tornou-se necessário para o avanço não só da matemática como das tecnologias associadas. Como exemplo, podem-se citar as séries de Fourier, presentes na solução da equação da condução do calor. No caso das séries de Fourier, o rigor matemático auxiliou na consistência matemática de sua solução [6] e, por conseguinte, das inúmeras tecnologias que se valem dessas séries. No caso deste texto, mostrou-se que as ferramentas apresentadas em cursos de Cálculo são suficientes para resolver alguns simples problemas de intersecção entre parábolas e logaritmos. Mostrou-se também que os problemas podem, nos dias de hoje, ser resolvidos via algum *software* de matemática e obter resultados numéricos. Além disso, fica implícita neste texto a análise de outro problema, o de explicitar por completo, se possível, todas as soluções da equação $kx^2 = \ln x$ em termos dos valores de k.

Estima-se que este texto possa auxiliar, no sentido pedagógico, a percepção de problemas matemáticos e suas soluções no sentido da intuição geométrica, no sentido do rigor matemático e no sentido de uma análise qualitativa, via simulações com *softwares* matemáticos.

**Agradecimento**

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (Capes) – Código de Financiamento 001.

**Referências**

[1] Hairer, E., Wanner, G. *Analysis by Its History.* Springer-Verlag. New York, 1996.

[2] Leithold, L. *O Cálculo com Geometria Analítica.* Volume I, Editora Harbra Ltda. São Paulo, 1994.

[3] Lima, E. L. *Logaritmos.* Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. Rio de Janeiro, 1991.

[4] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. Morgado, A. C. *A matemática do ensino médio.* Volume 1. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. Rio de Janeiro, 2006.

[5] Magossi, José Carlos. *O sonho de Lagrange.* Professor de Matemática Online – PMO v.8, n.1, pp.43-63, 2020, SBM, 2020.

[6] Toeplitz, O. *The Calculus — A Genetic Approach.* Chicago University Press. Chicago, 2007.

José Carlos Magossi
Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Tecnologia - FT
<magossi@unicamp.br>

Antônio César da Costa Barros
Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Tecnologia - FT
<cesarmatema@gmail.com>

Recebido: 16/12/2021
Publicado: 13/06/2022