PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.4, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1036

A Decomposição de números racionais positivos em frações egípcias: Os Teoremas de Fibonacci/Sylvester e Erdös/Stein e um correspondente Applet JavaScript

Humberto José Bortolossi   Catharine de Oliveira Lobo Fernandes Martins

Resumo

Neste trabalho apresentamos os Teoremas de Fibonacci/Sylvester e Erdös/Stein, suas respectivas demonstrações e um *applet* JavaScript correspondente relacionados com a decomposição de números racionais positivos como soma de frações unitárias distintas.

Palavras-chave: Fração Unitária; Fração egípcia; Teorema de Fibonacci/Sylvester, Teorema de-Erdös/Stein .

Abstract

In this work, we present the Fibonacci/Sylvester and Erdös/Stein Theorems, their respective proofs, and a corresponding JavaScript applet related to the decomposition of positive rational numbers as the sum of distinct unit unity fractions.

Keywords: Unity Fraction, Egyptian Fraction,ibonacci/Sylvester's Theorem, Erdös/Stein's Theorem.

1. Frações Unitárias

Uma **fração uniária** é uma fração cujo numerador é 1. Frações unitárias desempenham um papel importante na história da matemática do antigo Egito porque eram o tipo de fração com o qual os antigos egipícios operavam; frações não unitárias eram convertidas como soma de frações unitárias *distintas*. O famoso Papiro de Rhind exibe uma tabela para a conversão de números racionais da forma 2/n, com n ímpar entre 3 e 101, como soma de *frações unitárias* (isto é, frações da forma 1/n) **distintas**. (aqui e no que segue, não consideraremos a fração $\frac{1}{1}$ como unitária). **Uma pergunta que surge então é se toda fração positiva (número racional positivo) possui ou não uma tal decomposição.** Como provaremos a seguir, a resposta é afirmativa! De fato, mais do que justificar essa afirmação, a prova que estudaremos fornecerá um algoritmo para calcular explicitamente a decomposição de uma fração positiva arbitrária como soma de frações unitárias distintas. Dividiremos a demonstração em dois casos, conforme a fração é maior do que zero e menor do que 1 (fração própria) ou se ela é maior do que ou igual a 1 (fração imprópria). Para o caso de frações próprias, o argumento que daremos é devido a James Joseph Sylvester (1814-1897). Como apontam estudiosos da História da Matemática, de acordo com Dunton e Grimm (1966) e o Capítulo 7 de Sigler (2002), Sylvester estabeleceu esse resultado em 1880 sem consciência de que Leonardo Bonacci (c. 1175-c. 1250) (também conhecido como Fibonacci) já tinha descrito o mesmo algoritmo de decomposição em seu livro *Liber Abaci*. Para o caso de frações impróprias, seguiremos a abordagem proposta por Erdös e Stein (1963).

2. Fibonacci e Sylvester

(Fibonacci e Sylvester) Toda fração $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ maior do que 0 e menor do que 1 pode ser escrita como soma de frações unitárias **distintas**.

Demonstração. Será feita pelo segundo princípio da indução no valor do numerador da fração. Mais precisamente, considere a sentença:

$$P(n) : \text{a fração } \frac{n}{b} \text{ pode ser escrito como soma de frações unitárias distintas, } \forall\, n > b.$$

(Passo Básico) $P(1)$ é verdadeira, pois $\frac{1}{b}$ é uma fração unitária, $\forall\, b > 1$.

(Passo Indutivo) Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para todo $1 \leq k \leq a-1$ $(a \geq 2)$. Vamos provar que $P(a)$ também é verdadeira, isto é, que a fração própria $\frac{a}{b}$ pode ser escrita como uma soma de frações unitárias distintas, $\forall a > b$. Para isso, seja $X = \left\{n \in \mathbb{N} \mid n > \frac{b}{a}\right\} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < \frac{a}{b}\right\}$. Como o corpo dos números reais é arquimediano (Lima (2006, p. 17)), segue-se que $X \neq \varnothing$. Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, X possui um menor elemento q (Lima (2006, p. 3)). Note que $q \geq 2$, pois $q > \frac{b}{a} > 1$ e, desta maneira, $q-1 \geq 1$. Se $\frac{a}{b} = \frac{1}{q-1}$, então $q > 2$ (pois, caso contrário, se $q = 2$, então $\frac{a}{b}$ não seria uma fração própria) e isso terminaria a prova pois, nesta situação, $\frac{a}{b}$ é por si só uma fração unitária. Suponha então que $\frac{a}{b} \neq \frac{1}{q-1}$. Afirmamos que

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}. \tag{1}$$

Com efeito, se $q = 2$, então $\frac{a}{b} < 1 = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{q-1}$, pois $\frac{a}{b}$ é uma fração própria. Se $q > 2$, suponha por absurdo que $\frac{a}{b} > \frac{1}{q-1}$ (o caso $\frac{a}{b} = \frac{1}{q-1}$ já foi tratado anteriormente). Então $q-1 > \frac{b}{a}$, um absurdo pois, por construção, q é o menor elemento do conjunto X. Dado que q é um elemento de X, junto com (1), podemos escrever que

$$\frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}.$$

Segue-se daí que

$$0 < a\,q - b < a. \tag{2}$$

Agora,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \frac{a}{b} - \frac{1}{q} = \frac{aq-b}{bq},$$

com $bq > b > a$ e $0 < aq - b < a$. Podemos então usar a hipótese de indução para a fração $\frac{1}{q} + \frac{aq-b}{bq}$ e escrevê-la como soma de frações unitárias distintas $\frac{aq-b}{bq} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s}$, de modo que

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s}. \tag{3}$$

Cada fração unitária $\frac{1}{n_i}$, com $1 \leq n_i \leq s$, é diferente de $\frac{1}{q}$, uma vez que

$$\frac{1}{n_i} < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s} = \frac{aq - b}{bq} \overset{(\text{por } (2))}{<} \frac{a}{bq} \overset{(\text{pois } \frac{a}{b} < 1)}{<} \frac{1}{q}.$$

Como as frações $\frac{1}{n_i}$ são distintas entre si, a decomposição para $\frac{a}{b}$ em (3) é feita somente com frações unitárias distintas, o que encerra a demonstração.

Observação. Note que o procedimento sugerido por Fibonacci e Sylvester é um algoritmo do tipo *greedy* (guloso): em cada etapa, ele procura pela **maior** fração unitária que seja menor que a fração em questão, para então aplicar recursivamente o mesmo processo para a diferença entre a fração e a fração unitária recém-encontrada.

Exemplo 1. Vamos expressar $\frac{3}{7}$ como soma de frações unitárias distintas usando o procedimento dado por Fibonacci e Sylvester. Como 3 é o menor natural maior do que $\frac{7}{3}$, escrevemos:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}.$$

Agora, por sua vez, 11 é o menor natural maior do que $\frac{21}{2}$. Portanto,

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \left(\frac{2}{21} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

Dado que $\frac{1}{231}$ é uma fração unitária, o procedimento encerra-se fornecendo-nos a seguinte decomposição:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

■

Exemplo 2. Vamos expressar $\frac{13}{14}$ como soma de frações unitárias distintas usando o procedimento dado por Fibonacci e Sylvester. Como 2 é o menor natural maior do que $\frac{14}{13}$, escrevemos:

$$\frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \left(\frac{13}{14} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{7}.$$

No exemplo anterior, vimos que o procedimento aplicado à fração $\frac{3}{7}$ resulta que $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$. Assim, juntando tudo, obtemos que

$$\frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

■

Ao se aplicar o procedimento de Fibonacci e Sylvester às frações $\frac{2}{n}$ do Papiro de Rhind, observa-se que apenas as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{11}$ e $\frac{2}{23}$ produzem o mesmo resultado.

Fração	Papiro de Rhind [15]	Fibonacci e Sylvester
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$	
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	
$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	
$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$

Fração	Papiro de Rhind	Fibonacci e Sylvester
$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$
$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{153}$
$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{190}$
$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$	$\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$
$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$	
$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$	$\frac{1}{13}+\frac{1}{325}$
$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$	$\frac{1}{14}+\frac{1}{378}$
$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{435}$
$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$	$\frac{1}{16}+\frac{1}{496}$
$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$\frac{1}{17}+\frac{1}{561}$
$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{630}$
$\frac{2}{37}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$	$\frac{1}{19}+\frac{1}{703}$
$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$	$\frac{1}{20}+\frac{1}{780}$
$\frac{2}{41}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$	$\frac{1}{21}+\frac{1}{861}$
$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$	$\frac{1}{22}+\frac{1}{946}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$	$\frac{1}{23}+\frac{1}{1035}$
$\frac{2}{47}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{1128}$
$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$	$\frac{1}{25}+\frac{1}{1225}$
$\frac{2}{51}$	$\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$	$\frac{1}{26}+\frac{1}{1326}$
$\frac{2}{53}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$	$\frac{1}{27}+\frac{1}{1431}$
$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$	$\frac{1}{28}+\frac{1}{1540}$

Fração	Papiro de Rhind	Fibonacci e Sylvester
$\frac{2}{57}$	$\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$	$\frac{1}{29}+\frac{1}{1653}$
$\frac{2}{59}$	$\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{1770}$
$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$	$\frac{1}{31}+\frac{1}{1891}$
$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$	$\frac{1}{32}+\frac{1}{2016}$
$\frac{2}{65}$	$\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$	$\frac{1}{33}+\frac{1}{2145}$
$\frac{2}{67}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$	$\frac{1}{34}+\frac{1}{2278}$
$\frac{2}{69}$	$\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$	$\frac{1}{35}+\frac{1}{2415}$
$\frac{2}{71}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}$	$\frac{1}{36}+\frac{1}{2556}$
$\frac{2}{73}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$	$\frac{1}{37}+\frac{1}{2701}$
$\frac{2}{75}$	$\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$	$\frac{1}{38}+\frac{1}{2850}$
$\frac{2}{77}$	$\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$	$\frac{1}{39}+\frac{1}{3003}$
$\frac{2}{79}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{3160}$
$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$	$\frac{1}{41}+\frac{1}{3321}$
$\frac{2}{83}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{3486}$
$\frac{2}{85}$	$\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$	$\frac{1}{43}+\frac{1}{3655}$
$\frac{2}{87}$	$\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$	$\frac{1}{44}+\frac{1}{3828}$
$\frac{2}{89}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$	$\frac{1}{45}+\frac{1}{4005}$
$\frac{2}{91}$	$\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$	$\frac{1}{46}+\frac{1}{4186}$
$\frac{2}{93}$	$\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$	$\frac{1}{47}+\frac{1}{4371}$
$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$	$\frac{1}{48}+\frac{1}{4560}$
$\frac{2}{97}$	$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$	$\frac{1}{49}+\frac{1}{4753}$

Fração	Papiro de Rhind	Fibonacci e Sylvester
$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$	$\frac{1}{50}+\frac{1}{4950}$
$\frac{2}{101}$	$\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$	$\frac{1}{51}+\frac{1}{5151}$

3. Erdos e Stein

(Erdös e Stein) Toda fração $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ maior do que ou igual a 1 pode ser escrita como soma de frações unitárias **distintas**.

Demonstração. Seja $r = \frac{a}{b}$ uma fração ≥ 1 (com $a, b \in \mathbb{N}$). Considere o conjunto:

$$X = \left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; r < \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k} \right\}.$$

O conjunto X é diferente do vazio, pois a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ é divergente (Lima (2006, p. 38)) e, sendo assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, ele possui um menor elemento m^*. Mais ainda, $m^* > 3$ (pois $r \geq 1$), de modo que $m^* - 1 > 2$. Pela minimalidade de m^*, segue-se que

$$\sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} \leq r.$$

Agora, se $\sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} = r$, o teorema está provado, pois escrevemos $r = \frac{a}{b}$ como a soma de frações unitárias distintas. Suponha então que $\sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} < r$. Assim, temos que

$$\sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} < r < \sum_{k=2}^{m^*} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{m^*}.$$

Portanto,

$$0 < r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} < \frac{1}{m^*} < 1.$$

Dado que $r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k}$ é uma fração maior do que 0 e menor do que 1, podemos usar o Teorema 2 que nos garante que $r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k}$ pode ser escrito como uma soma de frações unitárias distintas $r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s}$, ou ainda,

$$r = \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s}.$$

Agora, para cada $1 \leq i \leq s$, vale que

$$\frac{1}{n_i} < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s} = r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} < \frac{1}{m^*} < \frac{1}{m^*-1} < \cdots < \frac{1}{2}.$$

Portanto, a decomposição $r = \frac{a}{b} = \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s}$ é tal que todas as frações unitárias são distintas entre si, o que encerra a prova desse teorema.

Exemplo 3. Vamos expressar $\frac{17}{10}$ como soma de frações unitárias distintas usando os procedimentos dados por Fibonacci, Sylvester, Erdös e Stein. Como a fração $\frac{17}{10}$ é imprópria, precisamos, inicialmente, determinar o menor valor de m tal que $\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k} > \frac{17}{10}$. Por inspeção, obtemos que tal menor valor ocorre para $m^* = 8$. Assim,

$$\frac{17}{10} = \sum_{k=2}^{m^*-1}\frac{1}{k} + \left(\frac{17}{10} - \sum_{k=2}^{m^*-1}\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{7}\frac{1}{k} + \left(\frac{17}{10} - \sum_{k=2}^{7}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{3}{28}.$$

Vamos agora aplicar o processo a fração própria $\frac{3}{28}$. Como 10 é o menor natural maior do que $\frac{28}{3}$, escrevemos:

$$\frac{3}{28} = \frac{1}{10} + \left(\frac{3}{28} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{140}.$$

Dado que $\frac{1}{140}$ é uma fração unitária, o procedimento encerra-se fornecendo-nos a seguinte decomposição:

$$\frac{17}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{140}.$$

■

No endereço <https://goo.gl/9eOZxe> há um aplicativo *on-line* (figura a seguir), de nossa concepção, que calcula a decomposição de uma fração positiva como uma soma de frações unitárias distintas usando os procedimentos propostos por Fibonacci, Sylvester, Erdös e Stein.

Botts (1967) apresenta uma outra prova para a existência de uma decomposição de uma fração como soma de frações unitárias distintas usando, para isso, as igualdades

$$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Além do procedimento *greedy* de Fibonacci, Sylvester, Erdös e Stein, outros algoritmos têm sido propostos para o cálculo da decomposição de uma fração em somas de frações unitárias distintas. Alguns desses algoritmos tentam minimizar o número de parcelas ou o tamanho dos denominadores na decomposição. Para o leitor interessado, recomendamos as referências Bleicher (1972), Beck, Bleicher e Crowe (2000), Yokota (1988), Beeckmans (1993) e Gong (1992).

4. Considerações Finais

Apesar de antiga e utilizar matemática elementar, existem várias questões matemáticas associadas às frações egípcias que estão sem respostas até os dias de hoje. Este é um assunto vasto e de grande interesse atual de pesquisa. Vejamos um exemplo: sabe-se que as frações $2/n$ (com $n > 2$) podem ser escritas como soma de três frações unitárias distintas, a saber,

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Frações da forma $3/n$ também podem ser escritas como soma de três frações unitárias distintas. De fato, Mays (1987) mostra que o procedimento de Fibonacci e Sylvester, quando aplicado a uma fração própria a/b, produz uma decomposição com no máximo a parcelas[1]. Esse resultado, quando

[1]Observe que na tabela na página 533, todas as decomposições obtidas pelo procedimento de Fibonacci-Sylvester têm duas parcelas.

aplicado às frações do tipo 3/n, estabelece então que existe uma decomposição para 3/n com no máximo 3 parcelas. Caso a decomposição tenha apenas uma ou duas parcelas, uma decomposição com três parcelas pode ser construída usando-se a identidade $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$. E frações da forma 4/n? Conhecida como Conjectura de Erdös-Straus, acredita-se que a resposta seja afirmativa, embora nenhuma demonstração tenha sido fornecida até a presente data (testes computacionais atestaram que 4/n pode ser escrito como a soma de três frações unitárias distintas com valores até $n = 10^{17}$). Motivado pela Conjectura de Erdös-Sraus, Wacław Franciszek Sierpińsk (1882-1969) propôs uma conjectura análoga para frações do tipo 5/n, a saber, que para todo $n > 5$ existe uma decomposição de 5/n como soma de três frações unitárias distintas. Mais geralmente, Andrzej Bobola Maria Schinzel (1937–2021) conjecturou que qualquer fração k/n pode ser expressa como soma de três frações unitárias distintas para todo n a partir de um determinado número natural n_0 que depende do numerador a. Outros problema: Será que as decomposições do Papiro de Rhind seguiram algum princípio ao serem elaboradas? Tal pergunta tem sido estudada por muitas pessoas (acadêmicos e amadores), que propuseram diferentes explicações, mas sem um consenso final. Nesse contexto, uma crítica comum é a de que as explicações sugeridas são anacrônicas: elas usam concepções modernas que não estavam disponíveis no Egito antigo. Ao leitor interessado, como ponto de partida, indicamos a referência Abdulaziz (2008).

Por que os egípcios usavam (à exceção da fração 2/3) apenas frações unitárias e decompunham as não unitárias como soma de frações unitárias *distintas*? Alguns estudiosos criticam esta maneira de conceber e operacionalizar frações como desajeitada e como uma das razões pelas quais a matemática egípcia antiga era inferior se comparada com a vizinha Mesopotâmia e que nunca conseguiu avançar além de um certo ponto (Imhausen, 2016). Ronald Graham (1935-) (que escreveu sua tese de doutorado sobre frações unitárias) perguntou a André Weil (1906-1998) o motivo, e Weil respondeu: "Eles tomaram o caminho errado.". Sethe (1916), na página 60 escreve: "Não conseguimos entender que, humanos, quando dividem 5 por 7 e, então, tendo obtido $\frac{1}{7}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{7}$, como os egípcios antigos, não prossigam somando esses 5 ítens semelhantes para encontrar uma expressão muito mais simples $\frac{5}{7}$.". Historiadores da Ciência, nos dias de hoje, consideram esses julgamentos anacrônicos, pois analisam o passado com recursos do presente, não disponíveis no passado.

> Contudo, se seguirmos o desenvolvimento egípcio do conceito de uma fração e tentarmos entendê-lo não em comparação e nem por meio do olhos do nosso sistema moderno, é possível perceber as frações egípcias não como um fracasso final inibindo desenvolvimentos posteriores mas, sim, como uma evolução de um sistema matemático em um novo campo. É particularmente interessante ver como ferramentas foram concebidas para ajudar a superar dificuldades técnicas. A partir das fontes disponíveis dos últimos períodos, podemos ver que os cálculos com frações eram considerados mais avançados do que a manipulação de inteiros mas, ainda assim, os escribas egípcios mais avançados conseguiam fazê-los de forma competente.
>
> (Imhausen, 2016, p. 52, tradução nossa)

O uso das frações egípcias tem algumas vantagens. Imhausen (2016) observa, por exemplo, que o processo de se decompor cada fração em frações unitárias distintas e dispor as frações dessa decomposição em ordem decrescente permite uma comparação fácil entre as frações. Assim, enquanto que não é imediato saber qual fração é maior, 5/8 ou 4/7 (elas são um pouco maiores do que 1/2), suas representações como frações egípcias, $5/8 = 1/2 + 1/8$ e $4/7 = 1/2 + 1/14$ permitem concluir rapidamente que $5/8 > 4/7$.

Kosheleva e Kreinovich (2009) lembram que nos computadores modernos, o cálculo de x/y é realizado como o produto $x \cdot (1/y)$. Para valores básicos de y, os valores de 1/y são pré-calculadas e armazenados. As razões 1/y para outros valores de y são então calculados com base nos valores armazenados. Assim, os computadores atuais usam frações unitárias.

As frações egípcias (frações unitárias) costumam aparecer nos livros didáticos nacionais, principalmente como um quadro de informação histórica (com ênfase na notação hieroglífica, sem menções à escrita hierática). Seu uso escolar, contudo, pode ir muito além: é possível fazer toda a construção da teoria de frações na Escola Básica usando as frações unitárias como ponto de partida. Ao leitor interessado nesta abordagem, recomendamos o livro didático *Frações no Ensino Fundamental – Volume 1,* de Ripoll *et al.* (2016) do Projeto Um Livro Aberto do Impa e Obmep (disponível em: <https://www.umlivroaberto.com/wp/?page_id=89>).

Agradecimentos

Os autores agradecem ao projeto Livro Aberto https://umlivroaberto.org/ com o qual este estudo se iniciou e ao *referee* anônimo pelas indicações de correções!

Referências

[1] Abdulaziz, Abdulrahman A. *On The Egyptian Method of Decomposing* 2/n *into Unit Fractions.* Historia Mathematica, v. 35, p. 1-18, 2008.

[2] Beck, Anatole; Bleicher, Michael N.; Crowe, Donald W. *Excursions into Mathematics: The Millennium Edition.* A K Peters, 2000.

[3] Beeckmans, Laurent. *The Splitting Algorithm for Egyptian Fractions.* Journal of Number Theory, v. 43, p. 173-185, 1993.

[4] Bleicher, Michael N. *A New Algorithm for The Expansion of Egyptian Fractions.* Journal of Number Theory, v. 4, p. 342-382, 1972.

[5] Botts, Truman. *A Chain Reaction Process in Number Theory.* Mathematics Magazine, v. 40, n. 2, p. 55-65, 1967.

[6] Cajori, Florian. *A History of Mathematical Notations: Volume I.* Cosimo Classics, 2007.

[7] Chace, Arnold Buffum. *The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058.* Volume I. Free Translation and Commentary. Mathematical Association of America, 1927.

[8] Chace, Arnold Buffum; Bull, Ludlow; Manning, Henry Parker. *The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058.* Volume II. Photographic Facsimile, Hieroglyphic Transcription, Transliteration, Literal Translation, Free Translation, Mathematical Commentary, and Bibliography. Mathematical Association of America, 1929.

[9] Clagett, Marshall. *Ancient Egyptian Science: A Source Book.* Volume Three: Ancient Egyptian Mathematics. American Philosophical Society, 1999.

[10] Dunton, M.; Grimm, R. E. *Fibonacci on Egyptian Fractions.* The Fibonacci Quarterly, v. 4, p. 339-354, 1966.

[11] Erdös, Paul; Stein, Stein. *Sums of Distinct Unit Fractions.* Proceedings of the American Mathematical Society, v. 14, n. 1, p. 126-131, 1963.

[12] Gillings, Richard J. *Mathematics in The Time of The Pharaohs.* Dover, 1972.

[13] Gong, Kevin. *Egyptian Fractions.* UC Berkeley, 1992.

[14] Guy, Richard K. *Unsolved Problems in Number Theory.* Springer-Verlag, 1994.

[15] Imhausen, Annete. *Mathematics in Ancient Egypt: A Contextual History.* Princeton University Press, 2016.

[16] Kosheleva, Olga; Kreinovich, Vladik. *Egyptian Fractions Revisited.* Informatics in Education, v. 8, n. 1, p. 35-48, 2009.

[17] Lima, Elon Lages. *Análise Real Volume 1: Funções de Uma Variável.* Oitava edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

[18] Mays, Michael. *A Worst Case of The Fibonacci-Sylvester Expansion.* Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, v. 1, p 141-148, 1987.

[19] Neugebauer, Otto. *The Exact Sciences in Antiquity.* Second Edition. Dover Publications, Inc., 1969.

[20] Ripoll, Cydara Cavedon et al. *Frações no Ensino Fundamental – Volume 1.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada & Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, 2016. Disponível em: <https://www.umlivroaberto.com/wp/?page_id=89>. Acesso em: 29 de dezembro de 2016.

[21] Sethe, Kurt. *Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern.* Karl J. Trübner, 1916.

[22] Sigler, Laurance. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation.* Springer-Verlag, 2002.

[23] Stuart, John. *Memoir of the Late Alexander Henry Rhind, of Sibster.* Edinburgh: Neill and Company, 1864.

[24] Sylvester, James Joseph. *On A Point in the Theory of Vulgar Fractions.* American Journal of Mathematics, v. 3, n. 4, p. 332-335, 1880.

[25] Yokota, Hisashi. *Length and Denominators of Egyptian Fractions II.* Journal of Number Theory, v. 28, p. 272-282, 1988.

Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
<humbertobortolossi@id.uff.br>

Catharine de Oliveira Lobo Fernandes Martins
Ciep 259 professora Maria do Amparo Rangel de Souza
<catharinelobo@gmail.com>

Recebido: 20/07/2022
Publicado: 25/10/2022