PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.4, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo1038

A Intuição Matemática e o estudo da Lineabilidade

Gustavo Araújo[1]   Eudes Marinho[2]

Resumo

A Intuição Matemática consiste em um dos principais recursos na investigação, pois serve de guia da razão humana. Entretanto, a Intuição Matemática por si só não basta e deve ser vista como complemento ou contrapeso da Lógica. Em verdade, tanto a lógica como a intuição têm seu legítimo papel na criação da Matemática e são necessárias ao progresso da ciência. Neste trabalho, iremos relacionar esse tema a uma área relativamente nova da Matemática, chamada *Lineabilidade*, que busca a existência de grandes estruturas matemáticas compostas de objetos com certas propriedades "patológicas". Iremos apresentar interessantes resultados de lineabilidade em espaços de funções e de sequências.

Palavras-chave: Intuição Matemática; Lógica Matemática; Lineabilidade.

Abstract

Mathematical Intuition is one of the main resources in research, as it serves as a guide for human reason. However, Mathematical Intuition alone is not enough and must be seen as a complement or counterweight to Logic. In fact, both logic and intuition have their legitimate role in the creation of mathematics and are necessary for the progress of science. In this work, we will relate this topic to a relatively new area of Mathematics, called *Lineability*, which seeks the existence of large mathematical structures composed of objects with certain "pathological" properties. We will present interesting results of lineability in spaces of functions and sequences.

Keywords: Mathematical Intuition; Mathematical Logic; Lineability.

1. Introdução

Intuição Matemática é o ato de perceber, discernir ou pressentir coisas, objetivando chegar a uma conclusão sobre algo, independentemente de raciocínio ou de análise. Para quem começa a estudar Matemática, um questionamento, aparentemente muito difícil de se responder, é suscitado: Como fazer para saber demonstrar qual é a próxima verdade que está ao meu alcance? Nessa perspectiva, a intuição matemática consiste em um dos principais recursos na investigação, pois serve de guia

[1]Parcialmente apoiado pela Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (Fapesq), Termo de Outorga nº 3024/2021

[2]Egresso do Profmat/UEPB

da razão humana. Por exemplo, Euclides recorria a figuras para se inspirar em suas descobertas geométricas, bem como para guiar suas demonstrações.

Para Poincaré, "a intuição deve ter um lugar preponderante no ensino da Matemática. Sem ela, os espíritos ainda jovens não teriam meios de ascender ao entendimento da Matemática; não aprenderiam a gostar dela e vê-la-iam apenas como uma vã logomaquia. Além disso, sem a intuição nunca poderiam ser capazes de aplicar a Matemática".

Entretanto, é necessário tomar muito cuidado quando estamos diante de um determinado problema, e queremos chegar a alguma conclusão baseada no que nossa intuição diz. Poincaré já afirmava que não é possível obter rigor, nem mesmo certeza, com a intuição. Cada vez mais, percebemos que o rigor não poderia ser introduzido nos raciocínios sem que, em primeiro lugar, entrasse nas definições. Ora, durante muito tempo os objetos estudados pelos matemáticos estavam, em sua maior parte, mal definidos. Pensávamos conhecê-los, porque conseguíamos representá-los com o auxílio dos sentidos e da imaginação. No entanto, a imagem extraída desses objetos era grosseira, não havia uma ideia precisa sobre a qual o raciocínio pudesse incidir.

> *Before the mathematician demonstrates he must invent. But nobody has ever invented anything by pure deduction. Pure logic cannot create anything; there is only one way to discovery, namely induction; for the mathematicians as well for the physicists.* (Henri Poincaré)

Assim, a Lógica Matemática por si só não basta. A Intuição Matemática deve andar ao lado da lógica, quando estamos diante de algum problema; a intuição tem que conceder o seu papel de complemento, contrapeso ou antídoto da lógica.

Tanto a lógica como a intuição são necessárias ao progresso da ciência, ambas têm seu legítimo papel na criação matemática. Muitas conjecturas que posteriormente viraram teoremas importantes surgiram devido às intuições. Lógicos e intuitivos realizaram e realizam feitos na Matemática que, talvez, outros não teriam alcançado êxito. Quem conseguiria mensurar o prejuízo científico matemático causado, caso Weierstrass[3] nada tivesse escrito, ou se Riemann[4] não tivesse existido?

Tendo em vista que a intuição, muitas vezes, tem um importante papel de guia para a verdade, considera-se a Intuição Matemática a primeira base de estratégia para resolver uma situação, aparentemente semelhante a outra já vista. Assim, é natural que algumas de nossas intuições sejam enganosas. Isso ocorre devido ao primeiro juízo dado sobre uma ideia, com base no que é conhecido e naquilo que já se tem experiência. Inclusive, a intuição levou P. Fermat[5] a achar que todo número de Fermat[6] era primo, mas Euler mostrou que não era verdade.

Com aporte nesses embasamentos, apresentamos a seguir alguns exemplos simples que podem ilustrar tais colocações.

(1) Considere a soma de infinitas parcelas

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots .$$

[3]Matemático Lógico Analítico que viveu entre 1815 e 1897.

[4]Matemático Intuitivo que viveu entre 1826 e 1866.

[5]Pierre de Fermat (17 de agosto de 1601 – 12 de janeiro de 1665) foi um magistrado, matemático e cientista francês.

[6]Número de Fermat é um número inteiro positivo da forma $2^{2^n} + 1$ sendo n um número natural.

Já é conhecido o processo de acréscimo e, portanto, é natural esperar que a soma S_1 cresça infinitamente. Nesse caso, é exatamente isso o que ocorre.

Considere agora a soma

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots .$$

Intuitivamente, espera-se o mesmo comportamento da soma S_1 para a soma S_2. No entanto, a soma S_2 resulta 1 (série geométrica). Isso pode ser verificado em parte, com o auxílio de uma calculadora, aumentando, suficientemente, o número de parcelas.

(2) Um outro exemplo é o seguinte: uma lenda conta que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa pela invenção. E o inventor respondeu:

> "1 *grão de trigo pela primeira casa,* 2 *grãos pela segunda,* 4 *pela terceira,* 8 *pela quarta,* 16 *pela quinta, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa.*"

Como o tabuleiro do xadrez tem 64 casas, o inventor pediu a soma dos primeiros termos da progressão geométrica (PG) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$, de razão $q = 2$. Da expressão que nos dá a soma dos primeiros termos de uma PG, isto é,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$

obtemos

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Fazendo esses cálculos, encontraremos o gigantesco número de vinte algarismos:

18.446.744.073.709.551.615 grãos de trigo.

Para efeitos demonstrativos do que essa quantidade representa, considerando que a densidade ótima de semeadura de trigo é, no máximo, 350 grãos/m^2, para cultivar essa quantidade de sementes, seria necessária uma área de $52.704.983.067,74$ km^2. Sabendo que a superfície do globo terrestre tem a área aproximada de 510.000.000 km^2 e que 3/4 da superfície do globo são cobertos por água, para a realização de tal feito seriam necessários $413,37$ planetas iguais à Terra.

(3) Suponha que uma pessoa está participando de um programa de televisão e lhe é fornecida a possibilidade de escolher uma entre 3 portas. Atrás de uma das portas existe um carro e atrás das demais não existe prêmio algum. O participante escolhe uma porta, digamos a Porta 1, e o apresentador abre outra porta, digamos a Porta 3, revelando que não há nada atrás dela e, então, oferece ao participante a oportunidade de trocar de porta. O que é mais vantajoso? *Trocar ou não a porta escolhida?*

Será que devemos confiar em nosso palpite inicial e permanecer na porta que escolhemos inicialmente? Além disso, como uma das portas foi aberta, então a possibilidade da escolha ter sido a certa é maior. Será que tanto faz trocar ou não? Será que é mais vantajoso não trocar?

Vamos analisar duas estratégias:

- O participante seleciona uma porta e, após aberta uma outra porta sem prêmio, se lhe é fornecida a oportunidade de trocar de porta, ele recusa.
- O participante seleciona uma porta e, após aberta uma outra porta sem prêmio, se lhe é fornecida a oportunidade de trocar de porta, o participante realiza a troca.

Utilizando a primeira estratégia, o participante ganhará o carro com probabilidade 1/3, já que a chance dele ter escolhido a porta premiada é de uma em três. Já utilizando a segunda estratégia, o participante ganhará o carro se, a princípio, tiver escolhido uma porta que não contém o carro como prêmio, o que repesenta uma probabilidade de 2/3, tendo em vista que duas das três portas não possuem prêmio algum.

Ou seja, a probabilidade de ganhar com a estratégia 2 é 2/3 e, portanto, duas vezes maior do que utilizando a estratégia 1. Por maior que seja a sua vontade de permanecer na porta escolhida inicialmente, para aumentar (dobrar) sua chance de vitória, o participante deve adotar segunda estratégia.

Observação 1. O problema descrito acima é conhecido como o problema de Monty Hall. Ele surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos chamado "Let's Make a Deal", exibido na década de 1970.

Como visto acima, a Intuição Matemática pode ser estimulada, em um primeiro estágio, por experiências, atividades e manipulações de objetos, assim como por traços no papel e abstrações, em um segundo. Entretanto, deve-se sempre reforçar que a intuição é um instrumento da "invenção", e que somente a Lógica Matemática é que nos fornece a certeza. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é relacionar um tema relativamente novo na Matemática, chamado *Lineabilidade*, ao que foi discutido acima. Esse tema tem atraído, ultimamente, a atenção de muitos autores. Grosseiramente falando, chamamos de Lineabilidade a existência de grandes estruturas matemáticas, compostas de objetos com certas propriedades "especiais" (algumas vezes chamadas de propriedades "patológicas"), isto é, objetos vistos, *a priori*, como raros ou não intuitivos, mas que, na verdade, são bem mais comuns do que imaginamos. Nossa intuição falha em achar que são poucos os exemplos que ilustraremos mais adiante, mas a Lógica Matemática, através da Lineabilidade, irá nos mostrar o contrário.

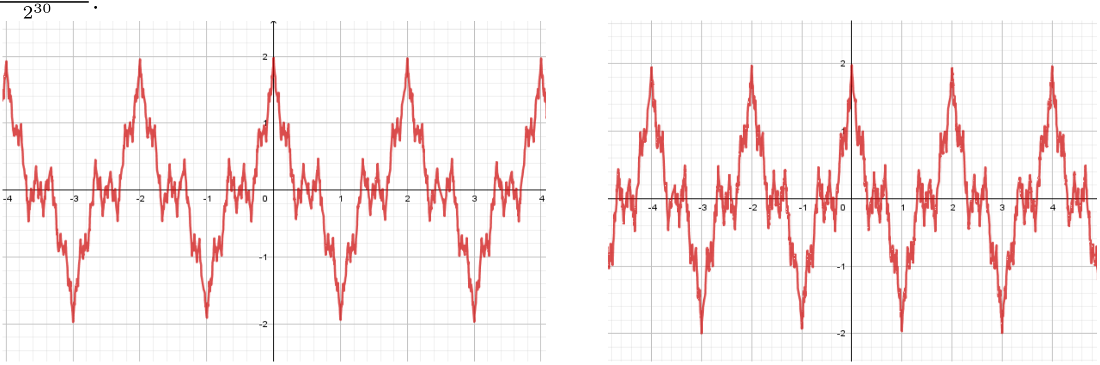
Os famosos *monstros de Weierstrass* são exemplos clássicos dessa teoria, isto é, *sempre* que imaginamos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, muito provavelmente, pensamos em alguma função que, não somente seja contínua, mas também que possa ser diferenciável em muitos pontos de $\mathbb{R}$.

Entretanto, em 1872, K. Weierstrass construiu uma função contínua que é não diferenciável em todo ponto do seu domínio: sejam $a \in (0, 1)$ e b um inteiro positivo ímpar tal que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$; a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \cos(b^i \pi x)$$

goza desta propriedade, isto é, é contínua e não diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}$ (ver Figura 1). De fato, apesar de nunca ser diferenciável, a função f é contínua: como, para cada $x \in \mathbb{R}$, os termos da série que a define são limitados por $\pm a^i$ e, para $0 < a < 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} a^i < \infty$, a convergência uniforme de $\sum_{i=0}^{\infty} a^i \cos(b^i \pi x)$ é garantida pelo Teste M de Weierstrass. Como cada soma parcial é uniformemente contínua, segue que f é uniformemente contínua.

Figura 1: As figuras abaixo representam gráficos de somas parciais da série acima. À esquerda temos n = 10 e $f(x) \approx \frac{\cos(3^0\pi x)}{2^0} + \cdots + \frac{\cos(3^{10}\pi x)}{2^{10}}$; à direita temos n = 20 e $f(x) \approx \frac{\cos(3^0\pi x)}{2^0} + \cdots + \frac{\cos(3^{20}\pi x)}{2^{30}}$.



Fonte: Produção própria

Funções desse tipo, atualmente, são conhecidas como monstros de Weierstrass[7]. O aparente choque da comunidade matemática, quando Weierstrass exibiu tal função, ocorreu pelo pensamento geral compartilhado pela maioria dos matemáticos da época: "Uma função contínua deve ser diferenciável em um conjunto significante de pontos" (até mesmo A. Ampère compartilhava desse pensamento e tentou dar uma justificativa teórica para isso).

Pode-se pensar que, uma vez que um objeto dessa natureza tenha sido encontrado, não há a possibilidade de existir muitos outros. De imediato nos vem a seguinte pergunta: Quantos monstros de Weierstrass existem? Na verdade, ao contrário do que diz nossa intuição, existem *muitos*[8] objetos dessa natureza.

Seguindo essa linha, Vladimir Gurariy provou em 1966 que a família de funções contínuas em $[0,1]$ que são não diferenciáveis em todo ponto contém, com exceção da função nula, um espaço vetorial de dimensão infinita. Esse foi um resultado bastante surpreendente, porque, de fato, fornecer explicitamente uma dessas funções não é uma tarefa fácil, como aquela construída por Karl Weierstrass em 1872. O resultado de V. Gurariy principiou o surgimento de um conceito relativamente novo da Matemática, chamado *Lineabilidade*, o qual faz uma interessante conexão entre duas áreas de pesquisa, a Análise e a Álgebra, e, *grosso modo*, busca a existência de grandes estruturas matemáticas lineares compostas de objetos com certas propriedades "patológicas".

Este artigo foi adaptado do artigo [1] e da dissertação de mestrado [8], além de trazer correções de algumas imprecisões dessa última. É importante destacar que a dissertação [8] faz uma transposição do tema, apresentado, por exemplo, em [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], para um contexto de menor complexidade, apresentando a teoria de forma mais simplificada e com mais exemplos ilustrativos, possibilitando, dessa forma, uma menor quantidade de conhecimento preliminar para sua leitura

[7]Apesar de serem conhecidos como monstros de Weierstrass, B. Bolzano ($\approx$ 1830), M. Cellérier ($\approx$ 1830), B. Riemann (1861) e H. Hankel (1870) já haviam encontrado funções desse tipo.

[8]Como uma boa aplicação do Teorema da Categoria de Baire, S. Banach provou em 1931 que *quase todas* as funções contínuas são não diferenciáveis em todo ponto. Mais precisamente, o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ contínuas que são não diferenciáveis em todo ponto é residual em $C(\mathbb{R})$, o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ contínuas, quando dotado da convergência uniforme nas partes compactas (ou, simplesmente, topologia da convergência compacta).

e compreensão.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na Introdução, buscamos inicialmente expor algumas questões matemáticas básicas que nos fazem refletir sobre a relação entre intuição e lógica. Em seguida, motivados por tal reflexão, apresentamos, informalmente, o conceito de lineabilidade, através do primeiro exemplo que impulsinou o surgimento desta teoria, além de explanarmos sobre sua conexão com o que já fora discutido. Na Seção 2, apresentamos e definimos formalmente os conceitos relacionados a lineabilidade. Em sequência, na Seção 3, discutimos resultados clássicos dessa teoria no contexto das funções reais de uma variável real; aqui, abordamos, sem demonstrações, resultados sobre a lineabilidade do conjunto das funções sobrejetivas em todo lugar e do conjunto das funções de Sierpiński e Zygmund. Na última seção, exibimos e apresentamos uma prova simples de um resultado recente de lineabilidade no espaço das sequências que geram séries para as quais os Testes da Razão e da Raiz falham; grosso modo, esse resultado mostra que os Testes da Razão e da Raiz estão longe de serem ótimos.

2. Lineabilidade: O básico

Nesta seção, apresentaremos os conceitos básicos sobre Lineabilidade para, em seguida, apresentarmos alguns exemplos recentes dessa nova abordagem.

Definição 1 (2004)**.** Sejam X um espaço vetorial, A um subconjunto de X e μ um número cardinal. Diremos que A é:

- *lineável* se existe um espaço vetorial M de dimensão infinita tal que $M \setminus \{0\} \subset A$;
- μ*-lineável* se existe um espaço vetorial M com $\dim(M) = \mu$ e $M \setminus \{0\} \subset A$ (portanto, lineabilidade significa $\aleph_0$-lineabilidade, onde $\aleph_0 := \mathsf{card}\,(\mathbb{N})$, a cardinalidade de $\mathbb{N}$);
- *maximal lineável* em X se A é $\mathsf{dim}\,(X)$-lineável.

Com essa nova terminologia, podemos reescrever o resultado de V. Gurariy como:

Teorema 1 (V. Gurariy, 1966)**.** *O conjunto da funções reais em* $[0, 1]$ *contínuas que são não diferenciáveis em todo ponto é lineável.*

O termo lineabildiade foi usado primeiramente por R. Aron, V. Gurariy, J. Seoane-Sepulveda em Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2004) 795-803. Desde aquela época, vários autores mostraram interesse sobre o tópico e, além do conceito apresentado acima, uma série de outros conceitos foram criados para descrever o tamanho algébrico de um determinado conjunto (a título de curiosidade, apresentaremos abaixo diversas definições relacionadas a essa teoria; veja [2] para uma abordagem mais profunda das propriedades de lineabilidade de subconjuntos específicos de espaços vetoriais).

Se, além disso, X é um espaço vetorial topológico, então A é dito:

- *denso-lineável* em X se existir um subespaço vetorial denso M de X satisfazendo $M \setminus \{0\} \subset A$ (portanto, denso-lineabilidade implica lineabilidade quando $\dim(X) = \infty$), e
- *maximal denso-lineável* em X se existir um espaço veotorial denso M de X satisfazendo $M \setminus \{0\} \subset A$ e $\dim(M) = \dim(X)$.

Além disso, de acordo com [3, 4], quando X é um espaço vetorial topológico contido em alguma álgebra (linear), então A é chamado:

- *algebrável* se existe uma álgebra M tal que $M \setminus \{0\} \subset A$ e a cardinalidade de qualquer sistema de geradores de M é infinita.
- *densamente algebrável* em X se, ademais, M é denso in X.
- *α-algebrável* se existe uma álgebra M tal que $M \setminus \{0\} \subset A$ e a cardinalidade de qualquer sistema de geradores de M é α.
- *fortemente α-algebrável* se além de ser α-algebrável, a álgebra M é *livre* (para $\alpha = \aleph_0$, é usual dizermos, simplesmente, *fortemente algebrável*).
- *densamente fortemente α-algebrável* se, além disso, a álgebra livre M é densa em X.

Observe que α-algebrabilidade forte $\Longrightarrow$ α-algebrabilidade $\Longrightarrow$ α-lineabilidade, e nenhuma dessas implicações podem ser revertidas (veja [5, p. 74]). Os conceitos acima foram apresentados apenas por uma questão de completude do trabalho e como uma forma de introduzir conceitos mais técnicos da teoria a leitores interessados em aprofundar seus conhecimentos no toma. Para isso, recomendamos fortemente a leitura do livro [2].

Nas seções seguintes, apresentaremos exemplos que nos mostram o quanto a Intuição Matemática deve sempre andar ao lado da Lógica Matemática, quando estamos diante de algum problema, e que ambas são complementares e essenciais ao progresso da ciência.

3. Lineabilidade em espaços de funções

3.1. As Funções Sobrejetivas em todo lugar

Daremos a seguir a definição de um tipo de função que o leitor pode até duvidar se essa é, de fato, uma boa definição, isto é, será que o conjunto das funções que definiremos a seguir é não vazio?

Definição 2. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva em todo lugar se $f(I) = \mathbb{R}$ para todo intervalo não degenerado $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lebesgue ([7], 1904) foi provavelmente o primeiro a mostrar um exemplo de uma função real sobre os reais satisfazendo a surpreendente propriedade de que ela assume cada valor real em qualquer conjunto aberto não vazio. É claro que tais funções são não contínuas em todo ponto de $\mathbb{R}$.

O exemplo abaixo mostra que o conjunto das funções sobrejetivas em todo lugar é não vazio.

Exemplo 1 (Ver Figura 2)**.** A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi x), & \text{se o limite existe,} \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

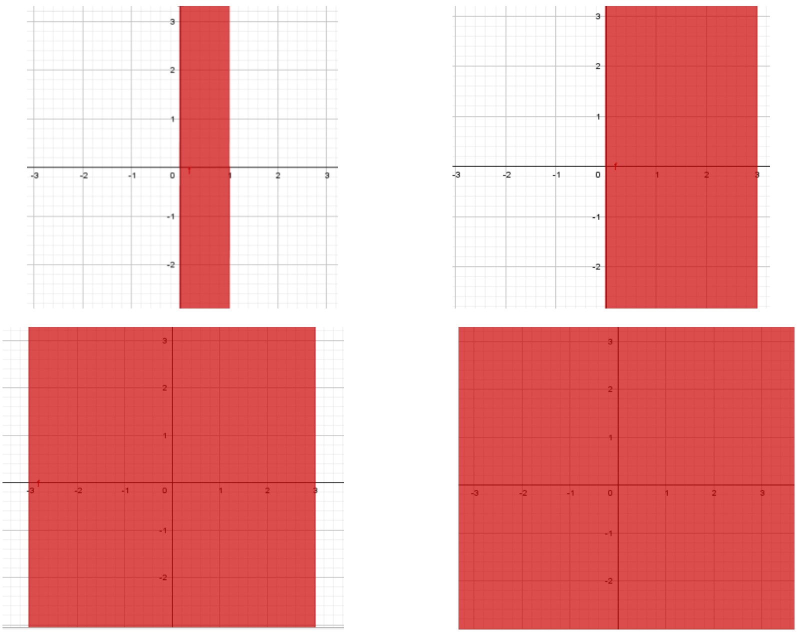
verifica as seguintes propriedades:

1. Se $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$ então $f(x + q) = f(x)$.

2. f é sobrejetiva: para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

3. f é sobrejetiva em todos os intervalos abertos não degenerados, isto é, se $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, então $\{f(x) : a < x < b\} = \mathbb{R}$.

Figura 2: Na primeira linha, temos o gráfico das restrições $f|_{[0,1]}$ e $f|_{[0,3]}$, respectivamente. Na segunda linha, os gráficos de $f|_{[-3,3]}$ e f, respectivamente.



Fonte: Produção própria

A seguinte observação será útil na demonstração das propriedades acima.

Observação 2. Se $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} = r,$$

para cada $r \in \mathbb{R}$. De fato, $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se definirmos nas desigualdades anteriores $x = r(n+1)$ para $r \in \mathbb{R}$ arbitrário e $n \in \mathbb{N}$, então $r(n+1) - 1 \leq \lfloor r(n+1) \rfloor \leq r(n+1)$. Dividindo por $n+1$ implicará

$$r - \frac{1}{n+1} = \frac{r(n+1) - 1}{n+1} \leq \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} \leq \frac{r(n+1)}{(n+1)} = r.$$

Dessa última desigualdade e do Teorema do Sanduíche, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} = r.$$

Provemos agora as propriedades *(1)*, *(2)* e *(3)* acima:

(1). Dado $q \in \mathbb{Q}$, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ com $s \neq 0$ tais que $q = r/s$. Se $n \geq s$, então $n!q$ é um inteiro e, portanto, para $x \in \mathbb{R}$, $n!\pi x$ e $n!\pi(x+q)$ são múltiplos de π. Segue que $\tan(n!\pi(x+q)) = \tan(n!\pi x)$ para todo $n \geq s$. Assim, $f(x+q) = f(x)$.

(2). Dado $y \in \mathbb{R}$, escolha $r \in [0, 1)$ tal que $\tan(\pi r) = y$. Defina $x \in \mathbb{R}$ como

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lfloor ri \rfloor}{i!}.$$

Mostraremos que $f(x) = y$. Sejam x_n a n-ésima soma parcial de x e ε_n o termo remanescente. Assim,

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lfloor kn \rfloor}{k!} \quad \text{e} \quad \varepsilon_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lfloor kn \rfloor}{k!} = x - x_n.$$

Note que $n!x_n \in \mathbb{Z}$ para todo n e, portanto, pelo item anterior, $\tan(n!\pi x) = \tan(n!\pi\varepsilon_n)$ para todo n. Consequentemente,

$$n!\varepsilon_n = \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} + n! \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\lfloor rk \rfloor}{k!}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} = r \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} n! \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\lfloor rk \rfloor}{k!} = 0,$$

concluímos que $\lim_{n\to\infty} n!\varepsilon_n = r$, de onde segue que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi x) = \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi\varepsilon_n) = \tan(\pi r) = y.$$

(3). Sejam $a, b, y \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Pela propriedade *(2)*, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = y$, e pela propriedade *(1)*, $f(c) = f(c+q) = y$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Como entre dois números reais distintos, quaisquer que sejam, sempre existe um número racional, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que um $a < c + q < b$. Se $x = c + q$, então $a < x < b$ e

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi(c+q)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\tan(n!\pi c) + \tan(n!\pi q)}{1 - \tan(n!\pi c)\tan(n!\pi q)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi c) \\ &= f(c) = y. \end{aligned}$$

Observe que $\tan(n!\pi q) \to 0$ quando $n \to \infty$. Desde que y é um número real arbitrário, segue-se que $\{f(x) : a < x < b\} = \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

O exemplo acima, assim como o exemplo dado por Lebesgue em 1904, parecem ser raros ou, pelo menos, pode-se dizer que são não intuitivos (ou será que alguém quando pensa numa função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ imagina uma função cujo gráfico é denso em $\mathbb{R}^2$?) Apesar de ser uma definição, aparentemente, "inimaginável", foi provado em 2005 por R. Aron, V. Gurariy e J. Seoane-Sepúlveda que o conjunto das funções sobrejetivas em todo lugar é, na verdade, um conjunto (algebricamente) *grande* (no teorema abaixo e em todo o restante do texto, iremos denotar $\mathfrak{c} := \mathsf{card}(\mathbb{R})$).

Teorema 2 (Aron, Gurariy, Seoane, 2005). *O conjunto das funções* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que são sobrejetivas em todo lugar é maximal lineável (isto é,* $2^{\mathfrak{c}}$*-lineável).*

A demonstração da Teorema acima pode ser verificada em [2].

3.2. As Funções de Sierpiński e Zygmund

Daremos nesta seção mais um exemplo *surpreendente* de lineabilidade. Como motivação, iremos indagar algo que, à primeira vista, parece não ser algo tão natural:

> *Dada uma função arbitrária* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, podemos encontrar um subconjunto "grande"* $S \subset \mathbb{R}$ *tal que a restrição* $f|_S$ *é contínua?*

Em 1922, Blumberg deu uma surpreendente resposta afirmativa para a questão acima:

Teorema 3 (Blumberg, 1922). *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função arbitrária. Então, existe um subconjunto denso* $S \subset \mathbb{R}$ *tal que a função* $f|_S$ *é contínua.*

Uma leitura cuidadosa na prova deste resultado mostra que o conjunto S acima é enumerável, isto é, $\mathrm{card}(S) = \aleph_0$. Naturalmente, poderíamos nos perguntar se seria possível escolher o conjunto S no Teorema de Blumberg como sendo não enumerável. Relativo a esse questionamento, uma excelente resposta na negativa, apesar de parcial em certo sentido, foi dada por Sierpiński e Zygmund:

Teorema 4 (Sierpiński, Zygmund, 1923). *Existe uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que, para qualquer conjunto* $Z \subset \mathbb{R}$ *de cardinalidade do continuum* ($\mathrm{card}(Z) = \mathfrak{c}$)*, a restrição* $f|_Z$ *não é uma função contínua.*

Este teorema responde de forma parcial a questão acima, pois exige que a cardinalidade de Z seja $\mathfrak{c}$. Uma função como a do Teorema 4 será chamada de função de Sierpiński e Zygmund. Iremos considerar, portanto,

$$\mathcal{SZ} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ é uma função de Sierpiński e Zygmund}\}.$$

Observação 3. Se a Hipótese do Continuum[9] (HC) é assumida, então a restrição de uma função de $\mathcal{SZ}$ a qualquer conjunto não enumerável não pode ser contínua. Na verdade, a HC é necessária nesse contexto; de fato, em 1973, Shinoda provou que, sob algumas hipóteses axiomáticas (incluindo a negação da HC), para qualquer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe um conjunto não enumerável $Z \subset \mathbb{R}$ tal que a restrição $f|_Z$ é contínua.

Além de todos essas discussões acerca das funções de Sierpiński e Zygmund, uma indagação que neste momento parece natural é a seguinte: o que dizer sobre a lineabilidade do conjunto da funções de Sierpiński-Zygmund? Será que existem muitas funções como a do Teorema 4?

Quem deu uma primeira resposta para essa pergunta foi J. Gámez-Merino, G. Muñoz-Fernandez, V. Sánchez e J. Seoane-Sepúlveda, em 2010 (veja [6]).

[9] A Hipótese do Contínuum é uma hipótese sobre os possíveis *tamanhos* de conjuntos infinitos. Ela afirma que não há conjunto cuja cardinalidade esteja estritamente entre a cardinalidade dos números inteiros e a dos números reais, isto é, não existe um conjunto S para o qual $\aleph_0 < \mathrm{card}(S) < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Assumindo o Axioma da Escolha (AE), existe um menor número cardinal $\aleph_1$ maior que $\aleph_0$, e a Hipótese do Continuum é, por sua vez, equivalente à igualdade $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Teorema 5 (Gámez-Merino, Muñoz-Fernandez, Seoane-Sepúlveda, 2010)**.** *O conjunto das funções de Sierpiński-Zygmund é $\mathfrak{c}^+$-lineável.*

No resultado acima, $\mathfrak{c}^+$ representa o cardinal sucessor de $\mathfrak{c}$. Como consequência, assumindo que $\mathfrak{c}^+ = 2^{\mathfrak{c}}$ (o que ocorre, por exemplo, se assumirmos a Hipótese Generalizada do Continuum[10], concluímos que $\mathcal{SZ}$ é $2^{\mathfrak{c}}$-lineável (lineabilidade máxima, neste caso).

4. Um resultado de lineabilidade onde Testes da Razão e da Raiz falham

Em Matemática, o Teste da Razão (ou Critério d'Alembert) e o Teste da Raiz são testes para saber sobre a convergência ou não de uma série de números reais. Mais precisamente, temos os seguintes critérios:

Teorema 6 (Teste da Razão)**.** *Dada uma sequência* $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 1}$ *de números reais, considere*

$$\mathrm{L} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{|\mathrm{a_{n+1}}|}{|\mathrm{a_n}|}.$$

Então,

(i) se $\mathrm{L} < 1$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$ *converge;*

(ii) se $\mathrm{L} > 1$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$ *diverge;*

(iii) se $\mathrm{L} = 1$ *ou o limite não existe, nada podemos dizer sobre a convergência ou divergência da série* $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$.

Teorema 7 (Teste da Raiz)**.** *Dada uma sequência* $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\geq 1}$ *de números reais, considere*

$$\mathrm{L} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} |\mathrm{a_n}|^{1/\mathrm{n}}.$$

Então,

1. se $\mathrm{L} < 1$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$ *converge;*

2. se $\mathrm{L} > 1$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$ *diverge;*

3. se $\mathrm{L} = 1$ *ou o limite não existe, nada podemos dizer sobre a convergência ou divergência da série* $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$.

[10] A Hipótese Generalizada do Continuum (HGC) afirma que para qualquer cardinal infinito λ não existe nenhum cardinal κ tal que $\lambda < \kappa < 2^{\lambda}$. Assumindo o AE, a HGC é equivalente a $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ para todo número ordinal α.

Os terceiros itens de ambos os teoremas acima são necessários pois existem tanto séries convergentes como séries divergentes que verificam a condição $L = 1$ ou o limite não existe. Em outras palavras, os itens *(i)* e *(ii)* de ambos os critérios não são suficientes. Por exemplo,

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge, mas } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

e

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge, mas } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

Outros exemplos: (1) Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1.$$

Fazendo $a_n = 2^{-n+(-1)^n}$, observe que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{2(-1)^{n+1}-1} = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{1}{8} & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

e, portanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ não existe.

(2) A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+(-1)^n}$ diverge e

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2^{2(-1)^{n+1}+1} = \begin{cases} 8 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

(3) A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge e $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = 1$ para ambas.

Na verdade, alunos de Cálculo Diferencial e Integral ou de Séries e Equações Diferenciais, não muito raramente, deparam-se com listas de exercícios em que muitas das questões que solicitam a análise sobre a convergência ou divergência de séries acabam tendo que ser resolvidas por outros critérios que não os mencionados acima, pois ambos fornecem $L = 1$ ou a não existência do limite. O que muitos alunos não imaginam (talvez até muitos professores dessas disciplinas também não estejam cientes disso) é que o fato de muitos exemplos resultarem em $L = 1$ ou na não existência do limite, tanto no Teste da Razão como no Teste da Raiz, não é uma raridade, apesar de nosso sentimento/desejo inicial ao tentar aplicar tais testes é que ocorra exatamente o oposto (isto é, que os critérios forneçam alguma informação sobre a convergência/divergência).

De fato, em [1] foi provado que os Testes da Razão e da Raiz estão longe de serem ótimos, isto é, para ambos os critérios, o resultado a seguir (veja [1, Theorem 6.2]) mostra que existem espaços vetoriais de dimensão infinita formados por sequências que geram séries absolutamente convergentes ou sequências que geram séries divergentes para os quais os referidos testes falham, ou seja, não dão nenhuma informação sobre a convergência ou divergência das séries.

O teorema a seguir é um caso particular de [1, Theorem 6.2]. Por uma questão de completude e para exemplificar como proceder numa demonstração de um resultado de lineabilidade, apresentaremos sua prova.

Teorema 8. *(a) O conjunto das sequências que geram séries absolutamente convergentes para as quais o teste da razão falha é maximal ($\mathfrak{c}$-) lineável.*

(b) O conjunto das sequências que geram séries absolutamente convergentes para as quais o teste da raíz falha é maximal ($\mathfrak{c}$-) lineável.

(c) O conjunto das sequências que geram séries divergentes para as quais o teste da razão falha é maximal ($\mathfrak{c}$-) lineável.

(d) O conjunto das sequências que geram séries divergentes para as quais o teste da raiz falha é maximal ($\mathfrak{c}$-) lineável.

Demonstração. Vamos mostrar apenas o primeiro item. Nosso objetivo é provar que o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ (a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge e } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ não existe} \right\}$$

é maximal lineável. Os itens restantes podem ser feitos de forma semelhante e suas demonstrações serão deixadas para o leitor (dica: em vez da coleção de sequências $\{((ns)^{-n+(-1)^n})_{n\geq 1} : s > 1\}$ usada para *(a)*, pode-se usar $\{(n^{-s})_{n\geq 1} : s > 1\}$, $\{((ns)^{n+(-1)^n})_{n\geq 1} : s > 1\}$ e $\{(n^s)_{n\geq 1} : s > 1\}$, respectivamente, para provar *(b)*, *(c)* e *(d)*).

Vamos provar *(a)*. Para qualquer número real $s > 1$, considere a sequência $(a_{n,s})_{n\geq 1}$, com $a_{n,s} = (ns)^{-n+(-1)^n}$. Como $a_{n,s} \leq n^{-2}$ para todo $n \geq 3$, o Teste da Comparação assegura-nos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,s}|$ converge, para todo $s > 1$. A seguir, considere

$$E = [\{(a_{n,s})_{n\geq 1} : s > 1\}],$$

o espaço gerado por $\{(a_{n,s})_{n\geq 1} : s > 1\}$, que é um subespaço vetorial do espaço das sequências que geram séries absolutamente convergentes. Mostremos agora que $\dim(E) = \mathfrak{c}$. De fato, suponha que uma combinação linear do tipo

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (a_{n,s_j})_n$$

é identicamente 0. Observe que

$$x = (x_n)_{n\geq 1} \quad \text{com} \quad x_n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \, a_{n,s_j} \quad (n \geq 1). \tag{1}$$

Então, supondo sem perda de generalidade que $k \geq 2$ e $s_1 > s_2 > \cdots > s_k$, e dividindo a expressão anterior por $(ns_k)^{-n+(-1)^n}$, obtemos

$$0 = \alpha_1 \left(\frac{s_1}{s_k}\right)^{-n+(-1)^n} + \cdots + \alpha_{k-1} \left(\frac{s_{k-1}}{s_k}\right)^{-n+(-1)^n} + \alpha_k.$$

Fazendo $n \to \infty$, concluímos que $\alpha_k = 0$. Indutivamente, podemos obter que todos os α_js são 0. Portanto, o conjunto de sequências $\{(a_{n,s})_{n\geq 1}, s > 1\}$ é linearmente independente, o que mostra que $\dim(E) = \mathfrak{c}$.

Agora vamos mostrar que, dada uma sequência $x = (x_n)_{n \geq 1} \in E \setminus \{0\}$ como em (1) (com $\alpha_k \neq 0$ e $s_1 > \cdots > s_k$), o Teste da Razão não fornece nenhuma informação sobre a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dividindo numeradores e denominadores por $\alpha_k (ns_k)^{-n+(-1)^n}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \left|\frac{\alpha_1((n+1)s_1)^{-n-1+(-1)^{n+1}} + \cdots + \alpha_k((n+1)s_k)^{-n-1+(-1)^{n+1}}}{\alpha_1(ns_1)^{-n+(-1)^n} + \cdots + \alpha_k(ns_k)^{-n+(-1)^n}}\right| \\ &= \left|\frac{\beta_{1,n} + \cdots + \beta_{k,n}}{\gamma_n + 1}\right|, \end{aligned}$$

onde $\gamma_n \to 0$ $(n \to \infty)$,

$$\beta_{j,n} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \dfrac{s_j^{-2} s_k^{-1}}{n(n+1)} \left(\dfrac{s_k}{s_j}\right)^n & \text{se n é par,} \\[2ex] \dfrac{\alpha_j}{\alpha_k}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n n s_k \left(\dfrac{s_k}{s_j}\right)^n & \text{se n é ímpar} \end{cases}$$

$(j = 1, \ldots, k)$. Note que

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ par}}} \beta_{j,n} = 0 \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, k\}, \\ &\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ ímpar}}} \beta_{j,n} = 0 \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, k-1\}, \\ &\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ ímpar}}} |\beta_{k,n}| = \infty. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

não existe e, portanto, $x \in \mathcal{A}$, como queríamos provar. Isso mostra que $\mathcal{A}$ é maximal lineável. □

Referências

[1] Araújo, G.; Bernal-González, L.; Muñoz-Fernández, G.A.; Prado-Bassas, J.A.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *Lineability in sequence and function spaces*. Studia Math., v. 237, n. 2, p. 119-136, 2017.

[2] Aron, R.M.; Bernal-González, L.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J.B. *Lineability: The search for linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2016.

[3] Aron, R.M.; Pérez-García, D.; Seoane-Sepúlveda, J.B. *Algebrability of the set of nonconvergent Fourier series*, Studia Math., v. 175, n. 1, p. 83-90, 2006.

[4] Bartoszewicz, A.; Głąb, S. *Strong algebrability of sets of sequences of functions*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 141, p. 827-835, 2013.

[5] Bernal-González, L.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J.B. *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), v. 51, n. 1, p. 71-130, 2014.

[6] Gámez-Merino, J.L.; Muñoz-Fernández, G.A.; Sánchez, V.M.; Seoane-Sepúlveda, J.B. *Sierpiński-Zygmund functions and other problems on lineability*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 138, n. 11, p. 3863-3876, 2010.

[7] Lebesgue, H. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, 1904.

[8] Marinho, E. E. S. *Intuição matemática*, Dissertação de Mestrado, UEPB, 2019.

Gustavo Araújo
Departamento de Matemática
Centro de Ciências e Tecnologia
Universidade Estadual da Paraíba
Rua Baraúnas 351
Campina Grande-PB, 58.429-500 (Brasil).
<gdasaraujo@gmail.com;gustavoaraujo@servidor.uepb.edu.br>

Eudes Marinho
EEEFM Professora Dione Diniz Oliveira Dias
Núcleo Habitacional 2
Sousa-PB, 58.814-500 (Brasil).
<eudes520@hotmail.com>

Recebido: 17/05/2022
Publicado: 31/10/2022