

O GeoGebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações em Geometria.

Hilário Alencar 

Larissa Cândido 

Ronaldo Garcia 

Carmen Mathias 

Resumo

Neste artigo temos como objetivo apresentar possibilidades de utilizar o *software* de matemática dinâmica GeoGebra para ilustrar demonstrações de resultados de geometria euclidiana presentes na literatura. Optamos por escolher o referido *software* visto que propicia aspectos dinâmicos visuais relevantes para compreender as demonstrações dos resultados elencados. Esperamos que as construções aqui apresentadas, assim como a discussões quanto às demonstrações, sirvam como suporte a professores e alunos que estão estudando os resultados apresentados nesse artigo.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, Lei dos Senos, Lei dos cossenos, Número de ouro.

Abstract

In this article we aim to present possibilities of using the mathematical software GeoGebra to illustrate demonstrations of results of Euclidean plane geometry present in the literature. We chose this software because it provides dynamic visual aspects relevant to understanding the demonstrations of the results listed. We hope that the constructions presented here, as well as the discussion about the demonstrations serve as support to teachers and students who are studying the results presented in this article.

Keywords: Pythagorean theorem, law of sines, law of cosines, golden number.

1. Introdução

O uso de recursos visuais na obtenção de resultados de geometria euclidiana plana ganhou novos horizontes usando ferramentas computacionais de matemática dinâmica, especialmente a partir dos mecanismos disponíveis no *software* GeoGebra, como, por exemplo, as elencadas em [1], [4] e [14].

Neste artigo, usamos esses recursos para obter demonstrações de resultados de geometria plana. Focaremos nos resultados que tem um apelo visual, uma figura expressa na sua essência um fato matemático e que nos favorece a encontrar e formalizar a demonstração do mesmo. Esse tipo de comunicação é conhecido como *provas sem palavras* e ficou popular na revista *Mathematics Magazine* que publica desde 1975, com regularidade, esses tipos de demonstrações, conforme [8]. Nesse contexto, destacamos a seguinte frase atribuída a Lynn Steen:

Para a maioria das pessoas, a memória visual é mais poderosa do que a memória linear de passos em uma prova. Além disso, as várias relações incorporadas em um bom diagrama representam matemática real à espera de reconhecimento e verbalização. Então como um dispositivo para ajudar os alunos a aprender e lembrar matemática, provas sem palavras são muitas vezes mais precisas do que provas (mal lembradas) com palavras (Steen, 2012 apud Doyle et al, 2014).

2. Matemática e reflexões

Vários autores dedicaram e refletiram sobre a questão da natureza da matemática. Dentre os mais contemporâneos podemos mencionar M. Atiyah [2], P. Halmos [10], T. Tao [29] e W. Thurston [30]. W. Thurston ao refletir sobre processo e tempo, defende que:

Temos facilidade para pensar em processos ou sequências de ações que muitas vezes podem ser usadas para um bom efeito no raciocínio matemático. Uma maneira de pensar em uma função é como uma ação, um processo, que leva o domínio para o intervalo. Isso é particularmente valioso ao compor funções. Outro uso dessa facilidade é para lembrar provas: as pessoas geralmente se lembram de uma prova como um processo que consiste em várias etapas. Na topologia, a noção de homotopia é mais frequentemente pensada como um processo que evolui no tempo. Matematicamente, o tempo não é diferente que um espaço unidimensional, mas como os humanos interagem com ele de maneira bastante diferente, é psicologicamente muito diferente (Thurston, 1994).

Ou seja, o processo como descrito por W. Thurston é particularmente aplicado na manipulação do *software* GeoGebra. Tais procedimentos podem ser observados desde as construções geométricas até a abordagem dinâmica presente nas animações e atividades interativas. No caso de uma demonstração de certo resultado de geometria euclidiana plana, são realizadas várias construções geométricas até estabelecer evidências heurísticas de que ele é verdadeiro. E esses procedimentos podem ser associados ao fazer matemática, que conforme Paul Halmos [10], significa:

Não apenas leia; lute! Faça suas próprias perguntas, procure seus próprios exemplos, descubra suas próprias provas. A hipótese é necessária? A recíproca é verdadeira? O que acontece no caso especial clássico? E os casos degenerados? Onde a prova usa a hipótese? (Halmos, 1985).

Com o *software* GeoGebra podemos aplicar com muita propriedade o que “significa fazer matemática”, explorando, criando estratégias, argumentando, conjecturando, etc.

Ainda sobre o fazer matemática, para Terence Tao [29] a “boa matemática” poderia se referir (sem ordem particular) a:

- Boa resolução de problemas matemáticos (por exemplo, um grande avanço em um problema matemático importante);
- Boa técnica matemática (por exemplo, um uso magistral de métodos existentes ou o desenvolvimento de novas ferramentas);

- *Boas relações públicas matemáticas (por exemplo, uma apresentação eficaz de uma realização matemática para não matemáticos ou de um campo de matemática para outra);*
- *Matemática intuitiva (por exemplo, um argumento que é natural e facilmente visualizável) (Tao,2007).*

Acreditamos que “uma boa prova matemática” pode ser inspirada a partir dos recursos proporcionados por *softwares* como o GeoGebra, pois elas obedecem a um protocolo de construção designado pelo usuário, que as executa, desde um computador ou um dispositivo móvel, seguindo uma determinada ordem. E, essa ordenação necessária a realizar uma determinada construção, pode ser encarada como uma estratégia, assim como as utilizadas para resolver determinados problemas matemáticos.

3. Estratégias para resolução de problemas

A *resolução de problemas* é uma ferramenta indispensável para o treinamento e o aprimoramento do conhecimento da Matemática. Basicamente, devemos compreender bem o problema, avaliar nossa competência para resolvê-lo, dimensionar a sua relevância e a sua profundidade, organizar e propor ideias, fazer uso correto da linguagem matemática, procurar analogias, executar as etapas da solução pretendida, reavaliar o processo desenvolvido, verificar as coerências etc.

A seguir iremos discutir brevemente sobre as estratégias propostas por G. Pólya [21] e L. Larson [11] que julgamos úteis para o processo de construção das animações realizadas no *software* GeoGebra e que ilustram as demonstrações presentes neste artigo.

As estratégias para resolução de problemas descritivas por Pólya são difundidas em vários trabalhos [21, 22, 23, 24] e devem compreender quatro passos básicos: compreensão do problema, planejamento, execução e avaliação. Já Larson [11] cita doze estratégias para resolução de problemas. Ou seja, ele faz um refinamento daquelas citadas por Pólya. Ao abordar um problema existe a necessidade de procurar por um padrão, traçar uma figura, formular um problema equivalente, modificar o problema, escolher uma notação efetiva, explorar as simetrias; dividir em casos, usar um raciocínio diferente, argumentar por contradição, procurar paridades, considerar casos extremos e generalizar [11]. Para maiores detalhes sobre as estratégias adotadas por Larson, sugerimos [1].

Quando falamos em *resolução de problemas* devemos considerar os variados tipos de problemas propostos nos livros didáticos. Em geral, nos livros didáticos são propostas atividades em que os autores sabem que a solução existe. Tais atividades têm como objetivo o treinamento do aluno a um novo conteúdo, complementar a teoria exposta, e fazer interconexões com outros assuntos da matemática e de outras ciências. Isso é corroborado por [27] que diferencia um exercício de um problema. Para esse autor,

O exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido pelo resolvidor, como a aplicação de um algoritmo CONHECIDO, de uma fórmula CONHECIDA etc. O exercício envolve mera aplicação e o problema necessariamente envolve invenção ou/e criação significativa. Um problema matemático é toda situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo, e/ou a invenção de

uma demonstração de um resultado matemático dado. O fundamental é que o resolvidor tenha de inventar estratégias e criar ideias; ou seja: pode até ocorrer que o resolvidor conheça o objetivo a chegar, mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem os meios para atingir tal objetivo. (Silveira, 2001)

Existem também os problemas desafiadores (também conhecidos como conjecturas e/ou problemas abertos) que não sabemos *a priori* se têm ou terão soluções. Elaborar um bom problema matemático adequado ao processo de ensino-aprendizagem, isto é, aquele que pode ser resolvido aplicando as ferramentas e as estruturas matemáticas conhecidas até a sua época é um processo que demanda treinamento, conhecimento e maturidade.

Por outro lado, para os *problemas abertos* não temos nenhuma estratégia a seguir. Dependerá essencialmente do trabalho árduo e das ideias originais de quem pretende resolvê-los. As vezes é preciso criar/descobrir uma nova teoria matemática para resolver um problema aberto. Existem problemas abertos com mais de 350 anos de idade, como, por exemplo a chamada conjectura de Goldbach.

4. O GeoGebra e as demonstrações

A seguir ilustramos vários fatos de geometria euclidiana plana em que aplicamos as ferramentas visuais e dinâmicas disponíveis no GeoGebra para estabelecer provas heurísticas. Inspiramos tais construções em pesquisas, como exemplificado em [6], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [25], [26], [28] e [31].

Caso seja o interesse reproduzir as animações que foram desenvolvidas, observamos que é necessário um certo nível de familiaridade com o *software* Geogebra.

4.1. Teorema de Pitágoras

Nessa subseção serão exploradas duas demonstrações do Teorema de Pitágoras. A primeira, frequentemente encontrada em livros didáticos, utiliza a ideia de áreas equivalentes, e a segunda é atribuída a Leonardo da Vinci.

Teorema 1 (Teorema de Pitágoras). *Considere um triângulo retângulo de lados a e b e hipotenusa c . Então:*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

A Figura 1 ilustra um recorte da animação relativa à primeira demonstração. Observamos que uma construção similar foi apresentada em [14] porém, no referido trabalho os autores não se preocuparam em justificar o porquê a animação caracteriza uma prova para o Teorema, o que faremos na sequência.

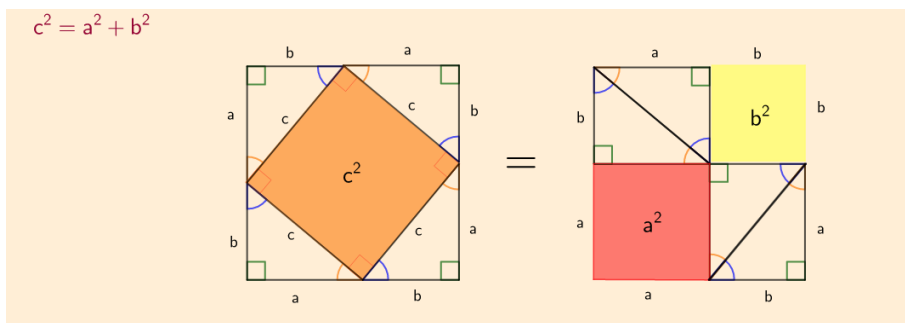


Figura 1: Ilustração da prova do Teorema de Pitágoras via equivalência de áreas.

Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/wwzd4d7j>

Demonstração. Conforme mencionado, o resultado é obtido usando equivalências de áreas. Na Figura 1 a esquerda, o quadrado de lado $a + b$ é decomposto em quatro triângulos retângulos e um quadrado de lado c . Na construção final ilustrada à direita, o quadrado de lado $a + b$ é decomposto em dois quadrados de lados a e b e dois retângulos de lados a e b .

Portanto temos:

$$c^2 + 4 \left(\frac{ab}{2} \right) = a^2 + b^2 + 2ab \implies c^2 = a^2 + b^2.$$

□

Uma outra demonstração do Teorema de Pitágoras é atribuída a Leonardo da Vinci, que nasceu na Itália em abril de 1452 e faleceu na França em maio de 1519, conforme aponta [12]. A Figura 2 ilustra uma foto original da referida prova.



"The Euclidean demonstration of the Pythagorean theorem" by Leonardo da Vinci displayed at the Louvre museum, Oct 20, 2019 in Paris. (RAFAEL YAGHOBZADEH / AP)

Figura 2: Foto original da prova do Teorema de Pitágoras por Leonardo da Vinci.

Fonte: Louvre exhibit acclaims Da Vinci (2019) [13]

Um recorte da animação realizada no GeoGebra é ilustrada na Figura 3 abaixo.

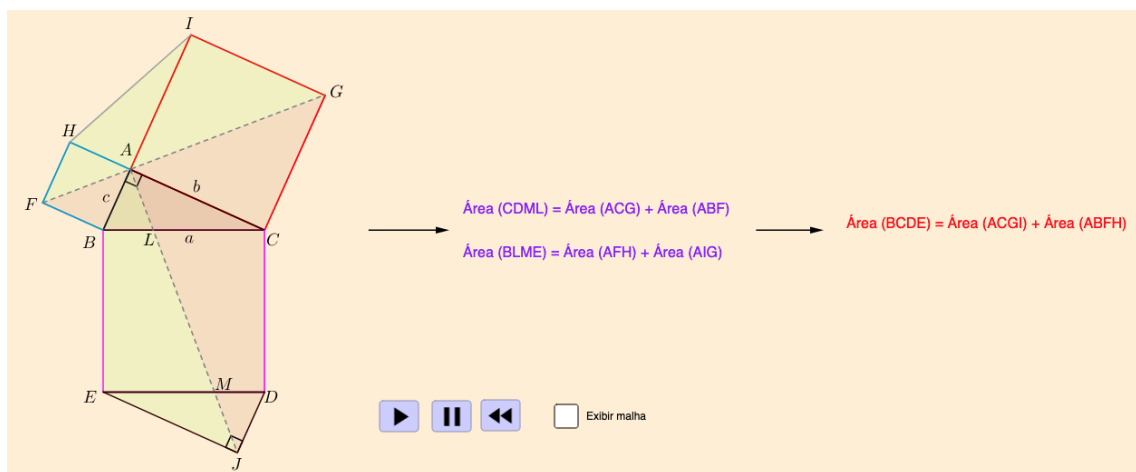


Figura 3: Ilustração da prova do Teorema de Pitágoras atribuída a da Vinci.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/u5hce3dq>

Demonstração. Para demonstrar o teorema, foram adicionados ao triângulo retângulo original ABC os quadrados $BCDE$, $ACGI$ e $ABFH$ cujos lados medem a , b e c respectivamente. Após, foram estrategicamente colocados dois triângulos (EDJ e AHI) congruentes ao triângulo ABC e traçados os segmentos AJ e FG . Ao fazê-lo, determinou na figura quatro quadriláteros $AFHI$, $BCGF$, $ABEJ$ e $ACDJ$ congruentes entre si e, portanto, com mesma área. O segmento AJ dividiu os triângulos ABC e EDJ em outros quatro triângulos ABL , ACL , DJM e EJM . Notemos que os triângulos ABL e DMJ são congruentes e, conseqüentemente, ACL e MJE também o são. Voltando a atenção ao quadriláteros $ACDJ$ e $BCGF$, e denotando por $A(\text{polígono})$ a área do polígono, temos

$$A(ACDJ) = A(ACL) + A(CDML) + A(MDJ)$$

e

$$A(FBCG) = A(ACG) + A(ABC) + A(ABF)$$

Como essas áreas são iguais, vem

$$A(ACL) + A(CDML) + A(MDJ) = A(ACG) + A(ABC) + A(ABF)$$

Mas, como $A(ABC) = A(ABL) + A(ACL)$ e como os triângulos DJM e ABL são congruentes, segue que

$$A(CDML) = A(ACG) + A(ABF)$$

Analogamente mostra-se que

$$A(BLME) = A(AFH) + A(AIG)$$

E, como

$$A(BCDE) = A(CDML) + A(BLME),$$

$$A(ACGI) + A(ACG) + A(AIG)$$

e

$$A(ABFH) = A(ABF) + A(AHF),$$

segue que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

□

Uma variação da prova de Leonardo da Vinci é ilustrada na Figura 4 que é um recorte da animação realizada para essa demonstração.

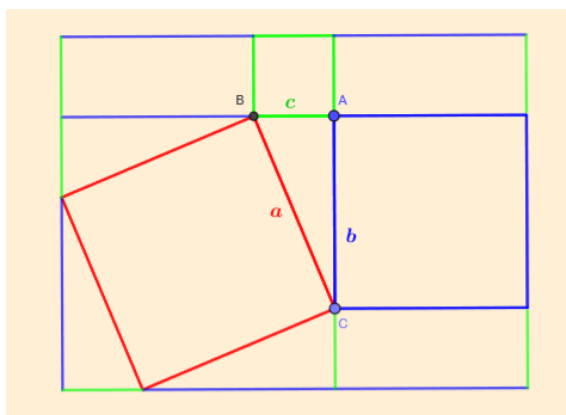


Figura 4: Decomposição de áreas.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/p8xgxwvs>

Demonstração. Nessa construção, um retângulo de lados $2b+c$ e $b+2c$ é decomposto em 3 quadrados (vermelho, azul, verde), três retângulos de lados b e c , além de quatro triângulos retângulos de lados b e c com hipotenusa a .

Logo, por equivalência de áreas, temos:

$$(b+2c)(2b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 3bc + 4\left(\frac{bc}{2}\right) \iff a^2 = b^2 + c^2.$$

□

No que segue, listamos algumas consequências advindas da construção realizada.

Observação 1. Em um triângulo retângulo de lados $b > 0$, $c > 0$ e hipotenusa a temos:

$$a \leq b + c \leq \sqrt{2}a.$$

A Figura 5 ilustra esse fato.

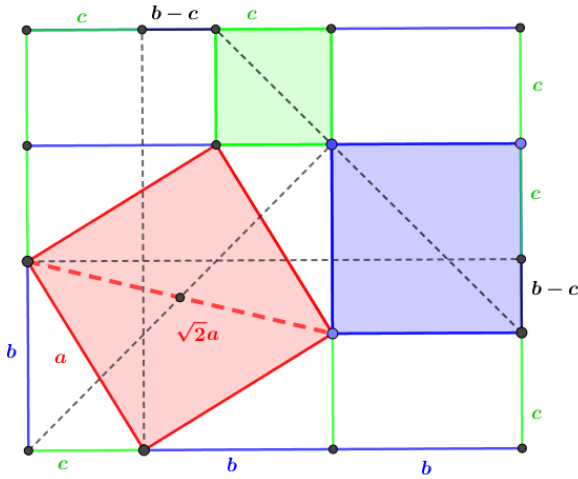


Figura 5: Ilustração que a desigualdade $a \leq b + c \leq \sqrt{2}a$ é válida.

Observação 2. Referindo a Figura 6, temos que $|AA_0| \geq |OQ_1|$ e a diferença $|AA_0| - |OQ_1|$ é máxima quando $\cos \beta = \sqrt[3]{2} - 1$, sendo $\beta \approx 74.93^\circ$. Esse valor é igual a

$$\frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt[3]{2})^{\frac{3}{2}} a}{4}.$$

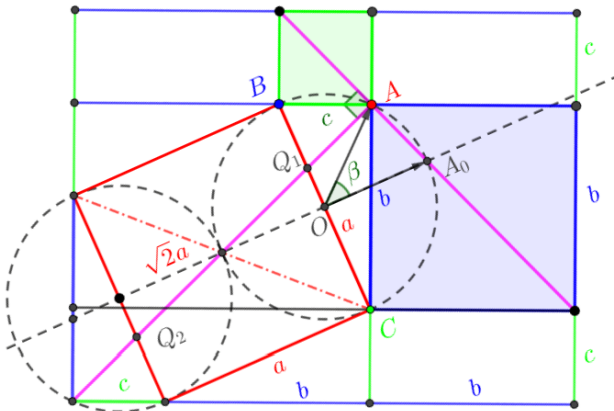


Figura 6: Conseqüências da prova do Teorema de Pitágoras usando decomposição de áreas.

Observação 3. Considere um triângulo com lados a, b, c , onde $a \geq b \geq c$ e φ o número de ouro. Então:

$$1 < \frac{a+c}{b} < 3, \quad a \leq \frac{a+b+c}{2} = s, \quad 1 \leq \min\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}\right) < \varphi.$$

em que s é o semiperímetro do triângulo.

4.2. Alguns resultados de trigonometria

O teorema de Pitágoras enunciado no Teorema 1 é um caso particular da conhecida Lei dos Cossenos. Uma demonstração visual desse resultado pode ser encontrado em [4].

Teorema 2 (Lei dos cossenos). *Sejam a , b e c números positivos. Então:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

A figura 7 ilustra a animação feita no GeoGebra.

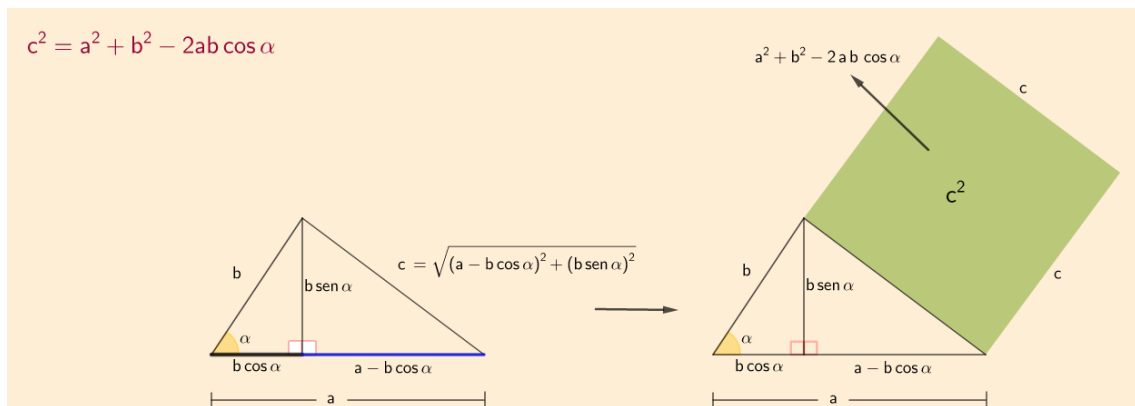


Figura 7: Ilustração da prova dinâmica do Teorema 2.

Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/pppurs6c>

Demonstração. O resultado é obtido usando as relações trigonométricas e o Teorema de Pitágoras. Como $c^2 = (a - b \cos \alpha)^2 - (b \sin \alpha)^2$, usamos a relação fundamental $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para mostrar que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$. \square

Outro resultado importante também encontrado em [4] e em geral trabalhado no Ensino Médio é a conhecida expressão que determina o seno da diferença de dois arcos.

Teorema 3 (Seno da diferença). *Considere dois ângulos α e β tais que $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$. Então:*

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

A figura que inspirou a animação ilustrada na Figura 8 é encontrada em [17].

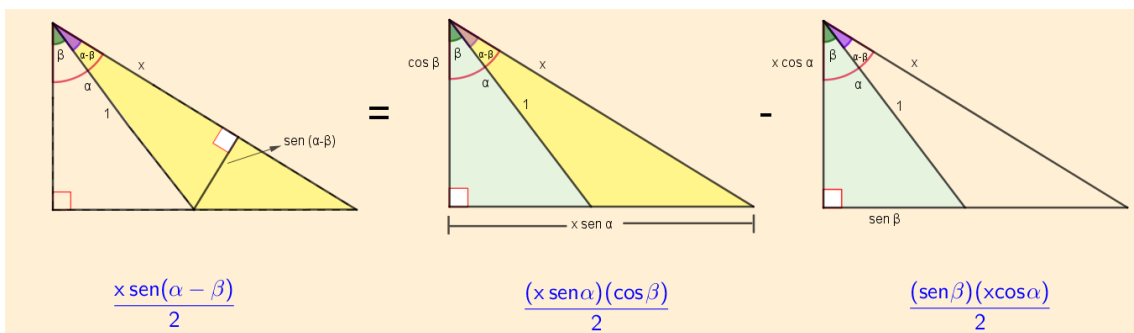


Figura 8: Ilustração da prova dinâmica do Teorema 3.

Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/rvrvndqef>

Demonstração. Considere dois triângulos retângulos com hipotenusas 1 e $x > 1$ e ângulos β e α como ilustrado na Fig. 8 (esquerda). Usando o Teorema de Pitágoras e calculando a altura do triângulo ilustrado em amarelo, o resultado segue argumentando por equivalências de áreas. □

Observação 4. A hipótese $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ é feita somente para garantir a funcionalidade da construção dinâmica apresentada. O resultado vale sem essa restrição.

No que segue, enunciamos um resultado de trigonometria, denominado Cosseno do arco duplo, cuja prova sem palavras encontra-se em [31] e cujo processo de animação está ilustrado em [4].

Teorema 4 (Cosseno do arco duplo). *Seja $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Então:*

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

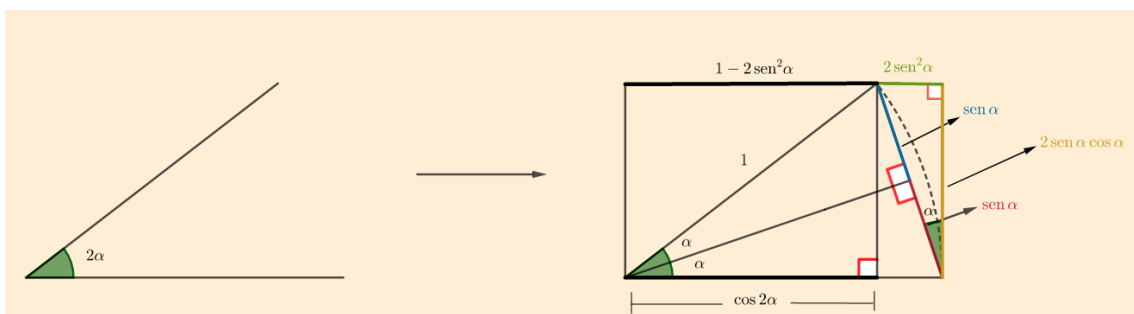


Figura 9: Ilustração da prova dinâmica do Teorema 4.

Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/vhwtaqfc>

Demonstração. Na construção dinâmica usamos o Teorema de Pitágoras para calcular os lados e hipotenusas dos triângulos envolvidos. O ponto crucial é convencer-se que a é um ângulo do triângulo retângulo de hipotenusa $\sin a + \sin a = 2 \sin a$. Mas esse fato segue-se observando na construção o triângulo isósceles de lado 1 e base $2 \sin a$ e o triângulo retângulo com hipotenusa $2 \sin a$ tendo um lado tangente ao arco de círculo (pontilhado) também construído. \square

Observação 5. A hipótese $0 < a < \frac{\pi}{4}$ foi feita somente para garantir que $\cos 2a > 0$ (lado do retângulo) e construir a animação dinâmica. O resultado vale sem essa restrição.

O Teorema de Viviani é um resultado atribuído ao matemático, físico e astrônomo italiano Vincenzo Viviani. Encontramos na literatura ilustrações da prova desse Teorema em [17], [15], [9] e [25].

4.3. Teorema de Viviani e generalizações

Teorema 5 (Teorema de Viviani). *Considere um triângulo equilátero $\triangle ABC$ de lado l e P um ponto interior a $\triangle ABC$ como ilustrado na Figura 10. Então as perpendiculares passando por P aos três lados do triângulo $\triangle ABC$ determinam três segmentos com comprimentos a , b e c , e cuja soma é igual à altura do triângulo denotada por h . Isto é:*

$$h = a + b + c.$$

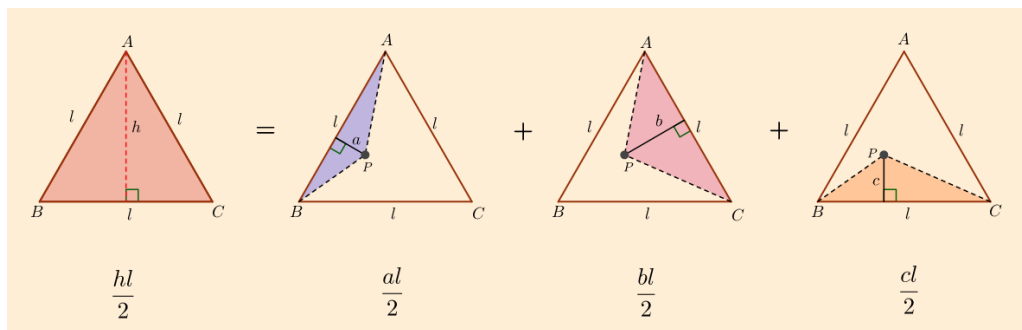


Figura 10: Ilustração da prova dinâmica do Teorema 5.

Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/pkrbngfe>

Demonstração. O resultado segue diretamente calculando as áreas dos triângulos $\triangle ABC$, $\triangle APB$, $\triangle APC$ e $\triangle BPC$.

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \text{Área}(\triangle APB) + \text{Área}(\triangle APC) + \text{Área}(\triangle BPC)$$

Portanto, $\frac{hl}{2} = \frac{al}{2} + \frac{bl}{2} + \frac{cl}{2}$ e $h = a + b + c$. \square

Outra ilustração da animação de uma prova do Teorema 5 usando o *software* GeoGebra é esboçada na Figura 11.

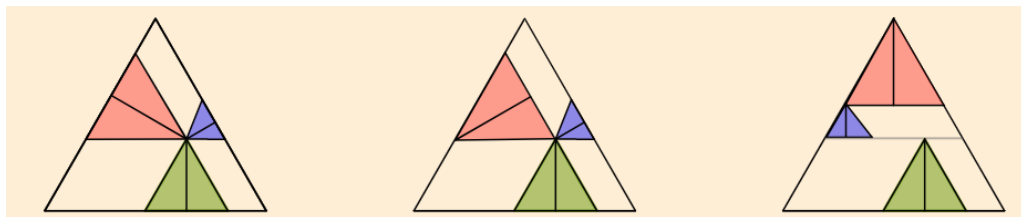


Figura 11: Versão alternativa da Prova do Teorema de Viviani
 Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/tvvuxn9j>

Demonstração. Pelo ponto P traçamos retas paralelas aos lados do triângulo ΔABC obtendo três triângulos equiláteros (vermelho, azul e verde). A seguir rotacionamos os triângulos (azul e vermelho) obtendo a configuração à direita como esboçado na Figura 11. \square

Observação 6. A recíproca do teorema de Viviani é também verdadeira, ou seja, se a soma das distâncias do ponto P aos lados de um triângulo ΔABC é independente de P , então ΔABC é um triângulo equilátero. Esse resultado pode ser encontrado em [5].

Observação 7. Quando P é exterior ao triângulo devemos considerar a distância com sinal. Temos 6 regiões, e com a convenção de sinais, levando em consideração a orientação, temos que

$$\pm a \pm b \pm c = \pm h.$$

Observação 8. O artigo [5] apresenta uma generalização para esse resultado para todos os polígonos regulares. Ou seja, dado um ponto no interior do polígono regular \mathcal{P}_n , a soma das distâncias do ponto P às retas contendo os lados de \mathcal{P}_n é independente de P .

Observação 9. Para um quadrilátero, a soma das distâncias de um ponto interior P aos lados é independente de P se, e somente se, o quadrilátero é um paralelogramo.

Uma generalização do Teorema de Viviani para o espaço 3D é apresentada em [7]. A Figura 12 ilustra a animação realizada no GeoGebra.

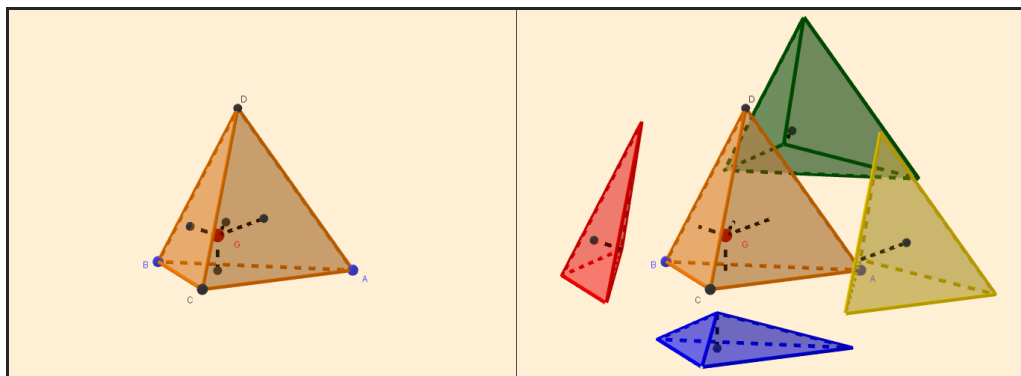


Figura 12: Generalização do Teorema de Viviani para o espaço.
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/tzbu7ynq>

Teorema 6 (Teorema de Viviani no espaço). *Em um tetraedro regular, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro.*

Demonstração. Consideremos o ponto G interior ao tetraedro regular $ABCD$ de altura h e seja A a área de cada face. Notemos que G divide $ABCD$ em quatro outros tetraedros de altura h_i . Então,

$$\text{Volume}(ABCD) = \frac{Ah}{3} = \frac{Ah_1}{3} + \frac{Ah_2}{3} + \frac{Ah_3}{3} + \frac{Ah_4}{3}.$$

Portanto, $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$. Ou seja, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro. □

Observação 10. Conforme consta em [7] usando o mesmo argumento, o Teorema 6 pode ser generalizado para qualquer poliedro cujas faces possuem a mesma área. E, portanto, não inclui apenas os outros quatro poliedros regulares, mas também os irregulares que satisfazem tal condição.

Para encerrar esse artigo, vamos retomar alguns conceitos apresentados em [3] e que são temas frequentes nas salas de aula, visto suas aplicabilidades.

4.4. Proporção áurea e números de Fibonacci

4.4.1 Proporção áurea e o número de ouro

Definição 1. Um retângulo de lados a e b é chamado retângulo de ouro se $a/b = (\sqrt{5} + 1)/2 = \varphi$. O número φ é chamado número de ouro.

A Figura 13 ilustra uma animação da construção desse retângulo.

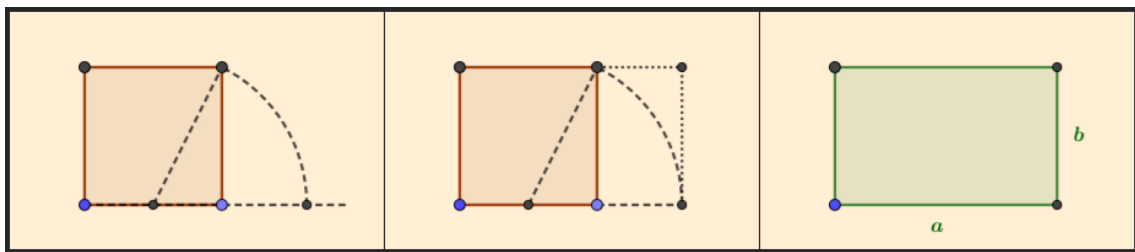


Figura 13: Construção do retângulo de ouro.
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/qqanjgpe>

Conforme consta em [3] a proporção apresentada na definição acima é conhecida desde os pitagóricos de cinco séculos a.C. e foi descoberta no pentágono regular, ilustrada na Figura 14.

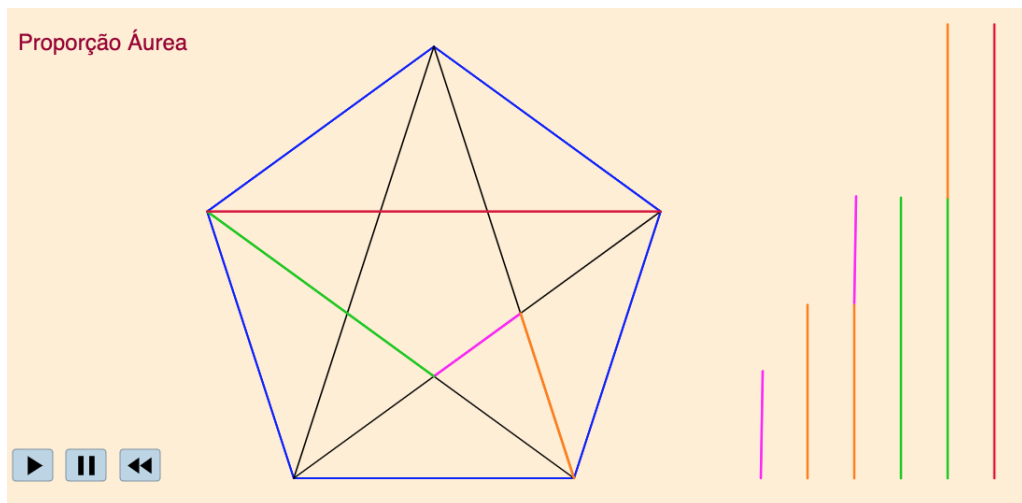


Figura 14: Proporção áurea no pentágono regular.
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/w6exuftp>

Com o pentágono regular previamente construído, traçamos todas as diagonais desse polígono. Assim, por meio dessas extensões das diagonais formamos um pentagrama. Observando essas diagonais, utilizamos a proporção dois por um, isto é, vemos que a soma do comprimento das diagonais destacadas em roxo e laranja é igual ao comprimento da terceira diagonal em verde, e, além disso, a segunda e a terceira (laranja e verde) diagonais somadas são exatamente iguais à quarta (vermelha). Essa característica é conhecida como *Proporção Áurea*. Veja também [19].

Sejam dois números reais positivos a e b satisfazendo a equação

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

e considere a Figura 15 construída partindo dos retângulos de ouro $ABMI$ e $ACEH$. As diagonais IB e CH são paralelas e formam um ângulo $\alpha = \arctan(\varphi)$ com os lados verticais.

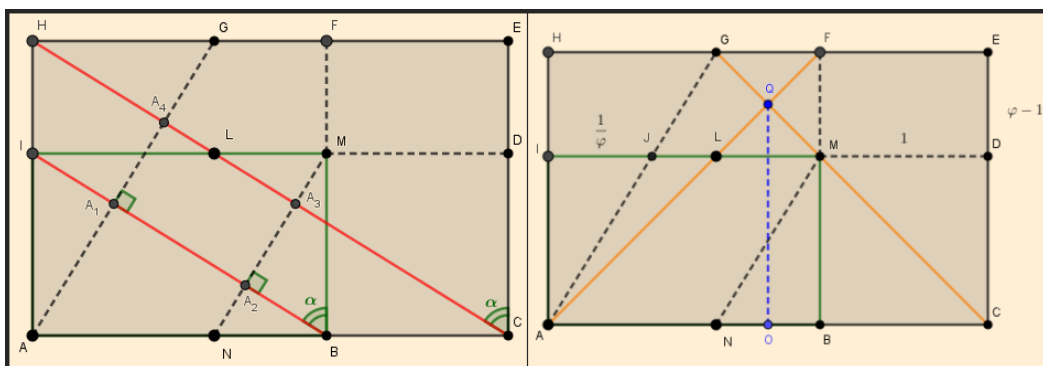


Figura 15: Propriedades do número de ouro $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Teorema 7. Na Figura 15 os retângulos $ABMI$, $ACEH$, $MDEF$, $HILG$, $ANGH$, $NBML$, $A_1A_2A_3A_4$ são retângulos de ouro. As diagonais AF e GC dos quadrados $ABFH$ e $NCEG$ de lados φ e $1 + 1/\varphi = \varphi$ intersectam-se num ponto cuja projeção ao lado AC é o seu ponto médio $(A + C)/2$.

Demonstração. Na construção da Figura 15 observamos que as diagonais MN e AG são paralelas e ortogonais às diagonais HC e IB . Das construções efetuadas observamos que $|IJ| = |LM| = 1/\varphi$ e $|JL| = 1/\varphi^2$. Fazendo uso das relações métricas de triângulos retângulos, todas as afirmações podem ser verificadas lembrando que $\varphi^2 = \varphi + 1$. \square

4.4.2 Sequência de Fibonacci, número Pi e relações trigonométricas

Teorema 8. A sequência de Fibonacci definida por $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ é dada por

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n + (-\varphi)^{-n})$$

onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro. Além disso,

$$\arctan\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{f_{n-1}}{f_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+2}}{f_{n-1}} = \varphi^3.$$

Demonstração. A solução da equação linear de recorrência $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ é obtida procurando um candidato da forma $f_n = \lambda^n$. Substituindo, obtemos a equação do segundo grau $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ cuja solução $\{\varphi, -1/\varphi\}$ onde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Finalmente, procurando uma solução na forma $f_n = k_1\varphi^n + k_2(-\frac{1}{\varphi})^n$ obtemos o resultado com $k_1 = 1/\sqrt{5}$ e $k_2 = -1/\sqrt{5}$.

A demonstração da segunda parte é baseada na Figura 16 inspirada em [9]. Na figura temos uma sequência de quadrados de lados f_n e retângulos de lados $f_{n+1} > f_n$, $f_{n+2} > f_{n+1}$ e $f_{n+2} > f_{n-1}$. Como mostrado, as diagonais de três retângulos definem um triângulo retângulo isósceles e, portanto, o resultado segue usando as relações trigonométricas.

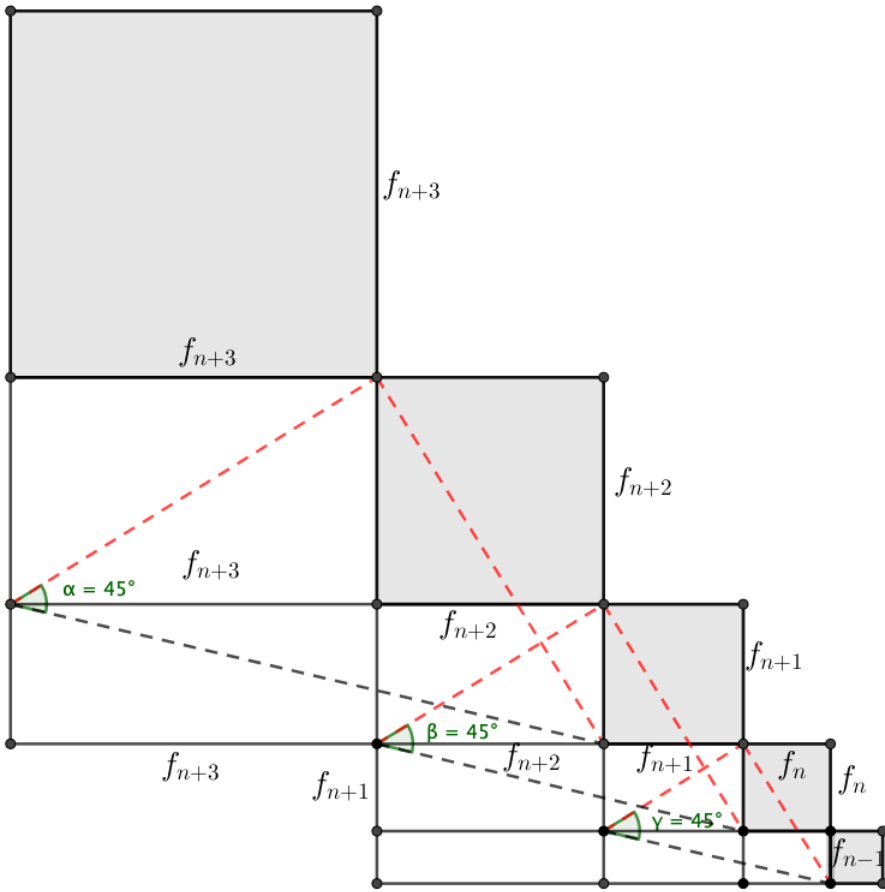


Figura 16: Sequência de Fibonacci e invariância envolvendo o número de ouro $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/vfzqjvfa>

□

Corolário 1. Nas condições anteriores,

$$\arctan(\varphi) + \arctan(\varphi^3) = \frac{3\pi}{4} \text{ e } \arctan\left(\frac{1}{\varphi}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\varphi^3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Demonstração. Segue da relação

$$\arctan\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{f_{n-1}}{f_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

fazendo o limite quando $n \rightarrow \infty$, e da relação

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Lembramos também que

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad xy \neq 1.$$

□

Uma relação trigonométrica muito conhecida, envolvendo arcos tangentes, é a seguinte:

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Um questionamento natural é se essa relação vale para outros valores. Na busca de respostas é possível perceber uma relação entre trigonometria e a sequência de Fibonacci.

Considere a Figura 17 decomposta em três triângulos retângulos $\triangle ABD$, $\triangle ADG$ e $\triangle DFG$.

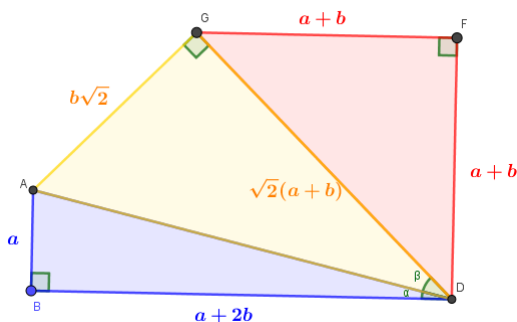


Figura 17: Relações trigonométricas e o número π .

Teorema 9. Nas condições acima tem-se:

$$\arctan\left(\frac{a}{a+2b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a+b}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Demonstração. Segue diretamente das relações métricas dos triângulos retângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ADG$.

□

Corolário 2. Supondo $a = f_n$, $b = f_{n+1}$ na sequência de Fibonacci, tem-se que

$$\arctan\left(\frac{f_n}{f_{n+3}}\right) + \arctan\left(\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

e

$$\arctan\left(\frac{1}{\varphi^3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas 8 e 9.

□

Corolário 3.

$$\arctan(\varphi) + \frac{\arctan(2)}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \arctan\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\arctan(2)}{2}.$$

Observação 11. A Figura 18 ilustra uma configuração de quadrados cujos lados são os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8 e arcos de círculos formando uma espiral.

Sequência de Fibonacci

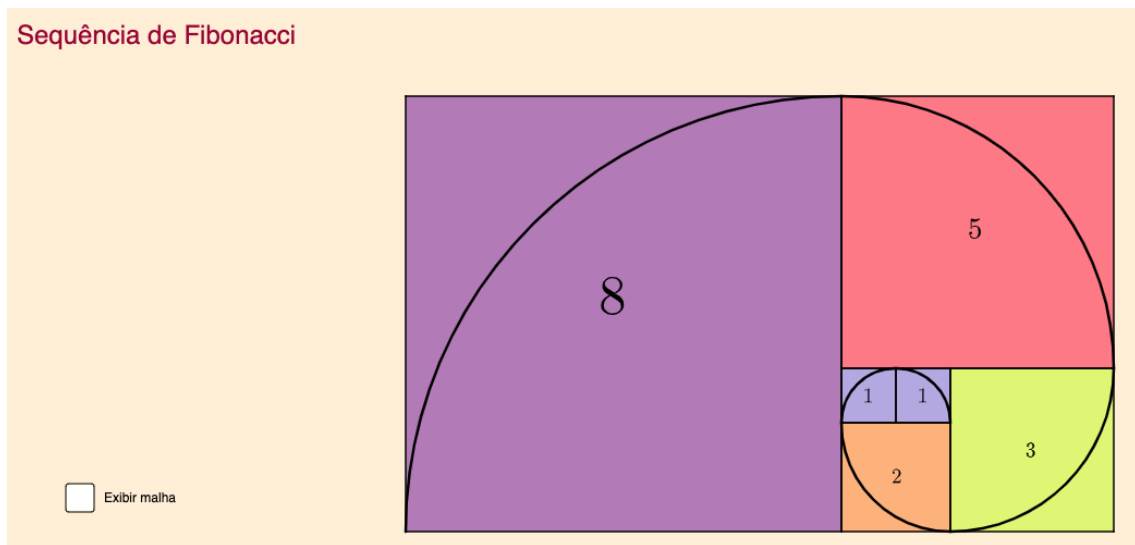


Figura 18: Sequência de Fibonacci e curva espiral formada por arcos de círculo.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/vv3vdmrj>

A espiral formada que se assemelha ao logotipo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

5. Conclusão

Usando a potencialidade das ferramentas disponíveis em um *software* de Matemática dinâmica, ilustramos demonstrações de resultados como o Teorema de Pitágoras, algumas relações trigonométricas e o Teorema de Viviani (no plano e o espaço). Também enunciamos e demonstramos algumas relações provenientes do número de ouro e da sequência de Fibonacci. Conforme já salientamos, diferentemente do apresentado em outros trabalhos que apenas exibiram ilustrações, sem nenhum tipo de explicação, neste artigo concentramo-nos em exibir as provas no formato de uma animação. Além disso, em todos os resultados apresentamos uma demonstração e possíveis desmembramentos, na forma de observações. Esperamos que esse artigo possa servir de inspiração para aqueles que apreciam geometria e tecnologias.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Humberto Bortolossi pelos comentários e observações.

Referências

- [1] Alencar, H.; Cândido, L.; Farias, M. Resoluções Visuais de Alguns Problemas de Matemática da Educação Básica. *Professor de Matemática Online (PMO)* - Sociedade Brasileira de Matemática, v. 6, n. 1, 2019. DOI: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo71>
- [2] Atiyah, M. F. An interview with Michael Atiyah. *Math. Intelligencer*, vol. 6, pp 9–19, 1984.
- [3] Ávila, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, v. 6, 1985.
- [4] Cândido, L.; Farias, M. Uma demonstração visual. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, vol. 99, p. 31, 2019.
- [5] Chen, Z.; Liang, T. The converse of Viviani's theorem. *The College Mathematics Journal*. 37 (5): (2006) 390–391.
- [6] Descartes, R. *Oeuvres de Descartes*. Ch. Adam & P. Tannery, Paris: Vrin/CNRS, 1964.
- [7] De Villiers, M. 3D Generalisations of Viviani's theorem. *The Mathematical Gazette*. 97 (540) : (2013) 441–445.
- [8] Doyle T.; Kutler L.; Miller R.; Schueller A., “Proofs Without Words”, Convergence (2014)
- [9] Gasull, A. *55 proves sense paraules*. MATERIALS MATEMÀTICS MAT2 Volum 2022, treball no. 2, 61 pp. Disponível em: <<https://mat.uab.cat/web/matmat/wp-content/uploads/sites/23/2022/02/v2022n02.pdf>>. Acesso em: 28 fev. 2022.
- [10] Halmos, P. *I Want to Be a Mathematician: An Automathography*. Springer Verlag. 1985.
- [11] Larson, L. C. *Problem-Solving Through Problems*. Springer, New York, 1983.
- [12] Lemmermeyer, F. Leonardo da Vinci's Proof of the Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal*, vol. 47, n. 5 (November 2016), pp. 361–364.
- [13] Louvre exhibit acclaims Da Vinci, 500 years after his death. *China Daily*, Hong Kong, 22 out. 2019. Disponível em: <<https://www.chinadailyhk.com/articles/178/107/3/1571730700699.html>>. Acesso em: 03 mar. 2022.
- [14] Mathias, C. V.; Alencar, H.; Leivas, J. C. P. Provas sem Palavras, Visualização, Animação e GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, v. 8, n. 2, p. 62-77, 2019. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p062-077>
- [15] Miller, R. *On Proofs Without Words*. Whitman College, 2012. <<https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/Miller.pdf>>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- [16] Nelsen, R. B. *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 1993.
- [17] Nelsen, R. B. *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 2000.
- [18] Nelsen, R. B. *Proofs without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 2016.
- [19] O Número de Ouro e sua Aplicação em Design. *Velho Bit*, 20 jan. 2017. Disponível em: <<https://velhobit.com.br/design/o-numero-de-ouro-e-sua-aplicacao-em-design.html>>. Acesso em: 11 mar. 2022.

- [20] Ortega, R. C. S.; Sano, M. Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática, *Professor de Matemática Online (PMO)* - Sociedade Brasileira de Matemática, v. 8, n. 4, pp. 440–461, 2020. DOI: <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo832>
- [21] Polya, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Interciência, Rio de Janeiro, 1995.
- [22] Polya, G. *Mathematics and Plausible Reasoning: Patterns of Plausible Inference*. Princeton University Press, v. 2, Princeton, 1968.
- [23] Polya, G. *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press, v. 1, Princeton, 1990.
- [24] Polya, G. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press. (2004).
- [25] Samelson, H. Proof Without Words: Viviani's Theorem with Vectors. *Mathematics Magazine*, v. 76 (2003) 225.
- [26] Schoenfeld, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, New York, 1985.
- [27] Silveira, J. F. P. O que é um problema matemático? 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/portosil/resu1.htmlj>. Acesso em: 04 julho 2022.
- [28] Sipka, T. A. The law of cosines. *Mathematics Magazine*, v. 61, n. 4, p. 259, 1988.
- [29] Tao, T. What is good mathematics? *Bulletin of Amer. Math. Society.*, vol. 44, n. 4, out. 2007, pp. 623–634.
- [30] Thurston, W. On proof and progress in mathematics. *Bulletin of Amer. Math. Society.*, vol. 30, n. 2, abr. 1994, pp. 161–177.
- [31] Unal, H. Proof Without Words: Double Sum for Sine and Cosine *The College Mathematics Journal*, v. 41, n. 5, p. 392, 2010.

Hilário Alencar
Universidade Federal de Alagoas
<hilario@mat.ufal.br>

Larissa Cândido
EMEB Dr. Gustavo Paiva
<larikarollynne95@gmail.com>

Ronaldo Garcia
Universidade Federal de Goiás
<ragarcia@ufg.br>

Carmen Mathias
Universidade Federal de Santa Maria
<carmen@ufsm.br>

Recebido: 27/02/2022
Publicado: 06/09/2022