PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.5, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1044

Uma proposta para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas de acordo com a BNCC: mediada pelo GeoGebra e resolução de problemas

Eudes Antonio Costa   Vilmar Costa Silva [1]   Jabson da Cunha Silva [2]

Resumo

Neste artigo abordaremos as relações entre as propriedades das expressões algébricas de funções e suas respectivas representações gráficas. Ao abordar a representação gráfica da função, o docente precisa fazer de forma articulada a expressão algébrica, buscando referenciar e explicitar as relações entre elas.E as tecnologias serão aliadas para estabelecer essas articulações. Este artigo objetiva apresentar propostas de atividades didáticas para os professores referentes a funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio, utilizando a resolução de problemas como metodologia e o aplicativo GeoGebra. O uso da metodologia de resolução de problemas e do GeoGebra como alternativa de ensino dos conceitos referentes ao conteúdo escolhido é justificado e proposto pelos documentos oficiais da educação, enfatizando as relações entre conceitos e procedimentos. A metodologia de pesquisa é de natureza bibliográfica e qualitativa.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Funções; GeoGebra; Resolução de Problemas.

Abstract

In this article we will discuss the relationships between the properties of algebraic expressions of functions and their respective graphical representations. When approaching the graphic representation of the function, the teacher needs to articulate the algebraic expression, seeking to make reference and explain the relationships between them. In this, technologies will be allied to establish these articulations. This aims to present proposals for didactic activities for teachers about exponential and logarithmic functions in high school, using problem solving as a methodology and the GeoGebra application. The use of problem solving methodology and GeoGebra as an alternative for teaching concepts related to the chosen content is justified and proposed by official education documents, emphasizing the relationships between concepts and procedures. The research methodology is bibliographic and qualitative in nature.

Keywords: Functions; GeoGebra; Math Teaching; Problem Solving.

1. Introducão

[1]Parcialmente apoiado pela Universidade Federal do Tocantins-UFT
[2]Parcialmente apoiado pela Centro Universitário Católica do Tocantins-Unicatolica

Neste trabalho temos como objetivo apresentar atividades didáticas[3] para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas no nível médio, utilizando a Metodologia de Resolução de Problemas (MRP) como atividade de ensino mediada pelo aplicativo computacional GeoGebra. Salientamos que sustentados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [4] buscaremos as competências e as habilidades nela declaradas. Dessa maneira apresentamos uma proposta de atividades didáticas que englobam o contexto relatado. Construímos tal proposta embasados na MRP e Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) de forma articulada e vinculada aos aspectos do cotidiano ou interdisciplinares.

O conceito, ou as noções, de função abordado por meio de procedimentos algébricos, simplesmente como "fórmula", induz os estudantes a desenvolverem uma concepção confusa acerca do assunto. Ao apresentar ou ensinar esse tema buscamos relacionar e articular representações numéricas, algébricas e gráficas mediadas pela MRP e TIC, como alternativa para obtermos o desenvolvimento das habilidades exigidas pela BNCC [4].

Além disso, é fundamental observarmos que a ideia não é simplesmente usar o GeoGebra para verificar o que está correto ou errado na representação gráfica da função. Em lugar disso, a visualização no GeoGebra deve ser explorada para motivar reflexões e conjecturas no que concerne ao comportamento das funções. Em consonância com [11] usamos a plataforma GeoGebra como instrumento de mediação pedagógica; o ambiente interativo proporciona aos discentes uma possibilidade de aprendizagem instigante, concreta e investigativa, auxiliando-os a superar dificuldades para aquisição de conceitos abstratos da Matemática.

No tocante aos aspectos metodológicos, esse estudo é caracterizado como pesquisa bibliográfica, que de acordo com [6] é o tipo de pesquisa desenvolvida tendo como base materiais já elaborados (livros, artigos científicos,...). Ademais possui uma abordagem qualitativa, pois, destacamos o processo de resolução de cada situação-problema, e não apenas o resultado ou solução final, amparada por eixos categorizados na MRP, conforme [12]. Recentemente, há diversas dissertações de mestrado produzidas no Brasil, principalmente no programa Profmat[4], muitas dessas exploram o uso do GeoGebra como instrumento de mediação pedagógica para a apresentação, fixação ou revisão de conceitos em Geometria. Na própria PMO tomamos contato com esse panorama da literatura pelas referências [1, 2, 14]

Nossa proposta consiste em apresentar ao docente atividades direcionadas à preparação ou capacitação do professor; as atividades almejam instigar ou estimular a autonomia do discente pela utilização da MRP. Assim as propostas de atividades aqui apresentadas também podem servir como sugestões ao docente enquanto roteiros pedagógicos completos e possíveis de serem apresentados aos estudantes. A proposta que ora apresentamos apontam que não devemos mecanizar o ensino da MRP e que a condução do estudante, por intermédio de problematização ou perguntas, preparadas e direcionadas pelo docente, podem torná-los independentes para a resolução de problemas. Na Seção 2 apresentamos uma justificativa da conexão da MRP e o GeoGebra. Já na Seção 3 abordamos o ensino de funções exponenciais e logarítmicas por meio de 6 (seis) atividades sequenciadas destacando as habilidades e competências associadas. A proposta que expomos aqui é um recorte da pesquisa de mestrado[5] [13].

[3]As atividades didáticas constituem meios de organização do trabalho pedagógico em sala de aula, que concretizam um conjunto de procedimentos específicos, próprios da situação de ensino-aprendizagem e servem como mediadoras da relação entre os estudantes e um objeto de conhecimento. (MONTEIRO, [s.d.])

[4]Mestrado Profissional em Matemática http://www.profmat-sbm.org.br/

[5]Esclarecemos que não realizamos um estudo de caso devido ao distanciamento social nos anos de 2020 e 2021.

2. A resolução de problemas e o GeoGebra

Desde a década de 1990, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [3] destacavam a MRP como ponto de partida da atividade matemática e discutiam caminhos para ensinar matemática, destacando-se, entre outras, a importância das TIC. Desse modo, formar estudantes criativos e versáteis, capazes de entender o processo como um todo, dotando-os de autonomia e iniciativa para resolver problemas em equipe e utilizar diferentes tecnologias e linguagens. Ainda nesse contexto apontava que:

> *[...] os alunos, confrontados com situações-problema, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.* [3, 1998, p. 52]

Atualmente, a BNCC [4] recomenda que os estudantes desenvolvam a capacidade de identificar possibilidades de utilização da matemática para resolver problemas, empregando conceitos, procedimentos e resultados para conseguir soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações, fazendo uso de verificação de conjecturas e da dedução de propriedades, a partir de outras. Agora, quanto à competência específica 3 do ensino médio que se refere à Resolução de Problemas no ensino da matemática, a BNCC [4] espera que os educandos tenham competência de

> *[...] identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada, no entanto, a Resolução de Problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.* [4, 2018, p. 535]

Contudo, em [10, 12], a MRP possibilita que os estudantes utilizem seus conhecimentos e desenvolvam a capacidade de administrar as informações ao seu redor. Desse modo, proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico, enfrentamento de novas situações e o conhecimento de aplicações da matemática.

Nossa proposta ou abordagem é fortemente centrada na atuação do docente, valorizando sua atuação diante de uma ferramenta tecnológica, concebendo o uso das TIC no ensino da matemática. Alinhado as concepções de [7, 11] vemos a existência de aplicativos, recursos ou ferramentas computacionais nos quais os estudantes podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma natural, o processo que caracteriza o "pensar matematicamente", ou seja, os estudantes fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para a resolução dos problemas. Destacamos algumas características desses aplicativos: conter um certo domínio de saber matemático; oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático (numérica, algébrica, geométrica) e permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Acerca das representações gráficas que articulam geometria e funções, em [7] apregoa que o GeoGebra abrange recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos e cálculos simbólicos em um único ambiente, permitindo construções geométricas com a utilização de pontos, retas, polígonos, entre outros. Especificamente, no GeoGebra é possível introduzir funções e modificar todos esses objetos dinamicamente mesmo após a conclusão da construção. E mais, equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas na sua forma explícita.

Como destacado em [2, 7], o GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmico que pode ser utilizado como ferramenta que apresenta aos estudantes possibilidades de vivenciarem processos criativos, estabelecer aproximações, juntar significados anteriormente desconexos e ampliar a capacidade de interlocução por meio das diferentes linguagens que tais recursos propiciam. Pactuado com esta análise, utilizamos o GeoGebra como ferramenta de ensino[6] para desenvolver as abordagens e os conceitos matemáticos na seção seguinte.

3. Ensino de funções exponenciais e logarítmicas

Nesta seção destacamos algumas competências e habilidades na BNCC [4], e desenvolvemos as propostas de atividades didáticas, orientadas pelas concepções de [12] conexo a MRP e mediada pelo GeoGebra. Tais atividades, apresentadas em separado e sequenciadas, estarão direcionadas a auxiliarem o docente no ensino de funções exponenciais e logarítmicas para o ensino médio.

As funções exponenciais e logarítmicas na BNCC [4] estão associadas à competência específica 1 do ensino médio, que é a utilização de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das ciências da natureza e humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. Nesta competência específica 1, salientamos as habilidades:

1. *Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.*
2. *Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatística apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.*
3. *Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade.*

[6]Ferramenta de ensino é uma facilitadora do ensino-aprendizado, com a função de contribuir para aprendizagem efetiva do educando.

4. *Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de infração, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.*
5. *Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.*

[4, 2018, p. 532-534]

Salientamos também a competência específica 5 do ensino médio que consiste em investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais; identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração mais formal na validação das referidas conjecturas. Focamos, em particular, a habilidade em investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando TIC, e, se apropriado, levar em conta a variação de dados numéricos,e, por fim, utilizar o plano cartesiano para descrever a relação observada.

Considerando essas competências e habilidades, enfatizamos que ensinar matemática no ensino médio deve ser mais do que exibir resultados para memorizar, ou seja, propor a construção ou elaboração do conhecimento matemático deve estar vinculado ao domínio de um saber pensar matemático, em atenção ao modo de pensar do estudante e às ferramentas de que dispõe ou tem acesso, motivando-o mediante a MRP.

Para criar as representações gráficas via campo de entradas algébricas, basta digitar no **Campo de Entrada** (na parte inferior da tela de visualização do aplicativo computacional GeoGebra) a sequência de comandos destacados após as figuras, ao digitar o comando no **Campo de Entrada**, pressione a tecla **ENTER** para a visualização da representação gráfica.

3.1. Atividade 1

Esta atividade relaciona conceitos da função exponencial à resolução de um problema que envolve as Ciências Biológicas. Tem como objetivo fazer com que os discentes consigam: reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; manipular expressões inerentes ao problema; identificar graficamente as variáveis e a situação de seu crescimento; montar e representar graficamente as tabelas; aprender acerca do tratamento de dados com a montagem de tabelas e construção gráfica.

SITUAÇÃO-PROBLEMA: O Coronavírus, que provoca a Covid-19, pode ser transmitido de uma pessoa para outra. A Organização Mundial da Saúde (OMS) afirma que a transmissão pode ocorrer através de gotículas de saliva ou muco, expelidos pela boca ou narinas quando uma pessoa infectada tosse ou espirra. Digamos que temos um crescimento no número de infectados de uma cidade que possui 19 mil e 683 habitantes em que, a cada três dias, a quantidade de pessoas doentes triplique. No primeiro dia, descobre-se um infectado, quantos dias serão necessários para que um terço da população dessa cidade esteja infectada. Considere que nenhuma medida seja adotada para o controle do crescimento dos infectados[7].

Compreensão do problema: O que é solicitado? Quantos dias serão necessários para que um terço da população esteja infectada? Quais são as condicionantes? Há 19683 habitantes, e a cada três

[7]Estas são apenas estipulações grosseiras a fim de contextualizar como se dá hipoteticamente o crescimento do Coronavírus.

dias a quantidade de pessoas doentes triplica e no primeiro dia descobre-se um infectado. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? "Sim". Faltam dados? "Não".

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados (informações fornecidas) e o que é solicitado. Momento de o educando desenvolver um plano para encontrar a quantidade de dias, encontrar a sequência de crescimento de infectados, organizar os dados para encontrar a expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que façam uma representação gráfica da situação. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre quantos dias ou ciclos serão necessários para atingir um terço da população.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos frente à resolução apresentada. Sejam I os números de infectados e c a quantidade de ciclos, sabemos que 1 ciclo equivale a 3 dias. Assim, considerando Tabela 1 e suas sucessões de

Quantidade de Ciclos	Números de Infectados	I	I(c)
1	1	1	3^0
2	3	3	3^1
3	9	$3 \cdot 3$	3^2
4	27	$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3}$	3^3
5	81	$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4}$	3^4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c		$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{c-1}$	3^{c-1}

Tabela 1: Relação entre Infectados e Ciclos.

valores, podemos generalizar a situação e obter a expressão que representa o número de infectados, que é $I(c) = 3^{c-1}$, sendo c a quantidade de ciclos.

Como um terço de 19683 é $\frac{1}{3} \cdot 19683 = 6561$. Como queremos encontrar a quantidade de ciclos que serão necessários para 6561 pessoas da cidade serem infectadas, ou seja, $I(c) = 6561$. De $I(c) = 3^{c-1}$, temos que $6561 = 3^{c-1}$; como $6561 = 3^8$, segue que $3^{c-1} = 3^8$, daí $c - 1 = 8$, logo $c = 9$. Sabendo que cada ciclo possui 3 dias, temos que $3 \cdot 9 = 27$. Portanto são necessários 27 dias para que um terço da população esteja infectada.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta interativa para identificar o número de infectados em função dos ciclos. Na Figura 1 temos a representação gráfica de uma função do tipo exponencial, $I(c) = b \cdot 3^{c-1}$, em que $b = 1$ é a quantidade inicial de infectados, enquanto c indica a quantidade de ciclos para os quais os números de infectados sofre variações. Caso queira outros valores para b, basta no comando 3 escolher o valor desejado quantas vezes quiserem, a partir de cada escolha a representação gráfica modificará de forma dinâmica e automática. E pela representação gráfica podemos identificar o crescimento da função que corresponde à situação-problema.

Para ativar a funcionalidade "Criar Controle(s) Deslizante(s)", basta pressionar a tecla **ENTER**.

Antes de inserir os comandos a seguir, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do *mouse* na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção **EixoX** : **EixoY** e após Clique o botão esquerdo do *mouse* na opção 1 : 1000. Lembrando que ao digitar cada comando, pressione a **ENTER**.

Comandos:

1. I(c) = b*3ˆ{c-1} ;

2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: *b* (Tecla ENTER) ;

3. b=1 ;

4. A=(9, 6561) .

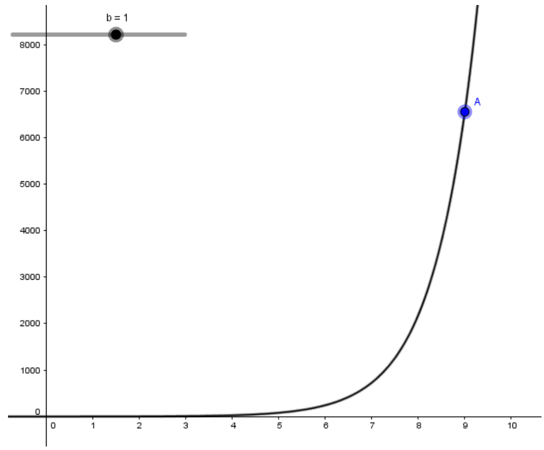

Figura 1: Representação Gráfica da Atividade 1.

3.2. Atividade 2

Esta atividade relaciona conceitos de potenciação e função logarítmicas à resolução de um problema de aplicação que envolve outras áreas do conhecimento como a Física e Geologia. Tem como objetivo fazer com que os discentes consigam: valorizar a leitura e interpretação; reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; identificar a necessidade do uso de logaritmos na resolução de equações inerentes ao problema; utilizar conceitos de função logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (UPE−2012) : Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando tsunamis. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é:

$$\mathrm{M(E)} = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E_0}}\right),$$

sendo M a magnitude do terremoto, E a energia liberada (em *joules*) e $\mathrm{E_0} = 10^{4,5}$ *joules* é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência. Determinar a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2011, que atingiu magnitude 9 na Escala Richter.

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto? Quais são as condicionantes? Esse terremoto atingiu magnitude 9 na Escala Richter e é dada a grandeza da energia liberada $\mathrm{E_0}$ usada como referência. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? "Sim". Faltam dados? "Não".

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento de o educando desenvolver um plano para encontrar a grandeza da energia liberada, adquirir o discernimento de como substituir os valores disponíveis e aplicar na expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que desenhem uma representação gráfica da situação, juntamente com análise das consequências de alteração dos valores. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre qual a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão que atingiu magnitude 9.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos diante da resolução apresentada. Queremos o valor de E, sabemos que $M(E) = 9$. De $M(E) = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ temos que $9 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$. Como $E_0 = 10^{4,5}$, obtemos $9 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right)$, logo $\frac{27}{2} = \log\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right)$; usando propriedades de potência temos que

$$10^{\frac{27}{2}} = 10^{\log\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right)},$$

assim $10^{\frac{27}{2}} = \frac{E}{10^{4,5}}$, então $10^{13,5+4,5} = E$. Portanto, $E = 10^{18}$. Concluímos que a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto é 10^{18} *joules*.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para visualização da representação gráfica da função. Na Figura 2 temos a representação gráfica de uma função logarítmica, $M(E) = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ com $E_0 = 10^{4,5}$ que, é energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência, enquanto E indica a ordem de grandeza da energia liberada por um terremoto para o qual a quantidade dos elementos sofrem variações. Pela Figura 2 podemos visualizar que E precisa de valores extremamente grandes para que M(E) atinja valores positivos, ou seja, acima do eixo x. E também que a função M é crescente.

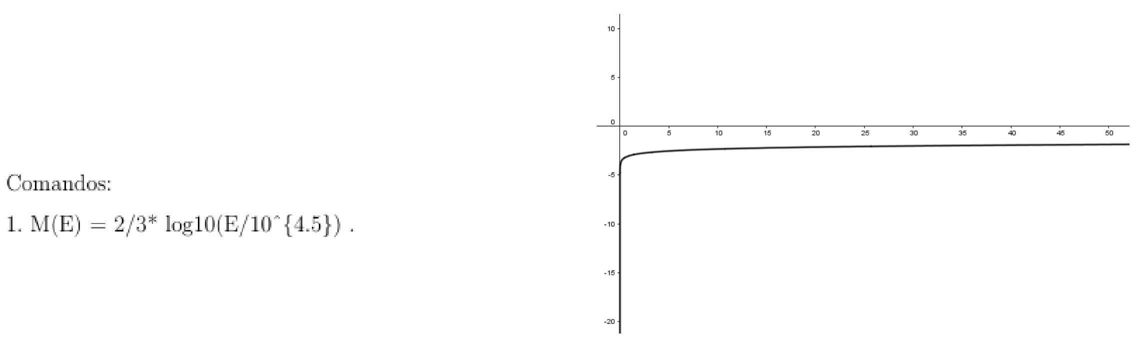

Figura 2: Representação Gráfica da Atividade 2.

3.3. Atividade 3

Esta atividade relaciona conceitos da função do tipo exponencial à resolução de um problema de aplicação que envolve outras áreas do conhecimento como a Química e Antropologia. Tem como objetivo fazer com que os discentes consigam: valorizar a leitura e interpretação; manipular expressões inerentes ao problema; utilizar conceitos de função exponencial e logaritmos para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (ENEM−2013) : Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material reduza-se à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos, e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $\mathrm{M(t) = A \cdot (2,7)^{k \cdot t}}$, sendo A a massa inicial e k é uma constante negativa. Considere $\log 2 = 0,3$. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 reduza-se a 10% da quantidade inicial?

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual o tempo, em anos, para que a massa do césio-137 reduza-se a 10% da quantidade inicial. Quais são as condições? A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão dada. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? “Sim”. Faltam dados? “Não”.

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento de o educando desenvolver um plano para encontrar o tempo para que a massa reduza-se a 10%, adquirir o discernimento de como substituir os valores disponíveis, aplicar na expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que desenhem a representação gráfica da situação, juntamente com análise das consequências de alteração dos valores. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre quanto tempo (em anos) para a massa reduzir a 10% da quantidade inicial.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos frente à resolução apresentada. Sabemos que a meia-vida do césio-137 é de 30 anos. Aplicando esse valor à expressão $\mathrm{M(t) = A \cdot (2,7)^{k \cdot t}}$, podemos substituir o tempo t por 30 e a massa A, quando t = 30, por $\frac{\mathrm{A}}{2}$. Desse modo $\frac{\mathrm{A}}{2} = \mathrm{A} \cdot (2,7)^{\mathrm{k} \cdot 30}$, logo $(2,7)^{30 \cdot \mathrm{k}} = \frac{1}{2}$, que equivale a $(2,7)^{30 \cdot \mathrm{k}} = 2^{-1}$. Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros, obtemos que $\log(2,7)^{30 \cdot \mathrm{k}} = \log 2^{-1}$, segue que $30 \cdot \mathrm{k} \cdot \log(2,7) = -1 \cdot \log 2$. Como $\log 2 = 0,3$, temos que $30 \cdot \mathrm{k} \cdot \log(2,7) = -0,3$, então $\log(2,7) = -\frac{0,01}{\mathrm{k}}$.

Agora, desejamos obter quanto tempo a massa será apenas 10% da massa inicial, ou seja, $0,1 \cdot \mathrm{A}$. Desse modo, temos que $0,1 \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A} \cdot (2,7)^{\mathrm{k} \cdot \mathrm{t}}$, logo $(2,7)^{\mathrm{k} \cdot \mathrm{t}} = 0,1$. Aplicando o logaritmo decimal a ambos os membros, obtemos que $\log(2,7)^{\mathrm{k} \cdot \mathrm{t}} = \log 10^{-1}$; segue que $\mathrm{k} \cdot \mathrm{t} \cdot \log(2,7) = -1$. Sabendo que $\log(2,7) = -\frac{0,01}{\mathrm{k}}$, temos que $\mathrm{k} \cdot \mathrm{t} \cdot \left(-\frac{0,01}{\mathrm{k}}\right) = -1$, logo $\mathrm{t} \cdot 0,01 = 1$, então $\mathrm{t} = \frac{1}{0,01} = 100$. Portanto, em 100 anos, a massa do césio-137 será reduzida para 10% da quantidade inicial.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para verificar a variação da massa no decorrer do tempo. Na Figura 3 temos a representação gráfica de uma função do tipo exponencial, $M(t) = a \cdot (2,7)^{k \cdot t}$, sendo $k = -\dfrac{0,01}{\log(2,7)}$, considerando $\log(2,7) = 0,431363764$, temos que k é aproximadamente $-0,02318229$, e a massa inicial consideramos $a = 1$ unidade (u), enquanto t indica o tempo (em anos) para o qual a quantidade dos elementos sofrem variações. Caso queira outros valores para a, basta no comando 3 escolher o valor desejado quantas vezes quiserem, a partir de cada escolha a representação gráfica modificará de forma dinâmica e automática. E pela representação também podemos verificar o decrescimento da função que corresponde à situação-problema.

Por intermédio dos pontos destacados na Figura 3 podemos visualizar que quando t está variando (de 30 a 30 anos) a massa do material radioativo M(t) reduz-se à metade da massa anterior.

Antes de inserir os comandos, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do *mouse* na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção **EixoX** : **EixoY** e após Clique o botão esquerdo do *mouse* na opção 50 : 1.

Comandos:

1. M(t) = a*(2.7)^{-0.02318229*t} ;
2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: *a* (Tecla ENTER) ;
3. a=1 ;
4. A=(0, 1) ;
5. B=(30, 0.5) ;
6. C=(60, 0.25) ;
7. D=(90, 0.125) ;
8. E=(120, 0.0625) .

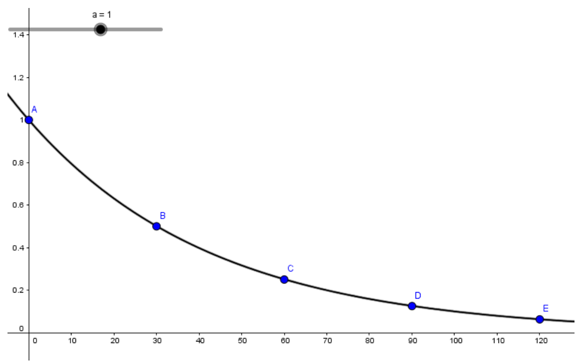

Figura 3: Representação Gráfica da Atividade 3.

3.4. Atividade 4

Esta atividade relaciona conceitos da função exponencial e logaritmos à resolução de um problema na Matemática Financeira. Tem como objetivo fazer com que os discentes consigam: reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; manipular expressões inerentes ao problema; identificar graficamente as variáveis e a situação de seu crescimento; formalizar a lei que descreve um determinado fenômeno; aprender acerca do tratamento de dados com a montagem de tabelas e construção gráfica.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (MIRANDA; ASSIS, [s.d.]) : O Senhor Francisco possui um capital de 10000 reais e deseja investi-lo em um Banco que detém rendimentos a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Qual é a quantidade mínima de anos para que o montante de Francisco seja maior que o dobro do capital inicial. Considere $\log\ 2 = 0,3$ e $\log\ 3 = 0,48$.

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual é a quantidade mínima de anos para que o montante seja maior que o dobro do capital inicial? Quais são as condições? Capital de 10000 reais aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? "Sim". Faltam dados? "Não".

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento de o educando desenvolver um plano para encontrar a quantidade mínima de anos, encontrar a sequência de crescimento dos juros, organizar os dados para encontrar a expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que faça uma representação gráfica da situação. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre a quantidade mínima de anos para que o montante seja maior que o dobro do capital inicial.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos. Sejam $\mathrm{M(t)}$ o montante desta aplicação após t anos e C o capital aplicado. Se $\mathrm{t} = 1$ teremos $\mathrm{M}(1) = \mathrm{C} \cdot 1,08$, se $\mathrm{t} = 2$ disporemos $\mathrm{M}(2) = \mathrm{C} \cdot (1,08) \cdot (1,08) = \mathrm{C} \cdot (1,08)^2$, se $\mathrm{t} = 3$ possuiremos $\mathrm{M}(3) = \mathrm{C} \cdot (1,08) \cdot (1,08) \cdot (1,08) = \mathrm{C} \cdot (1,08)^3$, e se $\mathrm{t} = 4$ teremos $\mathrm{M}(4) = \mathrm{C} \cdot (1,08) \cdot (1,08) \cdot (1,08) \cdot (1,08) = \mathrm{C} \cdot (1,08)^4$, generalizando para t anos temos que

$$\mathrm{M(t)} = \mathrm{C} \cdot \underbrace{(1,08) \cdot (1,08) \cdot \cdots \cdot (1,08)}_{\mathrm{t}} = \mathrm{C} \cdot (1,08)^{\mathrm{t}}.$$

Então, $\mathrm{M(t)} = \mathrm{C} \cdot (1,08)^{\mathrm{t}}$.

Desse modo, como queremos que $\mathrm{M(t)} = 2 \cdot \mathrm{C}$, temos que $2 \cdot \mathrm{C} = \mathrm{C} \cdot (1,08)^{\mathrm{t}}$, assim $2 = (1,08)^{\mathrm{t}}$. Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros obtemos que $\log 2 = \log(1,08)^{\mathrm{t}}$. Podemos reescrever $1,08$ como $\dfrac{2^2 \cdot 3^3}{100}$, desta forma:

$$\log 2 = \log \left(\frac{2^2 \cdot 3^3}{100}\right)^{\mathrm{t}},$$

assim $\log 2 = \mathrm{t} \cdot \left(\log 2^2 + \log 3^3 - \log 100\right)$, daí $\log 2 = \mathrm{t} \cdot (2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 - \log 100)$. Como $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$. Segue que $0,3 = \mathrm{t} \cdot (2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,48 - 2)$, logo $0,3 = \mathrm{t} \cdot (0,6 + 1,44 - 2)$. Então, $\mathrm{t} = \dfrac{30}{4} = 7,5$. Portanto, a quantidade mínima de anos para que o montante seja maior que o dobro do capital aplicado é 8 anos.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para testes práticos alternativos para identificar a variação do montante no decorrer do tempo de aplicação e analisar quais os valores de t que aproxima de $\mathrm{M(t)} = 20000$. Na Figura 4 obtemos a representação gráfica de uma função do tipo exponencial, $\mathrm{M(t)} = 10000 \cdot (1,08)^{\mathrm{t}}$, temos que t indica a variação de tempo (em anos) da aplicação do C para o qual a quantidade dos elementos sofre variações. E pela representação gráfica podemos verificar o crescimento da função que corresponde à situação-problema

Por intermédio dos pontos destacados na Figura 4 podemos visualizar que quando $\mathrm{t} = 9$ temos que $\mathrm{M(t)} = 10000 \cdot (1.08)^9 = 19990,05$, e já quando $\mathrm{t} = 10$ temos que

$$\mathrm{M(t)} = 10000 \cdot (1.08)^{10} = 21589,25.$$

Ao analisamos a representação gráfica verificamos que a quantidade mínima de anos para que o montante seja maior que o dobro do capital aplicado é 10 anos. Com isso, ao sabemos que a nossa solução para o problema estar utilizando aproximações para $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$, obtivemos um valor para $\mathrm{M(t)}$ menor que o dobro do capital aplicado, pois com $\mathrm{t} = 8$ temos que

$$\mathrm{M(t)} = 10000 \cdot (1.08)^8 = 18509,3\ .$$

Antes de inserir os comandos, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do *mouse* na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção **EixoX** : **EixoY** e após Clique o botão esquerdo do *mouse* na opção 1 : 1000.

Comandos:

1. M(t) = 10000*(1.08)^t ;
2. A=(9, 10000*(1.08)^9) ;
3. B=(10, 10000*(1.08)^10) ;
4. C=(8, 10000*(1.08)^8) .

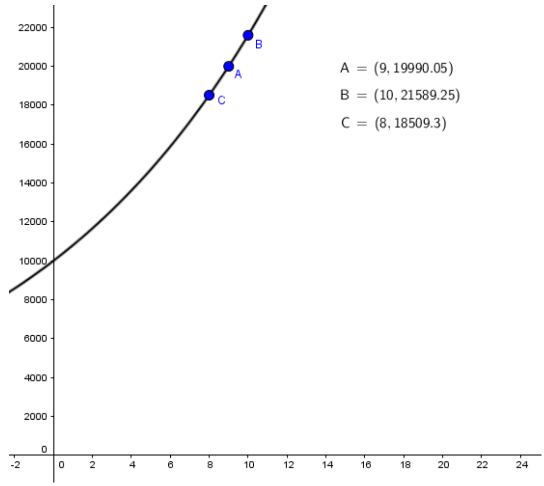

Figura 4: Representação Gráfica da Atividade 4.

3.5. Atividade 5

Esta atividade relaciona conceitos da função exponencial à resolução de um problema a respeito do jogo de xadrez. Tem como objetivo fazer com que os discentes consigam: reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; identificar graficamente as variáveis e a situação de seu crescimento; representar graficamente os valores de uma tabela; aprender acerca do tratamento de dados com a montagem de tabelas e construção gráfica.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (MIRANDA; ASSIS, [s.d.]) : Há uma lenda que credita a invenção do xadrez a um brâmane de uma corte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de trigo da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente.

a) De acordo com a lenda, qual é quantidade de grãos de trigo correspondente à casa 8 do tabuleiro?

b) Escreva uma função que expresse a quantidade de grãos de trigo em função do número de casas do tabuleiro.

c) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de trigo devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez.

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual é quantidade de grãos de trigo correspondente à casa 8, expressão que representa a situação, e quantos grãos devem ser colocados na última casa. Quais são as condições? Colocar 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. É possível satisfazer as condições, e elas são suficientes ou não para determinar a solução? “Sim”. Faltam dados? “Não”.

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento de o educando desenvolver um plano para encontrar as soluções, encontrar a sequência de crescimento dos grãos de trigos, organizar os dados na forma de tabela, para, daí, identificar a expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que desenhem a representação gráfica da situação, juntamente com alguns pontos inteiros em destaque. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre as interrogações dos itens a), b) e c).

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos frente à resolução apresentada. Sejam G(c) os números de grãos de trigo e c os números de casas.

Quantidade de Casas	Números de Grãos	G(c)	G(c)
1	1	1	2^0
2	2	2	2^1
3	4	$2 \cdot 2$	2^2
4	8	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3}$	2^3
5	16	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4}$	2^4
6	32	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5}$	2^5
7	64	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6}$	2^6
8	128	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{7}$	2^7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c		$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{c-1}$	2^{c-1}

Tabela 2: Relação entre Grãos e Casas.

Assim, considerando Tabela 2 e suas sucessões de valores, podemos generalizar a situação e obter a expressão que representa a quantidade de grãos, $G(c) = 2^{c-1}$ onde c é os números naturais de casas que pertence de 1 a 64. Agora, na Tabela 2, observa-se que na casa 8, há 128 grãos de trigo. A quantidade de grãos de trigo que devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez será 2^{63}, pois $c = 64$.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para testes práticos para identificar a quantidade de grãos em função do número de casas no tabuleiro. Na Figura 5 temos a representação gráfica de uma função exponencial, $G(c) = 2^{c-1}$; temos que c indica a quantidade de casas em que os números de grãos sofrem variações. E com os pontos em destaque na representação gráfica, podemos verificar o crescimento da função que corresponde a situação-problema.

Antes de inserir os comandos, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do *mouse* na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção **EixoX** : **EixoY** e após Clique o botão esquerdo do *mouse* na opção 1 : 100.

Comandos:

1. G(c) = 2^{c-1} ;
2. A=(5, 16) ;
3. B=(6, 32) ;
4. C=(7, 64) ;
5. D=(8, 128) ;
6. E=(9, 256) ;
7. F=(10, 512) ;

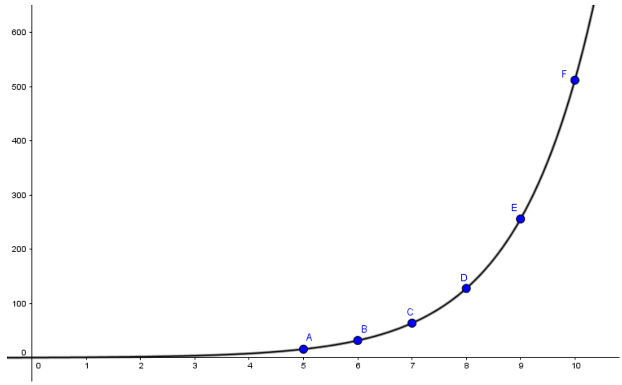

Figura 5: Representação Gráfica da Atividade 5.

3.6. Atividade 6

Esta atividade relaciona conceitos da função logarítmica à resolução de um problema de Intensidade Sonora que está intimamente relacionado à Física. Tem como objetivo fazer com que os discentes consigam: reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; manipular expressões inerentes ao problema; identificar graficamente as variáveis e a situação de seu crescimento; utilizar conceitos de função logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (UEPA−2007) : Os carnavais conseguem reunir uma grande quantidade de pessoas que se divertem ao som dos famosos Trios Elétricos. Os frequentadores desses eventos ficam submetidos a uma excessiva exposição sonora, que podem causar dores e lesões auditivas. A expressão utilizada para medir o Nível de Intensidade Sonora (NIS), em decibel (dB), é dada por:

$$\mathrm{NIS} = 10 \cdot \log\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right),$$

sendo I a intensidade de energia qualquer, e I_0 a intensidade de energia do limiar de audição. A nocividade auditiva começa a partir de 80 dB. Se em um desses eventos descritos acima a intensidade de energia for quadruplicada, qual será o NIS? Considere $\log 4 = 0,6$.

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual o NIS? Quais são as condições? Se intensidade de energia for quadruplicada, é possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? “Sim”. Faltam dados? “Não”.

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento de o educando desenvolver um plano para encontrar o NIS, adquirir o discernimento de como substituir os valores disponíveis, aplicar na expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que desenhem a representação gráfica da situação. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre qual será o novo NIS.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos frente à resolução. Querendo quadruplicar a intensidade de energia, temos que

$$\mathrm{NIS} = 10 \cdot \log\left(\frac{4 \cdot \mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right),$$

logo $\mathrm{NIS} = 10 \cdot (\log 4 + \log \mathrm{I} - \log \mathrm{I}_0)$, assim $\mathrm{NIS} = 10 \cdot \log 4 + 10 \cdot (\log \mathrm{I} - \log \mathrm{I}_0)$. Como $\log 4 = 0,6$, segue que $\mathrm{NIS} = 10 \cdot 0,6 \;+\; 10 \cdot \log\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right)$, daí $\mathrm{NIS} = 6 \;+\; 10 \cdot \log\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right)$.

Sabemos que $\mathrm{NIS} = 10 \cdot \log\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right)$. Então, $\mathrm{NIS} = 6 + \mathrm{NIS}$. Portanto, quando a intensidade de energia for quadruplicada o NIS aumentará 6 dB.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para identificar a intensidade sonora em função das intensidade de energia. Na Figura 6 temos a representação gráfica das funções logarítmicas que mede o NIS, asim $\mathrm{N(I)} = 10 \cdot \log\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right)$ e $\mathrm{N}_0(\mathrm{I}) = 10 \cdot \log\left(\frac{4 \cdot \mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right)$ com $\mathrm{I}_0 = 10^{-12}$ que é intensidade sonora de referência, correspondente ao limiar da audição, enquanto I indica a intensidade de energia qualquer para o qual a quantidade dos elementos sofre variações. Pela Figura 6 podemos visualizar que ao quadruplicamos o valor de I obtemos a diferença de 6 unidade (no nosso caso de dB) em relação a $\mathrm{N(I)}$ e $\mathrm{N}_0(\mathrm{I})$. Pois ao analisamos os pontos A e B temos que possuem o mesmo valor de I e uma diferença de 6 dB entre $\mathrm{N(I)}$ e $\mathrm{N}_0(\mathrm{I})$. Isso também acontece ao analisamos os pontos C e D. Outro fato que podemos verificar é que as funções são crescentes.

Antes de inserir os comandos, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do *mouse]* na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção **EixoX** : **EixoY** e após Clique o botão esquerdo do *mouse* na opção 1 : 100.

Comandos:

1. N(I) = 10* log10(I* 10ˆ12) ;
2. N_{0}(I) = 10* log10(4*I* 10ˆ12) ;
3. A=(0.08, 10* log10(0.08* 10ˆ12)) ;
4. B=(0.08, 10* log10(4*0,08* 10ˆ12)) ;
5. C=(0.1, 10* log10(0.1* 10ˆ12)) ;
6. D=(0.1, 10* log10(4*0.1* 10ˆ12))

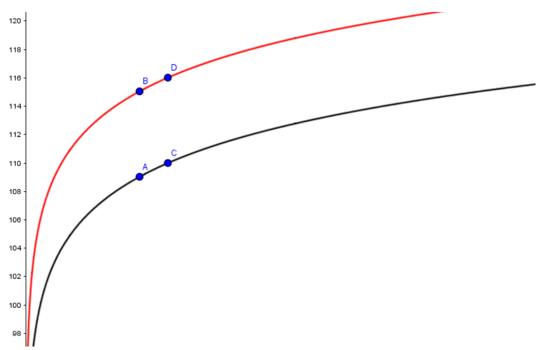

Figura 6: Representação Gráfica da Atividade 6.

4. Considerações

Nosso objetivo foi propor ou apresentar uma sequência de atividades destinadas ao estudo de funções logarítmicas e exponenciais, utilizando o aplicativo computacional Geogebra como ferramenta de ensino e a resolução de problemas como instrumento metodológico. A possibilidade de apresentar atividades abordando funções e utilizando MRP permite que tal conteúdo não seja estudado apenas seguindo o roteiro da *aula-padrão*: definição, propriedades e exercícios. Apresentamos uma proposta em que tais situações (aplicações) podem ser exploradas por meio de um recurso digital fácil de ser encontrado e instalado, o GeoGebra. Com esse exemplo esperamos que os professores reflitam sobre as diversas possibilidades ou formas de abordar determinados assuntos ou conteúdos por meio de situações dinâmicas, em que os estudantes possam fazer verificações e assim estimular o envolvimento com a disciplina. Outro ponto de reflexão para aqueles que ensinam matemática na Educação Básica é a oportunidade de vincular os conteúdos estudados com aspectos do cotidiano ou interdisciplinares.

Referências

[1] Agustini, Edson; Lopes, Érika . C. Variações de Parâmetros em Funções: proposta e experiência didática remota com o GeoGebra. **Professor de Matemática Online**, v.9, n°1, p. 36-56, 2021.

[2] Alencar, H. *et al.* O GeoGebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações em Geometria. **Professor de Matemática Online**, v.10, n°4, p. 482-501, 2022.

[3] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio. Brasília, DF, 1998.

[4] ________. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília, DF, 2018.

[5] Costa, E. A. ; Gomes, A. R. A Influência do uso de Tecnologias no Ensino da Matemática. **Tecnologia Educacional** - ANO XXXIV, n°172/173, p. 35-43, jan./jun. 2006.

[6] Gil, A. C. **Como Elaborar Projeto de Pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

[7] Giraldo, V., Caetano, P. e Mattos, F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. UFRJ, UFSCar, Uerj/CP2. (2012), 240p.

[8] Miranda, T.; Assis, C. **Portal da Matemática Obmep**: Módulos de Ensino. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/index?a=1#5>. Acesso em: 15 de março de 2020.

[9] Monteiro, S. M. **Glossário Ceala**: Atividade didática. Disponível em: <http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale/verbetes/atividade-didatica>. Acesso em: 25 de setembro de 2020.

[10] Onuchic, L. de la R. **A Resolução de Problemas na Educação Matemática**: Onde estamos e para onde iremos? Passo Fundo, v. 20, n°1, p. 88-104, jan./jun. 2013. Disponivel em: <www.upf.br/seer/index.php/rep>. Acesso em: 26 de maio de 2020.

[11] Pinto, R. A. C.; De Souza, R. N. P. M. GeoGebra como andaime: uma experiência na resolução de problemas de Geometria. **Remat: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 7, n°1, p. e2002-e2002, 2021.

[12] Polya, G. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p. Tradução de: How to solve it.

[13] Silva, V. C. **Uma proposta para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas**: usando a resolução de problemas mediada pelo GeoGebra. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Tocantins, Arraias, TO, 2020.

[14] Züge, B. L. et al. A resolução de problemas de geometria com o auxílio da plataforma Virtual Math Teams e do software GeoGebra. **Professor de Matemática Online**, v.9, n°1, p. 187-200, 2021.

Eudes Antonio Costa
Universidade Federal do Tocantins-UFT, Arraias, Colegiado de Matemática, Brasil
<eudes@uft.edu.br>

Vilmar Costa Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima, Amajari, Brasil
<vilmar.silva@ifrr.edu.br>

Jabson da Cunha Silva
Centro Universitário Católica do Tocantins-Unicatolica, Palmas, Brasil
<jabson.cunha@catolica-to.edu.br>

Recebido: 26/06/2022
Publicado: 22/12/2022