PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.4, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1031

Simplificando a resolução da equação do terceiro grau

João Francisco da Silva Filho   Odete Elana Sousa Pereira
Fábio Cézar Silveira de Castro

Resumo

No presente trabalho, abordamos as equações polinomiais do terceiro grau (ou simplesmente, *equações do terceiro grau*) e os polinômios do terceiro grau, apresentando uma nova fórmula que simplifica o cálculo das suas respectivas raízes. Como aplicação natural da fórmula citada, obtemos critérios alternativos para caracterizar as raízes de equações e polinômios do terceiro grau, concluindo o trabalho com a resolução de exemplos.

Palavras-chave: Equações do terceiro grau; Polinômios do terceiro grau; Raízes; Fórmula de Cardano-Tartáglia.

Abstract

In this present work, we approach third degraee polynomial equations (or simply, *third degraee equations*) and third degraee polynomials, presenting a new formula that simplify the calculation of the their respective roots. As natural application of this formula, we obtain alternative criteria to characterize the roots of third degraee polynomial equations and third degraee polynomials, concluding the work with solving examples.

Keywords: Third degraee equations; Third degraee polynomials; Roots; Cardano-Tartáglia's formula.

1. Introdução

Inicialmente, recordamos que a resolução da equação do terceiro grau foi obtida no século XVI, de forma independente, por Scipione del Ferro (1465-1526) e por Niccolò Tartáglia (1499-1557), publicada em 1545 no livro *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501-1576), que foi escrito com a colaboração de Ludovico Ferrari (1522-1565). Nesse contexto, podemos expressar as raízes da equação do terceiro grau através da *fórmula de Cardano-Tartáglia*, que por bastante tempo ficou conhecida apenas como *fórmula de Cardano*. Convém salientar que Cardano foi quem verificou que a equacão do terceiro grau na sua *forma geral* pode ser reduzida a um interessante caso particular, conhecido na literatura por *forma reduzida* (ou *forma deprimida*), cujo coeficiente líder é igual a um, e o coeficiente do termo quadrático é nulo.

No intuito de esboçar a demonstração da fórmula de Cardano-Tartáglia, devemos lembrar que a *forma geral* assumida pela equação do terceiro grau é dada por

$$\mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2 + \mathrm{c}x + \mathrm{d} = 0, \tag{1}$$

onde $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \in \mathbb{R}$ com $\mathrm{a} \neq 0$. Dividindo essa equação pelo coeficiente líder e fazendo $x = y - \frac{\mathrm{b}}{3\mathrm{a}}$, obtemos a *forma reduzida*

$$y^3 + \mathrm{p}y + \mathrm{q} = 0, \tag{2}$$

cujos coeficientes são expressos por

$$\mathrm{p} = -\frac{\mathrm{b}^2 - 3\mathrm{ac}}{3\mathrm{a}^2} \qquad \mathrm{e} \qquad \mathrm{q} = \frac{2\mathrm{b}^3 + 27\mathrm{a}^2\mathrm{d} - 9\mathrm{abc}}{27\mathrm{a}^3}.$$

Agora, escrevendo $y = u + v$ e substituindo na forma reduzida (2), chegamos à igualdade

$$u^3 + v^3 + (3uv + \mathrm{p})(u + v) + \mathrm{q} = 0,$$

portanto basta encontrar $u, v \in \mathbb{C}$, tais que

$$u^3 + v^3 = -\mathrm{q} \qquad \mathrm{e} \qquad uv = -\frac{\mathrm{p}}{3} \tag{3}$$

para que $y = u + v$ seja raiz da equação (2).

Decorre das relações constantes em (3) que u^3 e v^3 satisfazem a equação quadrática

$$z^2 + \mathrm{q}z - \frac{\mathrm{p}^3}{27} = 0,$$

então resolvendo-a, deduzimos que

$$u^3 = -\frac{\mathrm{q}}{2} + \sqrt{D} \qquad \mathrm{e} \qquad v^3 = -\frac{\mathrm{q}}{2} - \sqrt{D}, \tag{4}$$

onde a constante, definida por

$$D = \left(\frac{\mathrm{p}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\mathrm{q}}{2}\right)^2,$$

é chamada de *discriminante.*

Sabendo que $y = u + v$ e usando as expressões (4), temos que

$$u = \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2} + \sqrt{D}} \qquad \mathrm{e} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2} - \sqrt{D}},$$

consequentemente,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2} - \sqrt{D}}, \tag{5}$$

que é a *fórmula de Cardano-Tartáglia* para equações do terceiro grau na forma reduzida.

Finalmente, recordando a relação inicial estabelecida por

$$x = y - \frac{\mathrm{b}}{3\mathrm{a}},$$

concluímos da expressão (5) que

$$x = -\frac{\mathrm{b}}{3\mathrm{a}} + \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2} - \sqrt{D}}, \tag{6}$$

que corresponde à *fórmula de Cardano-Tartáglia* para equações do terceiro grau na forma geral.

Observação 1. Através do sinal do discriminante, podemos caracterizar as raízes de polinômios e/ou equações do terceiro grau (cf. [4] ou [6]). Mais precisamente, temos que:

(a) Se $D < 0$, então a equação possui três raízes reais distintas.

(b) Se $D = 0$, então a equação possui uma raiz real de multiplicidade dois ou três.

(c) Se $D > 0$, então a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas não reais.

A fórmula de Cardano-Tartáglia foi decisiva na concepção do método de Ferrari (cf. Gonçalves [3]) e de grande importância na introdução dos números complexos, no entanto em alguns casos a referida fórmula não é muito prática. Para equações do terceiro grau que possuem três raízes reais distintas, temos o *caso irredutível*, no qual o discriminante é negativo e nem sempre é possível eliminar os radicais da expressão das raízes, resultando na necessidade de utilizar funções trigonométricas e trigonométricas inversas. Mais informações sobre o assunto podem ser encontradas em Lima [4], onde o referido autor apresenta uma interessante abordagem sobre as equações do terceiro grau, incluindo o contexto histórico.

Na perspectiva de minimizar as dificuldades de trabalhar com equações do terceiro grau e com a fórmula de Cardano-Tartáglia, estaremos introduzindo neste trabalho uma *nova forma reduzida*, que simplifica o cálculo e a caracterização das raízes (reais e complexas não reais) desse tipo de equação polinomial. Nessas condições, deduzimos uma nova fórmula para calcular as raízes de polinômios e equações polinomiais do terceiro grau com coeficientes complexos, cuja expressão é mais simples que a expressão da fórmula de Cardano-Tartáglia. Por fim, obtemos como aplicações, critérios alternativos para caracterizar as raízes de polinômios e equações do terceiro grau com coeficientes reais.

2. A Nova Forma Reduzida

Nesta seção, vamos introduzir conceitos e notações sobre polinômios e equações do terceiro grau, que serão essenciais ao longo do nosso trabalho. Estaremos aqui considerando apenas polinômios e equações do terceiro grau sobre os complexos, ou seja, polinômios e equações do terceiro grau com coeficientes complexos. Nas próximas seções, faremos menção a polinômios do terceiro grau com coeficientes reais em momentos oportunos.

Inspirado na *forma reduzida* da equação do terceiro grau, introduzimos uma *nova forma reduzida* para polinômios e equações do terceiro grau sobre os complexos. De modo similar à forma reduzida, mostraremos nas próximas seções que a nova forma reduzida também simplifica a expressão das raízes de polinômios e equações do terceiro grau.

Definição 1. Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os complexos, cujos coeficientes satisfazem $c^2 = 3bd$. Em tais condições, diremos que:

a) $P(x)$ é um polinômio da *nova forma reduzida*.

b) A equação $P(x) = 0$ está (ou encontra-se) na *nova forma reduzida*.

Novamente, vamos considerar um polinômio do terceiro grau, dado por

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ com $a \neq 0$.

Partindo de uma constante $t \in \mathbb{C}$ e do polinômio $P(x)$, podemos definir um novo polinômio do terceiro grau por

$$P_t(x) = P(x+t),$$

ou equivalentemente,

$$P_t(x) = a(x+t)^3 + b(x+t)^2 + c(x+t) + d,$$

onde a expressão de $P(x)$ justifica a igualdade anterior.

Desenvolvendo a última expressão e organizando os termos, obtemos

$$P_t(x) = ax^3 + (3at+b)x^2 + (3at^2 + 2bt + c)x + (at^3 + bt^2 + ct + d).$$

que pode ser reescrito na forma simplificada

$$P_t(x) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t,$$

onde $a_t = a$, $b_t = 3at + b$, $c_t = 3at^2 + 2bt + c$ e $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$.

Observação 2. Usando a definição de raiz, verifica-se facilmente que $w \in \mathbb{C}$ será uma raiz de $P(x)$, se e somente se, $w - t$ for uma raiz de $P_t(x)$.

3. Resultados Principais

Conforme apresentado na introdução, sabe-se que o estudo das raízes de equações do terceiro grau resume-se ao estudo da *forma reduzida*, que torna mais simples a expressão das raízes desse tipo de equação. De modo análogo, mostraremos nesta seção que o estudo das raízes de polinômios ou equações do terceiro grau também resume-se ao estudo da *nova forma reduzida* (cf. Definição 1), que simplifica ainda mais a expressão das raízes de equações do terceiro grau.

Nesse contexto, nosso primeiro teorema expressa as raízes de polinômios do terceiro grau da *nova forma reduzida*.

Teorema 1. *Seja* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *um polinômio do terceiro grau com coeficientes complexos da nova forma reduzida. Diante do exposto, valem as seguintes afirmações:*

a) *Se o termo independente de* $P(x)$ *é nulo, então suas raízes são dadas por*

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad e \qquad x_3 = -\frac{b}{a}.$$

b) *Se o termo independente de* $P(x)$ *é não nulo, então suas raízes são expressas pela fórmula*

$$x_k = \frac{3d}{\sqrt[3]{3d(bc - 9ad)} - c}.$$

onde $k \in \{1, 2, 3\}$.

Demonstração. Faremos a demonstração de cada item separadamente, conforme descrito a seguir:

a) Sabendo que $P(x)$ é um polinômio da nova forma reduzida, então

$$c^2 = 3bd,$$

mas lembrando que o termo independente d é nulo, segue que $c = 0$, e, assim,

$$P(x) = ax^3 + bx^2 = x^2(ax + b).$$

Dessa forma, observe que $P(x) = 0$ equivale à equação

$$x^2(ax + b) = 0,$$

cujas soluções são dadas por $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = -\frac{b}{a}$, concluindo o primeiro item.

b) Como o termo independente d é não nulo, então para todo $x \in \mathbb{C} - \{0\}$, podemos escrever

$$P(x) = dx^3 \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{dx} + \frac{c}{dx^2} + \frac{1}{x^3} \right);$$

então reorganizamos os termos entre parênteses, obtendo

$$P(x) = dx^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{c}{dx^2} + \frac{b}{dx} + \frac{a}{d} \right). \tag{7}$$

Por outro lado, observe que

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{c}{3d} \right)^3 = \frac{1}{x^3} + \frac{c}{dx^2} + \frac{c^2}{3d^2x} + \frac{c^3}{27d^3},$$

ou, ainda,

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{c}{3d} \right)^3 = \frac{1}{x^3} + \frac{c}{dx^2} + \frac{b}{dx} + \frac{bc}{9d^2}, \tag{8}$$

onde usamos a relação $c^2 = 3bd$, visto que $P(x)$ é um polinômio da nova forma reduzida.

Combinando as expressões (7) e (8), vamos ter

$$P(x) = dx^3 \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{c}{3d} \right)^3 - \frac{bc - 9ad}{9d^2} \right],$$

para todo $x \in \mathbb{C} - \{0\}$. Desde que $P(0) = d$ e d é não nulo, então $P(x) = 0$ equivale à equação

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{c}{3d} \right)^3 = \frac{bc - 9ad}{9d^2},$$

obtida a partir da última expressão de $P(x)$.

Por um cálculo direto, decorre da última equação que as raízes de $P(x)$ são dadas pela fórmula

$$x_k = \frac{3d}{\sqrt[3]{3d(bc - 9ad)} - c} \quad (k = 1,\ 2 \text{ e } 3),$$

concluindo a demonstração. □

Em condições similares ao Teorema 1, explicitamos as expressões das raízes de polinômios do terceiro grau com coeficientes reais.

Corolário 1. *Seja* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais da nova forma reduzida. Suponha que* $P(x)$ *possui termo independente não nulo, então suas raízes são dadas por*

$$x_1 = \frac{3d}{\delta - c} \qquad e \qquad x_{2,3} = -\frac{6d}{(\delta+2c)^2 + 3\delta^2}\left[(\delta + 2c) \pm \sqrt{3}\delta i\right],$$

onde δ *denota a raiz cúbica real de* $3d(bc - 9ad)$.

Demonstração. Decorre diretamente do Teorema 1(b) que as raízes de $P(x)$ são expressas por

$$x_k = \frac{3d}{\sqrt[3]{3d(bc-9ad)} - c},$$

ou, equivalentemente,

$$x_k = \frac{3d}{\delta\omega_k - c}, \tag{9}$$

onde $k \in \{1, 2, 3\}$, $\omega_1 = 1$ e $\omega_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Finalmente, basta substituir ω_1, ω_2 e ω_3 (raízes cúbicas da unidade) em (9) para chegarmos às expressões das raízes de $P(x)$, conforme enunciado. □

O próximo resultado garante que o estudo das raízes de polinômios ou equações do terceiro grau resume-se ao estudo da *nova forma reduzida.* Como consequência, podemos aplicar o Teorema 1 (direto ou indiretamente) a qualquer polinômio ou equação do terceiro grau.

Teorema 2. *Seja* $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ *um polinômio do terceiro grau com coeficientes complexos, então* $P_t(x)$ *é um polinômio do terceiro grau da nova forma reduzida para alguma constante* $t \in \mathbb{C}$. *Em particular, toda equação do terceiro grau com coeficientes complexos pode ser escrita na nova forma reduzida.*

Demonstração. Dividimos a demonstração do teorema em dois casos, apresentados a seguir:

1º Caso: $b^2 = 3ac$.

Nessas condições, vamos definir uma constante $t \in \mathbb{C}$ por

$$t = -\frac{b}{3a}, \tag{10}$$

bem como o polinômio $P_t(x) = P(x + t)$, que pode ser escrito na forma

$$P_t(x) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t,$$

onde $a_t = a,\ b_t = 3at + b,\ c_t = 3at^2 + 2bt + c$ e $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$ (cf. Seção 2).

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} c_t^2 - 3b_t d_t &= (3at^2 + 2bt + c)^2 - 3(3at + b)(at^3 + bt^2 + ct + d) \\ &= (b^2 - 3ac)t^2 + (bc - 9ad)t + (c^2 - 3bd), \end{aligned}$$

então usamos a hipótese $b^2 = 3ac$ junto com (10) para obter

$$c_t^2 - 3b_t d_t = -\frac{b(bc - 9ad) - 3a(c^2 - 3bd)}{3a} = -\frac{c(b^2 - 3ac)}{3a} = 0,$$

logo $c_t^2 = 3b_t d_t$ e assim concluímos que $P_t(x)$ é um polinômio da nova forma reduzida.

2º Caso: $b^2 \neq 3ac$.

Neste último caso, consideramos a constante $t \in \mathbb{C}$, dada por

$$t = -\frac{1}{2(b^2 - 3ac)}[(bc - 9ad) \pm \sqrt{\Delta}], \tag{11}$$

onde $\Delta = (bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd)$. Em seguida, definimos o polinômio $P_t(x) = P(x + t)$, podendo ser expresso na forma

$$P_t(x) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t,$$

onde $a_t = a$, $b_t = 3at + b$, $c_t = 3at^2 + 2bt + c$ e $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$ (cf. Seção 2).

De modo análogo ao caso anterior, verificamos a igualdade

$$c_t^2 - 3b_t d_t = (b^2 - 3ac)t^2 + (bc - 9ad)t + (c^2 - 3bd),$$

implicando por (11) que

$$c_t^2 - 3b_t d_t = 0,$$

portanto $c_t^2 = 3b_t d_t$, e, com isso, concluímos que $P_t(x)$ é um polinômio da nova forma reduzida. □

Na sequência, apresentamos dois corolários que nos permitem caracterizar as raízes de polinômios do terceiro grau sobre os reais. No primeiro deles, explicitamos as raízes em termos dos coeficientes dos polinômios.

Corolário 2. *Seja* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, tais que* $b^2 = 3ac$. *Nessas condições, temos que as raízes de* $P(x)$ *são dadas por*

$$x_1 = \frac{\gamma - b}{3a} \qquad e \qquad x_{2,3} = \frac{-(\gamma + 2b) \pm \sqrt{3}\gamma i}{6a},$$

onde γ *denota a raiz cúbica real de* $3a(bc - 9ad)$*.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em dois casos distintos, a saber:

1º Caso: $bc = 9ad$.

Decorre das igualdades $b^2 = 3ac$ e $bc = 9ad$ que

$$c = \frac{b^2}{3a} \qquad \text{e} \qquad d = \frac{bc}{9a} = \frac{b^3}{27a^2},$$

então a expressão de $P(x)$ pode ser escrita na forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{b^2}{3a}x + \frac{b^3}{27a^2} = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3,$$

portanto as raízes de $P(x)$ são dadas por

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a},$$

que coincide com as expressões enunciadas, visto que $\gamma = 0$ nesse caso.

2º Caso: $bc \neq 9ad$.

Considerando a constante real, definida por

$$t = -\frac{b}{3a}, \tag{12}$$

segue-se da prova do Teorema 2 (cf. 1º Caso) que $P_t(x)$ é um polinômio da nova forma reduzida, o qual assume a expressão

$$P_t(x) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t, \tag{13}$$

onde $a_t = a$, $b_t = 3at + b$, $c_t = 3at^2 + 2bt + c$ e $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$ (cf. Seção 2).

Substituindo (12) na expressão $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$, temos que

$$d_t = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2},$$

mas como $b^2 = 3ac$ e $bc \neq 9ad$, obtemos ainda

$$d_t = -\frac{bc - 9ad}{9a} \neq 0, \tag{14}$$

implicando pelo Teorema 1(b) que as raízes de $P_t(x)$ são dadas por

$$x_k = \frac{3d_t}{\sqrt[3]{3d_t(b_t c_t - 9ad_t)} - c_t}, \tag{15}$$

onde $k = 1, 2$ e 3.

Combinando $b_t = 3at + b$ e $c_t = 3at^2 + 2bt + c$ com (12), vamos ter

$$b_t = 0 \qquad \text{e} \qquad c_t = -\frac{b^2 - 3ac}{3a} = 0, \tag{16}$$

onde foi usada a relação $b^2 = 3ac$. Substituindo (14) e (16) em (15), deduzimos que

$$\tilde{x}_k = \frac{\sqrt[3]{3a(bc - 9ad)}}{3a} \quad (k = 1, 2 \text{ e } 3),$$

fornece as raízes de $P_t(x)$.

Aplicando a Observação 2, obtemos que as raízes de $P(x)$ são dadas por

$$x_k = \frac{\sqrt[3]{3a(bc - 9ad)} - b}{3a} = \frac{\gamma\omega_k - b}{3a}$$

onde $k \in \{1, 2, 3\}$, $\omega_1 = 1$ e $\omega_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Fazendo as substituições, concluímos que

$$x_1 = \frac{\gamma - b}{3a} \qquad \text{e} \qquad x_{2,3} = \frac{-(\gamma + 2b) \pm \sqrt{3}\gamma i}{6a}$$

expressam as raízes de $P(x)$. □

Complementando o caso abordado no Corolário 2, apresentamos, a seguir, mais um resultado para caracterização de raízes de polinômios do terceiro grau sobre os reais.

Corolário 3. *Seja* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, tais que* $b^2 \neq 3ac$ *e com derivada* $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$*. Supondo que* $s \in \mathbb{R}$ *seja uma constante, definida por*

$$s = -\frac{bc - 9ad}{2(b^2 - 3ac)},$$

então valem as seguintes afirmações:

a) *Se* $aP'(s) < 0$*, então* $P(x)$ *possui três raízes reais distintas.*

b) *Se* $aP'(s) > 0$*, então* $P(x)$ *uma raiz real e duas complexas não reais.*

c) *Se* $P'(s) = 0$*, então* $P(x)$ *possui duas raízes reais, uma simples e outra de multiplicidade dois.*

Demonstração. Sabendo que $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, obtemos a igualdade

$$P'(s) = \frac{3a(bc - 9ad)^2 - 4b(b^2 - 3ac)(bc - 9ad) + 4c(b^2 - 3ac)^2}{4(b^2 - 3ac)^2}; \tag{17}$$

então, desenvolvendo os termos e fazendo simplificações, vamos ter

$$P'(s) = -\frac{9a}{4(b^2 - 3ac)^2}(b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4b^3d - 4ac^3). \tag{18}$$

Por outro lado, observe que o discriminante é dado por

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}\right)^3 + \left(\frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{54a^3}\right)^2,$$

consequentemente,

$$D = \frac{1}{2916a^6}\left[-4(b^2 - 3ac)^3 + (2b^3 + 27a^2d - 9abc)^2\right].$$

Desenvolvendo a última expressão, temos ainda que

$$D = -\frac{1}{108a^4}\left(b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4b^3d - 4ac^3\right);$$

então, comparando com (18), inferimos a relação

$$P'(s) = \frac{243a^5}{(b^2 - 3ac)^2}D. \tag{19}$$

Nesse momento, passamos à prova de cada item separadamente:

a) Supondo que $aP'(s) < 0$, então decorre da igualdade (19) que o discriminante é negativo, implicando pela Observação 1 que $P(x)$ possui três raizes reais distintas.

b) Supondo que $aP'(s) > 0$, segue diretamente da igualdade (19) que o discriminante é positivo, portanto a Observação 1 garante que $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas não reais.

c) Considere o polinômio do terceiro grau, definido por

$$P_s(x) = P(x + s),$$

que pode ser escrito na forma

$$P_s(x) = a_s x^3 + b_s x^2 + c_s x + d_s,$$

onde $a_s = a$, $b_s = 3as + b$, $c_s = 3as^2 + 2bs + c$ e $d_s = as^3 + bs^2 + cs + d$ (cf. Section 2).

Desde que $P'(s) = 0$, temos pela igualdade (17) que

$$3a(bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)[b(bc - 9ad) - c(b^2 - 3ac)] = 0;$$

no entanto,

$$b(bc - 9ad) - c(b^2 - 3ac) = 3a(c^2 - 3bd),$$

que substituído na igualdade anterior, resulta em

$$(bc - 9ad)^2 = 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd),$$

então segue da prova do Teorema 2 (cf. 2º Caso) que $P_s(x)$ é da nova forma reduzida.

Em tais condições, vale a relação $c_s^2 = 3b_sd_s$ e, consequentemente,

$$b_sd_s = 0,$$

visto que $c_s = P'(s) = 0$. Novamente usando a hipótese $P'(s) = 0$, verificamos que

$$b_s^2 = (3as + b)^2 = (9a^2s^2 + 6abs + b^2) = 3a[P'(s) - c] + b^2 = b^2 - 3ac \neq 0,$$

donde concluímos que $b_s \neq 0$ e $d_s = 0$.

Diante do exposto, decorre do Teorema 1(a) que as raízes de $P_s(x)$ são dadas por

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \tilde{x}_3 = -\frac{b_s}{a} = -3s - \frac{b}{a},$$

portanto $P_s(x)$ possui uma raiz simples e uma raiz dupla e o mesmo ocorre com o polinômio $P(x)$, cujas raízes satisfazem

$$x_1 = x_2 = s \qquad \text{e} \qquad x_3 = -\frac{b}{a} - 2s \neq s,$$

onde usamos a Observação 2 e também o fato de b_s não ser nulo. □

4. Resolvendo Alguns Exemplos

Nesta última seção, apresentamos alguns exemplos nos quais aplicamos os resultados principais (cf. Seção 3) para determinar as raízes de polinômios do terceiro grau, mostrando a praticidade de trabalhar com a nova forma reduzida. Nos dois primeiros exemplos, usamos diretamente o Teorema 1 para calcular as raízes.

Exemplo 1. Determinar as raízes do polinômio $P(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

Solução: Sabendo que $a = 8$, $b = -12$, $c = 6$ e $d = -1$, observa-se a relação

$$c^2 = 3bd = 36;$$

então, $P(x)$ é da nova forma reduzida e segue do Teorema 1 que

$$x_k = \frac{3(-1)}{\sqrt[3]{3(-1)[(-12)\cdot 6 - 9\cdot 8\cdot(-1)]} - 6} \quad (k = 1, 2 \text{ e } 3) \tag{20}$$

expressa as raízes de $P(x)$.

Como o radicando da última expressão é nulo, concluímos que

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$$

portanto, $P(x)$ possui uma raiz com multiplicidade três.

Exemplo 2. Calcular as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 2$.

Solução: Desde que $a = 1$, $b = -6$, $c = 6$ e $d = -2$, verifica-se a igualdade

$$c^2 = 3bd = 36,$$

implicando pelo Teorema 1 (ou Corolário 1) que as raízes de $P(x)$ são dadas por

$$x_1 = \frac{3 \cdot (-2)}{\delta - 6} \qquad \text{e} \qquad x_{2,3} = -\frac{6 \cdot (-2)}{(\delta + 2 \cdot 6)^2 + 3\delta^2}[(\delta + 2 \cdot 6) \pm \sqrt{3}\delta i], \tag{21}$$

onde δ representa a raiz cúbica real de $108 = 3^3 \cdot 4$.

Simplificando as expressões em (21), temos que as raízes de $P(x)$ são dadas por

$$x_1 = \frac{2}{2 - \sqrt[3]{4}} \qquad \text{e} \qquad x_{2,3} = \frac{12}{(3\sqrt[3]{4} + 12)^2 + 3(3\sqrt[3]{4})^2}[(3\sqrt[3]{4} + 12) \pm 3\sqrt{3}\sqrt[3]{4}i],$$

ou, ainda,

$$x_1 = 2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \qquad \text{e} \qquad x_{2,3} = \frac{1}{2(2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}[(4 + \sqrt[3]{4}) \pm \sqrt[6]{432}i]$$

onde $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e $\sqrt[6]{432}$ denotam números reais positivos.

Dando continuidade, apresentamos dois exemplos que nos mostram como se aplicar o Teorema 1 (ou Corolário 1) a polinômios que não são da nova forma reduzida.

Exemplo 3. Encontrar as raízes do polinômio $P(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.

Solução: De posse dos coeficientes $a = 4$, $b = 6$, $c = 3$ e $d = 1$, confirmam-se as relações

$$c^2 \neq 3bd \qquad \text{e} \qquad b^2 = 3ac;$$

portanto, $P(x)$ não é um polinômio da nova forma reduzida. Dessa maneira, definimos a constante

$$t = -\frac{b}{3a} = -\frac{1}{2},$$

conforme o 1º Caso da demonstração do Teorema 2.

Nessas condições, segue da prova do Teorema 2 (cf. 1º Caso) que

$$P_t(x) = P\left(x - \frac{1}{2}\right) = 4x^3 + \frac{1}{2}$$

é um polinômio da nova forma reduzida, cujas raízes são dadas pela expressão

$$\tilde{x}_k = -\frac{1}{2\sqrt[3]{1}} \qquad (k = 1, 2 \text{ e } 3), \tag{22}$$

que pode ser obtida pelo Teorema 1 ou através de um cálculo direto.

Substituindo as raízes cúbicas da unidade em (22), obtemos as raízes de $P_t(x)$ dadas por

$$\tilde{x}_1 = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \tilde{x}_{2,3} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i,$$

as quais somadas com $t = -\frac{1}{2}$ (cf. Observação 2), resultam em

$$x_1 = -1 \qquad \text{e} \qquad x_{2,3} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

que correspondem às raízes do polinômio $P(x)$.

Exemplo 4. Determinar as raízes do polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 + 8x + 6$.

Solução: Podemos afirmar que $P(x)$ não é da nova forma reduzida, visto que

$$c^2 \neq 3bd,$$

onde $a = 1$, $b = 3$, $c = 8$ e $d = 6$. Desde que $b^2 \neq 3ac$, introduzimos a constante

$$t = -\frac{1}{2(b^2 - 3ac)}[(bc - 9ad) + \sqrt{\Delta}],$$

onde $\Delta = (bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd)$.

Substituindo os coeficientes de $P(x)$, vamos ter

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot (-15) \cdot 10 = 1500,$$

consequentemente,

$$t = -\frac{-30 + 10\sqrt{15}}{-30} = \frac{\sqrt{15}}{3} - 1,$$

daí definimos o polinômio $P_t(x) = P(x + t)$.

Deduzimos da prova do Teorema 2 (cf. 2º Caso) que o polinômio

$$P_t(x) = x^3 + \sqrt{15}x^2 + 10x + \frac{20\sqrt{15}}{9}$$

é da nova forma reduzida. Do Teorema 1 (ou Corolário 1), obtemos as raízes de $P_t(x)$ dadas por

$$x_1 = \frac{3 \cdot 20\sqrt{15}}{9(\delta - 10)} \qquad \text{e} \qquad x_{2,3} = -\frac{6 \cdot 20\sqrt{15}}{9[(\delta + 2 \cdot 10)^2 + 3\delta^2]}[(\delta + 2 \cdot 10) \pm \sqrt{3}\delta i]$$

onde δ denota a raiz cúbica real de -1000, isto é, $\delta = -10$.

Simplificando as últimas expressões, temos que as raízes de $P_t(x)$ são as seguintes

$$\tilde{x}_1 = -\frac{\sqrt{15}}{3} \qquad \text{e} \qquad \tilde{x}_{2,3} = -\frac{\sqrt{15}}{3} \pm \sqrt{5}i,$$

portanto basta somar $t = \frac{\sqrt{15}}{3} - 1$ a cada raiz acima (cf. Observação 2), obtendo

$$x_1 = -1 \qquad \text{e} \qquad x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{5}i,$$

que correspondem às raízes de $P(x)$.

Por fim, apresentamos um exemplo no qual recorremos a um polinômio da nova forma reduzida que possui coeficientes complexos não reais.

Exemplo 5. Calcular as raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x - 1$.

Solução: De modo análogo ao Exemplo 4, inferimos as desigualdades

$$c^2 \neq 3bd \qquad \text{e} \qquad b^2 \neq 3ac,$$

visto que $a = 2$, $b = 0$, $c = -3$ e $d = -1$. Sendo assim, podemos definir a seguinte constante

$$t = -\frac{1}{2(b^2 - 3ac)}[(bc - 9ad) + \sqrt{\Delta}],$$

onde $\Delta = (bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd)$.

Substituindo os coeficientes de $P(x)$, obtemos

$$\Delta = 18^2 - 4 \cdot 18 \cdot 9 = -324,$$

por conseguinte,

$$t = -\frac{1}{2 \cdot 18}(18 + 18i) = -\frac{1}{2}(1 + i).$$

implicando pela prova do Teorema 2 (cf. 2º Caso) que $P_t(x)$ é da nova forma reduzida.

Realizando um cálculo direto, temos que

$$P_t(x) = P\left(x - \frac{1+i}{2}\right) = 2x^3 - 3(1+i)x^2 - 3(1-i)x + (1+i)$$

então aplicamos o Teorema 1 para chegar à expressão

$$\tilde{x}_k = \frac{3(1+i)}{\sqrt[3]{-27(1+i)^3} + 3(1-i)} = \frac{(1+i)}{(1-i) - \sqrt[3]{(1+i)^3}}, \tag{23}$$

a qual fornece as raízes de $P_t(x)$.

Multiplicando $1+i$ pelas raízes cúbicas da unidade, obtemos as raízes cúbicas de $(1+i)^3$ dadas por

$$1+i, \qquad -\frac{1}{2}[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i] \qquad \text{e} \qquad -\frac{1}{2}[(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i];$$

daí basta substituí-las em (23), resultando em

$$\tilde{x}_1 = -\frac{1}{2}(1-i), \qquad \tilde{x}_2 = \frac{1}{2}[(2-\sqrt{3}) + i] \qquad \text{e} \qquad \tilde{x}_3 = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3}) + i],$$

que corresponde às raízes do polinômio $P_t(x) = P_{-\frac{1+i}{2}}(x)$.

Finalmente, somamos $t = -\frac{1+i}{2}$ em cada raiz de $P_t(x)$, concluindo que

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \qquad \text{e} \qquad x_3 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$$

são as raízes do polinômio $P(x)$.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao parecerista pelas contribuições e à *Revista Professor de Matemática Online* pela oportunidade.

Referências

[1] Boyer, C. B. *História da Matemática.* 3ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

[2] Carmo, M. P., Morgado, A. C. e Wagner, E. Trigonometria e Números Complexos. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[3] Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra.* 5ª ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013

[4] Lima, E. L. *Equação do terceiro grau.* Matemática Universitária, v. 5, p. 10-23, 1987.

[5] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1.* 10ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] Rechtschaffen, E. E. M. *Sobre aproximações polinomiais de raízes reais de cúbicas.* Matemática Universitária, v. 46, p. 12-16, 2009.

João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - Unilab
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN
<joaofilho@unilab.edu.br>

Odete Elana Sousa Pereira
Secretaria de Educação do Estado do Ceará - SEDUC
<odeteelana@hotmail.com>

Fábio Cézar Silveira de Castro
Secretaria de Educação do Estado do Ceará - SEDUC
<proffabioc@hotmail.com>

Recebido: 16/12/2021
Publicado: 25/08/2022