

# Uma prova geométrica do Problema da Basileia

Darlan Ferreira de Oliveira

Joãoonito de Jesus Santos

## Resumo

O presente artigo tem como objetivo apresentar, através de conceitos da geometria plana, uma forma para calcular a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais. Esse problema ficou conhecido na literatura como Problema da Basileia e foi mostrado por Euler, usando técnicas do cálculo diferencial, que tal soma vale  $\pi^2/6$ .

**Palavras-chave:** Problema da Basileia; Teorema Inverso de Pitágoras; Geometria plana.

## Abstract

This article aims to present, through concepts of plane geometry, a way to calculate the sum of the inverses of the squares of natural numbers. This problem is known in the literature as the Basel Problem and it was shown by Euler, using differential calculus techniques, that such a sum is worth  $\pi^2/6$ .

**Keywords:** Basel Problem; Inverse Theorem of Pythagoras; plane geometry.

## 1. Introdução

Basileia é uma cidade localizada na zona noroeste da Suíça, próxima às fronteiras do país com França e Alemanha, onde, em 15 de abril de 1707, nasceu um de seus filhos mais ilustres, Leonhard Paul Euler.

O talento de Euler para a Matemática logo foi descoberto pelo matemático Johann Bernoulli, que o incentivou a matricular-se no curso de Matemática da Universidade de Basileia, onde concluiu em 1726 seu doutorado com uma tese sobre a propagação do som.

A obra de Euler consta de pelo menos 530 trabalhos publicados em vida e uma série de manuscritos deixados após sua morte. Foi em 1735 que Euler ganhou fama internacional após resolver um famoso problema em teoria dos números, proposto pela primeira vez por Pietro Mengoli, de achar o valor exato da soma

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots,$$

mostrando que a série converge para o valor  $\frac{\pi^2}{6}$ . Este fato que surpreendeu a todos, pois a resposta trazia relação com uma das constantes mais importantes da História da Matemática. Muitos matemáticos importantes da época debruçaram-se sobre esse problema, dentre eles Jacques Bernoulli,

mas não obtiveram sucesso. Por fim, o problema ficou conhecido como o Problema de Basileia, em homenagem à cidade natal de Euler.

A proposta deste trabalho é estudar, a partir de uma abordagem geométrica, o Problema da Basileia, evidenciando a aplicação de vários conceitos da geometria plana estudados no ensino básico.

## 2. Convergência da soma

O Problema da Basileia consiste em encontrar a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \quad (1)$$

A primeira pergunta que deve ser feita quando se estuda o Problema da Basileia é se, de fato, a soma envolvida no problema converge para algum número real. Para ver que a soma no Problema da Basileia é finita, considere para cada número natural  $n$  a seguinte desigualdade:

$$(n-1)n < n^2 < n(n+1).$$

Para cada número natural  $n$  maior do que 1, vale a desigualdade

$$\frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

, que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Como essa última desigualdade vale para todo natural  $n$  maior do que 1, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} &< \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &< \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{5} &< \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Somando, membro a membro estas desigualdades, obtemos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}.$$

Acrescentando 1 a todos os membros, obtemos

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

Nesse momento, o leitor familiarizado com o conceito de limite deve concluir que quanto maior o valor de  $n$  os termos  $\frac{1}{n+1}$  e  $\frac{1}{n}$  se tornam mais próximos de zero, de modo a concluir que o valor da soma no Problema da Basileia fica compreendido entre  $3/2$  e  $2$ .

Mais detalhes sobre a prova original de Euler podem ser encontrados nos trabalhos [1, 2, 3, 4, 5].

### 3. Sequência de circunferências encaixadas

No que segue, a sequência de circunferências encaixadas tangentes num ponto  $O$

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n, \dots$$

centradas em  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n, \dots$ , respectivamente, satisfazem as seguintes propriedades:

**P1.**  $\Gamma_n$  é tangente interior à  $\Gamma_{n+1}$  no ponto  $O$ ;

**P2.** O diâmetro de  $\Gamma_{n+1}$  é o dobro do diâmetro de  $\Gamma_n$ .

Sendo  $d_n$  o diâmetro da circunferência  $\Gamma_n$ , segue das propriedades P1 e P2 que os centros  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n, \dots$  estão alinhados, e  $d_n = \overline{OO_{n+1}} = 2^{n-1}d_1$ . A Figura 1 ilustra as quatro primeiras circunferências encaixadas tangentes em  $O$ .

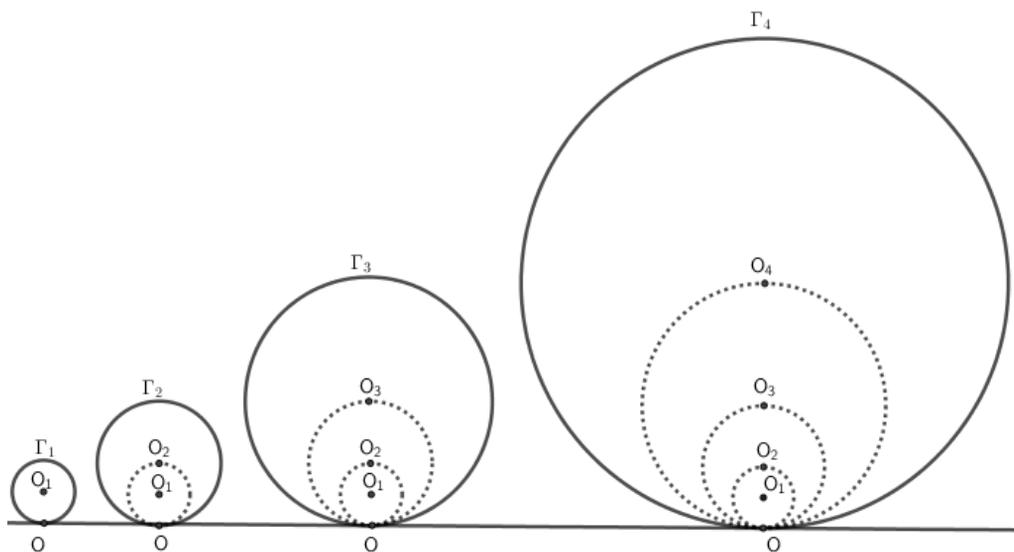


Figura 1: Circunferências encaixadas tangentes em  $O$

A construção dessa sequência de circunferências encaixadas será usada para auxiliar no cálculo do inverso do quadrado da medida do diâmetro da circunferência  $\Gamma_1$ .

### 4. Pontos singulares

Considere a sequência de circunferências encaixadas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n, \dots$  tangentes num ponto  $O$ . Nesta seção será descrita a construção de  $2^{i-1}$  pontos  $O_{i1}, O_{i2}, \dots, O_{i(2^{i-1})}$  sobre a circunferência  $\Gamma_i$ , os quais serão denominados **pontos singulares** de  $\Gamma_i$ .

Inicialmente, considere a circunferência  $\Gamma_1$  tangente interior no ponto  $O$  à circunferência  $\Gamma_2$ , conforme ilustra a Figura 2.

**Definição 1.** O ponto singular sobre  $\Gamma_1$  é dado por  $O_{11} = O_2$ .

**Definição 2.** Os dois pontos singulares sobre  $\Gamma_2$  são obtidos pela interseção da reta tangente à  $\Gamma_1$  no ponto  $O_2$  com a circunferência  $\Gamma_2$  e são denotados por  $O_{21}$  e  $O_{22}$ . Veja Figura 3.

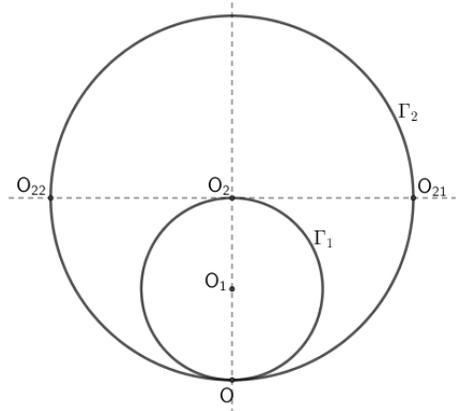
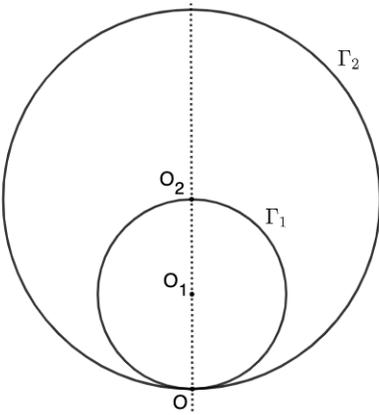


Figura 2: Ponto singular  $O_{11}$  sobre  $\Gamma_1$

Figura 3: Pontos singulares  $O_{21}$  e  $O_{22}$  sobre  $\Gamma_2$

Seguindo, considere, agora, a circunferência  $\Gamma_2$  tangente interior no ponto  $O$  à circunferência  $\Gamma_3$ .

**Definição 3.** Os quatro pontos singulares sobre  $\Gamma_3$  são obtidos pelas interseções das retas secantes à  $\Gamma_2$  pelos pares de pontos  $(O_3, O_{21})$  e  $(O_3, O_{22})$  com a circunferência  $\Gamma_3$ , e são denotados, respectivamente, por  $O_{31}, O_{33}$  e  $O_{32}, O_{34}$ . Veja Figura 4.

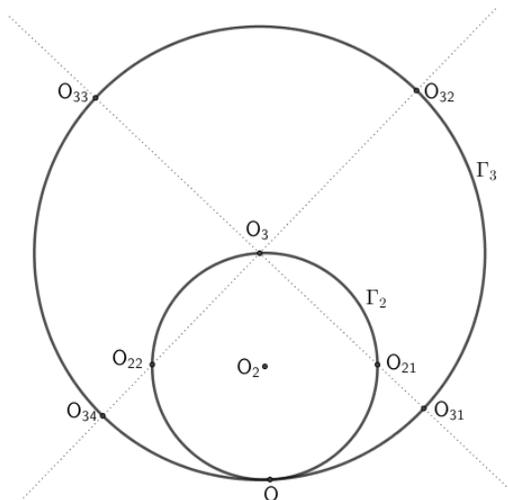


Figura 4: Pontos singulares  $O_{31}, O_{32}, O_{33}$  e  $O_{34}$  sobre  $\Gamma_3$

Mais geralmente temos a seguinte definição:

**Definição 4.** Os  $2^{i-1}$  pontos singulares sobre  $\Gamma_i$  são obtidos pelas interseções das retas secantes à  $\Gamma_{i-1}$  pelos pares de pontos  $(O_i, O_{(i-1)k})$  com a circunferência  $\Gamma_i$  e são denotados, respectivamente, para cada  $1 \leq k \leq 2^{i-2}$ , por  $O_{ik}$  e  $O_{i(k+2^{i-2})}$ .

**Definição 5.** Os pontos singulares sobre  $\Gamma_n$  determinados pela interseção da reta secante que passa pelo centro de  $\Gamma_n$  e um ponto singular de  $\Gamma_{n-1}$  são chamados pontos singulares conjugados de  $\Gamma_n$ .

#### 4.1. Propriedades envolvendo pontos singulares

Para os pontos singulares de uma circunferência  $\Gamma_n$  valem as seguintes propriedades:

**Propriedade 1.** O ângulo central  $P\widehat{O}_nQ$ , onde P e Q são pontos singulares consecutivos da circunferência encaixada  $\Gamma_n$ , mede  $\frac{\pi}{2^{n-2}}$ , para todo  $n \geq 2$ .

**Demonstração.** Para  $n = 2$  temos apenas dois pontos singulares  $O_{21}$  e  $O_{22}$  onde o segmento  $O_{21}O_{22}$  é o diâmetro de  $\Gamma_2$ . Assim o ângulo central  $O_{21}\widehat{O}_2O_{22}$  mede  $\pi$  e a afirmação é verdadeira para  $n = 2$ . Suponha que o ângulo central  $P\widehat{O}_nQ$  da circunferência encaixada  $\Gamma_n$  mede, para um certo natural n,  $\frac{\pi}{2^{n-2}}$  para quaisquer P e Q consecutivos sobre  $\Gamma_n$ . Para mostrar que essa relação vale para o natural  $n + 1$  são tomados dois pontos consecutivos  $P'$  e  $Q'$  sobre  $\Gamma_{n+1}$ . Sendo P o ponto de interseção da reta que passa por  $O_{n+1}$  e  $P'$  com  $\Gamma_n$  e Q o ponto de interseção da reta que passa por  $O_{n+1}$ , e  $Q'$  com  $\Gamma_n$ , vamos considerar dois casos:

Caso 1.  $O_{n+1}$  não pertence ao menor arco sobre  $\Gamma_n$  determinado por P e Q. Veja Figura 5.

Segue do Teorema do ângulo inscrito que

$$\begin{aligned} P'\widehat{O}_{n+1}Q' &= P\widehat{O}_{n+1}Q \\ &= \frac{1}{2}P\widehat{O}_nQ \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2^{n-2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Caso 2.  $O_{n+1}$  pertence ao menor arco sobre  $\Gamma_n$  determinado por P e Q. Veja Figura 6.

Segue do Teorema do ângulo inscrito que

$$\begin{aligned} P'\widehat{O}_{n+1}Q' &= \pi - P\widehat{O}_{n+1}Q \\ &= \pi - \frac{1}{2}\left(\text{arco determinado por P e Q que não contém } O_{n+1}\right) \\ &= \pi - \frac{1}{2}\left(2\pi - P\widehat{O}_nQ\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Segue do Princípio de indução finita que a propriedade é válida para todo número natural n.

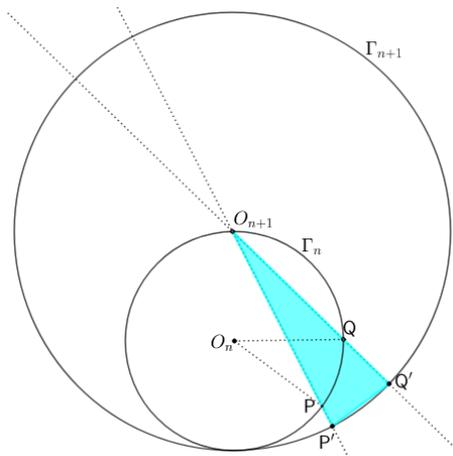


Figura 5: Ângulo central  $P'\widehat{O}_{n+1}Q'$  de  $\Gamma_{n+1}$

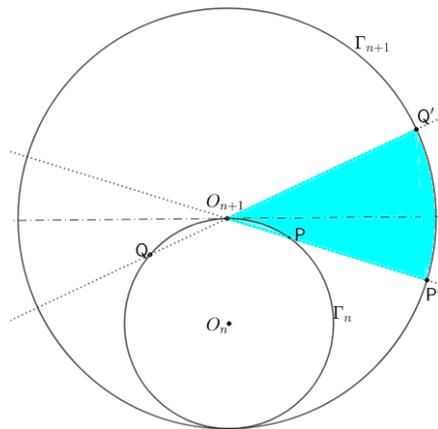


Figura 6: Ângulo central  $P'\widehat{O}_{n+1}Q'$  de  $\Gamma_{n+1}$

**Propriedade 2.** Os arcos determinados por pontos singulares consecutivos de uma circunferência  $\Gamma_n$  têm comprimentos medindo  $\pi d_1$ , para todo  $n \geq 2$ , onde  $d_1$  é o diâmetro de  $\Gamma_1$ .

**Demonstração.** Sejam P e Q dois pontos singulares consecutivos sobre a circunferência  $\Gamma_n$ , e  $\alpha$  o arco determinado por P e Q. O comprimento C do arco  $\alpha$  é dado por  $\alpha r_n$ , onde  $r_n$  é o raio da circunferência  $\Gamma_n$ . Segue da Propriedade 1 que

$$\begin{aligned}
 C &= \alpha \frac{d_n}{2} \\
 &= P\widehat{O}_n Q \frac{2^{n-1}d_1}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2^{n-2}} 2^{n-2}d_1 \\
 &= \pi d_1.
 \end{aligned}$$

## 5. Triângulos singulares inscritos

Dados dois pontos singulares conjugados  $O_{ik}$  e  $O_{i(k+2^{i-2})}$  em  $\Gamma_i$  a eles associamos o **triângulo singular**  $OO_{ik}O_{i(k+2^{i-2})}$  inscrito em  $\Gamma_i$ , o qual denotamos por  $\Delta_{ik}$  para cada natural k, com  $1 \leq k \leq 2^{i-2}$ .

**Propriedade 3.** O triângulo singular  $\Delta_{ik}$  é retângulo em O, e o segmento  $OO_{(i-1)k}$  é a altura em relação ao lado oposto ao vértice O. Veja Figura 7.

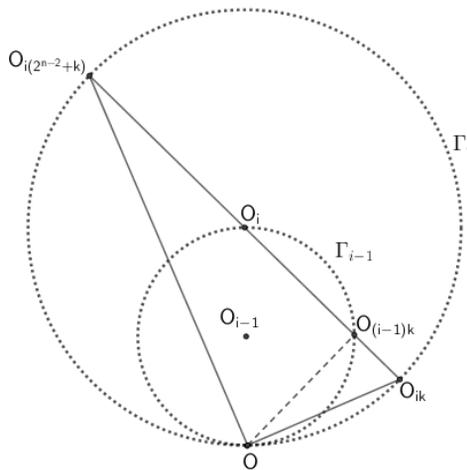


Figura 7: Triângulo singular  $\Delta_{ik}$  inscrito em  $\Gamma_i$

**Demonstração.** Basta notar que os vértices  $O$ , no triângulo  $OO_{ik}O_{i(2^{i-2}+k)}$ , e  $O_{(i-1)k}$ , no triângulo  $OO_{(i-1)k}O_i$ , são opostos, respectivamente, aos lados que são diâmetros das circunferências  $\Gamma_i$  e  $\Gamma_{i-1}$  nos quais esses triângulos estão inscritos. Então, pelo Teorema do ângulo inscrito, segue que os ângulos  $O_{i(2^{i-2}+k)}\widehat{O}O_{ik}$  e  $O\widehat{O}_{(i-1)k}O_i$  são retos.

No que segue, faremos uso do seguinte resultado cuja demonstração decorre diretamente do Teorema de Pitágoras.

**Teorema 1** (Teorema Inverso de Pitágoras). *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do inverso da altura relativa à hipotenusa é igual à soma dos inversos dos quadrados dos catetos, ou seja,*

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

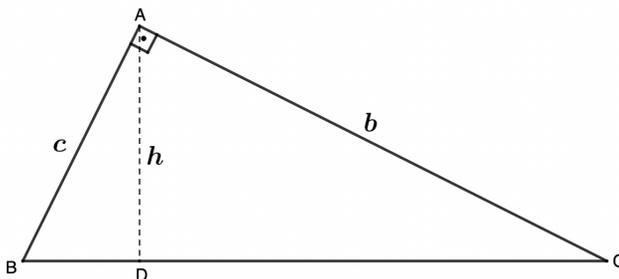


Figura 8: Teorema Inverso de Pitágoras

## 6. Inverso do quadrado do diâmetro de $\Gamma_1$

Nesta seção mostraremos como escrever o inverso do quadrado do diâmetro de  $\Gamma_1$  em função dos comprimentos das cordas  $OO_{nk}$  de uma circunferência  $\Gamma_n$ , para  $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ .

Observe, inicialmente, que

$$\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{OO_2^2} = \frac{1}{OO_{11}^2}. \quad (2)$$

Como o segmento  $OO_{11}$  é altura do triângulo singular  $OO_{21}O_{22}$ , como ilustra a Figura 9, segue do Teorema 1 que

$$\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{OO_{11}^2} = \frac{1}{OO_{21}^2} + \frac{1}{OO_{22}^2}. \quad (3)$$

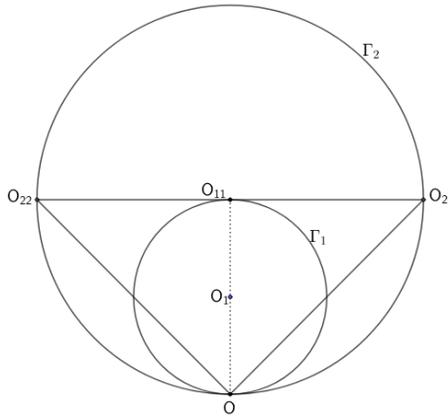


Figura 9: Triângulo singular  $OO_{21}O_{22}$

Segue da Propriedade 3 que os segmentos  $OO_{21}$  e  $OO_{22}$  são alturas, respectivamente, dos triângulos singulares  $OO_{31}O_{33}$  e  $OO_{32}O_{34}$  donde, novamente, pelo Teorema 1 obtemos de (3) que

$$\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{OO_{31}^2} + \frac{1}{OO_{33}^2} + \frac{1}{OO_{32}^2} + \frac{1}{OO_{34}^2}. \quad (4)$$

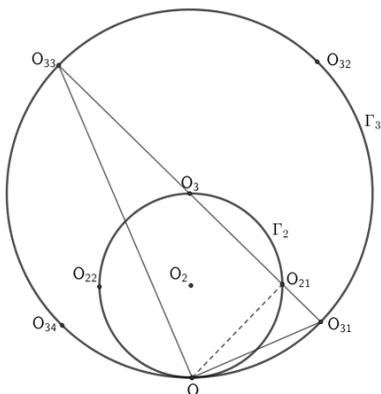


Figura 10: Triângulo singular  $OO_{31}O_{33}$

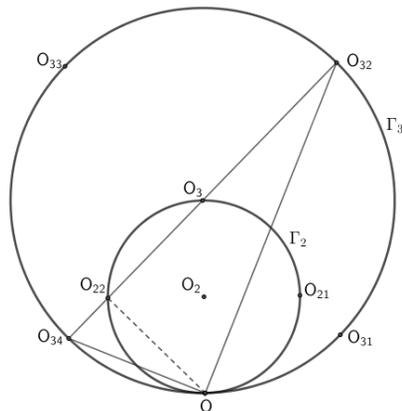


Figura 11: Triângulo singular  $OO_{32}O_{34}$

De forma mais geral, as identidades obtidas em (2), (3) e (4) sugerem a seguinte igualdade envolvendo os comprimentos das cordas  $OO_{ni}$  de uma circunferência  $\Gamma_n$  para  $1 \leq i \leq 2^{n-1}$

$$\frac{1}{d_1^2} = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{OO_{ni}^2}. \quad (5)$$

Na verdade, essa igualdade mantém-se verdadeira para todo número natural  $n$ , e é o conteúdo da proposição a seguir:

**Proposição 1.**

$$\frac{1}{d_1^2} = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{OO_{ni}^2} \quad \text{para todo número natural } n. \quad (6)$$

**Demonstração.** Segue das igualdades (2), (3) e (4) a validade da afirmação para os três primeiros números naturais. Suponha a validade de (6) para um número natural  $n$  qualquer. Para a soma envolvendo as cordas  $OO_{(n+1)i}$ , com  $1 \leq i \leq 2^n$ , da circunferência  $\Gamma_{n+1}$  temos

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{OO_{(n+1)i}^2} = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \left( \frac{1}{OO_{(n+1)i}^2} + \frac{1}{OO_{(n+1)(i+2^{n-1})}^2} \right) \quad (7)$$

Como os pontos  $O_{(n+1)i}$  e  $O_{(n+1)(i+2^{n-1})}$  são singulares conjugados, segue da Propriedade 3 que o segmento  $OO_{ni}$  é altura do triângulo retângulo  $OO_{(n+1)i}O_{(n+1)(i+2^{n-1})}$ . Do Teorema 1 obtemos

$$\frac{1}{OO_{(n+1)i}^2} + \frac{1}{OO_{(n+1)(i+2^{n-1})}^2} = \frac{1}{OO_{ni}^2}. \quad (8)$$

Combinando (6), (7) e (8) obtemos

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{OO_{(n+1)i}^2} = \frac{1}{d_1^2}$$

onde (6) é válida para o natural  $n + 1$ . Segue do Princípio de Indução Finita que (6) é válida para todo número natural  $n$ .

*Observação 1.* Finalizamos esta seção destacando que a partir da simetria existente entre os pontos singulares de uma circunferência  $\Gamma_n$  em relação à reta que contém os centros das circunferências valem as seguintes igualdades para os comprimentos das cordas  $OO_{n1}, OO_{n2}, \dots, OO_{n2^{n-1}}$  da circunferência  $\Gamma_n$ :

$$\begin{aligned}
 \overline{OO_{n1}} &= \overline{OO_{n(2^{n-1})}} \\
 \overline{OO_{n2}} &= \overline{OO_{n(2^{n-1}-1)}} \\
 \overline{OO_{n3}} &= \overline{OO_{n(2^{n-1}-2)}} \\
 &\vdots \\
 \overline{OO_{n2^{n-2}}} &= \overline{OO_{n(2^{n-2}+1)}}
 \end{aligned}$$

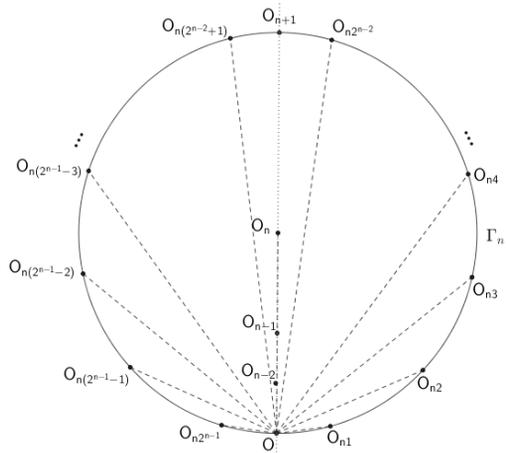


Figura 12: Cordas em  $\Gamma_n$

Segue dessa observação que a igualdade (6) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{d_1^2} = 2 \sum_{i=1}^{2^{n-2}} \frac{1}{\overline{OO_{ni}}^2}. \tag{9}$$

### 7. Estimando o comprimento das cordas $OO_{ni}$ da circunferência $\Gamma_n$ .

Segue da Propriedade 1 que o ângulo central  $O_{n2^{n-1}}\widehat{O}_nO_{n1}$  vale  $\frac{\pi}{2^{n-2}}$ . Como  $\overline{OO_{n1}} = \overline{OO_{n(2^{n-1})}}$ , o ângulo central  $O\widehat{O}_nO_{n1} = O\widehat{O}_nO_{n(2^{n-1})} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$ . Conseqüentemente, os ângulos centrais

$$O\widehat{O}_nO_{n1}, O\widehat{O}_nO_{n2}, \dots, O\widehat{O}_nO_{nk}, \dots, O\widehat{O}_nO_{n2^{n-2}}$$

medem, respectivamente,

$$\frac{\pi}{2^{n-1}}, \frac{3\pi}{2^{n-1}}, \dots, \frac{\pi}{2^{n-1}} + \frac{(k-1)\pi}{2^{n-2}}, \dots, \pi - \frac{\pi}{2^{n-1}},$$

veja Figura 13. Além disso, lembremos o argumento para calcular o comprimento de uma corda em função de seu ângulo central. Na ilustração da Figura 14, temos uma circunferência de raio  $r$  centrada em  $O$ , e os pontos  $A$  e  $B$  sobre ela definem uma corda  $AB$  de comprimento  $c$  com ângulo central  $\alpha$  e um arco de comprimento  $s$ . Temos

$$\text{sen } \beta = \frac{c}{2r} \quad \text{e} \quad s = \alpha r$$

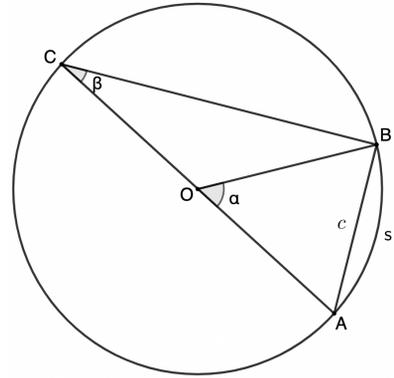
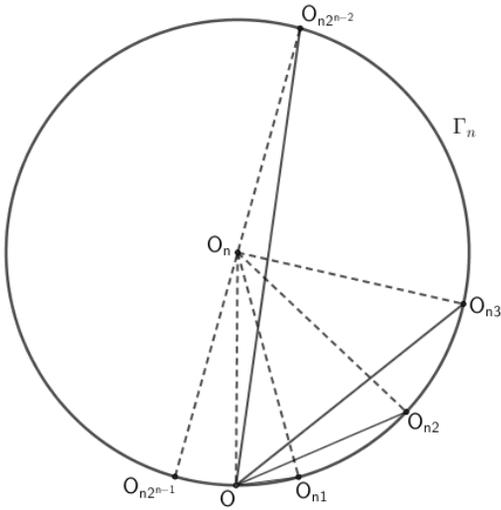


Figura 14: Corda  $c$  em função do arco  $s$

Figura 13: Cordas  $OO_{n1}, OO_{n2}, \dots, OO_{n2^{n-2}}$

e daí segue que

$$\begin{aligned}
 c &= 2r \operatorname{sen} \beta \\
 &= \frac{2s}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\
 &= s \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}.
 \end{aligned}$$

Para a corda  $OO_{nk}$ , que tem ângulo central  $\widehat{OO_n O_{nk}} = \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}}$ , a igualdade anterior fornece-nos

$$\begin{aligned}
 \overline{OO_{nk}} &= s \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \\
 &= \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}} r_n \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^n}} \\
 &= \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}} \frac{d_n}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^n}} \\
 &= \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}} 2^{n-2} d_1 \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^n}} \\
 &= \frac{(2k-1)\pi}{2} d_1 \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^n}}
 \end{aligned}$$

Substituindo essa última igualdade em (9), obtemos

$$\frac{1}{d_1^2} = 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}} \frac{1}{OO_{nk}^2} = 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}} \left( \frac{1}{\frac{(2k-1)\pi}{2} d_1 \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^n}}} \right)^2. \quad (10)$$

Simplificando a igualdade (10), chegamos a

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{2^{n-2}} \left( \frac{1}{(2k-1) \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^n}}} \right)^2 \quad (11)$$

que vale para todo número natural  $n$ . Para concluir, vamos mostrar que

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^{n-2}} \left( \frac{1}{(2k-1) \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^n}}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (12)$$

Para isso, considere a seguinte família de números reais  $\{a_{k,n}\}_{k,n \in \mathbb{N}}$  dada por:

$$a_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{(2k-1) \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^n}}}, & \text{se } k \leq 2^{n-2} \\ 0, & \text{se } k > 2^{n-2} \end{cases}$$

Para qualquer número natural  $k$  fixado, segue do limite trigonométrico fundamental que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k-1) \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^n}}} = \frac{1}{2k-1}.$$

Para qualquer número natural  $m$  fixado, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_{k,n}^2 = \sum_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,n}^2 = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k-1)^2}$$

de onde, fazendo  $m$  tender ao infinito, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Note que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o somatório  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}^2$  tem apenas as  $2^{n-2}$  primeiras parcelas não nulas, isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}^2 = \sum_{k=1}^{2^{n-2}} a_{k,n}^2.$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^{n-2}} a_{k,n}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^{n-2}} \left( \frac{1}{(2k-1) \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2^n}}{2^n}} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

e segue a validade da igualdade (12). Obtemos daí a seguinte proposição:

**Proposição 2.**

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Finalmente, para ver que a soma em (1) converge para  $\frac{\pi^2}{6}$ , usamos a Proposição 2 combinada com o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots &= \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\frac{3}{4} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8}$$

, e, por fim, obtemos

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

**8. Considerações Finais**

*“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida”.*  
(Jacques Bernoulli)

A ideia deste trabalho é apresentar uma demonstração do Problema de Basileia, como ficara conhecida a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais, utilizando elementos da Geometria Plana, mas, também, mostrar a importância dos conceitos geométricos na construção do conhecimento matemático, sobretudo no ensino básico.

Esse problema caracterizou-se com grande complexidade, sobretudo, nos séculos XVII e XVIII, quando estudiosos como Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), John Wallis (1616-1703) e os matemáticos da família Bernoulli debruçaram-se sobre ele.

Revisando a literatura, percebemos que as resoluções são datadas a partir de 1735, quando Euler encontrou a primeira solução e, quase sempre, fazem uso apenas de conceitos algébricos nas demonstrações.

Sabendo do papel fundamental exercido pela geometria na aprendizagem da Matemática, sobretudo, nas escolas de educação básica e, também, por não encontrar um material escrito evidenciando os conceitos para a prova geométrica do Problema da Basileia, decidimos escrever, ao nosso ver, aquelas que seriam as ideias geométricas necessárias para uma boa compreensão do citado problema.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Estadual de Feira de Santana, à Capes e à SBM pelo apoio financeiro e promoção do Profmat, ao professor Marcos Petrúcio Cavalcante pelas sugestões, ao revisor deste artigo pelas valiosas sugestões de correções e a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

## Referências

- [1] GAYO, Jairo e WILHELM, Roy. “O problema que tornou Euler Famoso”. *Ciência e Natura*, Santa Maria. Vol. 37 Ed. Especial Profmat, 2015, p. 342-355.
- [2] HRANKOWSKY, Adam. *Euler’s Solution to the Basel Problem*. MathAdam. 2020. Disponível em: <<https://medium.com/mathadam/eulers-solution-to-the-basel-problem-77698f08996f>>. Acesso em: 17 mai. 2021.
- [3] MOURA, Wilbertt José de Oliveira. *O problema da Basileia*. 2013. 51 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Piauí, 2013.
- [4] SANDERSON, Grant. *Why is pi here? And why is it squared? A geometric answer to the Basel problem*. 3Blue1Brown. 2018. Disponível em: <<https://www.3blue1brown.com/lessons/basel-problem>>. Acesso em 03 mar. 2021.
- [5] SANDIFER, Ed. *How Euler Did It: Estimating the Basel Problem*. MAA Online. 2003. Disponível em: <<http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2003-12.pdf>>. Acesso em: 10 mai. 2021.

Darlan Ferreira de Oliveira  
Universidade Estadual de Feira de Santana,  
Departamento de Ciências Exatas,  
Feira de Santana, BA, 44036-900, Brasil.  
<[dfoliveira@uefs.br](mailto:dfoliveira@uefs.br)>

Joãozinho de Jesus Santos  
Colégio Municipal Eraldo Tinoco,  
Brejões, BA, 45325-000, Brasil  
<[prof.joao27@gmail.com](mailto:prof.joao27@gmail.com)>

Recebido: 17/08/2021  
Publicado: 04/07/2022