


# O Método de Lill e uma aplicação de origamis às equações de 3<sup>o</sup> grau.

Anita Boaventura Carneiro 

Nilton Moura Barroso Neto 

## Resumo

Neste trabalho apresentaremos o Método de Lill para solução de equações polinomiais de grau arbitrário e faremos uma aplicação desse método para determinar as raízes reais de uma equação cúbica qualquer com auxílio de origami.

**Palavras-chave:** Lill, funções polinomiais, cúbicas, origami.

## Abstract

In this work we present Lill's Method for solving polynomial equations of arbitrary degree and we make an application of this method to determine the real roots of an arbitrary cubic equation with the aid of origami.

**Keywords:** Lill, polynomial functions, cubics, origami.

## 1. Introdução

Função é certamente um dos conceitos mais fundamentais da matemática moderna. Nosso primeiro contato com esse assunto dá-se na educação básica com os exemplos mais simples:

$$p(x) = ax + b, \quad p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Via de regra, as funções acima, chamadas polinomiais lineares e quadráticas ou de 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> graus, respectivamente, são exaustivamente estudadas e analisadas: sua forma geral, seu gráfico e em seguida métodos algébricos para a determinação de suas raízes, soluções de  $p(x) = 0$ , são fornecidos. Da sua parte, as cúbicas ou de 3<sup>o</sup> grau, próximas espécimens na hierarquia das funções polinomiais, são quase completamente ignoradas no currículo escolar vigente. Isso ocorre especialmente porque os métodos algébricos para determinar as raízes de uma equação polinomial de 3<sup>o</sup> grau são, em geral, mais complicados e requerem conhecimento de números complexos mesmo no caso em que todas as raízes são reais. É possível mostrar ainda que a solução de equações quárticas reduz-se à solução de cúbicas e que as equações polinomiais de grau maior ou igual a 5 não podem, em geral, ser resolvidas com métodos algébricos elementares.

Portanto, com o conhecimento médio de um aluno da educação básica, estaremos no mais das vezes limitados às soluções algébricas das equações 2<sup>o</sup> grau, apenas. Em certo sentido, o método de Lill

vem ao nosso resgate como um antídoto para tal fato. Em 1867 o engenheiro austríaco Eduard Lill (1830–1900) publicou um trabalho [8] em que descreve um método geométrico para determinar as raízes reais de equações algébricas de grau  $n$  com coeficientes reais, ou seja, na forma

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

em que  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são números reais e  $a_n \neq 0$ . Apesar da sua simplicidade, o desenvolvimento de sofisticados meios algébricos para a solução de equações e o crescente desinteresse da matemática pelos valores numéricos das suas raízes relegou o método de Lill ao *status* de mera curiosidade ou divertimento matemático. Em 1936, entretanto, reacendeu-se o interesse pelo método quando a matemática italiana Margharita Beloch (1879-1976) descobriu como efetivamente construir com origami as soluções de uma equação cúbica com seu auxílio.

Esse trabalho tem como objetivo mostrar como o Método de Lill, o Quadrado de Beloch e o tão popular origami (método oriental tradicional de dobradura de papel) permitem determinar as raízes reais de uma equação algébrica de grau 3, ou seja, da forma

$$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

em que  $a_3 \neq 0$ . Lembramos ao leitor que o teorema fundamental da álgebra garante que uma equação da forma (1) tem exatamente  $n$  raízes no conjunto dos números complexos e que raízes complexas sempre vêm em pares de números conjugados entre si.

## 2. O Método de Lill

Gostaríamos de determinar as soluções reais de uma equação algébrica de grau  $n$  da forma (1) e para isso realizamos a seguinte construção geométrica: primeiramente escolhemos um ponto no plano como origem e o denotamos por  $O$ ; daí caminhamos para a direita ao longo do eixo horizontal uma distância igual ao coeficiente  $a_n$ . Em seguida, giramos  $90^\circ$  no sentido anti-horário e caminhamos uma distância igual a  $a_{n-1}$ ; giramos novamente  $90^\circ$  e seguimos assim até andarmos a distância  $a_0$ , e chegarmos no ponto final que denotaremos por  $F$ . É preciso cuidar também do sinal do coeficiente: se for positivo, caminhamos para frente, mas se for negativo damos marcha à ré; no caso de um coeficiente nulo ainda giramos, mas não caminhamos.

Vamos supor agora que temos um canhão *laser* que possui uma propriedade especial: toda vez que o seu raio atinge uma das linhas que traçamos ou o prolongamento delas, ricocheteia formando um ângulo de  $90^\circ$  com o raio incidente. Nessa situação, o método de Lill afirma que, se partindo de  $O$ , o *laser* ricocheteia em todas as paredes do caminho traçado e atinge o ponto  $F$ , então  $z = -\tan(\theta)$  é uma raiz real de (1), em que  $\theta$  é o ângulo de disparo do *laser*. Veja a figura 1

A trajetória do *laser* está representada pela linha tracejada. Note que há uma ambiguidade no ricochete: algumas vezes o *laser* será refletido, outras vezes será refratado, mas sempre por um ângulo de  $90^\circ$ .

A figura 1 deixa claro que o caminho do *laser* é formado pelas hipotenusas de uma série de triângulos semelhantes. Denotaremos por  $y_k$  o lado oposto ao ângulo  $\theta$  no triângulo que tem o outro cateto como parte do lado  $a_k$  do caminho. Por exemplo, o triângulo retângulo de vértice  $O$  tem como cateto oposto  $y_5$ , cateto adjacente  $a_5$  enquanto o próximo triângulo tem cateto oposto

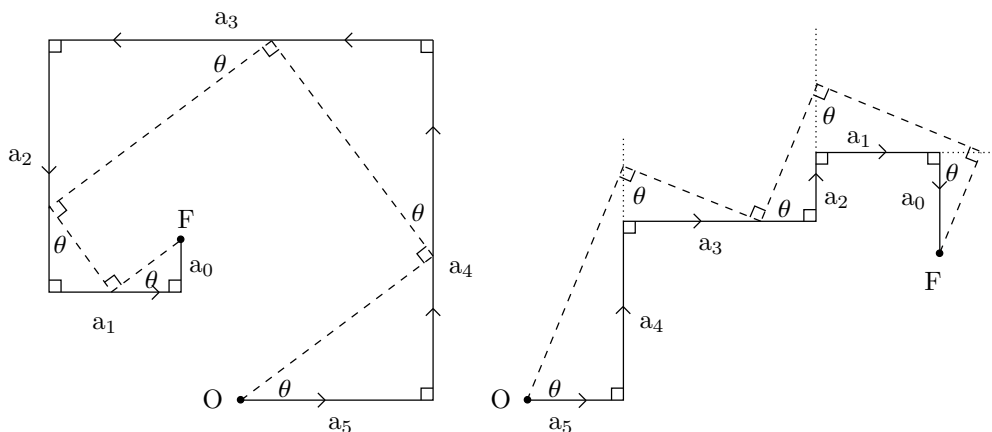


Figura 1: O método de Lill para equações de grau 5: à direita com todos os coeficientes positivos e à esquerda com  $a_3, a_2, a_0 < 0$  e  $a_5, a_4, a_1 > 0$ .

igual a  $y_4$  e cateto adjacente  $a_4 - y_5$ , e assim por diante. Temos daí que

$$\begin{aligned} y_n &= [\tan(\theta)] a_n = -z a_n \\ y_{n-1} &= [\tan(\theta)] (a_{n-1} - y_n) = -z (a_{n-1} + z a_n) \\ y_{n-2} &= [\tan(\theta)] (a_{n-2} - y_{n-1}) = -z (a_{n-2} + z (a_{n-1} + z a_n)) \\ &\vdots \\ y_1 &= -z (a_1 + z (a_2 + \dots + z (a_{n-2} + z (a_{n-1} + z a_n)) \dots)) \end{aligned}$$

Por fim, como  $y_1 = a_0$ , após eliminar os parêntesis chegamos a  $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ , que demonstra o afirmado. As figuras 2, 3 e 4 ilustram a aplicação do método de Lill para algumas equações e nesse ponto aconselhamos vigorosamente ao leitor que gaste algum tempo analisando-as para compreender perfeitamente o funcionamento do método. O leitor interessado em testar o método de Lill para o caso de uma equação do 3º grau pode acessar o site [https://www.qedcat.com/misc/lill\\_method/](https://www.qedcat.com/misc/lill_method/) onde é possível inserir os coeficientes da equação e observar uma simulação do método em tempo real.

Uma extensão do método de Lill para determinar as raízes complexas de uma equação polinomial pode ser encontrada em [2]. Nesse caso ainda temos uma sequência de triângulos semelhantes, mas o laser não é mais refletido ou refratado por ângulos retos, e os vértices desses triângulos não estão todos sobre o caminho poligonal definido pelos coeficientes da equação.

Considere, sem perda de generalidade, o caso da equação

$$x^4 - 6x^3 + 14,25x^2 - 15,75x + 6,5 = 0,$$

que possui duas raízes reais  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e duas raízes complexas (necessariamente conjugadas entre si)  $x_3 = 1,5 + i$  e  $x_4 = 1,5 - i$ . A figura 5 mostra em azul e vermelho as trajetórias do laser que determinam as duas raízes reais acima citadas, respectivamente. As linhas tracejadas em verde e laranja mostram as trajetórias do laser que determinam  $x_3$  e  $x_4$ , correspondentemente. No caso

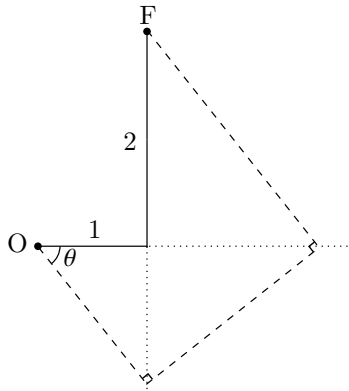


Figura 2: A solução de  $x^3 - 2 = 0$  pelo método de Lill.

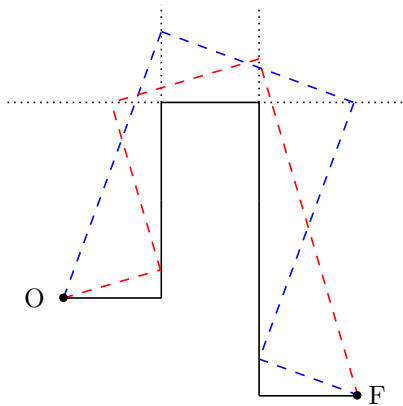


Figura 3: As duas soluções reais de  $x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$ .

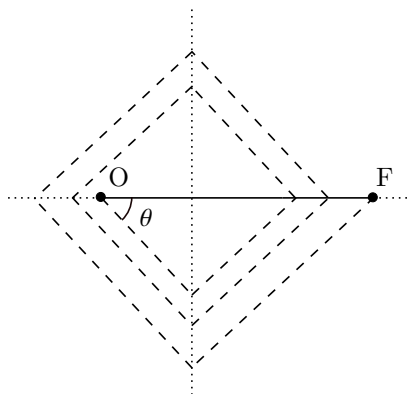


Figura 4: A solução  $\sqrt[10]{2}$  da equação  $x^{10} - 2 = 0$ . Refletindo-se a trajetória do *laser* em relação ao eixo horizontal encontramos a solução  $-\sqrt[10]{2}$ .

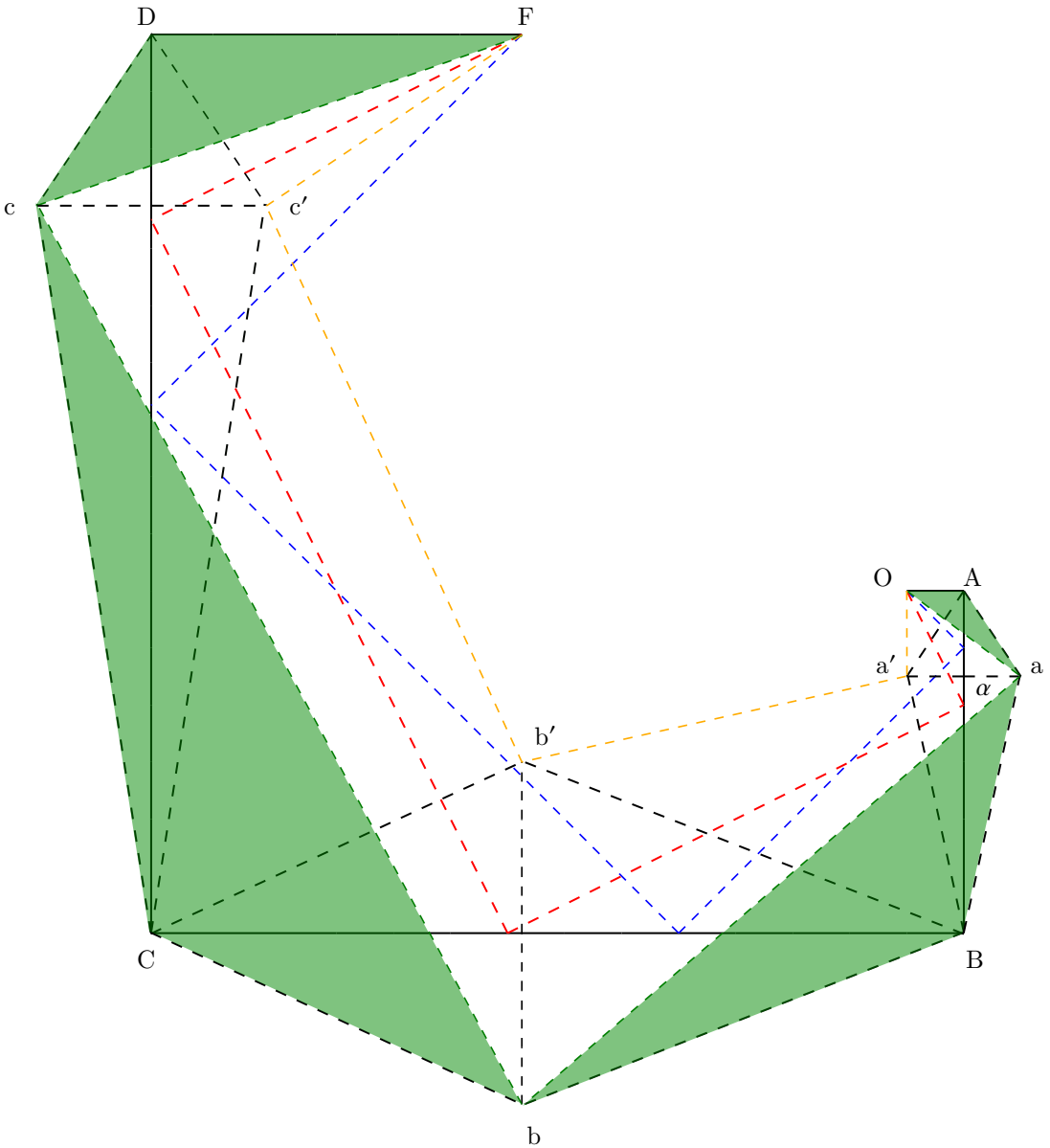


Figura 5: O método de Lill no caso de raízes complexas.

de  $x_3$ , por exemplo, temos a trajetória  $OabcF$  em que os triângulos  $OaA$ ,  $aBb$ ,  $bCc$  e  $cDF$  são semelhantes entre si; além disso, se  $\alpha$  é o pé da perpendicular ao segmento  $12$  passando por  $a$ , então os segmentos  $\frac{a\alpha}{a_4} = a\alpha$  e  $\frac{A\alpha}{a_4} = A\alpha$  são respectivamente as partes imaginária e real da raiz (sem perda de generalidade, podemos sempre escolher  $a_n = 1$  dividindo os dois lados da equação). Para encontrar a trajetória que determina  $x_4$  basta tomar os pontos  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$ , reflexões de  $a$ ,  $b$  e  $c$  em relação aos segmentos  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ , correspondentemente.

Como ilustração do que acabamos de descrever, faremos a demonstração no caso de uma equação quadrática  $x^2 + bx + c = 0$  que, pela fórmula bem conhecida, tem raízes

$$x_1 = -\frac{-b + i\sqrt{-b^2 + 4c}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{-b - i\sqrt{-b^2 + 4c}}{2}. \quad (2)$$

Para isso, começamos assumindo a existência dos triângulos semelhantes  $OaA$  e  $aBF$  ilustrados na figura 6. Usando o teorema das paralelas, temos a disposição de ângulos exibida na figura. Particularmente, os triângulos  $A\alpha a$  e  $B\alpha a$  são congruentes, logo  $A\alpha = \frac{b}{2}$ , que dá a parte real das raízes da equação. Agora, se denotamos  $Aa = w = Ba$  (pelas relações de semelhança nos triângulos destacados em verde) temos que

$$\frac{w}{c} = \frac{1}{w},$$

ou seja,  $w = \sqrt{c}$ , e, daí, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo  $A\alpha a$ , encontramos facilmente que  $\alpha a = \sqrt{-b^2 + 4c}/2$ , que é a parte imaginária de uma das raízes. Raciocínio semelhante aplica-se na situação ilustrada ao lado direito na figura 6.

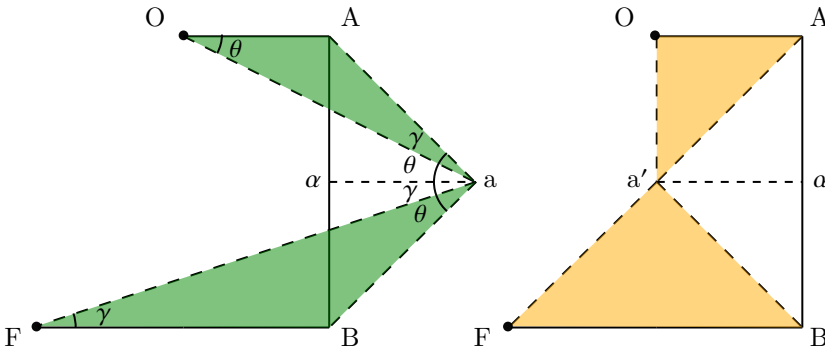


Figura 6: O cálculo geométrico das duas raízes complexas de  $x^2 + bx + c = 0$ .

Mencionamos um último fato interessante sobre o método de Lill: a trajetória do raio *laser* associado ao polinômio  $p(x)$  é geometricamente semelhante, ou seja, igual a menos de rotações e translações ao caminho percorrido, se usamos como parâmetro a equação obtida pela fatoração de  $p(x)$  por  $(x - z)$ , i.e.,  $\frac{p(x)}{x-z}$ . Em [9] Riaz demonstra esse fato e dá o exemplo da equação  $p(x) = x^3 - 7x - 6$  que possui três raízes reais, cada uma delas correspondendo a um ângulo de tiro diferente. Se tomamos uma delas, digamos  $x = 3$ , então a trajetória do *laser* será semelhante ao caminho traçado por  $\frac{x^3 - 7x - 6}{x - 3} = x^2 + 3x + 2$ .

### 3. Origami

A palavra *origami* refere-se à arte milenar de dobraduras em papel; de raiz japonesa, a palavra origami significa literalmente “dobrar papel”: *oru*=dobrar e *kami*=papel. O origami popularizou-se no ocidente após a segunda guerra mundial, quando a cultura japonesa abriu-se para o ocidente (foi nessa época que o judô também chegou por aqui, por exemplo). Um dos maiores responsáveis pela difusão do origami foi o artista japonês Akira Yoshizawa (1911-2005). Estudos mais detalhados sobre a matemática subjacente ao processo de dobra do papel são bastante recentes, e os avanços mais significativos nessa área devem-se a Thomas Hull, Robert Lang e Erick Demaine, entre outros. Aqui discutiremos apenas o essencial para a compreensão do assunto tratado, e o leitor interessado

em maiores informações pode procurar sobre esses personagens na internet. Um boa referência em português é o recente trabalho PROFMAT [3].

Tradicionalmente o origami é feito em uma única folha de papel quadrada e não é permitido esticá-la, furá-la ou rasgá-la. Em 1985, Humiaki Huzita (1924-2005) elaborou um conjunto de seis operações elementares ou *axiomas*<sup>1</sup> para os origamis que tratam essencialmente sobre todas as formas de alinhar retas e pontos no papel. A propósito, as retas são dadas pelas dobras ou bordas do papel e um ponto é definido pela intersecção de duas retas. Vamos aos axiomas:

- 0.1** Dados dois pontos, podemos dobrar uma reta que passa por eles;
- 0.2** Dados dois pontos, podemos dobrar o papel de forma que um desses pontos vá sobre o outro [a reta construída nesse caso é a perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento determinado pelos dois pontos];
- 0.3** Dadas duas retas, podemos dobrar o papel de maneira a sobrepô-las [a reta construída dessa forma é a bissetriz do ângulo formado pelas retas ou uma reta paralela às retas dadas];
- 0.4** Dados um ponto e uma reta, podemos criar uma dobra passando pelo ponto perpendicular à reta dada;
- 0.5** Dados dois pontos e uma reta, podemos dobrar o papel de modo que um desse pontos vá sobre a reta e que a dobra passe sobre o outro ponto;
- 0.6** Dados dois pontos e duas retas é possível dobrar o papel de maneira que um ponto vá sobre uma das retas dadas e o outro ponto vá sobre a outra reta.

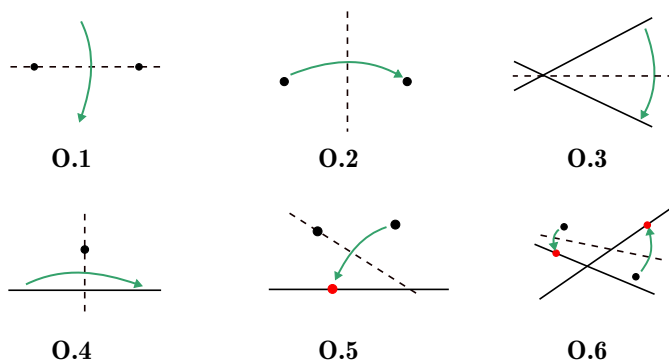


Figura 7: As operações ou axiomas dos origamis.

É possível mostrar que a dobra definida pelo axioma **0.5** dá a tangente à parábola que tem o ponto dado como foco e a reta dada como diretriz. Não demonstraremos esse fato aqui, mas ele pode ser verificado empiricamente da seguinte forma: em uma folha de papel (não necessariamente quadrada) marque um ponto arbitrário (mas sugerimos um pouco ao centro do papel) e dobre seguidamente a borda inferior do papel até o ponto em questão. O leitor não terá dificuldades em notar que estamos repetidamente aplicando o axioma **0.5** e que emergirá uma parábola como *envelope* do conjunto de dobras marcadas no papel.

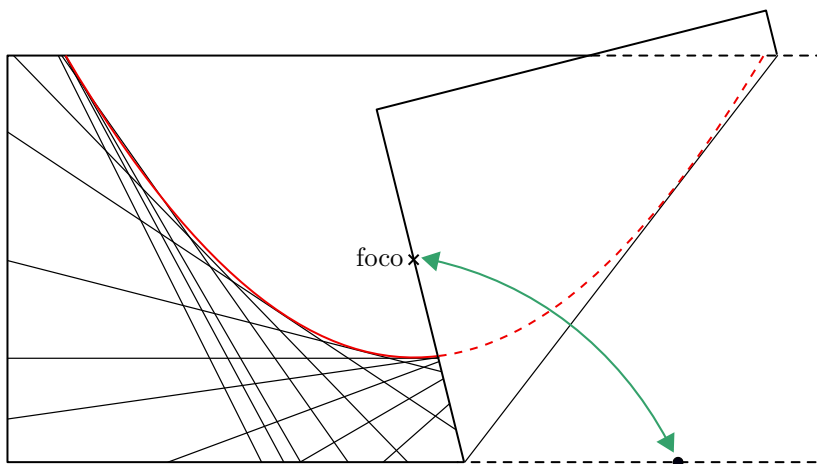


Figura 8: Construção de uma parábola com origami: basta dobrar os pontos da reta na borda inferior do papel sobre o ponto destacado (foco).

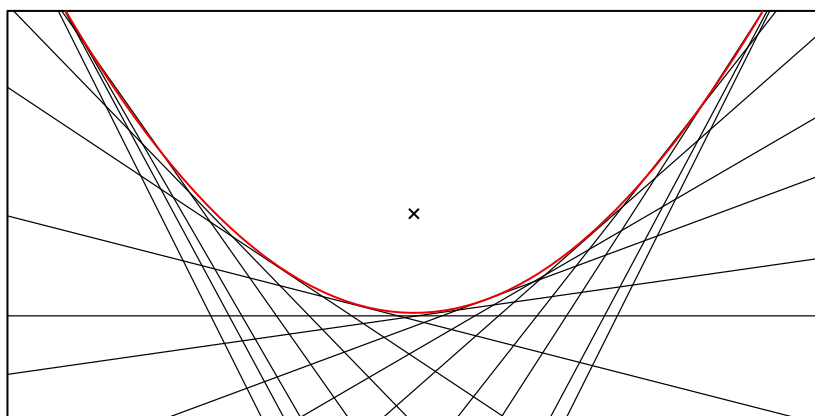


Figura 9: Parábola dual após algumas dobras.

Constatado esse fato, é imediato que o axioma 6 permite construir a tangente comum de duas parábolas e para isso, em geral, precisamos resolver uma equação cúbica. A demonstração mais elementar que conhecemos desse fato pode ser encontrada em [3]. Concluímos, portanto, que pelo menos teoricamente é possível resolver equações cúbicas com origami.

#### 4. O Quadrado de Beloch

O método de Lill não é construtivo, no sentido que não explica como obter a trajetória do *laser* a partir da linha poligonal formada pelos coeficientes da equação (o caso de equações com coeficientes inteiros e raízes inteiras pode ser resolvido com régua, compasso e papel quadriculado).

<sup>1</sup>Do ponto de vista matemático, não seria correto chamá-los de axiomas, porque algumas dobras em questão podem não existir a depender da posição relativa de pontos e retas em questão ou pode haver mais de uma dobra com as características dadas. Entretanto, o termo consagrou-se pelo uso.



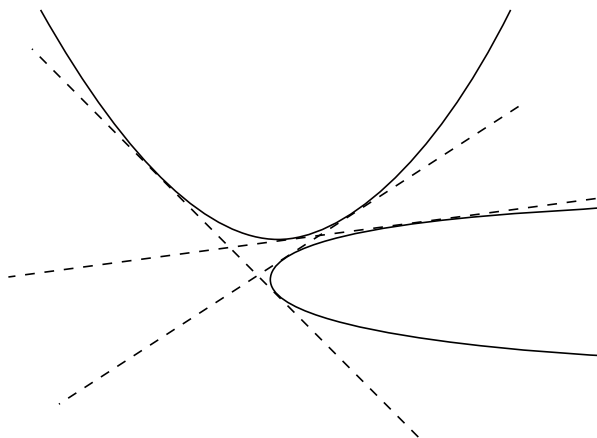


Figura 10: Duas parábolas podem ter até três tangentes comuns e para determiná-las é necessário resolver uma equação polinomial de grau 3.

Experimente!). Apesar disso, não é difícil descobrir como usá-lo para determinar as raízes de uma equação do 2º grau qualquer, bastando utilizar o velho teorema atribuído a Tales de Mileto: *os ângulos subtendidos por um diâmetro são retos*. Como exemplo, no caso da equação  $x^2 + 3x + 2 = 0$ , que possui raízes  $x_1 = -1$  e  $x_2 = -2$ , podemos determinar a trajetória do *laser* traçando um semicírculo de diâmetro OF e observando os pontos P e Q onde ele intercepta o caminho formado pelos coeficientes da equação. O teorema de Tales garante que OPF e OQF são as trajetórias do *laser*.

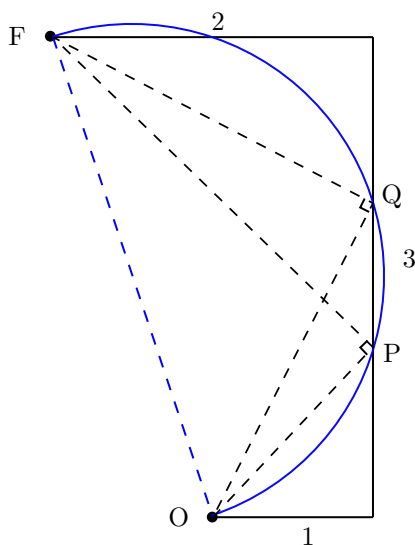


Figura 11: Soluções da equação  $x^2 + 3x + 2 = 0$  usando o método de Lill e o teorema de Tales.

No caso em que as raízes são complexas, o círculo descrito acima não toca o caminho poligonal formado pelos coeficientes da equação. Mesmo assim, ainda é possível utilizar o método de Lill para encontrar as raízes a partir de métodos geométricos elementares. Considere mais uma vez a

equação  $x^2 + bx + c = 0$  que tem como soluções os números complexos (2). Começamos traçando um círculo de diâmetro  $c + 1$ , destacado em azul na figura 12; como é bem sabido, temos que  $BP^2 = c$ , ou ainda

$$\frac{BP}{c} = \frac{1}{BP}.$$

Agora traçamos um círculo de raio  $BP$  centrado em  $B$  e observamos as intersecções  $a$  e  $a'$  desse círculo (destacado em vermelho) com a reta horizontal  $y = \frac{b}{2}$ . Dado que os triângulos  $\alpha Aa$  e  $\alpha Ba$  são congruentes por lado-ângulo-lado, temos que  $BP = Ba = Aa$ , e a equação acima se reescreve como

$$\frac{Ba}{FB} = \frac{OA}{Aa}.$$

Por fim, como  $\angle OAa = 90^\circ + \angle \alpha Aa = 90^\circ + \angle \alpha BA = \angle FBa$ , concluímos que os triângulos  $OAa$  e  $aBO$  são semelhantes, de onde segue que  $x_1 = A\alpha + i\alpha a$  e  $x_2 = A\alpha + i\alpha a' = A\alpha - i\alpha a$  são as raízes complexas do polinômio.

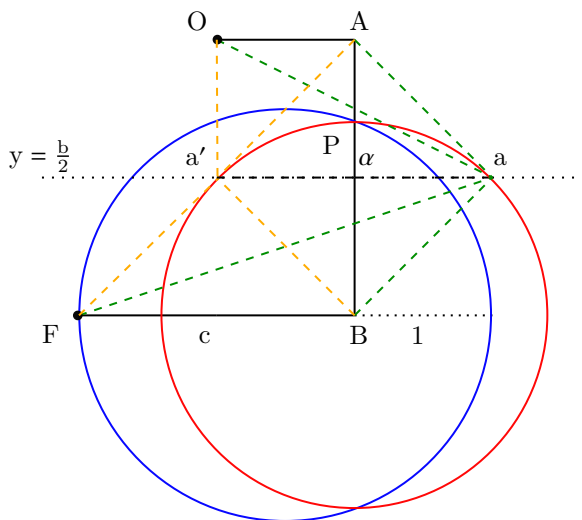


Figura 12: Cálculo geométrico das raízes complexas de uma equação quadrática.

No caso das equações de 3º grau não é imediato haver algo equivalente, entretanto, em 1936, a matemática italiana Margharita Beloch descobriu uma forma de determinar o ângulo  $\theta$  utilizando origamis, traduzindo assim o problema algébrico do cálculo das raízes de uma equação cúbica em um problema de dobradura de papel. Na realidade, Beloch foi a primeira pessoa a descobrir toda a potencialidade do origami como ferramenta para construções geométricas, fato que permaneceu ignorado por um longo tempo<sup>2</sup>.

Para descobrir a angulação do laser, usamos o seguinte resultado provado por Beloch:

**Teorema 1.** *Dados os pontos  $A, B$  e as retas  $r, s$ , existe um quadrado  $WXYZ$  com vértices adjacentes  $X$  e  $Y$  sobre  $r$  e  $s$ , respectivamente, e cujos lados  $XW$  e  $YZ$ , ou suas extensões, passam por  $A$  e  $B$ . Veja figura 13.*

<sup>2</sup>Como reparação histórica é necessário mencionar que Justin (1989), Geretschläger (1995) e Alperin (2000) provaram, independentemente, que toda equação cúbica com coeficientes construíveis pode ser resolvida com origami. Era ignorado por esses autores que em 1936 tal resultado já tivesse sido estabelecido por Beloch.

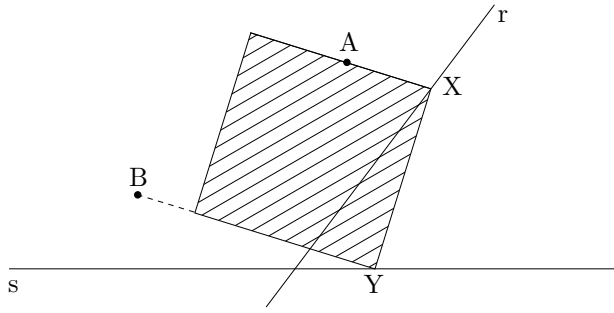


Figura 13: O quadrado de Beloch.

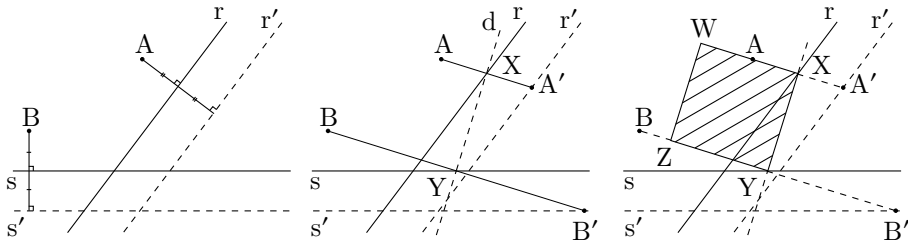


Figura 14: A construção do quadrado de Beloch com origami.

*Demonstração.* Para obter o quadrado de Beloch, inicialmente construímos a reta  $r'$ , paralela a  $r$ , tal que a distância de  $A$  até  $r$  e de  $r$  até  $r'$  são iguais; o mesmo para a construção da reta  $s'$ , paralela a  $s$ . Veja a figura 14. Agora usaremos o axioma **O.6** dos origamis para dobrar o papel, de forma que  $A$  fique sobre  $r'$  e  $B$  sobre  $s'$ . Chamaremos essa dobra de  $d$ . Se  $A'$  e  $B'$  são os pontos que correspondem a  $A$  e  $B$  sobre as retas  $r'$  e  $s'$ , respectivamente, marcamos  $X$ , ponto médio de  $AA'$  e  $Y$ , ponto médio de  $BB'$ . Esses pontos estão sobre a dobra  $d$  e também estarão sobre as retas  $r$  e  $s$ , respectivamente, pela forma como foram construídas  $r'$  e  $s'$ . Temos então que o segmento  $XY$  é um lado do quadrado, e, como  $XA$  e  $YB$  são perpendiculares a  $XY$ , concluímos a construção.  $\square$

Temos agora todas as ferramentas em mãos para resolver na prática as equações de  $3^\circ$  grau com origami. Para isso, primeiramente desenhemos nosso caminho seguindo o Método de Lill. Na figura 15 vemos um tal caminho para uma equação da forma  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ . Nesse caso, a trajetória do *laser* será determinada pelas arestas do quadrado de Beloch em que os elementos  $A$ ,  $B$ ,  $r$  e  $s$  são substituídos por  $O$ ,  $F$ ,  $a_2$  e  $a_1$ , respectivamente.

## 5. Conclusão

No ano de 1837 o matemático francês Pierre Laurent Wantzel provou em [10] que não é possível resolver o problema da duplicação do cubo com régua e compasso, dando solução definitiva a um problema que aturdiu os matemáticos pelo menos desde a Grécia Antiga. Para isso provou o teorema que afirma que se um polinômio cúbico com coeficientes racionais não possui uma raiz racional, então nenhuma de suas raízes é um número construível por meio de ferramentas euclidianas. Para mais detalhes sobre o teorema de Wantzel e sobre números construíveis o leitor pode consultar [4].

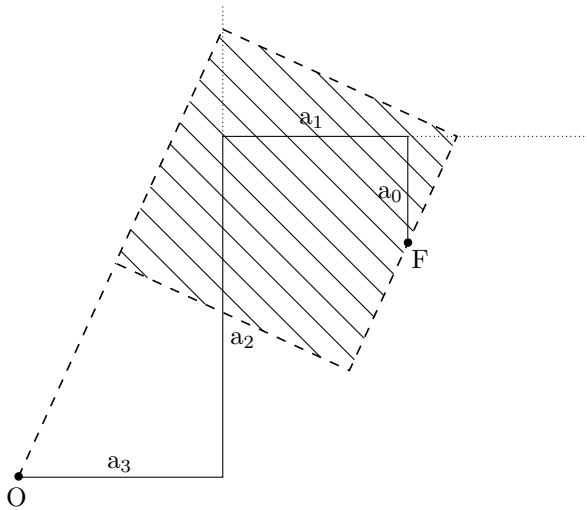


Figura 15: No caso cúbico, a trajetória do *laser* no método de Lill é determinada pela construção do quadrado de Beloch.

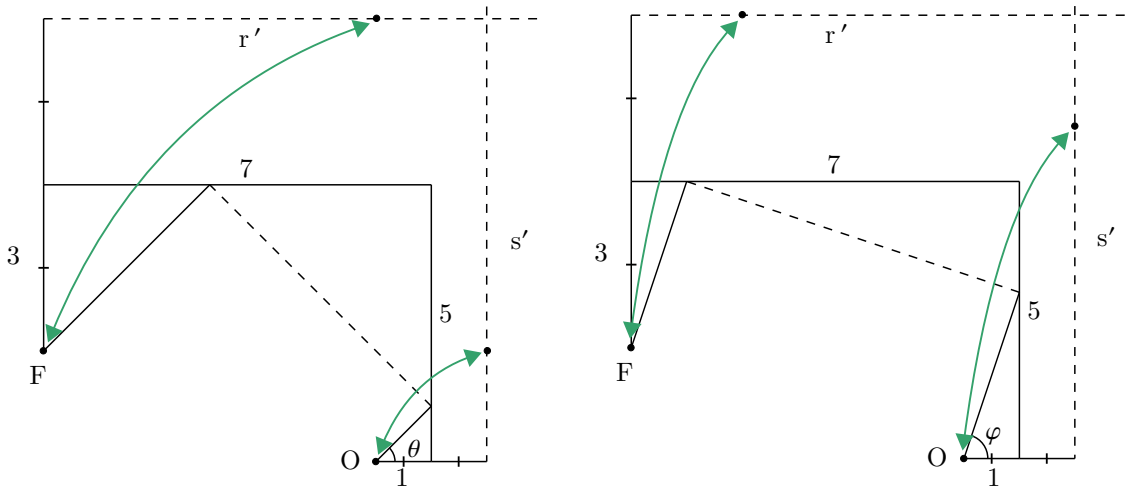


Figura 16: Descobrimo as duas raízes  $x_1 = -1$  (dupla) e  $x_2 = -3$  de  $p(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$  com o auxílio do origami.

Assim, como a equação

$$x^3 = 2$$

não possui solução racional, o que pode ser demonstrado por contradição com relativa simplicidade, conclui-se imediatamente que a duplicação do cubo não pode ser realizada com régua e compasso euclidianos.

Contudo, como mostra a figura 2, a duplicação do cubo é perfeitamente factível com origamis. Além da duplicação do cubo, também podemos aplicar os métodos do origami para resolver outros

problemas geométricos clássicos como a trissecção do ângulo e a construção de polígonos regulares; na lista que segue encontram-se todos os primeiros 20 polígonos regulares que não podem ser construídos com ferramentas euclidianas, enquanto aqueles que não podem ser construídos com origami são marcados em negrito: 7, 9, **11**, 13, 14, 18, 19, 21, **22**, **23**, **25**, 26, 27, 28, **29**, **31**, **33**, 35, 36 e 37. O leitor curioso pode encontrar uma explicação sobre a trissecção do ângulo e a construção do heptágono regular com origami em [3].

Desde a descoberta de Beloch, muito avanço tem sido feito no estudo do origami. Em [6] Robert Lang mostrou que o axioma **O.6** é o movimento mais complexo que produz uma dobra simples com origami. Isso significa que não podemos ir além da solução de cúbicas, e portanto quárticas, com origami. Este é o limite para o origami clássico – uma dobra a cada passo – entretanto, recentemente muito avanço tem sido feito no estudo de “origamis” de multidobras e dobras curvas.

As dobras curvas, embora difíceis, levam o jogo para um outro nível, permitindo até mesmo a construção de  $\pi$  e, conseqüentemente, a quadratura do círculo [5], o que é impossível com o origami clássico. Já no caso de multidobras, Lang demonstrou em [7] que se permitimos dobras duplas – i.e. a execução de movimentos que produzem duas dobras simultaneamente – podemos realizar a divisão de um ângulo em 5 partes iguais. Por fim, utilizando o método de Lill, Lang e Roger Alperin demonstraram que se permitimos dobras triplas então é possível resolver equações arbitrárias de grau 5 [1].

Os avanços observados nos últimos anos tornam evidente o enorme potencial dos origamis como ferramenta para a solução de problemas matemáticos e, conseqüentemente, para o ensino da matemática nos níveis médio, fundamental e superior.

Este trabalho é apenas um pequeno passo em direção à popularização dessa poderosa ferramenta. Acreditamos que muitos dos resultados aqui apresentados são absolutamente desconhecidos pela maioria dos professores de matemática Brasil afora e esperamos com isso preencher minimamente essa lacuna. Mais pela frente!

## Referências

- [1] ALPERIN, R. C. & LANG, R. J. *One-, two-, and Multi-fold Origami Axioms*, Origami<sup>4</sup>. International Meeting of Origami in Science, Mathematics and Education, R. J. , pp. 371–393, 2009.
- [2] ANÔNIMO. *Résolution graphique des équations algébriques qui ont des racines imaginaires; d'après M. Lill*. Nouvelles Annales de Mathématiques, **2**, vol. 7, pp. 363–367, 1868.
- [3] CESARE, A. G. G. *Entre as Dobras: A Geometria do Origami*, Dissertação PROFMAT, 2021.
- [4] FABRÍCIO, J. L. G. *Construções Geométricas. Teoria e Aplicações*, Dissertação PROFMAT, 2017.
- [5] HULL, T. *Constructing  $\pi$  via origami*, 2007, disponível em <http://origametry.net/papers/constpi.pdf>.
- [6] LANG, R. J. *Angle Quintisection*, 2004, disponível em <https://langorigami.com/article/angle-quintisection/>.
- [7] LANG, R. J. *Origami and Geometric Constructions*, 2003, disponível em [https://www.langorigami.com/wp-content/uploads/2017/09/origami\\_constructions.pdf](https://www.langorigami.com/wp-content/uploads/2017/09/origami_constructions.pdf).

- [8] LILL, E. *Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but*, Nouvelles Annales de Mathématiques 2<sup>a</sup> série, **6**, (1867), pp. 359-36.
- [9] RIAZ, M. *Geometric Solutions of Algebraic Equations*. Amer. Math. Monthly **69**, pp. 654-658, 1962.
- [10] WANTZEL, L. *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **2**, 366-372, 1837.

Anita Boaventura Carneiro  
Universidade de Brasília  
Campus Universitário Darcy Ribeiro,  
Asa Norte, Brasília-DF  
<[anita.carneiro@aluno.unb.br](mailto:anita.carneiro@aluno.unb.br)>

Nilton Moura Barroso Neto  
Universidade de Brasília  
<[niltonmoura@unb.br](mailto:niltonmoura@unb.br)>

Recebido: 08/08/2022  
Publicado: 16/11/2022