

O Teorema de Van Aubel com triângulos: nova prova e uma razão encontradas

Rogério César dos Santos 

Resumo

O clássico e conhecido Teorema de Van Aubel afirma que, se quadrados são construídos sobre os lados de um quadrilátero qualquer, então os centros desses quadrados formam um quadrilátero cujas diagonais são congruentes e perpendiculares. A ideia deste artigo é apresentar resultados similares a esse, quando, em vez de quadrados, triângulos são construídos sobre os lados do quadrilátero.

Palavras-chave: Teorema de Van Aubel; Geometria Plana; Números Complexos.

Abstract

The classic and well-known Van Aubels Theorem states that, if squares are constructed on the sides of any quadrilateral, then the centers of these squares form an quadrilateral whose diagonals are congruent and perpendicular. The idea of this article is to present results similar to this one, when, instead of squares, triangles are constructed on the sides of the quadrilateral.

Keywords: Van Aubels Theorem; Plane Geometry; Complex numbers.

1. Introdução

O Teorema de Van Aubel ([3] e [2]) afirma que, se quadrados são construídos sobre os lados de um quadrilátero ABCD qualquer, então os centros B_1 , B_2 , B_3 e B_4 dos mesmos formam um quadrilátero cujas diagonais B_1B_3 e B_2B_4 são congruentes e perpendiculares, conforme ilustra a figura 1.

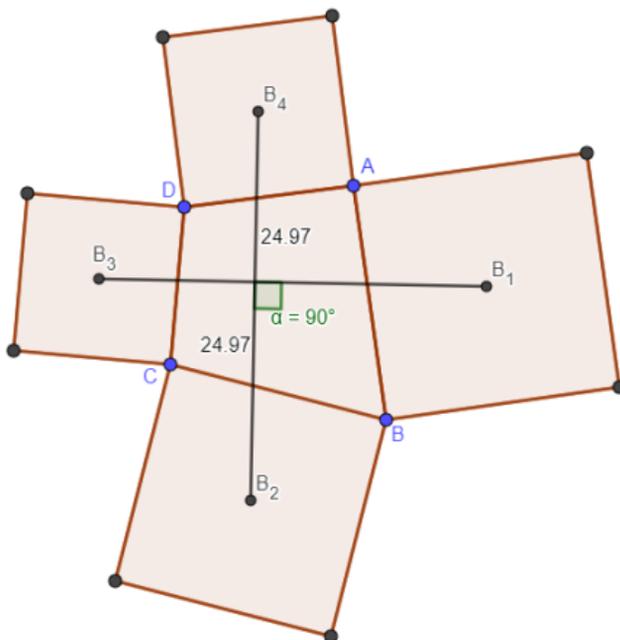


Figura 1: O Teorema de Van Aubel: $\overline{B_1B_3} = \overline{B_2B_4}$ e $B_1B_3 \perp B_2B_4$.

Trocando os quadrados por triângulos, será que vale o mesmo resultado? A resposta é não. Porém, vale uma outra propriedade, como mostrou, por meio de trigonometria, Krishna [1]. Ele provou que segmentos que unem os centros opostos dos triângulos são perpendiculares aos segmentos que unem os vértices externos opostos dos triângulos. O propósito deste artigo é fornecer outra demonstração deste resultado de Krishna, a qual será feita aqui por meio de números complexos. A prova por números complexos permitirá ainda descobrir a razão entre os comprimentos desses segmentos: $\sqrt{3}$. É o que veremos na seção seguinte.

2. O Teorema de Van Aubel com triângulos.

Proposição 1. *O Teorema de Van Aubel com triângulos. Considere um quadrilátero ABCD e triângulos equiláteros AV_1B , BV_2C , CV_3D e DV_4A construídos externamente sobre os lados de ABCD, como mostra a figura 2. Sejam B_1 , B_2 , B_3 e B_4 os baricentros (centros) dos triângulos. Então, V_1V_3 é perpendicular a B_2B_4 e V_2V_4 é perpendicular a B_1B_3 . Além disto, $\overline{V_1V_3} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_2B_4}$ e $\overline{V_2V_4} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_3B_5}$.*

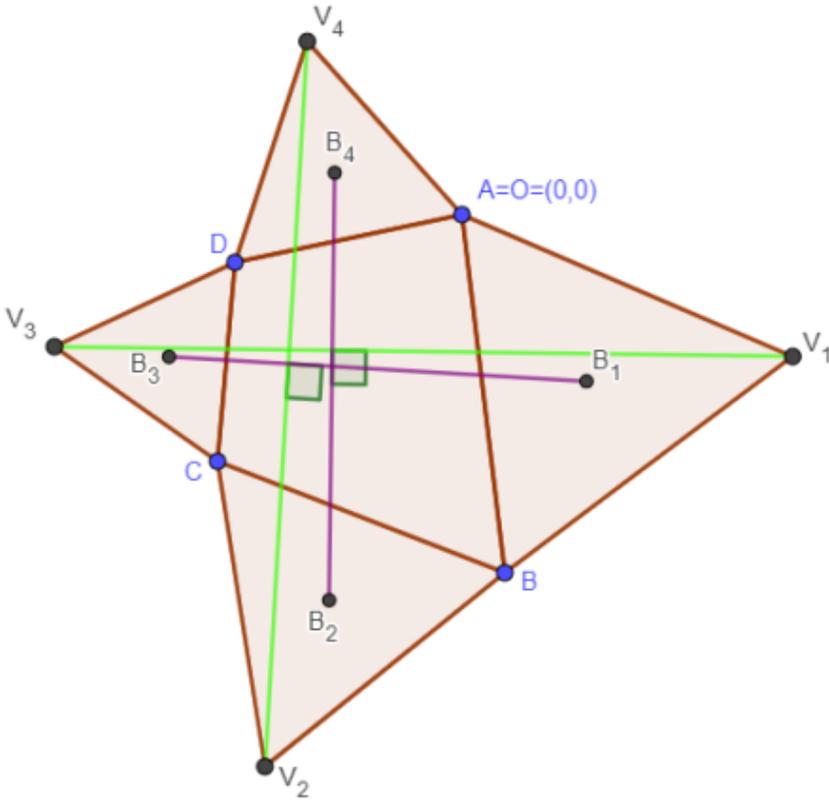


Figura 2: O Teorema de Van Aubel com triângulos.

Demonstração. Coloquemos A na origem $(0,0)$ do plano cartesiano. Chame de "a" o número complexo nulo, afixo de $A = (0,0)$. Também, denote por "b" o afixo complexo de B , "c" o afixo complexo de C e "d" o afixo complexo de D . Consideremos o vetor $\overline{AB} = \overline{OB}$, onde $O = A = (0,0)$ é a origem do plano cartesiano. Considere x_1 o número complexo afixo de $B - A = B - (0,0) = B$. Assim, x_1 é o número complexo representante do vetor $\overline{AB} = \overline{OB}$, e $|x_1| = |\overline{AB}| = |\overline{OB}|$ é a medida do lado do triângulo AV_1B . Analogamente, definamos x_2 , x_3 e x_4 os números complexos afijos dos pontos $C - B$, $D - C$ e $A - D$, representantes dos vetores \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} , respectivamente, como mostra a figura 3.

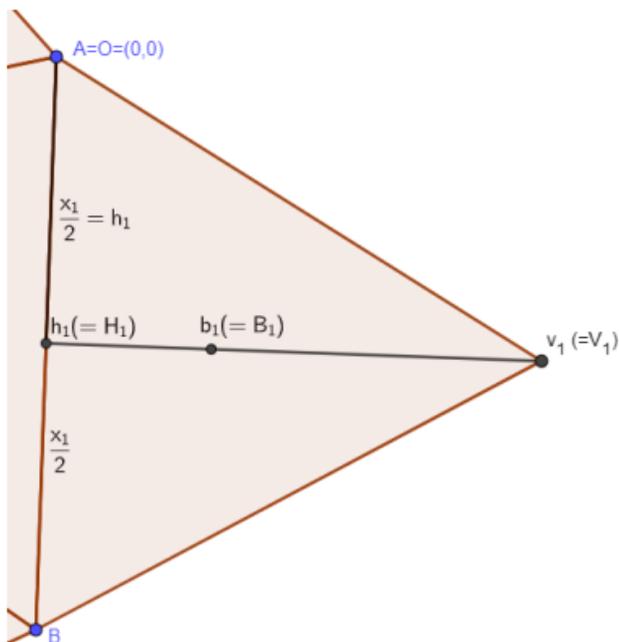


Figura 4: Os números complexos v_1 , b_1 e h_1 afixos dos pontos V_1 , B_1 e H_1 , respectivamente.

É importante salientar neste momento que os números complexos x_1 , x_2 , x_3 e x_4 são afixos das diferenças $B - A$, $C - B$, $D - C$ e $A - D$, respectivamente, isto é, são representantes dos vetores respectivos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} , enquanto que a , b , c , d , h_j , b_j e v_j , $j = 1, \dots, 4$, são afixos e representantes dos pontos A , B , C , D , H_j , B_j e V_j , respectivamente.

Como x_1 é o número complexo representante do vetor $\overline{AB} = \overline{OB}$, que parte da origem, então: $h_1 = \frac{x_1}{2}$.

A altura H_1V_1 do triângulo equilátero AV_1B mede: $\overline{H_1V_1} = \sqrt{|x_1|^2 - \left(\frac{|x_1|}{2}\right)^2} = \frac{|x_1|\sqrt{3}}{2}$. O vetor $\overline{AH_1} = \overline{OH_1}$ é representado pelo seu afixo complexo $h_1 = \frac{x_1}{2}$. Então, para rotacionar $\overline{AH_1}$ em 90° no sentido anti-horário em torno da origem $A = O$, basta multiplicar h_1 pela unidade imaginária complexa $i = \sqrt{-1}$, obtendo assim $s = h_1 i$. O número complexo unitário (de norma 1) correspondente s_u será, portanto,

$$s_u = \frac{s}{|s|} = \frac{h_1 i}{|h_1 i|} = \frac{h_1 i}{|h_1|},$$

que é paralelo a H_1V_1 , como mostra a figura 5. Logo, o número complexo que representa $\overline{H_1V_1}$, ou seja, afixo de $V_1 - H_1$, será

$$\begin{aligned}
 v_1 - h_1 &= s_u \cdot \overrightarrow{H_1V_1} = \\
 \frac{h_1 i}{|h_1|} \cdot \frac{|x_1|\sqrt{3}}{2} &= \frac{\frac{x_1}{2}i}{|x_1/2|} \cdot \frac{|x_1|\sqrt{3}}{2} = \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$v_1 - h_1 = \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}$$

Ou seja, $v_1 = h_1 + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}$ e, portanto,

$$v_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2},$$

como ilustra a figura 5.

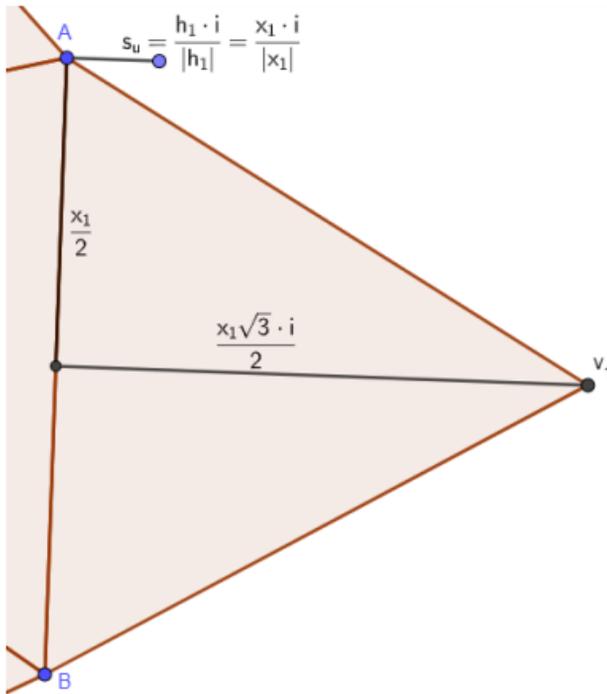


Figura 5: O afixo complexo $v_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}$ em termos de x_1 .

Também, sabemos que o comprimento de H_1B_1 é igual a um terço da altura de H_1V_1 (veja novamente a figura 4). Logo, procedendo de modo análogo ao anterior, concluímos que o número

complexo $b_1 - h_1$ afixo de $B_1 - H_1$ e representante do vetor $\overrightarrow{H_1B_1}$ será: $b_1 - h_1 = \frac{1}{3} \cdot (v_1 - h_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}$. Portanto, $b_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{6}$, veja figura 6, que mostra a soma poligonal dos vetores e seus respectivos números complexos em destaque verde a partir da origem $A = O = (0, 0)$.

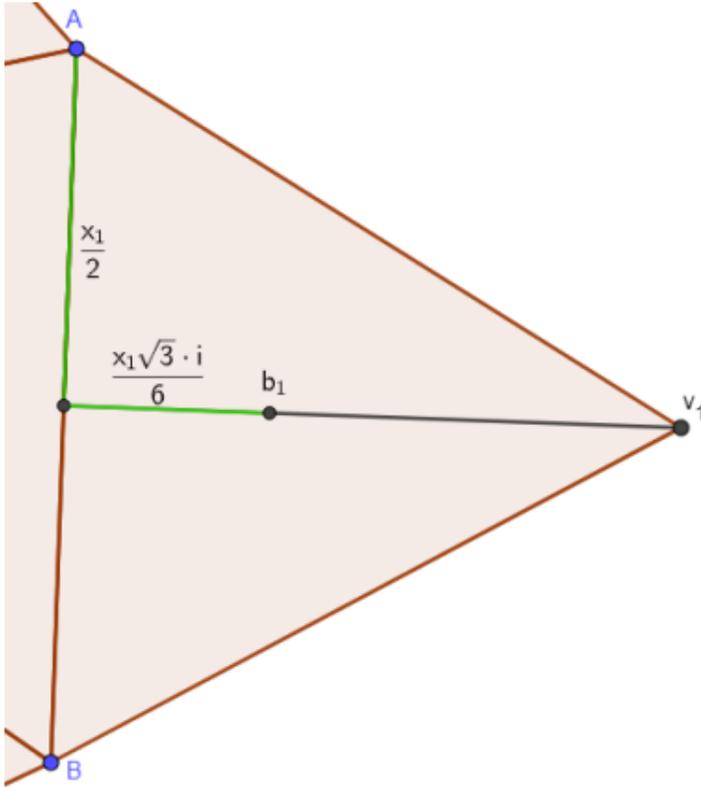


Figura 6: O afixo complexo $b_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{6}$, do baricentro B_1 , em termos de x_1 .

Analogamente, lembrando que $x_2 = c - b$ é o número complexo afixo de $C - B$, então, se h_2 é o número complexo afixo de H_2 , o pé da altura do triângulo BV_2C relativa à base BC , podemos novamente girar o vetor $\overrightarrow{BH_2}$, noventa graus no sentido anti-horário em torno de B , obtendo assim o complexo resultante $\frac{x_2 i}{2}$, e depois tomar seu unitário correspondente $\frac{\frac{x_2 i}{2}}{\left| \frac{x_2 i}{2} \right|} = \frac{x_2 i}{|x_2|}$, e concluir que o afixo de $V_2 - H_2$ é

$$v_2 - h_2 = \frac{x_2 i}{|x_2|} \cdot \left| \overrightarrow{H_2V_2} \right| = \frac{x_2 i}{|x_2|} \cdot \frac{|x_2| \sqrt{3}}{2} = \frac{x_2 \sqrt{3} \cdot i}{2}.$$

Portanto, $v_2 = h_2 + \frac{x_2\sqrt{3} \cdot i}{2}$. A questão agora é como escrever h_2 em termos de x_2 e de x_1 . Ora, $b = x_1$ e $x_2 = c - b$, então:

$$c = x_2 + b = x_1 + x_2.$$

Logo,

$$h_2 = \frac{b+c}{2} = \frac{x_1+x_1+x_2}{2} = x_1 + \frac{x_2}{2}.$$

Enfim: $v_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3} \cdot i}{2}$. Veja a figura 7 que mostra a soma poligonal dos vetores e seus números complexos respectivos em destaque verde:

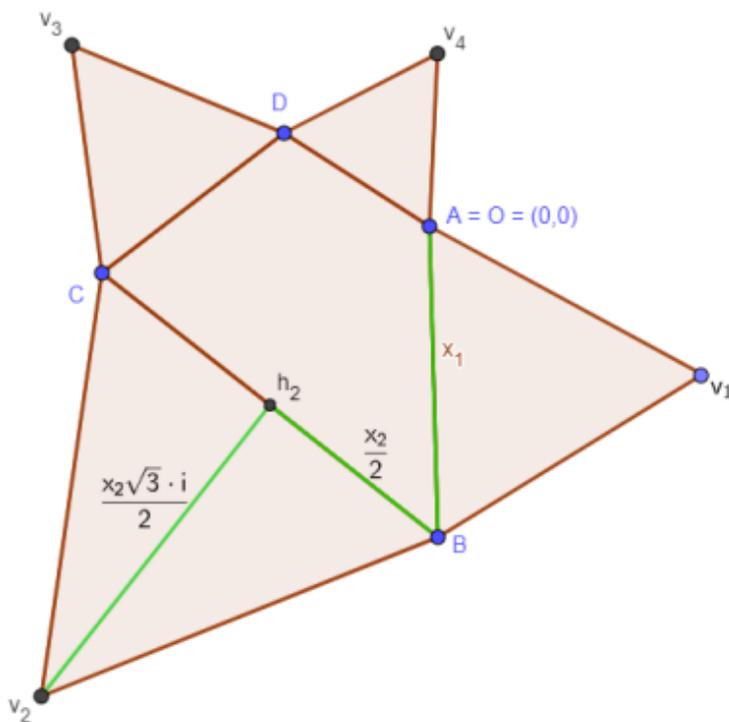


Figura 7: O afixo complexo $v_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3} \cdot i}{2}$ em termos de x_1 e de x_2 .

A partir daqui, podemos proceder de maneira similar, por meio da soma poligonal de vetores e seus respectivos complexos, para encontrarmos os afixos dos demais baricentros e vértices dos triângulos. Os vértices dos triângulos v_j , $j = 1, \dots, 4$, são:

$$v_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2},$$

$$v_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3}\cdot i}{2}, v_3 = x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_3\sqrt{3}\cdot i}{2} \text{ e } v_4 = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_4\sqrt{3}\cdot i}{2}.$$

Os baricentos $b_j, j = 1, \dots, 4$, são:

$$b_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3}\cdot i}{6},$$

$$b_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3}\cdot i}{6}, b_3 = x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_3\sqrt{3}\cdot i}{6} \text{ e } b_4 = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_4\sqrt{3}\cdot i}{6}.$$

Agora sim, podemos provar que V_1V_3 é perpendicular a B_2B_4 , V_2V_4 é perpendicular a B_1B_3 e, além disso, que $\overline{V_1V_3} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_2B_4}$ e $\overline{V_2V_4} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_1B_3}$. Bem, para provarmos que V_1V_3 é perpendicular a B_2B_4 , basta mostrarmos que existe um k real tal que

$$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2),$$

em que $i = \sqrt{-1}$, v_1, v_3, b_2 e b_4 são os números complexos afijos dos vértices e baricentros V_1, V_3, B_2 e B_4 , respectivamente. Isto é, precisamos mostrar que a rotação do vetor $\overline{B_2B_4}$, noventa graus no sentido anti-horário, seguida da multiplicação do mesmo por um escalar real k , resulta no vetor $\overline{V_1V_3}$. Vamos provar a existência desse k real, desenvolvendo a identidade

$$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2) \text{ se e somente se } x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_3\sqrt{3}\cdot i}{2} - \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3}\cdot i}{2} \right) = k \cdot i \cdot \left[x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_4\sqrt{3}\cdot i}{6} - \left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3}\cdot i}{6} \right) \right].$$

Eliminando os colchetes e parênteses, cancelando x_1 no segundo membro e lembrando que $i^2 = -1$, temos:

$$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2) \text{ se e somente se } x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_3\sqrt{3}\cdot i}{2} - \frac{x_1}{2} - \frac{x_1\sqrt{3}\cdot i}{2} = k \cdot i \cdot x_2 + k \cdot i \cdot x_3 + k \cdot i \cdot \frac{x_4}{2} - k \cdot \frac{x_4\sqrt{3}}{6} - k \cdot i \cdot \frac{x_2}{2} + k \cdot \frac{x_2\sqrt{3}}{6}.$$

Agora, transportando para o primeiro membro os termos em que a unidade imaginária i não aparece explicitamente e para o segundo os termos em que i aparece explicitamente, temos:

$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2)$ se, e somente se,

$$x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} - \frac{x_1}{2} + k \cdot \frac{x_4\sqrt{3}}{6} - k \cdot \frac{x_2\sqrt{3}}{6} = \frac{x_2}{2} + x_3 \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) + \frac{k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x_4}{2}.$$

Neste momento, é suficiente exibirmos um k real que torne o primeiro e o segundo membros iguais ao número complexo nulo, pois, dessa forma, verificar-se-á a igualdade. E para isso é importante lembrarmos que, por ser o quadrilátero $ABCD$ uma figura fechada, então $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (o número complexo nulo). O valor real k que torna os dois membros nulos é $k = \sqrt{3}$. Verifiquemos: substituindo no primeiro membro, temos:

$$\frac{x_1}{2} + x_2 \left(1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \frac{x_3}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{x_4\sqrt{3}}{6} = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0.$$

Já fazendo $k = \sqrt{3}$ no segundo membro, temos:

$$i \cdot \sqrt{3} \cdot \left[\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x_2}{2} + x_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x_4}{2} \right] = i \cdot \sqrt{3} \cdot 0.5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0.$$

Logo, mostramos que para $k = \sqrt{3}$,

$$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2) \text{ se e somente se } 0 = 0.$$

Ou seja, a igualdade $v_3 - v_1 = \sqrt{3} \cdot i \cdot (b_4 - b_2)$ é verdadeira. Tal identidade revela, assim, que os segmentos V_1V_3 e B_2B_4 são perpendiculares, e revela também que $\overline{V_1V_3} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_2B_4}$, que é o que queríamos demonstrar.

O resultado correspondente para V_2V_4 e B_1B_3 prova-se de maneira inteiramente análoga. □

3. Conclusão

Enfim, provamos de outro modo o resultado de Krishna [1], utilizando números complexos. Além disso, descobrimos que a razão entre os segmentos perpendiculares V_jV_{j+2} e $B_{3-j}B_{5-j}$, $j = 1, 2$, é sempre igual a $\sqrt{3}$, para qualquer quadrilátero ABCD, seja ele convexo ou não. Além disso, é possível mostrar que, tomando os quatro triângulos internamente sobre os lados do quadrilátero, em vez de externamente, a razão continua sendo $\sqrt{3}$. Basta, para verificar isso, realizar as rotações dos vetores $\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$, $\overline{CH_3}$ e $\overline{DH_4}$ no sentido horário, para obtenção dos afijos dos vértices e dos baricentros dos triângulos. Ou seja, a multiplicação é por $-i$, em vez de por i . As demais contas são análogas (figura 8).

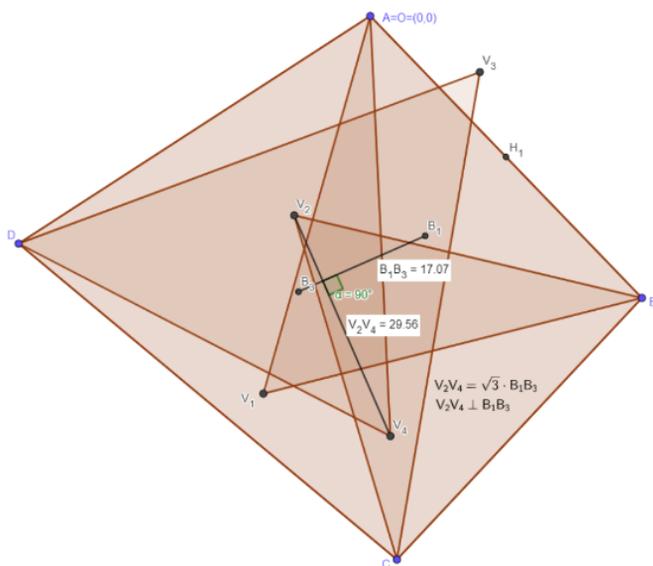


Figura 8: O teorema também vale com os triângulos sendo construídos internamente aos lados dos quadrilátero.

Referências

- [1] Krishna, D. N. V. *A note on special cases of Van Aubel's theorem*. International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics. 2018; 5(4): 30–51.
- [2] Nishiyama, Y. *The beautiful geometric theorem of Van Aubel*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, v. 66, n. 1, p. 71–80, 2011.
- [3] Van Aubel, M. H. *Note concerning the Centers of Carr is Constructs sur les cottes dun polygon quelconque*, Nouv, Corresp Math, 4 (1878), 40-44 (in French) 10.

Rogério César dos Santos
 FUP / Universidade de Brasília
rogerc@unb.br

Recebido: 17/06/2022
 Publicado: 17/11/2022