PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.4, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1035

Uma aplicação dos teoremas de Fermat e Rolle

Antônio Carlos Bastos Sousa

Resumo

Este artigo contém uma aplicação dos teoremas de Fermat e Rolle à função da diferença entre a função $f(x) = x^n$ e uma reta secante à referida função.

Palavras-chave: teorema de Fermat; teorema de Rolle; derivada; função; zero da função.

Abstract

This article contains an application of the Fermat and Rolle's theorem to the difference function $f(x) = x^n$ and a secant line to that function.

Keywords: Fermat's theorem; Rolle's theorem; derivative; function; zero of the function.

1. Introdução

Segundo Boyer[1], Pierre de Fermat (1601-1665) fez uma importante descoberta que foi descrita em um tratado que não foi publicado durante sua vida, chamado Método para achar Máximos e Mínimos. Fermat estivera considerando lugares dados – em notação moderna – por equações da forma $y = x^n$; por isso frequentemente chamadas "parábolas de Fermat"se $n > 0$ ou "hipérboles de Fermat"se $n < 0$. Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ ele notou um modo muito engenhoso para achar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo e comparou o valor de $f(x)$ num ponto com o valor de $f(x + E)$ num ponto vizinho. Evidentemente, Fermat não tinha o conceito de limite, embora o que ele estivesse fazendo equivalesse a achar

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E} \tag{1}$$

.

Ou seja, nos valores da variável independente x, para os quais:

- a derivada da função é nula – isto é, o coeficiente angular da reta tangente é zero;
- a função muda seu comportamento – antes é decrescente e depois é crescente, ou antes é crescente e depois é decrescente; temos, respectivamente, um ponto de mínimo ou de máximo para a função.

[1] Texto adaptado da compilação disponível em http://ecalculo.if.usp.br/derivadas/diz_derivada/diz_derivada.htm em [1].

2. Teoremas de Fermat e Rolle

Se uma função F possui um ponto de extremo (máximo ou mínimo) local em $x = b$, e a função F é derivável nesse ponto, então $x = b$ é um ponto crítico; isto é, $F'(b) = 0$.

Pelo teorema, a derivada de F se anula e passa uma reta tangente horizontal à curva $y = F(x)$ no ponto $(b, F(b))$, quando $x = b$ é um ponto de extremo local para F.

Teorema 1. (Fermat): *Seja* $F : (a, c) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, e suponha que* $x_0 \in (a, c)$ *seja um extremo local de* F*. Se* F *é diferenciável em* x_0 *então* $F'(x_0) = 0$*.*

Além disso,

Teorema 2. (Rolle): *Se* F *tem um máximo local em a e* F *é diferenciável em* a *(existe a derivada à direita), então* $F'(a) \leq 0$*; se* F *tem um mínimo local em* a*, então* $F'(a) \geq 0$*. Se* F *é diferenciável em* c *e tem um máximo local em* c*, então* $F'(c) \geq 0$ *enquanto se tem um mínimo local em* c*, então* $F'(c) \leq$ *0.*

Com efeito, considere-se uma função $F(x)$ atenda às condições do teorema de Fermat e, consequentemente, o teorema de Rolle cf. [[3], pp.269-270]:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(x - a) = f(x) - \left(\frac{f(a) - f(c)}{a - c}(x - a) + f(a)\right)$$

ou

$$F(x) = f(x) - f(c) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(x - c) = f(x) - \left(\frac{f(a) - f(c)}{a - c}(x - c) + f(c)\right)$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}$$

A função F é definida como a diferença entre a função f e a função (da equação) da reta secante a dois pontos A, C da função f, ou seja, a reta AC pode ser ilustrada graficamente como na [Figura 1] a seguir:

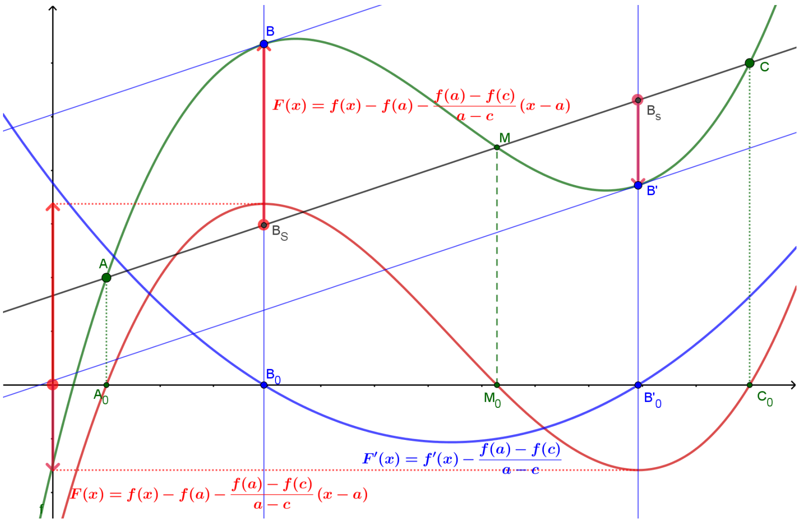

Figura 1: Função $f(x)$ e reta secante AC e funções $F(x)$ e $F'(x)$ determinadas graficamente.

Portanto, os valores $x = a$ e $x = c$ são soluções quando $F(x) = 0$. Daí, segue que:

$$F'(b) = 0 \implies F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(b - a) = y_{B_0}$$

ou

$$F'(b) = 0 \implies F(b) = f(b) - f(c) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(b - c) = y_{B'_0}$$

Consideremos para próxima seção a função $f(x) = x^n$.

3. A reta secante AC à função $f(x) = x^n$

Geometricamente, se tomarmos a função real

$$f(x) = x^n$$

para $n \geq 2$, ela contém todas as potências reais de x de mesmo expoente n.

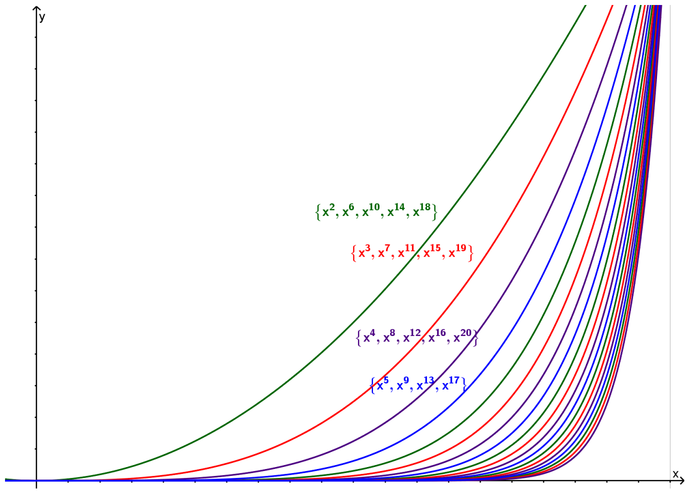

Figura 2: $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} | 2 \leq n \leq 20$.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$; podemos posicionar os pontos $A = (a, a^n)$,$B = (b, b^n)$ e $C = (c, c^n)$ sobre a curva para qualquer expoente n.

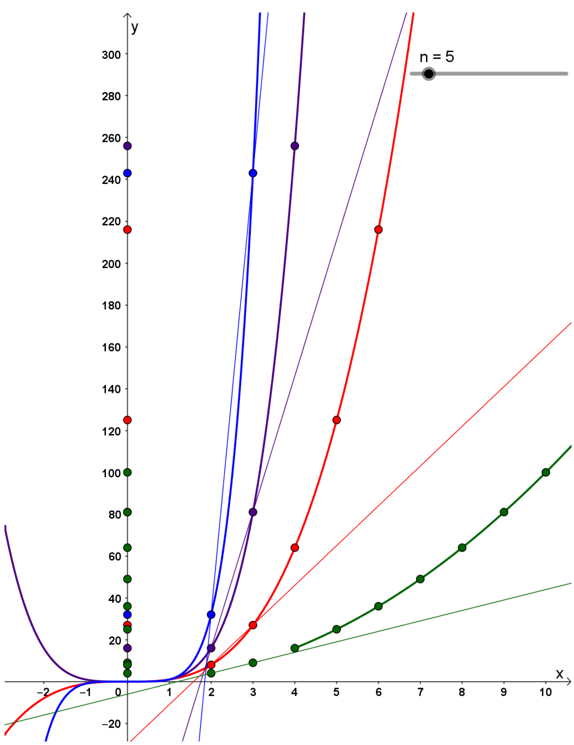

Figura 3: $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} | 2 \leq x \leq 10; 2 \leq n \leq 5$.

Façamos agora as expressões envolvendo $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ de modo que, sem perda de generalidade, tenhamos $a > b > c$:

$$a^n - c^n = b^n \Rightarrow a^n = c^n + b^n$$

$$a^n - c^n = (a-c)(a^{n-1} + a^{n-2}\, c + \cdots + ac^{n-2} + c^{n-1}) = b^n$$

$$\vdots$$

$n = 1 \implies (a-c) = b; n = 2 \implies a^2-c^2 = (a-c)(a+c) = b^2; n = 3 \implies a^3-c^3 = (a-c)(a^2+ac+c^2) = b^3$

$$\frac{a^n - c^n}{a-c} = (a^{n-1} + a^{n-2}\, c + \cdots + ac^{n-2} + c^{n-1}) = b^n$$

$$\frac{a^n - c^n}{a-c} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}c^k$$

Para $n = 1$ o quociente $\frac{a-c}{a-c} = 1$ Supondo ser válida para algum $k \leq n \in \mathbb{N}$ a expressão

$$(a-c)(a^{k-1} + a^{k-2}c + \cdots + ac^{k-2} + c^{k-1}) = a^k - c^k$$

, vamos demonstrar por indução que também é válida para $n+1$; isto é:

Demonstração. Da hipótese de indução:

$$(a^n - c^n) = (a-c)(a^{n-1} + a^{n-2}c + \cdots + ac^{n-2} + c^{n-1})$$

multiplicando ambos os lados por a, vem:

$$a(a^n - c^n) = (a-c)(a^n + a^{n-1}c + \cdots + ac^{n-2} + ac^{n-1})$$

; somando em ambos os lados $c^n(a-c)$, obtemos:

$$a(a^n - c^n) + c^n(a-c) = (a-c) \cdot (a^n + a^{n-1}c + \cdots + ac^{n-2} + ac^{n-1} + c^n)$$

Realizando as operações e simplificando as parcelas:

$$a^{n+1} - ac^n + ac^n - c^{n+1} = (a-c) \cdot (a^n + a^{n-1}c + \cdots + ac^{n-2} + ac^{n-1} + c^n)$$

, i.e.,

$$a^{n+1} - c^{n+1} = (a-c) \cdot (a^n + a^{n-1}c + \cdots + ac^{n-2} + ac^{n-1} + c^n) = (a-c)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}c^k$$

. Então:

$$\frac{a^{n+1} - c^{n+1}}{a-c} = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}c^k \tag{2}$$

E, portanto, também é válida para $n+1$. Logo

$$\frac{a^n - c^n}{a-c} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}c^k$$

é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Outra prova encontra-se em (Proposição 6 p. 5) [2].

O gráfico a seguir mostra seis pontos distintos sobre a curva onde podemos posicionar os pontos A, B e C.

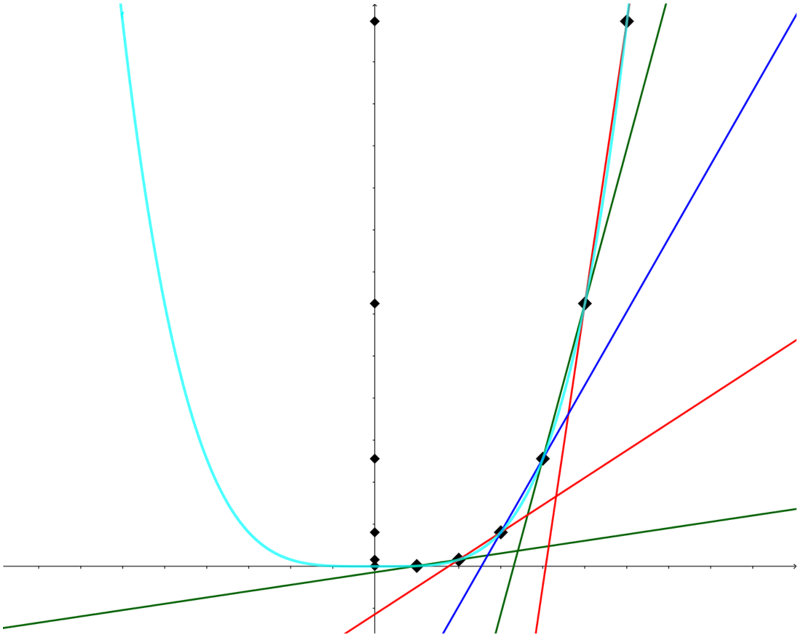

Figura 4: Retas secantes nas coordenadas inteiras de $f(x) = x^n$, n par

A diferença entre dois pontos sucessivos sobre o eixo das ordenadas representa os valores $(a-k)^n$ e $(a-k-1)^n$ para algum $k \in \mathbb{N}, 1 < k < a$. As retas são secantes à função $f(x)$ e corta a mesma nos valores de duas potências sucessivas. A equação dessas retas secantes é, portanto, da forma:

$$y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - a + k) + (a - k)^n$$

.

Cabe-nos repetir: "Utilizaremos o método de *monsieur* Fermat para estabelecer tangentes"[2]. Definiremos uma tangente à curva que tenha mesma inclinação da reta secante definida entre duas potências a^n e c^n. Os valores de a e c são conhecidos e podemos definir e representar a reta secante que corta a função $f(x) = x^n$ nos pontos $A = (a, a^n)$ e $C = (c, c^n)$.

$$\frac{a^n - c^n}{a - c} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}c^k$$

é o coeficiente angular da reta secante AC à curva x^n.

De modo geral, a equação de reta secante será:

$$y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - a) + a^n$$

[2]Afirmação atribuída a *Sir.* Isaac Newton.

ou

$$y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - c) + c^n$$

.

Existe um ponto $B = (b, b^n)$ na curva/função $f(x) = x^n$ entre as potências c^n e a^n, que pertence à reta paralela à reta secante $y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - c) + c^n$ e tangente à referida função.

Demonstração. A reta tangente a uma função $f(x)$ em um ponto $(x, f(x))$ se tem como coeficiente angular a derivada da referida função, então para que:

$$y = nb^{n-1}(x - b) + b^n \tag{3}$$

e

$$y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - a) + a^n \tag{4}$$

sejam paralelas.

Isto é, para que a reta tangente à função $f(x) = x^n$ em (b, b^n) seja paralela à reta secante AC dada, temos:

$$nb^{n-1} = \frac{a^n - c^n}{a - c} \Rightarrow b = \sqrt[n-1]{\frac{a^n - c^n}{n(a - c)}}. \tag{5}$$

Dentre as curvas de grau $n \geq 2$, as curvas de grau 2 possuem pontos com coordenadas racionais e/ou de coordenadas inteiras sobre a curva. Esse resultado é imediato pelo teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$; $a^2 - c^2 = b^2 \implies 2b = a + c \implies b = \frac{a+c}{2}$ é um número (quadrado) natural cf. [5], p. 132.

Para $n > 2$ temos:

$$\begin{aligned} b^n &= \frac{a^n - c^n}{n(a - c)} \sqrt[n-1]{\frac{a^n - c^n}{n(a - c)}} \\ &= \left(\frac{a^n - c^n}{n(a - c)}\right)^{\frac{n}{n-1}} \\ &= \left(\frac{a^n - c^n}{n(a - c)}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}. \end{aligned} \tag{6}$$

□

Agora vamos demonstrar que o valor de b do ponto B não será inteiro para $n > 2$.

Demonstração. Sendo a e c inteiros, quando $n > 2$:

$$a^n - c^n = (a - c)(a^{n-1} + a^{n-2}c + \cdots + ac^{n-2} + c^{n-1})$$

. Como resultado da demonstração por indução em n para $a^{n+1} - c^{n+1} = a(a^n - c^n) + (a - c)c^n$, note que ao somar e subtrair a parcela ac^n em $a^{n+1} - c^{n+1}$, então $aa^n - ac^n + ac^n - cc^n = a(a^n - c^n) + (a - c)c^n$. Verifica-se que esses termos obtidos, usando a hipótese de indução, são divisíveis por $(a - c)$. Então expressando o número b na forma: $b = \sqrt[n-1]{\frac{a^n - c^n}{n(a-c)}} = \sqrt[n-1]{\frac{a(a^{n-1}-c^{n-1})+c^{n-1}(a-c)}{n(a-c)}} = \sqrt[n-1]{\frac{as+c^{n-1}}{n}}$, onde $s = \frac{a^{n-1}-c^{n-1}}{a-c} = a^{n-2} + a^{n-3}c + \cdots + ac^{n-3} + c^{n-2}$, o número s é inteiro e não possui parcelas contendo c^{n-1}. Logo o número c^{n-1} não divide o número as, uma vez que $c < a$, isto é, a soma do numerador é irredutível em n potências cujos expoentes sejam iguais a $n-1$. Portanto, a raiz $(n-1)$-ésima da fração $\frac{as+c^{n-1}}{n}$ é não inteira. Conclusão: Para $n > 2$, o valor $b = \sqrt[n-1]{\frac{a^n-c^n}{n(a-c)}}$ não é inteiro quando a e c são inteiros. □

Vejamos alguns exemplos:

3.1. Exemplos para $f(x) = x^3$ e $f(x) = x^{1001}$

- Para $n = 3, a = 4$ e $c = 2$ vem a reta secante à curva que corta os pontos $(a, a^n), (c, c^n)$ tem como valores $(4, 64)$ e $(2, 8)$ e coeficiente angular da reta AC é $\frac{64-8}{4-2} = 28$, a sua equação da reta é da forma $y = 28(x-2) + 8 = 28x - 48$

  Segue que:

$$3b^2 = 28 \Rightarrow b = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

  A Figura 5 possui a solução gráfica:

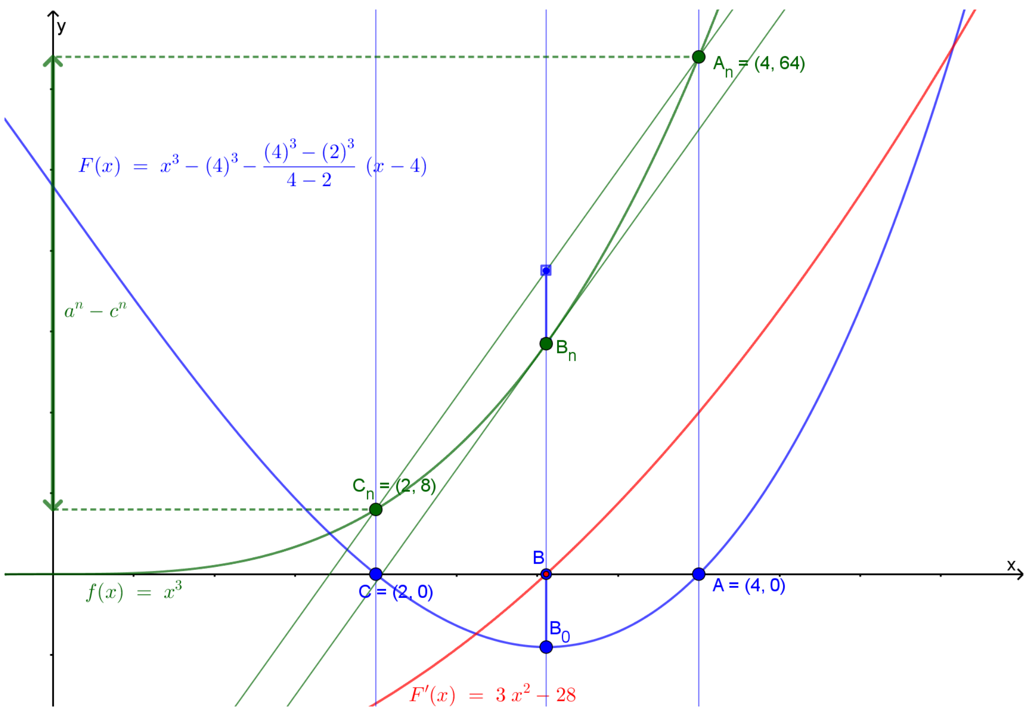

Figura 5: Pontos A=(2,8), C=(4,64) e funções $f(x) = x^3$, $F(x) = x^3 - 4^3 - \frac{4^3-2^3}{4-2}(x-4)$ e $F'(x) = 3x^2 - 28$

- Para $f(x) = x^{1001}$ com $n = 1001; a = 10; c = 2$ então:

  $10^{1001} = 8008 \cdot b^{1000} + 2^{1001} \implies b = 2\sqrt[1000]{\frac{5^{1001}-1}{4004}}$

4. Generalização para a equação $a^n = c^n + n(a-c)b^{n-1}$ em $a, c, b, n \in \mathbb{R}$ algébricos

Na seção anterior demonstramos que b não é inteiro para $n > 2, n \in \mathbb{N}$. A equação $a^n = c^n + n(a-c)b^{n-1}$ é consequência dos teoremas de Fermat e Rolle, válida para os pontos $(a, a^n), (b, b^n)$ e (c, c^n) com coordenadas reais algébricas. Se considerarmos todo o plano cartesiano xOy, a reta secante $y : \frac{a^n-c^n}{a-c}(x-a)+a^n$ à função $f(x) = x^n$ pode ser posicionada sobre quaisquer dois pontos da referida função ou ainda transladada e/ou rotacionada em um desses pontos. Sendo b um número real, vamos então considerar nesta seção $a, c, b, n \in \mathbb{R}$ e, para isso, vamos retomar:

Sejam $a, c, b, n \in \mathbb{R}$, a função real $f(x) = x^n$ satisfaz às seguintes hipóteses (do teorema de Rolle):

- A função f(x) é contínua no intervalo [a, c];
- A função f(x)é derivável no intervalo (a, c);
- Existe um número b em (a, c) tal que:

$$f(a) - f(c) = f'(b)(a-c) \implies a^n - c^n = n(a-c)b^{n-1}$$

Para $n = 0$ é trivial, então há dois casos a serem tratados:

- Caso 1: "Parábolas de Fermat"se $n > 0$: A figura 6 tem uma representação das coordenadas e valores.

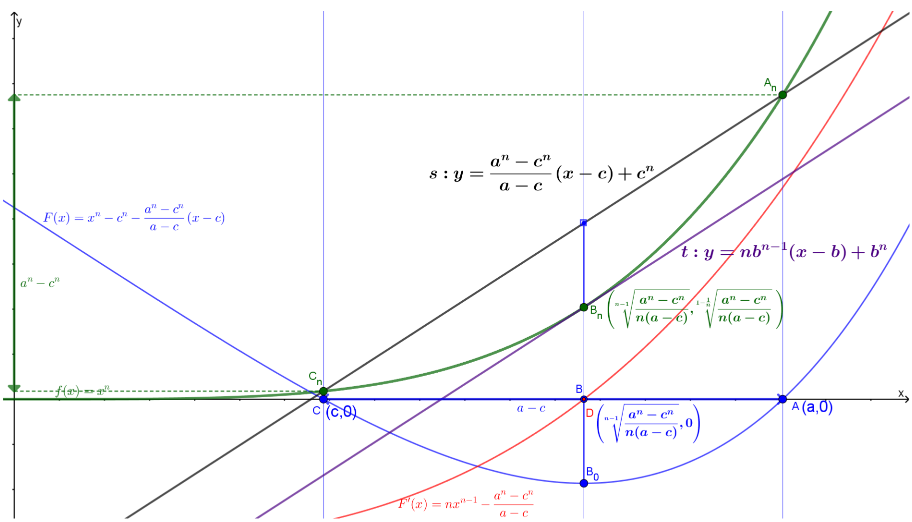

Figura 6: $A_n = (a, a^n), C_n = (c, c^n)$ e $B_n = \left(\sqrt[n-1]{\frac{a^n-c^n}{n(a-c)}}, \sqrt[1-\frac{1}{n}]{\frac{a^n-c^n}{n(a-c)}}\right)$ e $f(x) = x^n, F(x) = x^n - c^n - \frac{a^n-c^n}{a-c}(x-c)$ e $F'(x) = nx^{n-1} - \frac{a^n-c^n}{a-c}, n > 0$.

- Caso 2: "Hipérboles de Fermat"se $n < 0$: A figura 7 tem uma representação da equação com n negativo em coordenadas e valores.

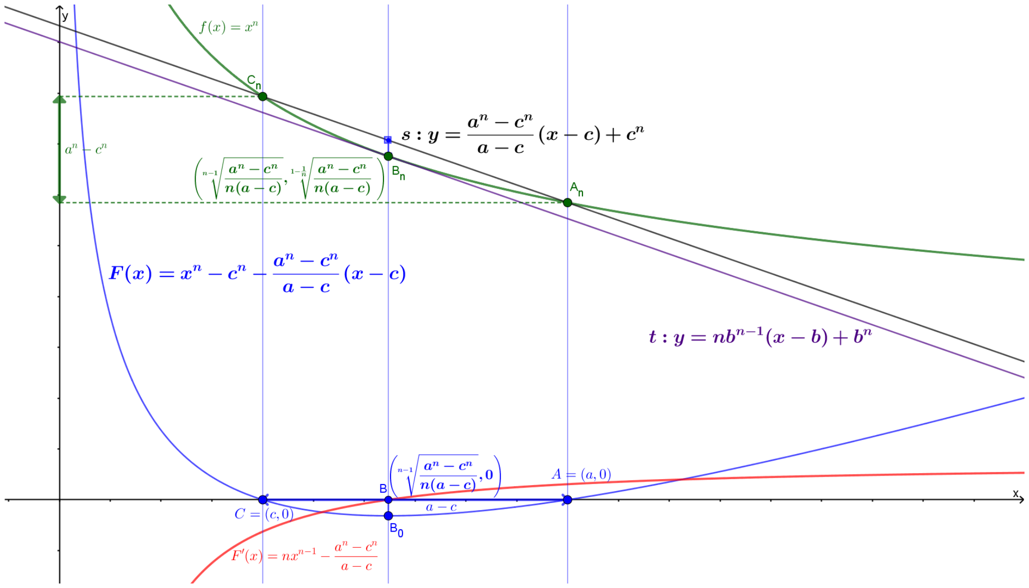

Figura 7: $A_n = (a, a^n), C_n = (c, c^n)$ e $B_n = \left(\sqrt[n-1]{\frac{a^n - c^n}{n(a-c)}}, \sqrt[1-\frac{1}{n}]{\frac{a^n - c^n}{n(a-c)}}\right)$ e $f(x) = x^n$, $F(x) = x^n - c^n - \frac{a^n - c^n}{a-c}(x - c)$ e $F'(x) = nx^{n-1} - \frac{a^n - c^n}{a-c}, n < 0$.

Claramente podemos constatar em ambos os casos que a derivada da função $F(x)$ corta o eixo x no ponto $(b, 0)$ e permite-nos concluir que tal valor atende às condições dos teoremas de Fermat e Rolle.

Agradecimentos

A Deus, por meio de seu filho Jesus Cristo, pela graça concedida.

À minha esposa Aryadna, aos meus filhos Carlos Augusto e Emanuele pelo amor, carinho e paciência.

Ao Geogebra Team.

Referências

[1] E-Cálculo. Cálculo diferencial e integral. Disponível em http://ecalculo.if.usp.br/. Acesso em 15/mai/2022.

[2] Hefez, A. Aritmética. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] Lima, E. L. *Curso de Análise; v.1*, 13. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2011. ISBN 978524401183.

[4] Lima, E. L. *Curso de Análise; v.2*, 11 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2011. ISBN 978524400490.

[5] Martinez, F. B.. Moreira, C. G. Saldanha, N. Tengam, E. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Fábio Brochero Martinez; *et al.* 2ª ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013. ISBN 97852440312-5.

Antônio Carlos Bastos Sousa
Secretaria da Educação da Bahia
<antoniocte@gmail.com>

Recebido: 17/05/2022
Publicado: 10/10/2022