PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.5, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1042

O Jogo Nim, sua estratégia de vitória e uma nova forma de jogar com foco na educação básica

Ana Carolina Vargas Frederico [1]   Christine Sertã Costa

Resumo

O presente artigo é um recorte de um trabalho de conclusão de curso do Profmat PUC–Rio concluído em 2020. Tem como propósito apresentar resultados que fundamentam a estratégia vencedora que o matemático Charles L. Bouton desenvolveu para o jogo Nim e uma nova forma de utilizar essa estratégia com o objetivo de dinamizar seu uso na sala de aula da educação básica. O ponto de interesse teórico na estratégia apresentada é o fato de ela ter sido desenvolvida com base no sistema de numeração binário, o que torna o jogo Nim um forte atrativo para trabalhar esse conteúdo nas aulas de matemática. Com este trabalho, esperamos contribuir com professores que estejam buscando alternativas para trabalhar as diversas possibilidades acadêmicas que emergem dos conceitos dos números binários. Almejamos caminhar no sentido de aulas mais dinâmicas, atrativas e significativas e, assim, despertar a curiosodade e o pensamento investigativo no alunado.

Palavras-chave: Nim; Números binários; Jogo de estratégia.

Abstract

This article is an excerpt from a course conclusion work from Profmat PUC – Rio defended in 2020. Its purpose is to present results that support the winning strategy that mathematician Charles L. Bouton developed for the game Nim and a new way to use this strategy with the objective of dynamizing its use in the basic education classroom. The point of interest of the proposal presented is the fact that it was developed based on the binary numbering system, which makes the game Nim a strong attraction to work with this content in math classes. With this work, we hope to contribute to teachers who seek alternatives to work with the various possibilities that emerge from the concepts of binary numbers. We aim to move towards more dynamic, attractive and meaningful classes and, thus, arouse curiosity and investigative thinking in the students.

Keywords: Nim; Binary numbers; strategy game.

1. Introdução

O presente artigo é fruto de um trabalho de conclusão de curso do Profmat PUC – Rio defendido em 2020 e intitulado *Números Binários: uma proposta de ensino para a educação básica* [5]. O trabalho original traz uma proposta de ensino de números binários na educação básica por meio

[1]Apoio Capes (bolsa Profmat)

de algumas atividades lúdicas e motivadoras. Convidamos o leitor a consultar o referido trabalho para conhecer a proposta na íntegra. Para este artigo, trazemos um recorte desse TCC, com o intuito de apresentar um novo olhar para a estratégia vencedora do jogo Nim desenvolvida por Bouton, 1902 [2] e que tem por base o sistema de numeração binário. Com essa nova forma de enxergar a estratégia, mais prática e concreta, é possível trabalhar o Nim em aulas de matemática da educação básica e trazer motivação e significado no estudo dos conceitos dos números binários.

Começamos apresentando o conceito de jogos imparciais, alguns aspectos históricos e conceitos relevantes do jogo Nim, suas regras e forma de jogar. Com o objetivo de analisarmos a estratégia vencedora que Bouton desenvolveu para o jogo, apresentamos a soma-Nim, que é parte fundamental da teoria matemática que baseia esta estratégia, assim como algumas de suas propriedades. Em seguida, conceituamos a teoria de Bouton para a estratégia vencedora e demonstramos o teorema que justifica sua validade. Trazendo um aspecto inovador, apresentamos uma nova forma de utilizar a estratégia vencedora, desenvolvida com o intuito de facilitar seu uso no chão da escola básica.

2. Jogos e O Jogo Nim

Vamos trabalhar aqui com uma categoria de jogos que atendem às propriedades listadas a seguir, definidas em [7].

- O jogo tem 2 participantes que alternam suas jogadas.
- Ambos os participantes têm a informação completa do jogo em todas as jogadas.
- Não é permitida a utilização de nenhum instrumento aleatório (como dados e roletas, por exemplo).
- Em cada jogada, é de conhecimento de ambos os jogadores as ações permitidas, e cabe ao jogador da vez fazer a sua escolha de jogada.
- Há um critério bem definido e previamente conhecido por ambos os jogadores para indicar o término do jogo.
- Ao final do jogo, há um resultado bem definido. Em geral, esse resultado será a vitória de um ou de outro jogador, podendo, em alguns jogos, ser empate.

Esses jogos, são usualmente nomeados de *jogos imparciais*. Neles, todos os jogadores podem realizar as mesmas ações e, a partir de uma dada configuração inicial, existe uma estratégia vencedora para um dos jogadores, ou seja, se esse jogador jogar corretamente, ele sempre ganha, não importando as ações de seu adversário. Em [3] pode-se encontrar outros jogos, não tão conhecidos como o Nim, que também se colocam nessa categoria. Descrevemos a seguir alguns deles que podem ser trabalhados na educação básica e sugerimos ao leitor que se aprofunde na teoria e dinâmica que os envolvem.

- O jogo do dólar de prata, sem o dólar: Este jogo é jogado em uma faixa semi-infinita de quadrados, com um número finito de moedas, nenhuma das quais é um dólar de prata. Cada moeda é colocada em um quadrado de forma aleatória e a ação permitida é, em cada jogada, mover uma moeda para um quadrado desocupado da esquerda da faixa (ou seja, na direção da extremidade finita da tira), sem passar por nenhuma outra moeda. O jogo termina quando algum jogador não tem mais como fazer uma ação permitida porque as moedas estão dispostas de forma sequencial nos quadrados da extremidade esquerda da faixa.

- O jogo do dólar de prata, com o dólar: Este jogo é jogado exatamente como o jogo descrito anteriormente, exceto pelo fato de que uma das moedas é, de fato, uma moeda de um dólar de prata e o quadrado mais à esquerda da faixa semi-infinita é substituído por uma bolsa de dinheiro. O quadrado da bolsa de dinheiro é capaz de conter qualquer número de moedas. Assim, a moeda mais à esquerda que esteja em qualquer quadrado (exceto o da bolsa) pode, caso o jogador da vez queira, ser colocada na bolsa de dinheiro. Quando a moeda do dólar de prata entrar no quadrado da bolsa de dinheiro, o jogo termina.
- O jogo de Northcott: Este jogo é jogado em um tabuleiro quadriculado $\mathrm{n} \times \mathrm{m}$ (pode-se, por exemplo, usar um tabuleiro do xadrez). Em cada coluna coloca-se uma peça branca e uma peça preta. Cada jogada (ação permitida) consiste em movimentar uma peça para a frente ou para trás pelo número de casas que se quiser, desde que não saia da coluna original e não salte sobre uma outra peça. Perde quem, por ter todas as suas peças encurraladas, não puder realizar nenhuma ação permitida.

O nosso interesse aqui é falar sofre o jogo Nim, que é um exemplo de *jogo imparcial*. Pouco se sabe sobre a origem do Nim, mas acredita-se ter sido originado na China. Segundo [6], um dos primeiros trabalhos dedicados a esse jogo, apresentado em um artigo publicado em 1902, foi do matemático Charles L. Bouton. No artigo, intitulado *Nim, a game with a complete mathematical theory*, [2], - Nim, um jogo com uma teoria matemática completa (tradução nossa), Bouton analisa o jogo e apresenta a teoria matemática que utilizou para a construção de uma estratégia vencedora.

> *O jogo aqui discutido interessou ao escritor por conta de sua aparente complexidade, e sua teoria matemática extremamente simples e completa. O escritor não conseguiu descobrir muito sobre sua história, embora algumas variações do jogo estejam sendo praticadas em algumas faculdades e feiras americanas. Ele tem sido chamado de Fan-Tan, mas como não se trata do jogo chinês que tem esse nome, o nome deste artigo é proposto para ele.* ([2], p. 35, tradução nossa)

Foi nesse artigo que o jogo recebeu o nome que conhecemos hoje. Segundo [1], esse nome, em inglês arcaico, significa apanhar; em alemão (*Nimm*) significa tirar e, quando rotacionado em 180º, transforma-se na palavra *win* que, em inglês, significa vencer.

O Nim é um jogo de regras simples e de fácil entendimento feito para duas pessoas jogarem. A dinâmica do jogo desenvolve-se da seguinte forma:

- São dispostos em uma mesa um determinado número de objetos separados em grupos que não precisam ter a mesma quantidade de objetos;
- Os dois jogadores jogam se alternando em rodadas;
- Em cada rodada, o jogador da vez escolhe um dos grupos e retira dele a quantidade de objetos que desejar (note que o jogador só pode retirar objetos de um mesmo grupo numa quantidade mínima de um objeto e máxima de todos os objetos do grupo escolhido);
- Vence o jogador que retirar o último objeto da mesa.

Existem várias versões do Nim. Estamos utilizando a versão inspirada naquela apresentada por Bouton em seu artigo de 1902, mas em [7] e [3] esse jogo também é discutido cuidadosamente e apresentado teoricamente.

3. A Soma-Nim

A soma-Nim está conceituada em [2] e é parte fundamental do desenvolvimento da teoria matemática por trás da estratégia vencedora do jogo. Cabe ressaltar que, em seu artigo, Bouton apresenta a operação sem, entretanto, nomeá-la.

Definição 1. Seja N_i um natural escrito na base binária, ou seja, $N_i = (a_{i(m)}a_{i(m-1)}\cdots a_{i(0)})_2$, onde $a_{ij} \in \{0,1\}, \forall j \in \{0,1,\ldots,m\}$. A soma-Nim entre os números $N_0, N_1, \cdots N_n$, representada por $N_0 \oplus N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$, é o natural $W = (b_m b_{m-1} \cdots b_0)_2$, também na base binária, tal que $\forall j \in \{0,1,\ldots,m\}$ tem-se que

- $b_j = 0$, se $\sum_{i=0}^{n} a_{ij} \equiv 0 \bmod 2$ e
- $b_j = 1$, caso contrário.

Se, para algum N_i, não existir a_{ij} a partir de um $j = k$, consideramos $a_{ij} = 0\ \forall j \in \{k, k+1, \ldots, m\}$.

A seguir, na definição 2, apresentamos uma forma algorítmica de definir a Soma-Nim.

Definição 2. A soma-Nim, de símbolo $\oplus$, é uma operação matemática feita com os números naturais escritos na base binária. Para efetuar essa soma deve-se organizar os números que determinam as parcelas a serem somadas, um embaixo do outro, com seus algarismos alinhados à direita (como se faz em uma soma de base 10). Em cada uma das colunas (todas formadas apenas por algarismos 0 e 1), se a quantidade de algarismos iguais a 1 for par, o resultado da soma na referida coluna é 0 (zero); caso contrário, o resultado é 1 (um).

Observe que $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1$ e $1 \oplus 1 = 0$.

Exemplo 1. Vamos efetuar a soma-Nim dos números $18, 22, 8$ e 6, todos escritos na base 10.

- O primeiro passo é passar estes números da base 10 para a base 2:
  $18 = (10010)_2 = N_1, 22 = (10110)_2 = N_2, 8 = (1000)_2 = N_3$ e $6 = (110)_2 = N_4$.
- Depois, deve-se organizar os números obtidos alinhando seus algarismos à direita:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

- Por fim, basta verificar se a quantidade de algarismos iguais a 1 em cada coluna é par ou ímpar e proceder conforme explicitado na definição 2. Neste exemplo,

$$N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4 = (01010)_2 = W.$$

É importante ter a clareza de que a soma-Nim não é uma soma usual. Ao efetuar $18 + 22 + 8 + 6$, encontramos como resultado o número 54 que, na base binária, equivale ao número $(11011)_2$.

3.1. Algumas propriedades da soma-Nim

A soma-Nim é munida de algumas propriedades. A seguir, baseados em [4], iremos enunciá-las e demonstrá-las. Para tanto, considere os números x, y e z, escritos na base binária. Nessa seção, representamos um número na base 2 com seus algarismos separados por vírgulas apenas para dar mais clareza no desenvolvimento das demonstrações. Assim, x, y e z já na base 2, estão representados por: $x = (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0), y = (y_n, y_{n-1}, \cdots, y_0)$ e $z = (z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0), n \in \mathbb{N}$.

(a) Associativa: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

Demonstração. $x \oplus (y \oplus z) =$
$= (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) \oplus [(y_n, y_{n-1}, \cdots, y_0) \oplus (z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0)] =$
$= (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) \oplus [(y_n \oplus z_n, y_{n-1} \oplus z_{n-1}, \cdots, y_0 \oplus z_0)] =$
$= [x_n \oplus (y_n \oplus z_n), x_{n-1} \oplus (y_{n-1} \oplus z_{n-1}), \cdots, x_0 \oplus (y_0 \oplus z_0)] =$
$= [x_n \oplus y_n \oplus z_n, x_{n-1} \oplus y_{n-1} \oplus z_{n-1}, \cdots, x_0 \oplus y_0 \oplus z_0] =$
$= [(x_n \oplus y_n) \oplus z_n, (x_{n-1} \oplus y_{n-1}) \oplus z_{n-1}, \cdots, (x_0 \oplus y_0) \oplus z_0] =$
$= [x_n \oplus y_n, x_{n-1} \oplus y_{n-1}, \cdots, x_0 \oplus y_0] \oplus (z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0) =$
$= [(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) \oplus (y_n, y_{n-1}, \cdots, y_0)] \oplus (z_n, z_{n-1}, \cdots, z_0) =$
$= (x \oplus y) \oplus z$ □

(b) Comutativa: $x \oplus y = y \oplus x$

Demonstração. $x \oplus y =$
$= (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) \oplus (y_n, y_{n-1}, \cdots, y_0) =$
$= (x_n \oplus y_n, x_{n-1} \oplus y_{n-1}, \cdots, x_0 \oplus y_0) =$
$= (y_n \oplus x_n, y_{n-1} \oplus x_{n-1}, \cdots, y_0 \oplus x_0) =$
$= (y_n, y_{n-1}, \cdots, y_0) \oplus (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) =$
$= y \oplus x$ □

(c) Elemento Neutro: $x \oplus 0 = x$

Demonstração. $x \oplus 0 =$
$= (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) \oplus (0, 0, \cdots, 0) =$
$= (x_n \oplus 0, x_{n-1} \oplus 0, \cdots, x_0 \oplus 0) =$
$= (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) =$
$= x$ □

(d) Elemento Inverso: $x \oplus x = 0$

Demonstração. $x \oplus x =$
$= (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) \oplus (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) =$
$= (x_n \oplus x_n, x_{n-1} \oplus x_{n-1}, \cdots, x_0 \oplus x_0) =$
$= (0, 0, \cdots, 0) =$
$= 0$ □

3.2. Algumas consequências das propriedades da soma-Nim

Vimos que a soma-Nim satisfaz as propriedades associativa, comutativa, possui elemento neutro 0 e cada elemento tem um inverso. A partir dessas propriedades podemos provar algumas consequências diretas que estão enunciadas a seguir. Considere aqui também todos os números escritos na base binária.

(i) Lei do corte ou cancelamento: $\mathrm{x} \oplus \mathrm{y} = \mathrm{x} \oplus \mathrm{z} \Leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{z}$

Demonstração. $\mathrm{x} \oplus \mathrm{y} = \mathrm{x} \oplus \mathrm{z} \Leftrightarrow (\mathrm{x} \oplus \mathrm{y}) \oplus \mathrm{x} = (\mathrm{x} \oplus \mathrm{z}) \oplus \mathrm{x} \Leftrightarrow \mathrm{x} \oplus (\mathrm{y} \oplus \mathrm{x}) = \mathrm{x} \oplus (\mathrm{z} \oplus \mathrm{x}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{x} \oplus (\mathrm{x} \oplus \mathrm{y}) = \mathrm{x} \oplus (\mathrm{x} \oplus \mathrm{z}) \Leftrightarrow (\mathrm{x} \oplus \mathrm{x}) \oplus \mathrm{y} = (\mathrm{x} \oplus \mathrm{x}) \oplus \mathrm{z} \Leftrightarrow 0 \oplus \mathrm{y} = 0 \oplus \mathrm{z} \Leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{z}$ □

(ii) O elemento neutro da soma-Nim é único.

Demonstração. Pela propriedade (c) tem-se que 0 é elemento neutro de soma-Nim, ou seja, $\mathrm{x} \oplus 0 = \mathrm{x}$. Suponha que n também seja um elemento neutro da soma-Nim, então $\mathrm{x} \oplus \mathrm{n} = \mathrm{x} \oplus 0 = \mathrm{x}$. Pela lei do cancelamento, tem-se que $\mathrm{n} = 0$. □

(iii) Um número é o único elemento inverso de si mesmo.

Demonstração. Pela propriedade (d) tem-se que um número é elemento inverso de si mesmo, ou seja, $\mathrm{x} \oplus \mathrm{x} = 0$. Suponha que exista $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}$ que também seja inverso de x. Neste caso, $\mathrm{x} \oplus \mathrm{x} = \mathrm{x} \oplus \mathrm{x}_1 = 0$. Pela lei do cancelamento, tem-se que $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1$. □

(iv) A soma-Nim de dois números distintos é diferente de zero.

Demonstração. Seja $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ e suponha por absurdo que $\mathrm{x} \oplus \mathrm{y} = 0$. Então y é o inverso de x e, portanto, $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ (o que é um absurdo uma vez que, por hipótese, $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$). □

4. A teoria de Bouton para a estratégia vencedora do Nim

A teoria de Bouton para a estratégia vencedora do jogo consiste no fato de que, se um determinado jogador, digamos A, consegue deixar uma certa configuração de objetos na mesa e, depois disso, joga sem cometer erros, o outro jogador, digamos B, não consegue ganhar. Tal configuração vencedora é chamada de combinação segura. Bouton ainda demonstra que, se A deixar uma combinação segura na mesa, B, em sua próxima jogada, não conseguirá deixar uma combinação segura. E mais: independentemente do que B faça, A sempre conseguirá deixar uma combinação segura na mesa na sua jogada subsequente. Uma configuração que não for uma combinação segura chamaremos de combinação não segura.

O conceito matemático presente na teoria de Bouton para formar uma combinação segura trata da aritmética dos números naturais escritos na base binária. Mais precisamente da soma-Nim. Uma combinação segura é aquela em que a soma-Nim dos números que representam as quantidades de objetos em cada grupo vale zero.

4.1. O Teorema de Bouton

As demonstrações aqui presentes foram baseadas em [4].

A teoria de Bouton é generalizada para qualquer quantidade de grupos e qualquer quantidade de objetos em cada grupo. A seguir, vamos enunciar e demonstrar o teorema de Bouton, que é base para a estratégia vencedora do Nim. E, para tanto, considere um jogo do Nim com n grupos, $n \in \mathbb{N}$ e seja x_i a quantidade de objetos pertencentes ao grupo $i, 1 \leq i \leq n$. Tomemos a n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como uma configuração qualquer de objetos deixada na mesa em um determinado momento do jogo. Note que o jogo termina quando um jogador alcançar a configuração $(0, 0, \ldots, 0)$, que chamaremos de configuração terminal.

Cabe destacar as seguintes propriedades:

(a) A configuração terminal $(0, 0, \ldots, 0)$ é, sem dúvida, uma combinação segura já que tem soma-Nim igual a zero.

(b) A partir de uma configuração que representa uma combinação segura, qualquer jogada válida origina uma combinação não segura. (*vide Lema 1*).

(c) A partir de uma configuração que representa uma combinação não segura, existe pelo menos uma jogada válida que a transforma em uma combinação segura. (*vide Lema 2*).

Entende-se por jogada válida aquela em que o jogador da rodada escolhe um grupo e dele retira (no mínimo 1 e no máximo todos) objetos do grupo escolhido.

Lema 1. *Seja* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *uma configuração com soma-Nim igual a zero (combinação segura), ou seja,* $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$. *Então, qualquer jogada válida feita nessa configuração, irá transformá-la em uma configuração com soma-Nim diferente de zero (combinação não segura).*

Demonstração. Suponha que a jogada válida tenha sido feita no grupo k, alterando a quantidade x_k para um valor y_k; note que $y_k < x_k$. A nova configuração passou a ser da forma $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, e sua soma-Nim é

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{k-1} \oplus y_k \oplus x_{k+1} \oplus \cdots \oplus x_n$$

Utilizando a hipótese e as propriedades da soma-Nim, podemos escrever as seguintes equivalências:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{k-1} \oplus y_k \oplus x_{k+1} \oplus \cdots \oplus x_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{k-1} \oplus y_k \oplus x_{k+1} \oplus \cdots \oplus x_n) \oplus (x_k \oplus x_k) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{k-1} \oplus x_k \oplus x_{k+1} \oplus \cdots \oplus x_n) \oplus (y_k \oplus x_k) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \oplus (y_k \oplus x_k) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y_k \oplus x_k)$$

Como $y_k < x_k$ e a soma-Nim de dois números distintos é sempre diferente de zero, tem-se que

$$y_k \oplus x_k \neq 0$$

□

Lema 2. *Seja* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *uma configuração com soma-Nim diferente de zero (combinação não segura), ou seja,* $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \neq 0$. *Então, a partir de uma jogada válida bem construída, é possível transformá-la em uma configuração com soma-Nim igual a zero.*

Demonstração. Considere que $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = s \neq 0$, com $s = (s_m s_{m-1} \cdots s_1 s_0)_2$.
Seja $d(0 \leq d \leq m)$ o natural tal que $s_d = 1$; e se $s_k = 1$, então $d \geq k$, ou seja, s_d é o dígito igual a 1 que se encontra mais à esquerda da representação binária de s.
Escolha um natural j tal que o d-ésimo dígito de x_j é também igual a 1. Repare que j existe, uma vez que o dígito s_d é a soma-Nim dos d-ésimos dígitos de cada x_i.
Seja $y_j = s \oplus x_j$. Observe que $y_j < x_j$; isso se deve ao fato de que todos os dígitos à esquerda de x_j e de y_j são nulos, e o d-ésimo dígito de y_j diminui de 1 para 0 por ser resultado de uma soma-Nim de dois números com o d-ésimo dígito igual a 1. Ao retirarmos $x_j - y_j$ objetos do grupo j obtemos uma configuração que anula a soma-Nim. Note que, se $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ for a configuração obtida após essa jogada, então $y_i = x_i \forall i \neq j$, e como $y_j = s \oplus x_j$, temos:

$$y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_n =$$

$$= x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{j-1} \oplus y_j \oplus x_{j+1} \oplus \cdots \oplus x_n =$$

$$= x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{j-1} \oplus s \oplus x_j \oplus x_{j+1} \oplus \cdots \oplus x_n =$$

$$= x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus s =$$

$$= s \oplus s =$$

$$= 0$$

□

Teorema 1. *Teorema de Bouton: Uma configuração* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *é uma combinação segura se, e somente se,* $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$.

Demonstração. Iremos ter por base que qualquer configuração é uma combinação segura ou uma combinação não segura. Seja V o conjunto de todas as configurações com soma-Nim nula, e seja D o conjunto de todas as configurações cuja soma-Nim é não nula. Logo, $V \cap D = \phi$. Então:

(i) A configuração $(0, 0, \ldots, 0)$ pertence a V, uma vez que $0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 = 0$. Observe que essa configuração é de fato segura, já que o jogador que deixar tal configuração na mesa obterá a vitória no jogo.

(ii) Dada uma configuração de V, qualquer jogada nessa configuração irá transformá-la numa configuração de D. Considere que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$ e, sem perda de generalidade, suponha que são retirados objetos do primeiro grupo da configuração. Seja $(x_1', x_2, \cdots, x_n)$ a nova configuração. Por hipótese, $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$. Supondo por absurdo que $x_1' \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$ então $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = x_1' \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ e, pela lei do corte, $x_1 = x_1'$, o que é absurdo. Logo $x_1' \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \neq 0$ e, portanto, $(x_1', x_2, \cdots, x_n) \in D$.

(iii) Resta mostrar que, dada uma configuração de D, existe sempre uma jogada que a transforma numa configuração de V. Vamos fazer uma prova construtiva, construindo qual é essa jogada, com base no Lema 2. A jogada em questão pode ser obtida com os seguintes passos:

- Determinar os valores de d e s onde d é o número da coluna (contadas da direita para a esquerda na montagem da soma-Nim) mais à esquerda, com um número ímpar de dígitos iguais a 1, e s é o valor da soma-Nim;
- Escolher uma das parcelas da soma-Nim (equivale a escolher um grupo) onde apareça um dígito 1 na coluna d. Seja j o grupo escolhido. Lembre-se que x_j é o número de objetos do grupo j;
- Trocar o dígito 1 de x_j que está na coluna d para o dígito 0;
- Trocar (de 0 para 1 ou de 1 para 0) todos os dígitos de x_j nas colunas da soma-Nim onde o número de dígitos 1 é ímpar. Seja $y_j = s \oplus x_j$ o novo número de objetos da nova configuração $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Assim:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{j-1} \oplus y_j \oplus x_{j+1} \oplus \cdots \oplus x_n =$$

$$= x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{j-1} \oplus s \oplus x_j \oplus x_{j+1} \oplus \cdots \oplus x_n =$$

$$= x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus s =$$

$$= s \oplus s = 0$$

De (i), (ii) e (iii) tem-se que uma configuração é uma combinação segura se, e somente se, a sua soma-Nim é nula. □

A próxima subseção explicita um exemplo de construção de uma jogada que anula a soma-Nim.

4.2. A jogada que transforma uma configuração de D em outra de V

O exemplo 2 mostra uma jogada que transforma uma combinação não segura (soma-Nim diferente de zero, pertencente a D) em uma combinação segura (soma-Nim igual a zero, pertencente a V), tendo por base o item (iii) da prova do teorema de Bouton.

Exemplo 2. Como ponto de partida, vamos considerar que os objetos do jogo estejam divididos em 4 grupos com 11, 12, 7 e 5 objetos respectivamente em cada um desses grupos, ou seja, $(11, 12, 7, 5)$ é a atual configuração do jogo. Observe que essa disposição de objetos representa uma combinação não segura, já que $11 = (1011)_2$, $12 = (1100)_2$, $7 = (111)_2$ e $5 = (101)_2$ e

$$1011 \oplus 1100 \oplus 111 \oplus 101 = 0101 \neq 0$$

Para construir a próxima jogada que deixe na mesa uma combinação segura, vamos seguir os passos explicitados em (iii) da prova do teorema de Bouton nos dados do exemplo em questão.

- Observe que $d = 3$ (coluna mais à esquerda com um número ímpar de dígitos iguais a 1 na soma-Nim) e $s = 0101$ (valor da soma-Nim).

- Nessas condições, podemos escolher qualquer uma entre as segunda, terceira ou quarta parcelas da soma-Nim, já que todas elas têm o elemento 1 na coluna $d = 3$. Neste exemplo, escolhemos a segunda parcela, $j = 2$, (equivalente a escolher o segundo grupo de objetos). $x_2 = (1100)_2 = 12$ indica o número de objetos do grupo 2. A figura 1 ilustra esses dois primeiros passos da construção.

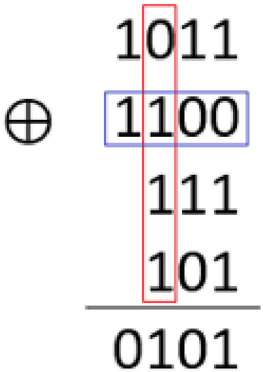

Figura 1: soma-Nim com destaque para a coluna d, o valor de s e a parcela escolhida

- É preciso agora trocar de 0 para 1 e de 1 para 0 todos os dígitos de x_2 que estão em colunas com número ímpar de dígitos iguais a 1. Neste exemplo isso ocorre nas colunas 1 e 3, como ilustra a figura 2. Fazendo isso, todas as colunas passam a ter quantidades pares de dígitos iguais a 1, e o número $12 = (1100)_2$ diminui para o número $9 = (1001)_2$. Dessa forma, conseguimos zerar a soma-Nim retirando 3 palitos do segundo grupo e, assim, alcançamos a combinação $(11, 9, 7, 5)$ que é segura, como ilustra a figura 2.

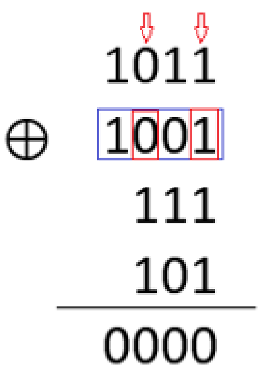

Figura 2: soma-Nim igual a zero depois das trocas realizadas no grupo 2

5. Um novo olhar sobre a estratégia vencedora

Para utilizarmos a estratégia vencedora durante uma partida do Nim é necessário efetuarmos cálculos mentais, tanto para passarmos os números de uma base para outra, quanto para construirmos a jogada que zera a soma-Nim. E é interessante que esses cálculos sejam feitos em tempo hábil para não "travar" o jogo. Isso pode não ser um problema para algumas pessoas, mas nem todos possuem tamanha habilidade. Uma outra alternativa seria jogar fazendo uso de papel e caneta, mas, dessa forma, ficaria claro para o oponente que uma estratégia predeterminada estaria sendo utilizada. Nessas duas possibilidades, podemos enxergar desvantagens, e esta foi a motivação que tivemos para desenvolver uma terceira alternativa para jogar o Nim, utilizando a estratégia vencedora.

Ao efetuarmos uma soma-Nim, organizando os números que estão na base binária, um embaixo do outro e alinhados à direita, sabemos que para obtermos uma combinação segura, em cada coluna precisamos ter uma quantidade par de algarismos iguais a 1 para que a soma-Nim seja nula. Sabemos também que cada coluna está associada a uma determinada potência de base 2. Portanto, se uma coluna só possui algarismos iguais a zero significa que, em nenhum daqueles grupos, a potência de base 2 referente àquela coluna compõe o número de elementos do grupo. Se, em uma determinada coluna, existe uma quantidade par de algarismos iguais a 1, isso significa que a potência de base 2 referente àquela coluna compõe uma quantidade par de números, ou seja, aparece uma quantidade par de vezes.

Dessa forma, quando observamos a configuração de objetos na mesa, e conseguimos enxergá-los em cada grupo "separados" em potências de base 2, é possível perceber juntando todos os grupos, quais potências de 2 estão em quantidades ímpares e quais estão em quantidades pares. E o que iremos buscar com nossa jogada é que cada potência de base 2 apareça uma quantidade par de vezes (ou simplesmente não apareça). Conseguindo isso, garantimos uma combinação segura.

Para entendermos melhor esta nova forma de jogar utilizando a estratégia vencedora, vamos acompanhar o exemplo a seguir.

Exemplo 3. Neste exemplo, consideramos uma configuração de objetos dispostos em 3 grupos com, respectivamente, $3, 5$ e 7 objetos em cada grupo, ou seja, $(3, 5, 7)$ é a configuração inicial do jogo. Os jogadores são nomeados por A e B, e os objetos estão representados por palitos. A figura 3 ilustra essa configuração disposta na mesa.

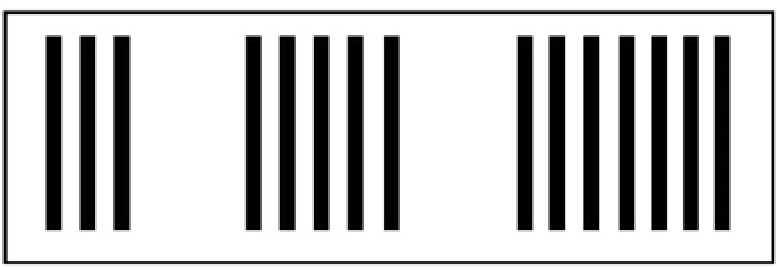

Figura 3: Configuração inicial do jogo: (3,5,7)

O jogador A será o primeiro a jogar e usará a estratégia vencedora. Para isso, ele precisa enxergar cada grupo de palitos como somas de potências de base 2, onde cada potência só aparece uma única vez dentro de cada grupo. O primeiro grupo possui três palitos e $3 = 2^1 + 2^0 = 2 + 1$. No segundo grupo, temos $5 = 2^2 + 2^0 = 4 + 1$. E no terceiro, $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0 = 4 + 2 + 1$. A ideia é enxergar esta configuração conforme a representação da figura 4.

Figura 4: Configuração (3,5,7) com as potências destacadas.

Na imagem acima destacamos as potências $2^2 = 4$ com a cor azul, $2^1 = 2$ com a cor vermelha e $2^0 = 1$ com a cor amarela. Não existe essa distinção de cores na hora do jogo, mas é preciso imaginar as potências assim destacadas. Dessa forma, fica fácil perceber que, na configuração do jogo, a potência 2^0 aparece em quantidade ímpar, enquanto as potências 2^2 e 2^1 aparecem, cada uma, em quantidades pares. Logo, precisamos retirar uma potência 2^0 de um dos grupos, ou seja, para garantir uma combinação segura basta retirar um único palito de qualquer um dos três grupos.

Para o próximo passo, vamos supor então que o jogador A tenha retirado um palito do primeiro grupo, conseguindo a combinação $(2, 5, 7)$, que é segura. Em seguida, o jogador B faz sua jogada e suponhamos que ele retire 2 palitos do segundo grupo. Portanto, a configuração $(2, 3, 7)$ é a combinação não segura do momento. Usando o mesmo raciocínio devemos enxergar essa nova configuração como exibido na figura 5.

Figura 5: Configuração (2,3,7) com as potências destacadas.

Observe que nesta nova configuração apenas a potência 2^0 está em quantidade par. As potências

2^2 e 2^1 estão em quantidades ímpares na mesa e precisamos retirar uma de cada numa única jogada. Como, pela regra do jogo, só podemos retirar palitos de um único grupo, iremos retirar essas duas potências do grupo três, sendo essa a única jogada possível para alcançar uma combinação segura neste momento do jogo. Foi isso que o jogador A fez, retirou seis palitos do grupo três e, portanto, a configuração ficou (2,3,1). Novamente é a vez de B jogar e vamos supor que ele retire os 3 palitos do segundo grupo, deixando na mesa a combinação não segura (2,0,1) ilustrada na figura 6.

Figura 6: Configuração (2,0,1) com as potências destacadas.

Observe agora que, neste ponto, as duas potências, 2^1 e 2^0, estão em quantidades ímpares, mas podemos transformar 2^1 em 2^0 retirando um palito do primeiro grupo e, assim, a mesa terá duas potências do tipo 2^0, ou seja, fica na mesa a combinação segura (1,0,1). Quando B jogar agora, terá que retirar um palito ou do grupo 3 ou do grupo 1 e sobrará um único palito para A retirar, ganhando o jogo.

Uma observação interessante é que, partindo de uma combinação não segura, se o jogador A (o que começa o jogo) sempre fizer uma jogada usando a estratégia vencedora, em algum ponto da partida, aparecerá apenas dois grupos com quantidades iguais de palitos. E, a partir disso, a cada jogada de B, basta que A retire a mesma quantidade de palitos que B retirou, só que do outro grupo. Seguindo assim, a última jogada será de A, que vencerá do jogo, como discutido no exemplo 4.

Exemplo 4. Vamos supor que, numa determinada partida, após uma das jogadas do jogador A, a configuração na mesa seja (4,4,0), que é uma combinação segura. Se B retirar os quatro palitos de um dos grupos, basta A retirar os quatro palitos do outro grupo para vencer o jogo. Se B retirar apenas um palito de um dos grupos, A deve retirar apenas um palito do outro grupo e o jogo continuará dessa maneira até que A vença.

É natural que, durante uma partida do Nim, os jogadores, mesmo sem conhecerem a estratégia vencedora, percebam que deixar dois grupos com a mesma quantidade de palitos no final do jogo garante-lhes a vitória. Desta forma, quem consegue esse feito primeiro, ganha. O que a estratégia vencedora garante é que, independentemente do que o seu adversário faça, é o jogador que conhece a estratégia vencedora que conseguirá deixar os dois grupos com a mesma quantidade de palitos no final da partida, garantindo-lhe a vitória.

No exemplo 3, a configuração inicial era uma combinação não segura e o jogador A foi o primeiro a jogar, o que possibilitou que ele utilizasse a estratégia vencedora logo na primeira rodada do jogo. Também seria possível utilizar tal estratégia sendo o segundo a jogar e, para isso, seria necessário esperar por uma combinação não segura para transformá-la em segura. Mas, é claro, isso só seria possível se o oponente não soubesse a estratégia vencedora. Caso contrário, se o primeiro a jogar conhece a estratégia vencedora sempre será o vencedor, a menos que a configuração inicial da mesa já apresente uma combinação segura ou que ele "erre"em alguma jogada.

Outro ponto importante a destacar é quando, em uma configuração, em cada grupo só exista uma potência de cada tipo, e essas são distintas. Nesse caso, não adianta retirar uma dessas potências de palitos pois as outras continuariam em quantidades ímpares, não configurando uma combinação segura. A estratégia seria então retirar, da maior potência, uma quantidade de palitos equivalente à diferença entre a maior potência e a soma das demais. O exemplo 5, ilustra essa situação.

Exemplo 5. Comsidere a configuração (4,2,1)=$(2^2, 2^1, 2^0)$, ilustrada na figura 7, formada por 3 grupos onde cada um deles tem exatamente uma quantidade de palitos expressa por uma potência de 2 distinta.

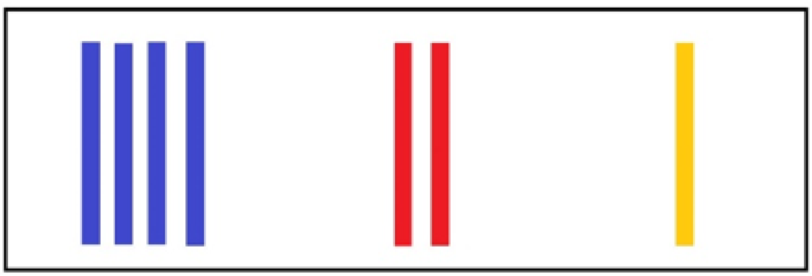

Figura 7: Configuração (4,2,1) com as potências destacadas.

A estratégia, nesse exemplo, será retirar da maior potência a quantidade que equivale à diferença entre a maior potência e a soma entre as outras duas. Assim, retiraremos do grupo com 4 palitos a quantidade de $2^2 - (2^1 + 2^0) = 4 - 3 = 1$ palito, obtendo a combinação segura (3,2,1), expressa na figura 8.

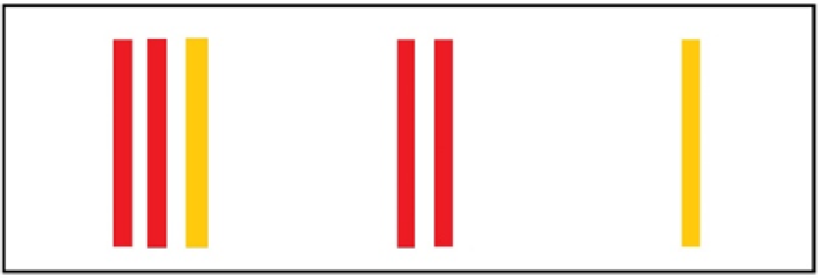

Figura 8: Configuração (3,2,1) com as potências destacadas.

6. Considerações finais

A inovação do presente artigo encontra-se no novo olhar que apresenta a estratégia vencedora do jogo Nim desenvolvida por Bouton. Esse novo olhar dinamiza a aplicabilidade no chão da escola básica e provoca posicionamentos questionadores e investigativos que certamente contribuem para uma aprendizagem crítica e autônoma.

Como a base teórica para construção da estratégia vencedora dá-se a partir dos números binários, este jogo torna-se um forte aliado para introdução de conceitos desse conteúdo, repleto de aplicações nos dias atuais. Estudar temas contemporâneos onde o alunado perceba conexões com o mundo em que vive certamente traz significado à apropriação de conhecimento.

Uma atividade que envolve números binários e o jogo Nim foi produzida e aplicada com turmas do nono ano do ensino fundamental de uma escola pública, e sua descrição e resultados encontram-se em [5]. Convidamos o leitor professor a ler esse texto, conhecer em mais detalhes a proposta e analisar a viabilidade de sua aplicação de forma completa ou adaptada nas suas turmas.

Finalmente, questionamentos sobre variações nas regras do Nim podem ser investigadas com mais ou menos complexidade. [7] sugere, por exemplo, impor restrições sobre o número de palitos a ser retirado ou permitir jogadas que afetem mais de uma pilha de objetos. Além disso, considerar a versão do Nim onde quem perde é quem retira o último objeto da mesa também possibilita discussões interessantes. Enfim, muito ainda se pode ser desenvolvido em relação a esse jogo com um olhar no ensino básico.

Esperamos que este artigo motive professores a buscar novas alternativas para o trabalho no chão da escola, e reforçamos a necessidade de transformar a sala de aula em um lugar mais atrativo, investigativo e de troca de saberes.

Referências

[1] Almeida, B. I.; Carvalho, R. B. *A matemática do jogo do nim em uma abordagem investigativa.* 79 f. Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campos dos Goytacazes-RJ, 2016.

[2] Bouton, C. L. *Nim, A Game with A Complete Mathematical Theory.* Annals of Mathematics. Princeton, p. 35-39, 1902.

[3] Conway, J. H. *On Numbers and Games*. CRC Press. Second Edition. A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2001.

[4] Estrela, R. A. P. *Jogos combinatórios e jogos de soma nula*. 112 f. Dissertação (Mestrado em matemática). Universidade de Aveiro, Aveiro - Portugal, 2012.

[5] Frederico, A. C. V. *Números binários: uma proposta de ensino para a educação básica*. 65 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática – Profmat). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

[6] Gardner, M. *Divertimentos Matemáticos*. São Paulo: Ibrasa, 1961.

[7] Saldanha, N. *Tópicos em jogos combinatórios*. XVIII Colóquio Brasileiro de Matemática. Impa, 1991.

Ana Carolina Vargas Frederico
Escola Municipal Antônio Lopes da Fontoura e Escola Municipal Funchal
<ana_vargasf@hotmail.com>

Christine Sertã Costa
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro-PUC-Rio e Colégio Pedro II-CPII
<cserta@mat.puc-rio.br>

Recebido: 20/05/2022
Publicado: 14/12/2022