


# Inversão por círculos como aplicação dos números complexos

Miguel V. S. Frasson 

## Resumo

Apresentamos uma demonstração de que a inversão por círculos mapeia círculos e retas em círculos ou retas, podendo intercambiá-los. Essa demonstração é feita de maneira direta e elegante com o auxílio de números complexos, sendo uma bela aplicação deles.

**Palavras-chave:** Geometria; inversão; círculos; retas; números complexos.

## 1. Introdução

A *inversão por um círculo* é uma transformação geométrica que tem a fascinante propriedade de mapear círculos e retas em círculos ou retas, podendo intercambiá-los. Foi inventada pelo geômetra suíço Jakob Steiner (1796–1863). Entre outras coisas, é útil para converter problemas geométricos envolvendo círculos que devem satisfazer condições de tangência ou incidência, em problemas mais fáceis, possivelmente com retas, satisfazendo condições semelhantes. Para um estudo mais aprofundado do tema, veja, por exemplo, [2, 3], que apresentam diversos problemas e aplicações da inversão. Adiante, apresentaremos aplicações nas seções 3 e 4.

Os números complexos, por sua vez, têm um forte apelo geométrico em suas operações aritméticas. Aqui, como uma bela aplicação desses números, daremos uma breve e elegante demonstração para algumas propriedades da inversão. Apresentaremos uma equação unificada para retas e círculos no plano complexo, que pode ser facilmente manipulada com a inversão por um círculo. Essa ideia foi inspirada em um fórum de discussão sobre matemática [4] (para a aplicação complexa  $z \mapsto 1/z$ ) e estudada em um grupo de iniciação científica para alunos do ensino médio em São Carlos-SP.

Para fixar notação, pontos serão denotados com letras latinas maiúsculas, retas com letras latinas minúsculas e círculos com letras gregas minúsculas. Denotaremos a imagem por uma inversão de um objeto  $x$  por  $x'$ . Denotamos a semirreta de origem  $A$  contendo o ponto  $B$  por  $\overrightarrow{AB}$ , o segmento com extremos  $A$  e  $B$  por  $AB$  e seu comprimento por  $|AB|$ . Identificaremos um plano  $\Pi$  com o plano complexo  $\mathbb{C}$ , fixando em  $\Pi$  um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, e identificando  $P = (x, y)$  com o número complexo  $x + iy$ , permitindo números complexos como coordenadas e aritmética complexa em  $\Pi$ . Por exemplo,  $|AB| = |B - A|$ , o módulo do número complexo  $B - A$ .

## 2. A inversão por um círculo

Dado um círculo  $\lambda$ , de centro  $O$  de raio  $r > 0$ , pode-se definir a *inversão por  $\lambda$*  de um ponto  $P \neq O$  como o ponto  $P'$  na semirreta  $\overrightarrow{OP}$  tal que

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2. \quad (1)$$

A inversão é, portanto, uma transformação do plano, excetuando o centro  $O$ , que manda pontos externos a  $\lambda$  distintos em pontos internos distintos e vice-versa, de forma que a inversão é uma bijeção do plano, excluído  $O$ . Note que uma inversão é sua própria transformação inversa, sendo portanto uma transformação idempotente.

Ainda que  $O$  não pertença à imagem de uma inversão como transformação, estenderemos sem mais avisos a imagem de objetos a esse ponto se este for o único faltante a tal imagem como um círculo ou reta. É nesse sentido que podemos dizer, por exemplo, que “a imagem de uma reta que não passa por  $O$  é um círculo que passa por  $O$ ”.

Podemos construir a inversão de pontos com régua e compasso, com uma construção mostrada na Figura 1. (Outras construções são apresentadas em [3, ex. 2.10 e 2.11].) A construção da imagem de círculos e retas pode ser feita usando as propriedades apresentadas a seguir, e a construção da inversão de poucos pontos auxiliares que determinam tais objetos. *Softwares* como Geogebra permitem aplicar a inversão diretamente a objetos diversos.

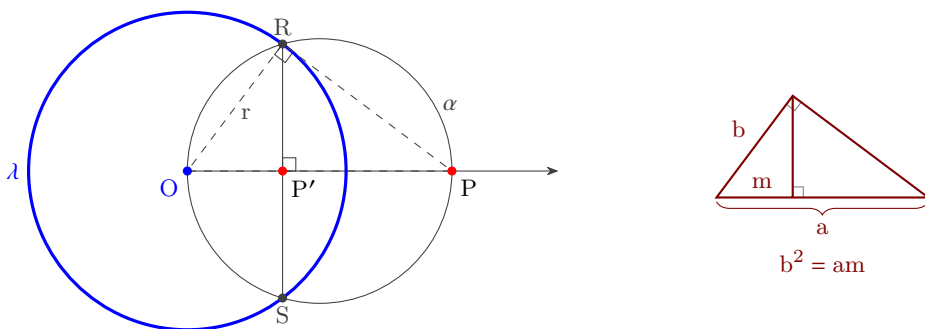


Figura 1: *Inversão de um ponto por  $\lambda$* : Se  $P$  é externo a  $\lambda$ , construa o círculo  $\alpha$  de diâmetro  $OP$  e marque  $R$  e  $S$  nas interseções com  $\lambda$ , de forma que o triângulo  $ORP$  é retângulo em  $R$ . Então marque  $P'$  na interseção de  $OP$  com  $RS$ ; da relação métrica ilustrada à direita,  $r^2 = |OP'| \cdot |OP|$  e portanto  $P$  e  $P'$  são inversos com relação ao círculo  $\lambda$ . De forma semelhante poderíamos construir  $P$  a partir de  $P'$  interno a  $\lambda$ . Trace uma perpendicular a  $OP'$  por  $P'$  e marque as interseções  $R$  e  $S$  com  $\lambda$ . Trace, então, um círculo  $\alpha$  que passe por  $O$ ,  $R$  e  $S$ . O ponto  $P$  está na interseção de  $\alpha$  com a semirreta  $\overrightarrow{OP'}$ .

Desenvolveremos as principais propriedades da inversão. No resto desta seção, as inversões são com respeito a um círculo  $\lambda$  de centro  $O$ .

**Propriedade 1.** *A inversão por  $\lambda$  mapeia círculos e retas em círculos ou retas. Além disso:*

1. *tais objetos, se não passam por  $O$ , são mapeados em círculos;*
2. *se passam por  $O$ , são mapeados em retas;*
3. *retas são mapeadas em objetos que passam por  $O$ .*

No item 2 acima, objetos que passam por  $O$  têm pontos arbitrariamente próximos de  $O$ , que são mapeados pela inversão em pontos arbitrariamente distantes, ou seja, a imagem é um objeto ilimitado, e entre círculos e retas, estas são a única opção. O item 3 é a recíproca do item 2.

**Propriedade 2.** *A inversão preserva ângulos e tangências de objetos que se intersectam.*

Há de se observar a correspondência das regiões que faceiam os ângulos. Por exemplo, se um círculo  $\alpha$  cruza  $\lambda$  com um ângulo  $\theta$  interno a ambos, tal região que faceia  $\theta$  é mandada numa região interna a  $\alpha'$  mas externa a  $\lambda$ , e aí teremos o mesmo ângulo  $\theta$ . Apenas encontros ortogonais, por razões óbvias, ficam isentos de tais permutações de posição.

Pode-se estender a inversão a todo o plano se incluímos um “ponto” ao infinito, denotado  $\infty$ , que seria a imagem de  $O$  pela inversão, como em [3]. Nesse caso, as retas usuais encontrar-se-iam em  $\infty$  e talvez em outro ponto, se forem concorrentes no sentido usual, formando ângulo  $\theta$ ; retas paralelas podem ser consideradas, assim, tangentes em  $\infty$ , e tal tangência nesse caso, ou tal ângulo naquele, são preservados pela inversão. A ideia é bastante interessante e útil, mas neste modesto trabalho vamos nos manter no plano usual, ainda que retendo essas conclusões.

- Propriedade 3.**
1. Pontos de  $\lambda$  permanecem fixos; em particular,  $\lambda$  é mapeado em si mesmo.
  2. Se a inversão mapeia um círculo em outro círculo, esse é imagem homotética daquele, com centro de homotetia em  $O$ .
  3. Um círculo ortogonal<sup>1</sup> a  $\lambda$  é mapeado em si mesmo.
  4. Uma reta por  $O$  é mapeada em si mesma.

Por definição, uma semirreta de origem em  $O$  é um conjunto invariante pela inversão, assim como setores com vértice em  $O$ . Por *setor mínimo* de vértice em  $O$  ocupado por um determinado objeto, queremos dizer o menor conjunto de semirretas com vértice em  $O$  que contém tal objeto.

Sobre a Propriedade 3, quanto ao item 2, se um círculo  $\alpha$  que tem  $O$  em seu exterior, ocupa um setor mínimo de vértice em  $O$ , de forma que sua imagem pela inversão será um círculo  $\alpha'$  que ocupa o mesmo setor, devendo ser imagem homotética de  $\alpha$  por uma homotetia de centro em  $O$  e razão  $k > 0$ . Se  $O$  estiver em seu interior, vale a mesma conclusão (a partir de outros argumentos, omitidos), mas com razão de homotetia  $k < 0$ . Como em todo setor angular com vértice em  $O$  há somente um círculo ortogonal a  $\lambda$  com tal setor mínimo, e pela Propriedade 2, tal círculo deve ser mapeado em si mesmo, o que mostra o item 3. Por fim, no item 4, uma reta que passa por  $O$  é a união de duas semirretas opostas com origem em  $O$ , portanto tal reta é invariante pela inversão.

Veja a Figura 2, para uma ilustração de algumas propriedades da inversão por um círculo.

### 3. Exemplo: anéis olímpicos do logotipo da OBM

Um belo exemplo da vida real é o logotipo animado da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), que aparece em sua página [www.obm.org.br](http://www.obm.org.br). O logotipo, conhecido como os “anéis olímpicos”, é um conjunto de 5 círculos coloridos que se tangenciam entre si e com outros dois círculos que lhes servem de guia, mas dispersos de uma forma irregular, e por isso, causam um grande efeito no expectador. Esse logotipo é um caso particular do problema conhecido como *corrente de Steiner*. Veja [2, §9].

Note que uma versão regular do logotipo é facilmente construtível. A inversão pode ser aplicada para mandar esse logotipo regular numa versão irregular, preservando as tangências. Pode-se construir essa animação usando um *software* de geometria dinâmica como o *Geogebra*. Veja<sup>2</sup> a Figura 3.

<sup>1</sup>Um círculo  $\gamma$  é ortogonal a  $\lambda$  se os raios (ou as tangentes) de  $\gamma$  e de  $\lambda$ , num ponto de interseção, forem ortogonais.

<sup>2</sup>A Figura 3 contém animação, que pode ser vista no Acrobat Reader (exceto celulares), PDFXChange e Foxit Reader (Windows) e no KDE Okular (Linux).

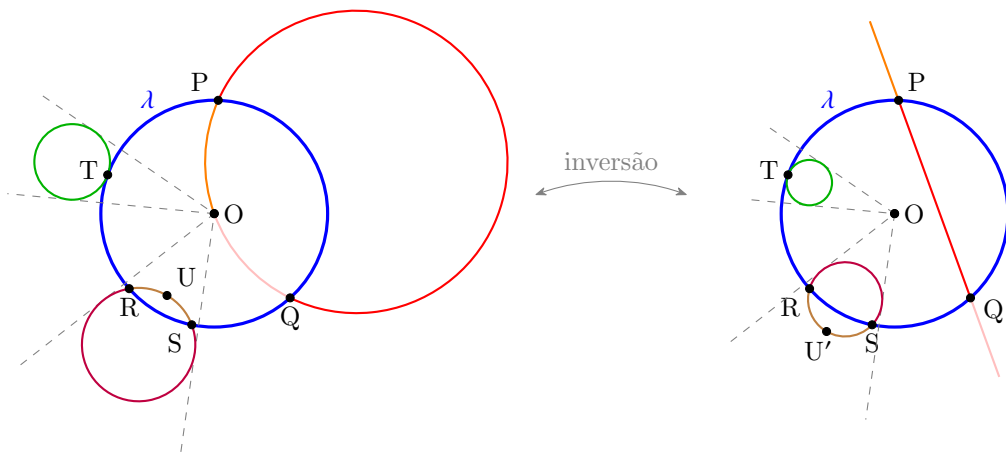


Figura 2: *Inversão por  $\lambda$  aplicada a diversos círculos.* Quando a imagem de um círculo pela inversão é outro círculo, essa imagem é homotética àquele círculo a partir de  $O$ , o centro de  $\lambda$ . Para construir suas imagens pela inversão, constroem-se as imagens de alguns pontos suficientes: os pontos de interseção desses círculos com  $\lambda$  permanecem fixos (pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  e  $T$ ) e  $U$  é mapeado em  $U'$ . As retas tracejadas mostram os setores mínimos, invariantes, ajudando a enxergar as homotetias. Por ser idempotente, a inversão intercambia as figuras da esquerda e da direita. As cores dos arcos ilustram suas respectivas imagens pela inversão.

Figura 3: *Logotipo animado da OBM no Geogebra.* É fácil construir uma versão regular dos “anéis olímpicos” e pela inversão, obter a versão irregular desejada, mais interessante. Faça você mesmo: vamos precisar animar um ponto ao redor de um círculo auxiliar, então sobre um círculo (tracejado) construa um ponto  $A$  e, a partir dele, os vértices de um pentágono sobre o círculo auxiliar. Então, construa a figura regular à esquerda com 7 círculos. Crie um grande círculo  $\lambda$  que englobe a figura construída e, usando a ferramenta de inversão (no *menu* das transformações), inverta por  $\lambda$  todos os círculos (exceto o tracejado), formando o logotipo da OBM. Coloque os arcos nas cores correspondentes e, por fim, ligue a animação de  $A$  em sentido horário, fazendo os “anéis olímpicos” girarem, mantendo as tangências entre si e com os anéis guia em cinza.

#### 4. Exemplo: encontrar um círculo tangente a outro círculo, uma reta e passando por um ponto

**Problema 1.** Dados um círculo  $\alpha$ , uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , considere o problema de construir um círculo  $\gamma$  que passe por  $P$  e tangencie  $\alpha$  e  $r$ . Veja a Figura 4.

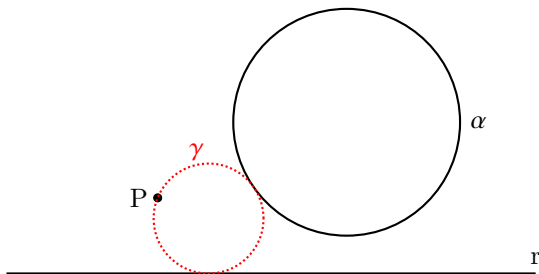


Figura 4: Construa um círculo  $\gamma$  tangente a  $\alpha$  e  $r$ , e incidente em  $P$ .

Note que um círculo  $\gamma$  passando por  $P$  é mandado em uma reta por qualquer inversão por círculo com centro em  $P$ . Tal inversão mandaria  $\alpha$  e  $r$  em círculos  $\alpha'$  e  $\beta = r'$ , e o problema de encontrar  $\gamma$  é traduzido no problema mais simples de encontrar retas tangentes aos círculos  $\alpha'$  e  $\beta$ . Aplicando a inversão às retas tangentes obtidas, teríamos a resposta ao problema original.

**Problema 2.** O mesmo que o Problema 1, mas no caso particular em que  $\alpha$  e  $r$  tangenciam-se em um ponto  $T$ .

Ainda que possa ser resolvido como o caso geral acima, admite outra solução mais simples: uma inversão por um círculo com centro  $T$  mapeia  $\alpha$  e  $r$  em retas paralelas. Em qual problema se traduzir-se-ia o problema original?

O que dissemos é suficiente para o leitor interessado resolver esses problemas por si mesmo. O uso do Geogebra facilita bastante na execução da solução. No final do artigo, na Seção 8, apresentaremos uma solução para tais problemas.

#### 5. A inversão por um círculo, usando números complexos

A partir daqui, propomo-nos a demonstrar as propriedades da inversão usando equações de números complexos. Recordamos que pontos do plano são identificados com números complexos. Dado  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , seu módulo é  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  e seu conjugado é  $\bar{z} = x - iy$ , valendo a identidade  $|z|^2 = z\bar{z}$ . Se  $w \in \mathbb{C}$ , temos que  $z + w = \bar{z} + \bar{w}$  e  $zw = \bar{z}\bar{w}$ .

Considere o círculo de inversão  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r$ . Da definição de inversão (1),  $P = O + (P - O)$  deve ser mapeado em  $P'$ , na semirreta de origem em  $O$  na direção  $P - O$ , tal que  $|P' - O| \cdot |P - O| = r^2$ , isto é,

$$P' = O + \frac{|P' - O|}{|P - O|} (P - O) = O + r^2 \frac{P - O}{|P - O|^2}. \quad (2)$$

Como  $|P - O|^2 = (P - O)(\overline{P - O})$ , (2) pode ser reescrita como

$$P' = O + \frac{r^2}{\overline{P - O}}$$

e podemos decompôr a inversão como a composição de uma translação, uma conjugação complexa (a reflexão em torno do eixo real), um inverso complexo<sup>3</sup>, uma homotetia e a translação inversa:

$$P \xrightarrow{z \mapsto z-O} P-O \xrightarrow{z \mapsto \bar{z}} \overline{P-O} \xrightarrow{z \mapsto \frac{1}{z}} \frac{1}{\overline{P-O}} \xrightarrow{z \mapsto r^2 z} \frac{r^2}{\overline{P-O}} \xrightarrow{z \mapsto z+O} P' = O + \frac{r^2}{\overline{P-O}}.$$

Todas essas transformações preservam ângulos e tangências de curvas, assim como suas composições. Essa é um forma de mostrar a Propriedade 2.

Para aplicar a inversão a círculos e retas, começamos por estudar uma equação que, dependendo do coeficiente do termo quadrático, é quadrática ou linear, representando assim um círculo ou uma reta, e, dependendo do termo constante, passa pela origem ou não.

### 6. Uma equação unificada para círculos e retas em $\mathbb{C}$

Seja  $B \in \mathbb{C}$  e  $\ell > 0$ . No plano complexo, o círculo de centro  $B$  e raio  $\ell$  tem equação  $|z - B| = \ell$ , com variável  $z = x + iy$ . Podemos desenvolver  $|z - B| = \ell$  para obter a equação equivalente

$$\ell^2 = |z - B|^2 = (z - B)(\overline{z - B}) = z\bar{z} - \bar{B}z - B\bar{z} + B\bar{B} = |z|^2 - \bar{B}z - B\bar{z} + |B|^2$$

e, portanto,

$$|z|^2 - \bar{B}z - B\bar{z} + (|B|^2 - \ell^2) = 0. \tag{3}$$

Se desprezarmos o termo quadrático  $|z|^2$  em (3), com  $B \neq 0$ , ficamos com uma equação da forma

$$-\bar{B}z - B\bar{z} + c = 0. \tag{4}$$

Fazendo por um instante  $B = a + ib$  e  $z = x + iy$  em (4), teríamos

$$0 = -\bar{B}z - B\bar{z} + c = -(a - ib)(x + iy) - (a + ib)(x - iy) + c = -2ax - 2by + c \Leftrightarrow ax + by - \frac{c}{2} = 0,$$

portanto, (4) é a equação da reta que passa por  $P = \frac{c}{2|B|^2}B$  (verifique) e é ortogonal a  $B$ .

Do exposto acima, podemos unificar círculos e retas numa única equação

$$a|z|^2 - \bar{B}z - B\bar{z} + c = 0 \tag{5}$$

em que  $B \in \mathbb{C}$  e  $a, c \in \mathbb{R}$ , sujeitos à condição  $|B|^2 - ac > 0$ :

- Se  $a \neq 0$ , (5) é uma equação para o círculo de centro  $\frac{B}{a}$  e raio  $\ell = \frac{\sqrt{|B|^2 - ac}}{a}$ ;
- Se  $a = 0$ , (5) é uma equação para a reta por  $\frac{c}{2|B|^2}B$ , ortogonal a  $B$ .
- Tais objetos passam pela origem se, e somente se,  $c = 0$ .

<sup>3</sup>A função inverso complexo é uma função complexa diferenciável:  $(\frac{1}{z})' = -\frac{1}{z^2}$ . Uma função diferenciável complexa  $f(z)$  atua de maneira muito próxima a uma função linear em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto  $w$  em seu domínio:  $f(w + \epsilon) \approx f(w) + f'(w)\epsilon$ , para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, isto é, aproximadamente aplica a pontos de uma vizinhança de  $w$  uma rotação de ângulo o argumento de  $f'(w)$ , e uma homotetia de razão  $|f'(w)|$ , ambas com centro em  $f(w)$ . Assim, preserva ângulos e tangências de curvas que se cruzam em  $w$ . Veja [1, cap. 8].

Mesmo ângulos e tangências em 0 são preservados pela função inversa complexa. Para ver isso, note que curvas que chegam com ângulo  $\theta$  em 0 são mandadas em curvas com ângulo  $-\theta$  perto do infinito: se  $t > 0$ , tem-se então que  $\frac{1}{te^{i\theta}} = \frac{1}{t}e^{-i\theta}$ .

Podemos, de forma análoga, considerar formas transladadas de (5), a saber

$$a|z - O|^2 - \bar{B}(z - O) - B(\bar{z} - \bar{O}) + c = 0 \quad (6)$$

que representam os círculos ou retas descritos acima mas transladados de  $O$ , mais precisamente:

- Se  $a \neq 0$ , (6) é uma equação para o círculo de centro  $O + \frac{B}{a}$  e raio  $\ell = \frac{\sqrt{|B|^2 - ac}}{a}$ ;
- Se  $a = 0$ , (6) é uma equação para a reta por  $O + \frac{c}{2|B|^2}B$  ortogonal à direção de  $OB$ .
- Tais objetos passam por  $O$  se, e somente se,  $c = 0$ .

Veja a Figura 5.

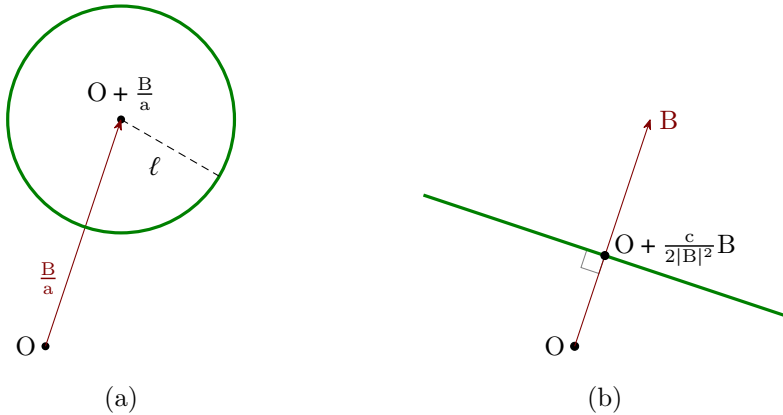


Figura 5: Em (6), (a) se  $a \neq 0$ , temos um círculo de centro  $O + \frac{B}{a}$  e raio  $\ell = \frac{\sqrt{|B|^2 - ac}}{a}$ ; (b) se  $a = 0$ , temos uma reta ortogonal a  $OB$  que passa por  $P = O + \frac{c}{2|B|^2}B$ .

### 7. A inversão leva círculos e retas em círculos ou retas

Vejam os objetos a inversão com relação ao círculo  $\lambda$  mapeia um objeto de equação (6). Em vista de (2), multiplicando (6) por  $r^2/|z - O|^2$ , obtemos

$$\frac{ar^2|z - O|^2}{|z - O|^2} - \underbrace{\bar{B}r^2 \frac{z - O}{|z - O|^2}}_{z' - O} - \underbrace{Br^2 \frac{\bar{z} - \bar{O}}{|z - O|^2}}_{z' - \bar{O}} + \underbrace{c \frac{r^2}{|z - O|^2}}_{|z' - O|^2/r^2} = 0$$

e portanto  $z'$  satisfaz a equação

$$\underbrace{\frac{c}{r^2}}_{a'} |z' - O|^2 - \bar{B}(z' - O) - B(\bar{z}' - \bar{O}) + \underbrace{ar^2}_{c'} = 0. \quad (7)$$

Agora podemos mostrar facilmente a fascinante Propriedade 1: em (7), a equação da imagem de um círculo ou reta em (6), ao aplicar a inversão, é também um círculo ou reta. Um círculo ou reta, se não passa por  $O$ , tem coeficiente  $c \neq 0$ , portanto sua imagem tem coeficiente  $a' = c/r^2 \neq 0$ ,

sendo assim um círculo (item 1). Se tais objetos passam por O, têm coeficiente  $c = 0$ , portanto sua imagem tem coeficiente  $a' = c/r^2 = 0$ , sendo uma reta (item 2). Por fim, uma reta, por ter coeficiente  $a = 0$ , é levada em um objeto com coeficiente  $c' = ar^2 = 0$ , logo, que passa por O (item 3).

Podemos mostrar também a Propriedade 3. De (2) vem imediatamente o item 1. Agora podemos mostrar completamente o item 2: um círculo  $\alpha$  que não passa por O, de centro O + B e raio  $\ell$  — basta tomar  $a = 1$  e  $c = |B|^2 - \ell^2$  — é levado num círculo de centro  $O + \frac{r^2}{c}B$  e raio  $\frac{r^2}{c}\ell$ , portanto uma imagem homotética de  $\alpha$  com centro em O e razão  $k = \frac{r^2}{c}$ . Um círculo com razão de homotetia 1 também é fixo:

$$1 = \frac{r^2}{c} = \frac{r^2}{|B|^2 - \ell^2} \Rightarrow r^2 + \ell^2 = |B|^2,$$

ou seja, se  $\alpha$  é um círculo ortogonal a  $\lambda$ , permanece fixo pela inversão com relação a  $\lambda$ . Veja a Figura 6.

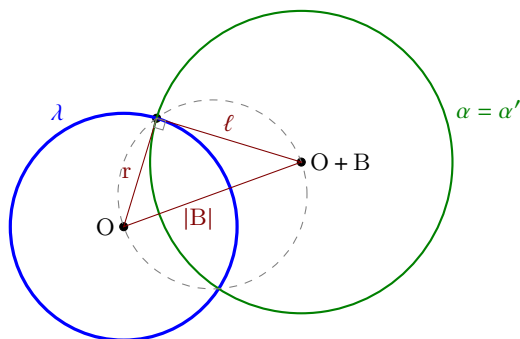


Figura 6: Círculos ortogonais a  $\lambda$  permanecem fixos pela inversão por  $\lambda$ , além das retas por O e do próprio círculo  $\lambda$ .

## 8. Solução dos problemas da Seção 4

Vamos apresentar a solução ao Problema 1, p. 639.

Como dissemos na Seção 4, toda inversão por  $\lambda$  com centro em P mapeia  $\gamma$  em uma reta  $s$ , e como  $P \notin \alpha$ ,  $P \notin r$ ,  $\alpha$  e  $r$  são mapeados em círculos  $\alpha'$  e  $\beta = r'$ , respectivamente. Se tomarmos  $\lambda$  ortogonal a  $\alpha$ , esse fica fixo pela inversão, ou seja,  $\alpha = \alpha'$  (Propriedade 3, item 3). Os raios de  $\lambda$  e  $\alpha$  devem ser ortogonais na interseção, portanto tal interseção deve estar em um círculo de diâmetro AP, onde A é o centro de  $\alpha$ , em roxo pontilhado, à esquerda, na Figura 7.

Já tendo  $\phi = \alpha$ , à direita na Figura 7 construiremos  $\beta$ , que passa por P e pelos pontos R e S em  $r \cap \lambda$ , que são fixos. Então o centro B de  $\beta$  está no encontro das mediatrizes de RS e PS, em roxo pontilhado.

O problema de construir um círculo  $\gamma$  que tangencia  $\alpha$  e  $r$  converteu-se em construir retas  $s_n$  tangentes a  $\alpha$  e  $\beta$ , que faremos à direita na Figura 7. Note que há quatro dessas retas tangentes, mas, para não poluir demais o desenho, construiremos uma tangente de cada tipo:  $s_1$ , que não separa  $\alpha$  e  $\beta$ ; e  $s_2$ , que os separa.

Analisando a partir da solução, essas tangentes são paralelas a catetos de triângulos retângulos de hipotenusa AB e catetos de raios  $b - a$  e  $b + a$ , onde  $a$  e  $b$  são os raios de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente.



O círculo de diâmetro AB está em verde. A construção da reta tangente  $s_1$  está em vermelho, e inicia-se com um arco a partir de B de abertura  $b - a$ . É fácil construir o ponto de tangência  $T'_1$  de  $\gamma_1$  e  $r$ , que está em  $r \cap PT_1$ . Faremos a construção análoga para o ponto de tangência  $T_2$  para uma tangente  $s_2$ , que se inicia com um arco a partir de B de abertura  $b + a$ , feita em azul.

Voltando à esquerda na Figura 7, tendo os pontos de tangência  $T'_1$  e  $T'_2$  de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  com  $r$ , seus centros estão nas perpendiculares a  $r$  por esses pontos, e nas mediatrizes de  $PT'_1$  e de  $PT'_2$ . Tais construções estão feitas nas mesmas cores que as retas  $s_1$  e  $s_2$ .

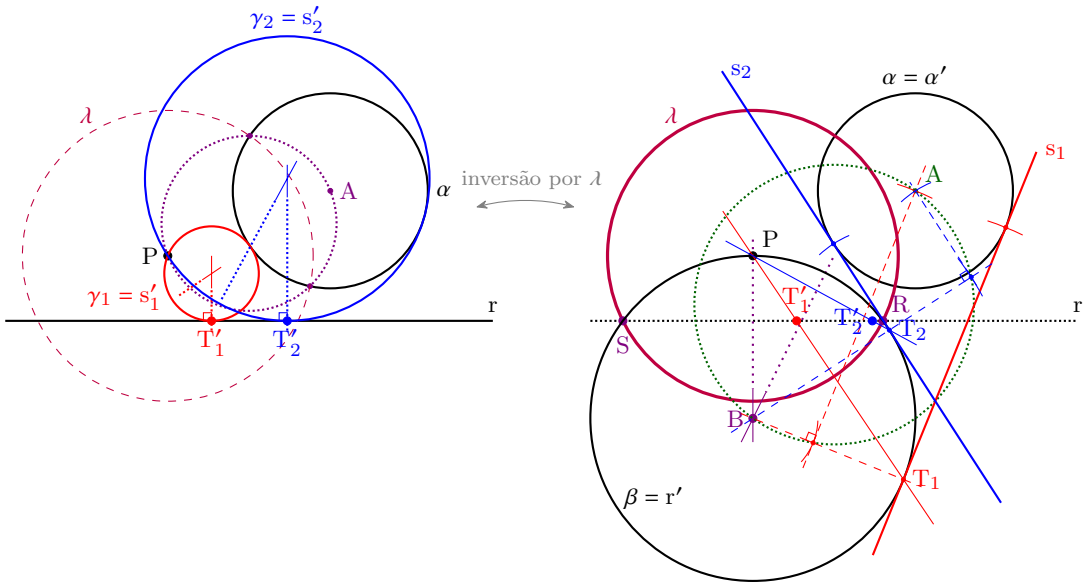


Figura 7: Construa um círculo  $\gamma$  tangente a  $\alpha$  e  $r$ , e incidente em  $P$ . Dividimos a construção em dois lados, mas que representam o mesmo plano. À esquerda, construímos o círculo de inversão  $\lambda$  (tracejado, púrpura) ortogonal a  $\alpha$ , para que  $\alpha' = \alpha$ . À direita, construímos o círculo  $\beta = r'$ , que passa por  $P$  e pelas interseções entre  $r$  e  $\lambda$ . Então, construímos as retas tangentes  $s_1$  (em vermelho) e  $s_2$  (em azul). (A rigor, bastava construir os pontos de tangência  $T_1$  e  $T_2$ .) A partir de  $T_1$  e  $T_2$ , é fácil construir os pontos de tangência  $T'_1$  e  $T'_2$  entre  $r$  e os círculos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , respectivamente, na interseção entre  $r$  e os segmentos  $PT_1$  e  $PT_2$ . Voltando à esquerda, construímos os círculos resposta  $\gamma_1 = s'_1$  e  $\gamma_2 = s'_2$ , que passam por  $P$  e tangenciam  $r$  em  $T'_1$  e  $T'_2$ . Observamos que, das quatro soluções possíveis, apresentamos apenas as duas menores, para não poluir demais a construção.

Agora vamos solucionar o Problema 2, quando  $\alpha$  e  $r$  tangenciam-se em  $T$ , feita na Figura 8.

Para uma solução diferente da anterior, mais simples nesse caso particular, vamos partir da inversão por um círculo de centro  $T$ , que mantém  $r$  fixo e envia  $\alpha$  numa reta  $s$  paralela a  $r$  (caso contrário,  $\alpha$  e  $r$  se cruzar-se-iam em outro ponto). Para manter  $P$  também fixo, tomaremos  $\lambda$  passando por  $P$  (em púrpura). Aqui, calhou de  $\lambda$  cruzar  $\alpha$  em dois pontos  $R$  e  $S$ , fixos pela inversão. Logo é fácil construir  $s = \alpha'$ , que passa nesses pontos. Essas construções serão feitas na Figura 8, em cima.

Tal inversão manda todo círculo  $\gamma_n$  que passa por  $P$ , tangente a  $\alpha$  e  $r$ , em outro círculo  $\gamma'_n$  que passa em  $P$ , tangente às retas paralelas  $r$  e  $s$ . Tais círculos têm seus centros na reta paralela  $m$  equidistante a  $r$  e  $s$ , distando  $d > 0$  das mesmas e de  $P$ . Logo, esses centros estão no círculo de

centro  $P$  e raio  $d$  e em  $m$ . Assim, construímos os dois centros possíveis  $A$  e  $B$ , dando em duas soluções  $\gamma'_1$  e  $\gamma'_2$ . Os pontos de tangência  $T_1$  e  $T_2$  dos círculos  $\gamma'_1$  e  $\gamma'_2$  com  $r$ , respectivamente, estão nas perpendiculares a  $r$  passando por  $A$  e  $B$ .

Agora passaremos para a parte de baixo da Figura 8, onde executamos a inversão de  $T_1$  e  $T_2$ , como na Figura 1, construindo  $T'_1$  e  $T'_2$ . Note que  $T_1$  é externo a  $\lambda$ , de forma que  $T'_1$  está em  $r$  e na reta que passa pelas interseções de  $\lambda$  e do círculo com diâmetro  $TT_1$ . Como  $\gamma_1$  é homotética a  $\gamma'_1$ , o centro de  $\gamma_1$  está na interseção entre  $AT$  e a perpendicular a  $r$  em  $T'_1$ .

Para a construção de  $T'_2$ , feita em azul, trace a perpendicular a  $r$  por  $T_2$ , que intersecta  $\lambda$  em  $C$  e  $D$ . Construa o círculo que passa por  $C$ ,  $D$  e  $T$ , e  $T'_2$  está na interseção de tal círculo com  $r$ . Como  $\gamma_2$  é homotética a  $\gamma'_2$ , seu centro está na interseção da reta suporte de  $TB$  com a perpendicular a  $r$  por  $T'_2$ . Isso termina a solução.

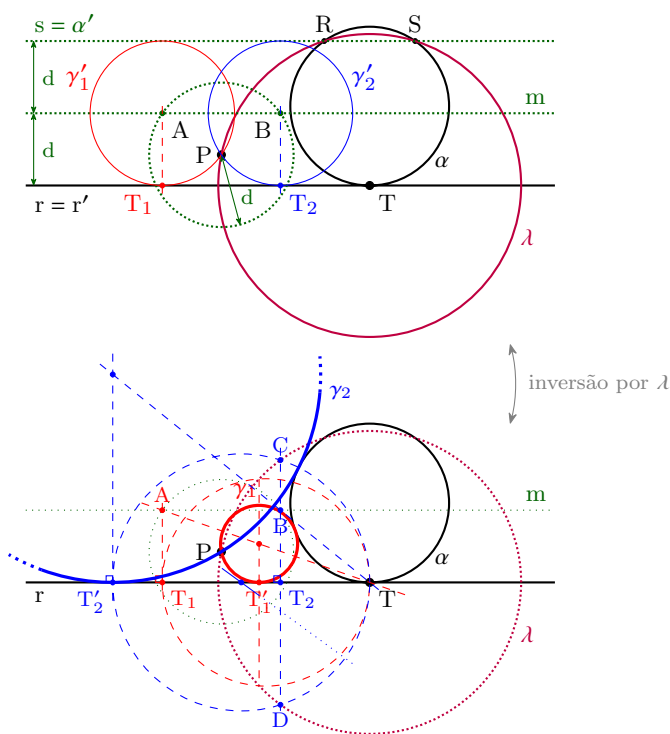


Figura 8: *Construa um círculo  $\gamma$  tangente a  $\alpha$  e  $r$ , tangentes, e incidente em  $P$ . Dividimos a construção em dois desenhos, mas que representam o mesmo plano. Acima, construímos o círculo de inversão  $\lambda$  (púrpura) de centro  $T$ , passando em  $P$ , de forma que  $r' = r$  e  $P' = P$ , e  $\alpha' = s$ , uma paralela a  $r$ . A inversão por  $\lambda$  mapeia as soluções  $\gamma_n$  em círculos  $\gamma'_n$  que tangenciam  $r$  e  $s$  com centros equidistantes a  $r$ ,  $s$  e  $P$ . Há dois desses centros  $A$  e  $B$ , e na perpendicular a  $r$  por esses centros, os pontos de tangência  $T_1$  e  $T_2$ . Na figura de baixo, construímos  $T'_1$  e  $T'_2$  com o método da Figura 1. Pela relação homotética entre  $\gamma_n$  e  $\gamma'_n$ , os centros de  $\gamma_n$  estão na interseção entre as retas suporte de  $TA$  e  $TB$  e as perpendiculares a  $r$  por  $T'_n$ . As construções referentes a  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  estão em vermelho e azul, respectivamente.*

## Referências

- [1] ÁVILA, Geraldo. *Variáveis complexas e aplicações*. LTC, 3<sup>a</sup> ed., 2008.
- [2] DAVIS, Tom. *Inversion in a Circle*. Mathematical Circles Topics, 2011. Disponível em <http://www.geometer.org/mathcircles/inversion.pdf>.
- [3] SPIRA, Michel. *Como transformar retas em círculos e vice-versa: a inversão e construções geométricas*. Minicurso da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFBA, 2004. Disponível em <http://www.bienasbm.ufba.br/M52.pdf>.
- [4] *The inversion of a line/circle is a line/circle in the complex plane*. Questão no fórum de discussão *Mathematics* no portal *Stack Exchange*, 2019. Disponível em <https://math.stackexchange.com/questions/3137948/the-inversion-of-a-line-circle-is-a-line-circle-in-the-complex-plane>.

Miguel V. S. Frasson  
ICMC – Universidade de São Paulo  
<[frasson@icmc.usp.br](mailto:frasson@icmc.usp.br)>

Recebido: 17/06/2022  
Publicado: 16/12/2022