


O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell

João Luzeilton de Oliveira 

Resumo

Mostramos a relação entre o retângulo de prata e a razão de prata, bem como algumas propriedades dessa razão e sua relação com o mundo que nos cerca, através do papel A4, e do octógono regular com sua presença na Arquitetura Ocidental. Além disso, apresentamos situações onde há evidências de que a razão de prata ocorre, também, na Arquitetura Oriental. Este artigo tem como objetivo mostrar como a razão de prata está intimamente ligada à sequência de Pell. Queremos com isso apresentar uma Matemática que pode ser trabalhada de forma interdisciplinar com outras áreas do conhecimento humano, evidenciando como a mesma está presente em nossas vidas, mesmo não a enxergando. É uma sinalização da importância de o professor conhecer bem o que ensina e, além disso, conhecer um pouco sobre outras áreas para facilitar a aprendizagem do aluno e aperfeiçoar cada vez mais o seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Retângulo de prata; Razão de prata; Sequência de Pell; Octógono regular; Arquitetura.

Abstract

We show the relationship between the silver rectangle and the silver ratio, as well as some properties of this ratio and its relationship with the world around us, through A4 paper, and the regular octagon with its presence in Western Architecture. Furthermore, we present situations where there is evidence that the proportion of silver also occurs in Eastern Architecture. This article aims to show how the silver ratio is closely linked to the Pell's sequence. With this we want to present a Mathematics that can be worked in an interdisciplinary way with other areas of human knowledge, showing how it is present in our lives, even if we do not see it. It is a sign of the importance of the teacher knowing well what he teaches and, in addition, knowing a little about other areas to facilitate student learning and increasingly improve their own knowledge.

Keywords: Silver rectangle; Silver ratio; Pell's sequence; Regular octagon; Architecture.

1. Introdução

Apresentamos a relação entre o retângulo de prata e a razão de prata e, como resultado principal deste artigo, a relação entre a razão de prata e a sequência de Pell. Inicialmente, vamos considerar a equação

$$x^2 - px - q = 0, \quad (1)$$

p e q inteiros positivos, cujas raízes são $x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} > 0$ e $x_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} < 0$, pois $p < \sqrt{p^2 + 4q}$. Para o nosso propósito, será necessário considerar apenas a raiz positiva da Equação (1), que representamos por

$$x_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}. \quad (2)$$

Os números $x_{p,q}$, em (2), são irracionais ou inteiros. De fato, quando $q = n(n + p)$ temos que $p^2 + 4n(n + p)$ é um quadrado perfeito e, portanto, $p + \sqrt{p^2 + 4n(n + p)}$ é múltiplo de 2, o que mostra, nesse caso, que $x_{p,q}$ é inteiro positivo. Agora, quando $p^2 + 4q$ não é quadrado perfeito, temos que $x_{p,q}$ é irracional positivo.

Em [5], Vera Spinadel¹ (Figura 1) introduziu uma família de números reais positivos, cujos membros são representados por (2), batizando-a de *Números Metálicos* ou *Razões Metálicas*, as quais passamos a tratá-los como *razões* (razão de ouro, razão de prata,...). Entre os membros dessa família estão, nessa ordem, a *razão de ouro*, a *razão de prata*, a *razão de bronze*, e outras mais, que levam sempre o nome de um metal. Por estarem ligados aos retângulos de tipos que iremos construir na Seção 2, entre os $x_{p,q}$ dados pela Equação (2), consideraremos apenas aqueles que são irracionais positivos, ou seja, os que são da forma

$$x_{p,1} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}, \quad (3)$$

com $q \geq 1$.



Figura 1: Vera Spinadel

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Vera_de_Spinadel

Observemos que se $p = 1$ e $q = 1$, então a equação $x^2 - x - 1 = 0$ tem $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ como raiz positiva, conhecida como razão de ouro, desde os gregos, com Euclides. Essa razão proporciona harmonia e beleza e aparece na Natureza e em diversas áreas do conhecimento humano, como Engenharia,

¹Vera Martha Winitzky de Spinadel, matemática argentina (1929 - 2017).

Arquitetura, Design, Música, Arte Renascentista e Cinema [6, 7, 8]. A razão de ouro é base de um sistema de proporções usado na Arquitetura Moderna, o *Modulor*, criado pelo arquiteto e urbanista francês Charles-Edouard Jeanneret-Gris (1887-1965), conhecido como *Le Corbusier*. É também conhecida sua relação com o retângulo de ouro (retângulo áureo), bem como sua estreita relação com a sequência definida pela recorrência $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, chamada *sequência de Fibonacci*, cujos termos 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... são chamados *números de Fibonacci*. O número ϕ está relacionado com a *sequência de Fibonacci* assim, $\phi = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$, como em [2].

Agora, se $p = 2$ e $q = 1$, então a equação $x^2 - 2x - 1 = 0$ tem $\delta = 1 + \sqrt{2}$ como raiz positiva, batizada por Spinadel como razão de prata em alusão à razão de ouro, a qual passamos a explorar e mostrar algumas de suas propriedades, relação com o retângulo de prata, com o octógono regular e sua presença nas arquiteturas antiga e moderna, tanto no ocidente quanto no oriente. Após escavações feitas nas Casas Jardim de Ostia, entre 1938 e 1942, em um antigo porto romano, perto da foz do rio Tibre, foram encontrados vestígios do uso de um Sistema Romano de Proporções. Existem fortes evidências de que os números δ e $\sqrt{2} = \delta - 1$ eram usados como bases desse sistema [10, 11].

A razão de prata, assim como a razão de ouro, é de relevante importância para a Matemática, pois além de suas conexões com a própria Matemática, tem suas propriedades ligadas ao mundo que nos cerca, como, por exemplo, na Arquitetura Romana, através de sistemas de proporções utilizados pelos romanos nos séculos 1 e 2 da era cristã [10, 11] e em alguns sistemas de proporções usados na música [12], além de ser empregada na indústria gráfica [9, 13]. Neste artigo, estudaremos as propriedades da razão de prata relacionando-as com o retângulo de prata, papel A4 e octógono regular, o qual dá forma ao cimborrio da Catedral de Burgos, bem como com a Arquitetura Japonesa [1, 4]. Além disso, estabeleceremos algumas identidades que envolvem os números de Pell, como determinar um número de Pell a partir da razão de prata, e a relação íntima entre a razão de prata e a sequência de Pell.

A título de curiosidade, se $p = 3$ e $q = 1$, $p = 1$ e $q = 2$, $p = 1$ e $q = 3$, e $p = 2$ e $q = 2$, então a Equação (2) fornece-nos as razões de bronze, cobre, níquel e platina, respectivamente. Essas razões não serão estudadas aqui, mas, assim como as razões de ouro e de prata, elas têm as suas devidas importâncias e apresentam propriedades ligadas a outros sistemas de proporções usadas, por exemplo, na Arquitetura [10, 11], e no estudo do comportamento das soluções de sistemas dinâmicos não lineares [5].

2. O retângulo de prata

Nesta seção, vamos definir e construir o retângulo de prata e apresentar a sua relação com o mundo que nos cerca, mais precisamente com a indústria gráfica, através do papel A4.

Definição 1. Um retângulo ABCD (Figura 2a) será chamado retângulo de prata (retângulo romano) se dele forem suprimidos dois quadrados, como ABEF e EFGH, restando um retângulo HGDC, semelhante ao retângulo original. Isto significa que se $2a + b$ e a , com $a > b$, são as medidas dos lados do retângulo original, então

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b}, \quad (4)$$

que é equivalente a

$$a^2 - 2ab - b^2 = 0. \quad (5)$$

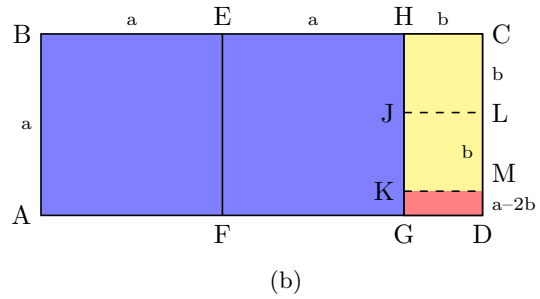
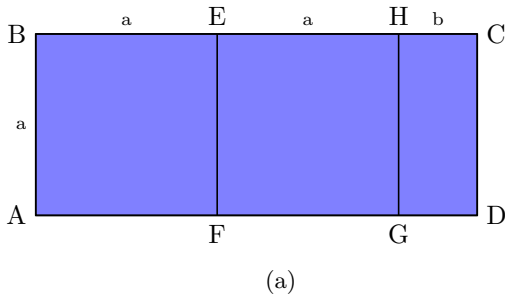


Figura 2: Retângulo de prata
 Fonte: Autoria própria

Observemos na Figura 2b que se do retângulo restante HGDC, de lados a e b , $a > b$, retiram-se dois quadrados de maior área possível (quadrado de lado b), restará um retângulo de lados b e $a - 2b$, $b > a - 2b$; se, deste, forem retirados dois quadrados de maior área possível (quadrado de lado $a - 2b$), restará um retângulo de lados $a - 2b$ e $5b - 2a$, $a - 2b > 5b - 2a$, e, assim, continuando esse processo, chega-se a um retângulo em que o maior lado é o lado menor do retângulo anterior, e o menor lado, o maior lado desse menos duas vezes o menor dos lados desse retângulo. Dessa maneira, se o retângulo de lados medindo $2a + b$ e a é um retângulo de prata, então o retângulo de lados a e b , também será um retângulo de prata, e assim, de (4), segue que

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a - 2b} = \frac{a - 2b}{5b - 2a} = \frac{5b - 2a}{5a - 12b} = \frac{5a - 12b}{29b - 12a} = \frac{29b - 12a}{29a - 70b} = \dots \quad (6)$$

e, portanto, também são de prata os retângulos de lados

$$b \text{ e } a - 2b, \quad a - 2b \text{ e } 5b - 2a, \quad 5b - 2a \text{ e } 5a - 12b, \quad 5a - 12b \text{ e } 29b - 12a, \dots \quad (7)$$

(Figura 2b). Assim, se a e b , $a > b$, são números positivos satisfazendo (6), então a sequência

$$2a + b, \quad a, \quad b, \quad a - 2b, \quad 5b - 2a, \quad 5a - 12b, \quad 29b - 12a, \dots \quad (8)$$

em que seus termos, a partir do terceiro, coincidem com os termos da sequência

$$2a + b, \quad a, \quad b, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \dots, \quad (9)$$

em que

$$a_2 = a - 2b, \quad a_3 = b - 2a_2 = 5b - 2a, \quad a_4 = (a - 2b) - 2a_3 = 5a - 12b, \quad \dots, \quad (10)$$

ou seja,

$$a_2 = a - 2b, \quad a_3 = b - 2a_2, \quad a_4 = a_2 - 2a_3, \quad \dots \quad (11)$$

Isso significa que se $a > b$ são lados do primeiro retângulo restante, então $b > a_2$ são os lados do segundo retângulo restante, e, assim, o n -ésimo retângulo restante, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, tem lados a_{n-1} e a_n , com $a_{n-1} > a_n$, e se origina de um retângulo de lados a_{n-2} e a_{n-1} , com $a_{n-2} = a_n + 2a_{n-1}$ e, portanto,

$$a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1}, \quad (12)$$

com $a_{n-2} > a_{n-1}$, $n \geq 4$. Todos os termos dessa sequência são positivos e tendem a zero, à medida que aumentamos o número de retângulos construídos como em (6), todos semelhantes ao retângulo original, e dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência são lados de um retângulo de prata.

No Lema 1, Seção 4, mostraremos que a_n , em (12), pode ser expressa em termos de a e b e de dois termos consecutivos da sequência de Pell.

Ainda sobre os retângulos de prata, um fato importante que demonstraremos a seguir é que seus lados são incomensuráveis, conforme a Figura 2a.

Demonstração. De fato, se fossem esses lados comensuráveis, então existiria um inteiro positivo u , de modo que

$$AD = (2a + b)u \quad \text{e} \quad AB = au,$$

em que a e b seriam inteiros positivos. E daí, todos os termos da sequência (8) seriam inteiros positivos, o que é um absurdo, pois não existe uma sequência infinita e decrescente formada por números inteiros positivos. Dessa maneira, os lados de um retângulo de prata são grandezas incomensuráveis. \square

2.1. Construção do retângulo de prata

Dado um segmento \overline{AG} de comprimento $2a$, tome $F \in \overline{AG}$ de modo que $AF = FG = a$. Construa por G , o segmento \overline{HG} , de modo que $HG = FG = a$ e $\overline{HG} \perp \overline{AG}$. Com centro em F e raio FH , trace o arco \widehat{HD} , com D pertencente à semirreta \overrightarrow{FG} , G entre F e D , e $GD = b$. Por um lado, $FH = FG + GD = a + b$ e, por outro, $FH = a\sqrt{2}$, e assim, $a + b = a\sqrt{2}$, ou seja, $a^2 - 2ab - b^2 = 0$, que é equivalente à Equação (4). Portanto, o retângulo $ABCD$ é um retângulo de prata.

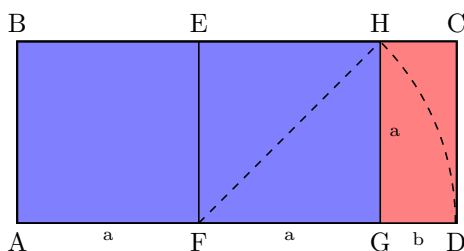


Figura 3: Construção do retângulo de prata
Fonte: Autoria própria

2.2. O retângulo de prata e o papel A4

Nesta subseção, vamos apresentar algumas propriedades do retângulo de prata e suas relações com o papel A4 e, para isso, algumas considerações serão necessárias. Um quadrado de lados medindo a tem, entre os mesmos, a proporção $1 : 1$, e será indicado por $Q(1 : 1)$ (ou Q); um retângulo de prata (retângulo romano), isto é, um retângulo de lados δa e a , que estão na proporção $\delta : 1$, será indicado por $RR(\delta : 1)$ (ou RR); e um retângulo de lados $a\sqrt{2}$ e a , e que estão na proporção $\sqrt{2} : 1$, será indicado por $QR(\sqrt{2} : 1)$ (ou QR). Com base nessas notações, o retângulo da Figura 4 é um $RR(\delta : 1)$, e é composto pelos quadrados $ABCD$ e $EFCH$, do tipo $Q(1 : 1)$, e pelo retângulo $DCFE$, um $RR(\delta : 1)$. Dessa maneira, sendo Q , QR e RR considerados na Figura 4, temos que

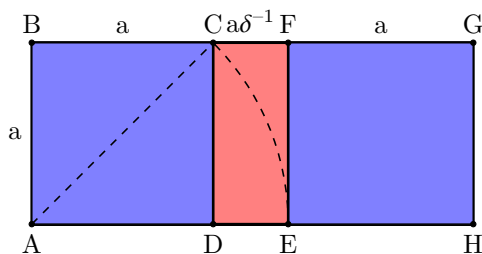


Figura 4: O retângulo românico e o papel A4
 Fonte: Autoria própria

1. $Q + RR = QR$

O retângulo ABFE é um QR e é formado pelo quadrado ABCD, um Q, e pelo retângulo DCFE, um RR, pois, $EF : CF = a : a\delta^{-1} = \delta : 1$ (DC é o lado comum). Como $BF = BG - FG = (a + a\sqrt{2}) - a = a\sqrt{2}$ e $AB = a$, temos que $BF : AB = \sqrt{2} : 1$.

2. $QR + Q = RR$

Neste caso, verificamos que, ao adicionarmos a um QR um Q, obtém-se um RR. O retângulo ABGH é formado pelo retângulo ABFE, que é um QR, e o quadrado EFGH, que é um Q. Tal propriedade é equivalente às quatro seguintes propriedades, que é de fácil justificativa.

3. $QR - RR = Q$

Suprimindo-se um RR de um QR, obtém-se um Q.

4. $QR - Q = RR$

Suprimindo-se um Q de um QR, obtém-se um RR.

5. $RR - QR = Q$

Suprimindo-se um QR de um RR, obtém-se um Q.

6. $RR - Q = QR$

Suprimindo-se um RR de um QR, obtém-se um Q, em que Q é o maior quadrado a ser suprimido.

7. $RR - Q - Q = RR$ Suprimindo-se de um RR, dois quadrados de maior área possível, obtém-se um RR (definição de retângulo de prata).

8. $Q + Q + RR = RR$

Neste caso, se a um RR forem somados dois Q, obtém-se um RR; esse caso é equivalente ao caso 4).

9. $QR + QR = QR$ (equivalentemente, $QR = QR + QR$)

Justapondo-se dois QR pelo maior lado comum aos dois, obtém-se um QR.

Subdividindo retângulos a fim de obter as proporções $1 : 1$, $\sqrt{2} : 1$ ou $\delta : 1$ entre os lados dos retângulos restantes, por exemplo, foi possível usar o retângulo de prata de modo prático: confecção e uso do papel A4, de acordo com as subdivisões feitas nas situações de 1 a 9, logo acima. Os papéis da série A têm os seguintes tipos de folhas A0, A1, A2, A3, A4, ..., cujo primeiro membro, A0, tem área igual a 1m^2 , com seus lados medindo 1189mm e 841mm, e proporção entre esses lados igual $\frac{1189}{841} = 1,41\dots \cong \sqrt{2} : 1$. Como os demais membros dessa série, as folhas A1, A2, A3, A4, ..., são

obtidas dividindo-se o maior lado da folha anterior ao meio (situação 9), temos que essas folhas são retângulos do tipo QR($\sqrt{2} : 1$). Observe que

$$A_0 \rightarrow 2^0 = 1, A_1 \rightarrow 2^1 = 2, A_2 \rightarrow 2^2 = 4, A_3 \rightarrow 2^3 = 8, A_4 \rightarrow 2^4 = 16, \dots \quad (13)$$

Usando a notação $A_0(h_0, l_0)$ em que h_0 e l_0 , com $h_0 > l_0$, são os lados da folha A_0 , e como A_0 tem área $1m^2$ e lados na proporção $\sqrt{2} : 1$, temos que $h_0 l_0 = 1$ e $h_0 = l_0 \sqrt{2}$ e, portanto,

$$h_0 = 2^{\frac{1}{4}} \quad \text{e} \quad l_0 = 2^{-\frac{1}{4}}.$$

Para determinar os lados de uma folha qualquer dessa família, procede-se de maneira semelhante. Como os papéis da série A são retângulos do tipo QR e têm origem num RR pela remoção de um quadrado Q, o papel $A_4(h_4, l_4)$, em especial, comum nos trabalhos diários de escolas e escritórios, e utilizado em vários países, é tal que

$$h_4 = 2^{-\frac{7}{4}} \quad \text{e} \quad l_4 = 2^{-\frac{9}{4}}$$

e, portanto,

$$h_4 : l_4 = 2^{-\frac{7}{4}} : 2^{-\frac{9}{4}} = \sqrt{2} : 1.$$

Como vimos, o papel A_4 é obtido a partir do conceito de razão de prata, e por (13) tem-se que $A_4(h_4, l_4)$ é um retângulo do tipo QR obtido pela remoção de um quadrado do tipo Q de um retângulo do tipo RR, restando um retângulo RR; equivalentemente, o papel A_4 é formado pela junção de um RR e um quadrado Q. Quando QR é dobrado ao meio, obtêm-se duas folhas de mesmas proporções e metade da área do que foi dobrado. Se do RR forem removidos dois QR, restará um RR, como acima, nas situações de 1 a 9.

3. A razão de prata

Definição 2. Se os pontos C e D sobre um segmento de reta \overline{AB} são tais que $AC = CD > DB$ e satisfazem a igualdade

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BD}, \quad (14)$$

então $\frac{AB}{AC}$ é chamada razão de prata.

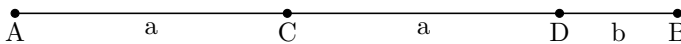


Figura 5: Segmento de prata
Fonte: Autoria própria

Se $C, D \in \overline{AB}$ são tais que $AC = CD = a$, $DB = b$ e $AB = 2a + b$, $a > b$, então as relações (14) e (4) são equivalentes, de modo que os segmentos AC e DB (ou AB e AC), na Figura 5, são lados de um retângulo de prata e, portanto, a e b satisfazem à Equação (5). Dividindo, membro a membro, a Equação (5) por b^2 , temos que $(\frac{a}{b})^2 - 2(\frac{a}{b}) - 1 = 0$, o que significa que $\frac{a}{b} = \delta$ é uma raiz positiva da equação $\delta^2 - 2\delta - 1 = 0$.

Da equivalência entre (14) e (4) obtemos uma relação entre o retângulo de prata e a razão de prata. Um retângulo de prata é um retângulo em que a razão entre o lado maior e o lado menor desse é igual à razão de prata:

$$\frac{a}{b} = \delta. \tag{15}$$

Agora, se C_1 e D_1 , C_2 e D_2 dividem o segmento \overline{AB} de modo que a relação (14) e as condições $AC_1 = C_1D_1 > D_1B$, $AC_2 = C_2D_2 = D_1B > D_2C_1$ são satisfeitas, e se marcarmos os pontos C_n e D_n sobre o segmento \overline{AB} , de modo que $AC_n = C_nD_n = D_{n-1}C_{n-2} > D_nC_{n-1}$, $n = 3, 4, 5, \dots$, então vale

$$\frac{AC_n}{AC_{n-1}} = \frac{D_nC_{n-1}}{AC_n}, \tag{16}$$

de acordo com (6). Isso significa que se C_n e D_n são pontos sobre o segmento \overline{AB} (Figura 6) satisfazendo as condições acima, então

$$\frac{AC_n}{AC_{n-1}} = \delta,$$

em que $AC_n = a_{n-1}$ e $D_nC_{n-1} = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, correspondem, respectivamente, ao maior e menor lados do n -ésimo retângulo, de acordo com a sequência (12).

Mostra-se, também, que AC_n e D_nC_{n-1} são incomensuráveis. Tal fato prova-se de maneira análoga a que foi usada para provar que os lados de um retângulo de prata são grandezas incomensuráveis, na Seção 2.

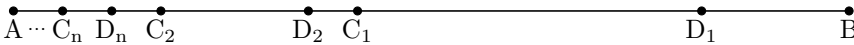


Figura 6: Segmentos de prata
Fonte: Autoria própria

3.1. Construção da razão de prata

Esta seção é dedicada à solução do problema da divisão de um dado segmento de reta em três partes, da seguinte maneira: as duas primeiras partes devem ser iguais e maiores do que a terceira, e tais que uma das primeiras está para a parte menor, assim como o segmento todo está para uma das primeiras partes. De maneira equivalente, teremos o seguinte

Problema 1. Sendo A, C e D são pontos tais que $AC = CD$, determinar um ponto B sobre a reta que contém esses pontos, de modo que $AC = CD > DB$ e AB, AC, AC e DB, nessa ordem, satisfazem à Equação (14).

Construção. Dada uma reta r , tome os pontos $A, C, D \in r$ tais que $AC = CD$. Queremos determinar um ponto $B \in r$, tal que $AC = CD > DB$ e $2AC + DB$, AC, AC e DB satisfaçam, nessa ordem, à Equação (14). Por D construa uma reta s perpendicular a r e tome os pontos $O, Q \in s$ tais que $DO = OQ = AC = CD$. Com centro em Q, construa uma círculo c_1 de raio DQ, de modo que $\overleftrightarrow{AQ} \cap c_1 = \{E\}$. Com centros em A e em E e raios AE, construa os círculos c_2 e c_3 , respectivamente, de modo que $c_2 \cap c_3 = \{F, G\}$. O segmento \overline{FG} é tal que $\overline{FG} \perp \overleftrightarrow{AQ}$ e $\overline{FG} \cap \overleftrightarrow{AQ} = \{H\}$. Com centro em A e raio AH traça-se o círculo c_4 , de modo que $c_1 \cap r = \{B\}$, e, assim, $AH = AB$, $AB = 2AC + DB$, com $AC = CD > DB$. O ponto B é tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DB}$. □

Justificativa. No $\triangle ADQ$ (Figura 7), retângulo em D, temos que $AQ = 2(AC)\sqrt{2}$ e $QE = DQ = 2AC$. Daí, e do fato de que $AE = AQ + QE$, temos que $AE = 2(AC)\delta$. Agora, como $AB = AH = \frac{AE}{2}$, segue que $AB = (AC)\delta$, e como $DB = AB - AD$, segue que $DB = (AC)\delta^{-1}$. Assim,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{(AC)\delta}{AC} = \delta \quad \text{e} \quad \frac{AC}{DB} = \frac{AC}{(AC)\delta^{-1}} = \delta,$$

ou seja,

$$\frac{AB}{AC} = \delta = \frac{AC}{DB},$$

conforme (14). □

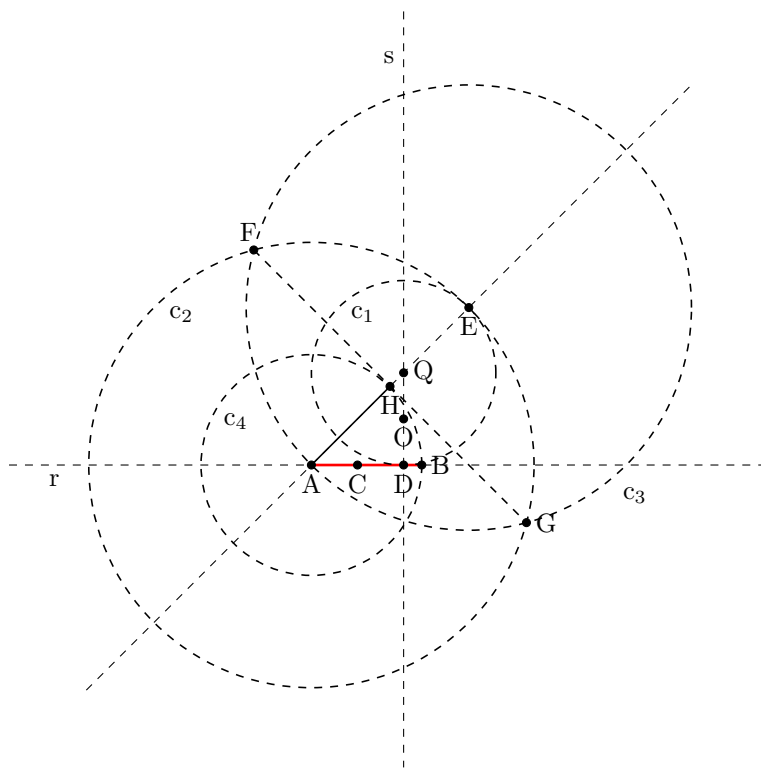


Figura 7: Construção da razão de prata
 Fonte: Autoria própria

De outra maneira, o problema, também, poderia ser o de determinar a razão de prata do segmento \overline{AC} (Figura 8).

Demonstração. Tomando-se os pontos E e F sobre \overline{AC} tais que $AE = EF = b$, como $AC = a$, temos que $FC = a - 2b$, e, assim,

$$\frac{a - 2b}{b} = \frac{b}{a}.$$

□

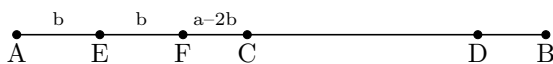


Figura 8: Construção razão de prata-2

Fonte: Autoria própria

3.2. A espiral de prata

”Espirais são encontradas em diversos objetos, movimentos e, também, na natureza. Por exemplo, no voo de gaviões em direção à sua presa, no náutilo, e em vários outros [...]”. (Azevedo, 2013, p. 35)

De maneira análoga à construção da espiral áurea, que é construída num retângulo de ouro [3], a construção da espiral de prata tem base num retângulo de prata. No retângulo $ABGH$ da Figura 9, que é um retângulo de prata, construiremos o arco \widehat{AC} , com centro no vértice D do quadrado $ABCD$ (base de construção do retângulo de prata) e raio $AD = DC$, no sentido horário. No segundo quadrado, à direita, com centro em F e raio $FE = FG$, construiremos o arco \widehat{GE} . Nos quadrados $CFLK$ e $JIED$, com centros em K e I , traçamos, respectivamente, os arcos \widehat{CL} e \widehat{EJ} (sentido horário). Procedendo dessa maneira, construindo os arcos \widehat{LP} e \widehat{JN} , ..., sempre no sentido horário, traçamos, assim, os arcos que formarão a espiral de prata. De modo análogo às etapas anteriores, a construção segue num processo infinito como na Figura 9.

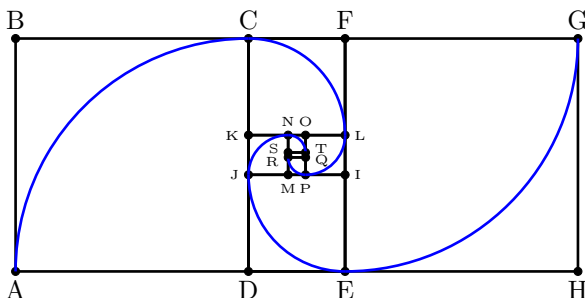


Figura 9: Espirais no retângulo de prata

Fonte: Autoria própria

3.3. O octógono regular e a razão de prata

Nesta subseção, apresentaremos evidências da ocorrência do número δ na Arquitetura e algumas relações desse número com as proporções encontradas na construção de alguns templos. Além da beleza e harmonia nas proporções desses templos, podem-se observar padrões matemáticos e propriedades geométricas que garantem a eles beleza, proporção e valor estético. Estudar a história dessas proporções e suas relações com a Arquitetura, além de uma busca pela chave da beleza, mostra como é possível fazer interdisciplinaridade entre essa área e a Matemática, estudando algumas propriedades do Sistema Romano de Proporções. A Arquitetura baseia-se em sistemas de proporções que têm sido usados ao longo dos tempos, na construção de templos, tendo

também como base a Matemática, principalmente, a Geometria e, no caso, de sistemas usados pelos romanos, nos séculos 1 e 2 da era Cristã, através do corte sagrado.

A partir do corte sagrado constroem-se um octógono regular e um octógono regular estrelado, mostrando-se sua relação com o cimborrio da Catedral de Burgos e destacando suas propriedades geométricas. Como veremos, é o corte sagrado que empresta harmonia aos detalhes geométricos dessas construções, como fachadas e proporções bem particulares.

O corte sagrado é a secção de um dos lados de um quadrado por um ponto desse lado, de modo que a razão da maior parte nessa divisão para o referido lado é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Para a construção de um corte sagrado, considere um quadrado ABCD, cujo lado mede l . O arco com centro em A e raio $\frac{l\sqrt{2}}{2}$, intercepta dois lados desse quadrado, e cada um dos pontos de interseção desse arco com dois lados consecutivos é um corte sagrado. Na Figura 10, os vértices A_i , $i = 1, \dots, 8$, do octógono regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ são cortes sagrados, pois o arco $\widehat{A_2A_7}$, por exemplo, com centro em A e raio $AA_2 = AA_7$, intercepta o lado \overline{AD} no ponto A_7 , $\frac{AA_7A}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

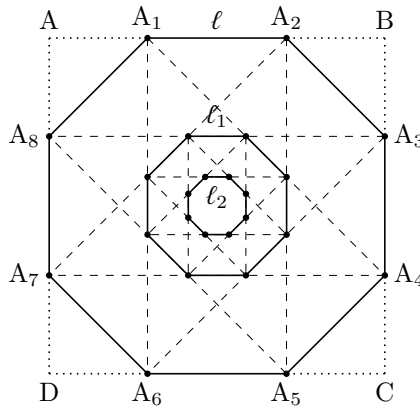


Figura 10: Octógono regular
 Fonte: Autoria própria

Veremos agora algumas propriedades matemáticas envolvidas em algumas construções em estilo romano (sistema de proporções baseados em nos números δ e $\sqrt{2}$), com o intuito de investigar como a Matemática, em algumas situações, relaciona-se com a Arquitetura, e, em especial, mostrar a necessidade de se estudar a Matemática e suas propriedades envolvidas nessas construções. Um exemplo que será mencionado aqui, é o cimborrio da Catedral de Burgos, na Espanha, que tem a forma de um octógono regular que contém vários octógonos regulares estrelados, inclusive, vários quadrados, construídos a partir do corte sagrado. Esse cimborrio é uma das mais belas cúpulas de Renascimento espanhol, um dos elementos mais importantes da catedral. Além de sua forma octogonal estrelada (Geometria), destacam-se ainda duas características, sua originalidade arquitetônica (Arquitetura) e sua abundância escultural (arte e beleza).

Esses octógonos regulares (estrelados ou não) e os quadrados que estão contidos no cimborrio têm seus vértices nas interseções das diagonais do octógono regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, como podem ser vistos nas Figuras 10, 11a, 11b e 11c.

Na figura 10, temos um octógono regular de lado l , cujas diagonais cruzam-se de modo que suas interseções são vértices de outros octógonos regulares de lados medindo $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$, tais que

$l_1 = l\delta^{-1}, l_2 = l_1\delta^{-1}, \dots, l_n = l_{n-1}\delta^{-1}, \dots$, ou seja,

$$\frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_3}{l_2} = \dots = \frac{l_n}{l_{n-1}} \dots = \delta^{-1},$$

e assim,

$$l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots, \quad (17)$$

formam uma P.G. infinita de razão δ^{-1} . Veja, também, na Figura 10 que o lado do quadrado ABCD mede δl , e que as diagonais do octógono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ se cruzam de modo que os pontos de interseção são vértices de quadrados, e que esses quadrados, a partir do segundo, possuem lados $l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots$, e, como

$$\frac{l}{\delta l} = \frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_3}{l_2} = \dots = \frac{l_n}{l_{n-1}} \dots = \delta^{-1},$$

tem-se, também, que a sequência

$$\delta l, l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots \quad (18)$$

é uma P.G. de razão δ^{-1} .

As P.G.s (17) e (18) geram números de Pell, com propriedades aditivas. Isso significa que

$$l_i + 2l_{i-1} = l_{i-2}, \quad (19)$$

para $i = 2, 3, 4, \dots$. Tal propriedade é satisfeita, também, pela sequência

$$1, \delta, \delta^2, \delta^3, \dots, \quad (20)$$

isto é,

$$\delta^{n-1} + 2\delta^n = \delta^{n+1}. \quad (21)$$

Além dessa propriedade, a sequência (20) também satisfaz à propriedade

$$\delta^n = p_n\delta + p_{n-1}, \quad (22)$$

em que p_n e p_{n-1} são números de Pell.

Essas sequências de octógonos regulares. Octógonos regulares estrelados e quadrados podem ser vistos no cimborrio da Catedral de Burgos (Figuras 11b e 11c), e que as razões entre dois elementos quaisquer desses octógonos e quadrados têm sempre alguma relação com a razão de prata. Isso se deve ao fato de a razão de prata gozar tanto de propriedades aditivas quanto geométricas, e este fato confere a essas razões características extremamente importantes e essenciais para se transformarem em bases de sistemas de proporções que são usados na Arquitetura.

3.4. A razão de prata na Arquitetura Japonesa

Hoje, para a Arquitetura Oriental, nem a razão de ouro, nem a razão de prata é vista como uma relação divina ou uma regra de *design*, mas essas razões ainda têm suas importâncias. É possível ver que existem projetos que as utilizaram como forma de criar uma orientação ou um sentimento de harmonia e serenidade. Dessa maneira, no Japão,

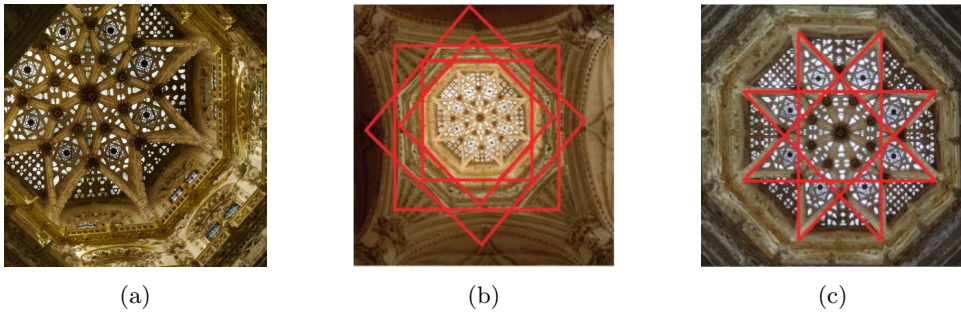


Figura 11: Cimborrio da Catedral de Burgos

Fonte: <https://www.flickr.com/photos/azuaje/4951726887/in/photostream/lightbox/>

”eles não acreditam muito no uso da Razão Áurea no design. Para eles, o uso da Razão de Prata cria um design mais bonito e sereno do que a Proporção Divina. Como a Razão de Prata obtém uma proporção menor (1,414), os objetos feitos com base nela estão mais próximos do quadrado do que os feitos com base na proporção oeste.”(ARCHITECTS ZONE, Golden and Silver Ratio in Architecture)

O uso da razão de prata na Arquitetura Oriental, em especial, na Arquitetura Japonesa, é evidenciado no templo *Horyu-ji* em Ikagura, Prefeitura de Nara, Japão. Esse templo budista, construído em madeira, é uma das construções do gênero mais antigas do mundo. Como podemos ver na Figura 12a, no prédio à direita, a razão entre o térreo e o seu segundo andar é de 1,414, e no prédio à direita, vemos que a razão entre o primeiro telhado e seu último telhado, também é de 1,414.

Na Figura 12b, temos a torre de radiodifusão *Tokyo Skytree*, na cidade de Tóquio, no Japão, uma das torres mais altas do mundo, com dois observatórios e uma antena de transmissão digital no topo. Nela, é possível observar que a razão das distâncias do piso ao topo da torre e do piso ao segundo observatório é de 1,414.

Observamos, nas Figuras 12a e 12b, um número comum: 1,414. Esse é um valor aproximado para $\sqrt{2}$ que, por sua vez, é tal que $\sqrt{2} = \delta - 1$, sendo essa a relação do templo *Horyu-ji* e da torre *Tokyo Skytree* com a razão de prata.

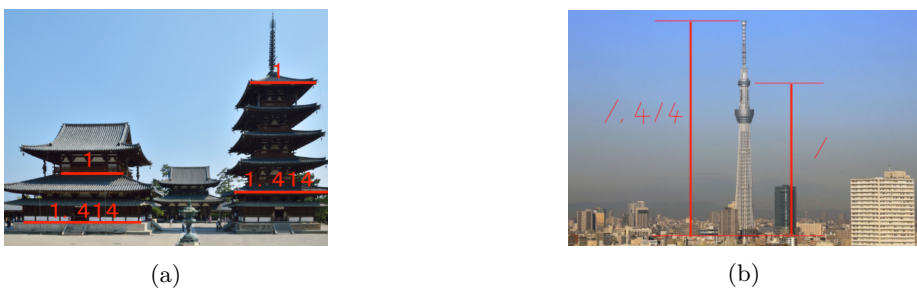


Figura 12: A razão de prata na arquitetura oriental: (a) Templo Horyu-ji; (b) Tokyo Skytree

Fonte: ARCHITECTS ZONE (2017)

Hishikawa Moronobu (1618 - 1694), que viveu durante a Era Edo, foi o primeiro grande pintor



Figura 13: Beauty Looking Back
 Fonte: BRITANNICA (2020)

japonês. Entre suas obras, destaca-se a *Beauty Looking Back*, Figura 13, de propriedade do Museu Nacional de Tóquio (BRITANNICA, 2020). A Figura 13, semelhante ao *Modulor* de *Le Corbusier*, é baseada no *Homem Vitruviano*, de Leonardo Da Vinci, que usava a razão de ouro para calcular as relações entre as partes do corpo humano. Na obra de *Hishikawa Moronobu* é possível observarmos a presença da razão de prata.

4. Sequência de Pell

Definição 3. Chama-se sequência de Pell², toda sequência definida pela recorrência $p_0 = 1$, $p_1 = 2$ e $p_n = p_{n-2} + 2p_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e seus termos 1, 2, 5, 12, 29, 70, ..., são chamados números de Pell.

O Lema a seguir mostra-nos a relação de um termo qualquer da sequência em (12) com os lados de um retângulo de prata e dois números consecutivos de Pell, e será útil na demonstração da relação da razão de prata com a sequência de Pell; na Seção 5.

Lema 1. Se a e b , $a > b$, são lados de um retângulo de prata, p_{n-2} e p_{n-1} são dois termos consecutivos da sequência de Pell, então

$$a_n = (-1)^n (p_{n-2}a - p_{n-1}b),$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Demonstração. Observemos, em (8), que os valores absolutos dos coeficientes de a e b são 1, 2, 5, 12, 29, sendo os de a , considerados a partir de 1, em a_2 , e os de b , a partir de 2, também em a_2 . Assim, a_n , em (12), pode ser reescrito como

$$a_n = (-1)^n (p_{n-2}a - p_{n-1}b), \tag{23}$$

em que p_{n-2} e p_{n-1} são números de Pell, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. De fato, para $n = 4$, a expressão (12) é verdadeira, pois,

$$a_4 = 5a - 12b = p_2a - p_3b = (-1)^4 (p_2a - p_3b).$$

²Matemático inglês (1611 - 1685)



Figura 14: John Pell

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Pell

Suponha agora que (12) seja válida para todo $k \in \mathbb{N}$, $4 < n \leq k$, isto é, $a_{k-1} = (-1)^{k-1}(p_{k-3}a - p_{k-2}b)$ e $a_k = (-1)^k(p_{k-2}a - p_{k-1}b)$. Para $n = k+1$, o termo geral da seqüência em (12), fica $a_{k+1} = a_{k-1} - 2a_k$, e, assim,

$$a_{k+1} = (-1)^{k-1}(p_{k-3}a - p_{k-2}b) - 2(-1)^k(p_{k-2}a - p_{k-1}b),$$

ou seja,

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}(p_{k-3}a - p_{k-2}b) + 2(-1)^{k+1}(p_{k-1}a - p_{k-1}b).$$

Daí,

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}[(p_{k-3} + 2p_{k-2}a) - (p_{k-2} + 2p_{k-1}b)] = (-1)^{k+1}(p_{k-1}a - p_k b).$$

Portanto, $a_n = (-1)^n(p_{n-2}a - p_{n-1}b)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. □

4.1. Algumas propriedades da seqüência de Pell

As identidades a seguir mostram algumas propriedades satisfeitas pelos números de Pell e, principalmente, o Teorema de Binet, que nos permite determinar um termo qualquer da seqüência de Pell, a partir dos números $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta' = 1 - \sqrt{2}$, raízes da equação $\delta^2 - 2\delta - 1 = 0$. Nas identidades 1 - 4, vamos considerar $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Identidade 1. (Soma dos n primeiros números de Pell)

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = \frac{p_{n+1} - p_n - 1}{2}.$$

Demonstração. Como $p_0 = \frac{p_1}{2}$ e $p_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$, temos que

$$\begin{aligned}
 p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-2} + p_{n-1} &= \frac{p_1}{2} + \frac{p_2 - p_0}{2} + \frac{p_3 - p_1}{2} + \dots + \frac{p_{n-1} - p_{n-3}}{2} + \frac{p_n - p_{n-2}}{2} \\
 &= \frac{-p_0 + (p_1 - p_1) + (p_2 - p_2) + \dots + (p_{n-2} - p_{n-2}) + p_{n-1} + p_n}{2} \\
 &= \frac{p_{n+1} - p_n - 1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Identidade 2. (Soma dos n primeiros números de Pell de ordem ímpar)

$$p_1 + p_3 + p_5 + \dots + p_{2n-1} = \frac{p_{2n} - 1}{2}.$$

Demonstração. Como $p_{2i-1} = \frac{p_{2i} - p_{2i-2}}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$, temos que

$$\begin{aligned} p_1 + p_3 + p_5 + \dots + p_{2n-1} &= \frac{p_2 - p_0}{2} + \frac{p_4 - p_2}{2} + \dots + \frac{p_{2n-2} - p_{2n-4}}{2} + \frac{p_{2n} - p_{2n-2}}{2} \\ &= \frac{-p_0 + (p_2 - p_2) + (p_4 - p_4) + \dots + (p_{2n-2} - p_{2n-2}) + p_{2n}}{2} \\ &= \frac{p_{2n} - 1}{2}. \end{aligned}$$

□

Identidade 3. (Soma dos n primeiros números de Pell de ordem par)

$$p_0 + p_2 + p_4 + \dots + p_{2n-2} = \frac{p_{2n-1}}{2}.$$

Demonstração. Das identidades 1 e 2, seguem que $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{2n-1} = \frac{p_{2n+1} - p_{2n-1}}{2}$ e $p_1 + p_3 + p_5 + \dots + p_{2n-1} = \frac{p_{2n} - 1}{2}$, respectivamente. Como $p_0 + p_2 + p_4 + \dots + p_{2n-2} = (p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{2n-2} + p_{2n-1}) - (p_1 + p_3 + p_5 + \dots + p_{2n-1})$, temos que

$$p_0 + p_2 + p_4 + \dots + p_{2n-2} = \frac{p_{2n+1} - p_{2n-1}}{2} - \frac{p_{2n} - 1}{2} = \frac{p_{2n-1}}{2}.$$

□

Identidade 4. (Soma dos quadrados dos n primeiros números de Pell)

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{n-1}^2 = \frac{p_{n-1}p_n}{2}.$$

Demonstração. Como $p_0^2 = \frac{p_0p_1}{2}$ e $p_i^2 = \frac{p_i p_{i+1} - p_{i-1} p_i}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$, temos que

$$\begin{aligned} p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{n-1}^2 &= \frac{p_0p_1}{2} + \frac{p_1p_2 - p_0p_1}{2} + \frac{p_2p_3 - p_1p_2}{2} + \dots + \frac{p_{n-1}p_n - p_{n-2}p_{n-1}}{2} \\ &= \frac{(p_0p_1 - p_0p_1) + (p_1p_2 - p_1p_2) + \dots + (p_{n-2}p_{n-1} - p_{n-2}p_{n-1}) + p_{n-1}p_n}{2} \\ &= \frac{p_{n-1}p_n}{2}. \end{aligned}$$

□

Observações:

1. $\delta\delta' = -1$ e $\delta - \delta' = 2\sqrt{2}$
2. $1 + \delta^2 = \frac{4\delta}{\sqrt{2}}$ e $1 + (\delta')^2 = -\frac{4\delta'}{\sqrt{2}}$
3. $2 + \delta^2 + (\delta')^2 = (\delta - (\delta'))^2$
4. $1 + 2\delta = \delta^2$ e $1 + 2\delta' = (\delta')^2$

Identidade 5. (Teorema de Binet) Para $n \geq 0$, tem-se

$$P_n = \frac{\delta^{n+1} - (\delta')^{n+1}}{\delta - \delta'},$$

em que $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta' = 1 - \sqrt{2}$.

Demonstração. Usando indução sobre n , verificamos que $p_0 = \frac{\delta^{0+1} - (\delta')^{0+1}}{\delta - \delta'} = 1$. Suponhamos, agora, que p_n seja válida para todo $k \in \mathbb{N}$, $1 < n \leq k$. Assim, para $n = k + 1$,

$$P_{k+1} = P_{k-1} + 2P_k = \frac{\delta^k - (\delta')^k}{\delta - \delta'} + 2 \frac{\delta^{k+1} - (\delta')^{k+1}}{\delta - \delta'} = \frac{\delta^k(1 + 2\delta) - (\delta')^k(1 + 2\delta')}{\delta - \delta'}.$$

Da observação 4, segue que $p_{k+1} = \frac{\delta^{(k+1)+1} - (\delta')^{(k+1)+1}}{\delta - \delta'}$. Portanto, p_n é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Identidade 6. Para $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$, tem-se

$$P_{n+m} = P_{n-1}P_{m-1} + P_nP_m.$$

Demonstração. Da identidade 5 e das observações 1 e 2, seguem que

$$P_{n+m} = \frac{\delta^{(n+m)+1} - (\delta')^{(n+m)+1}}{\delta - \delta'} = \frac{\delta^{n+m}(\frac{4\delta}{\sqrt{2}}) - (\delta')^{n+m}(\frac{4\delta'}{\sqrt{2}})}{\delta - \delta'} = \frac{\delta^{n+m}(1 + \delta^2) + (\delta')^{n+m}(1 + (\delta')^2)}{(\delta - \delta')^2}.$$

Agora, das observações 1 e 3, podemos escrever p_{n+m} como

$$P_{n+m} = \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'} \cdot \frac{\delta^m - (\delta')^m}{\delta - \delta'} + \frac{\delta^{n+1} - (\delta')^{n+1}}{\delta - \delta'} \cdot \frac{\delta^{m+1} - (\delta')^{m+1}}{\delta - \delta'},$$

ou seja, $P_{n+m} = P_{n-1}P_{m-1} + P_nP_m$. \square

Identidade 7. Para $n \geq 1$, tem-se

$$P_{2n} = P_{n-1}^2 + P_n^2.$$

Demonstração. Fazendo $n = m$ na identidade 6, segue o resultado. \square

Identidade 8. Para $n \geq 1$, tem-se

$$P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} = (-1)^n.$$

Demonstração. O resultado segue imediatamente da identidade 6 e das observações 1 e 3. \square

5. A Razão de prata e a sequência de Pell

Mostraremos aqui como a razão de prata e a sequência de Pell estão relacionadas através do seguinte

Resultado 1. A razão de prata é o limite da sequência de Pell quando o número de termos cresce ilimitadamente, isto é,

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}}. \tag{24}$$

Demonstração. Vimos que o termo geral da sequência (12) é dado por $a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1}$ e que, pelo Lema 1, pode ser escrito como $a_n = (-1)^n(p_{n-2}a - p_{n-1}b)$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Quando $n \rightarrow \infty$, temos que $a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1} \rightarrow 0$, e daí, $p_{n-2}a - p_{n-1}b \rightarrow 0$. Logo, $\frac{p_{n-1}b}{p_{n-2}b} - \frac{p_{n-2}a}{p_{n-2}b} \rightarrow 0$, ou seja, $\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} - \frac{a}{b} \rightarrow 0$. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} - \frac{a}{b} = \delta$. \square

Observemos que ao calcularmos o quociente entre dois termos consecutivos da sequência de Pell, e considerando uma aproximação de 3 casas decimais, a Tabela 1 mostra-nos que, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, o algarismo da terceira casa decimal de $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ é sempre 4.

$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{29}{12}$	$\frac{70}{29}$	$\frac{169}{70}$	$\frac{498}{169}$	$\frac{985}{408}$	$\frac{2378}{985}$	$\frac{5741}{2378}$	$\frac{13860}{5741}$
2,000	2,500	2,400	2,416	2,413	2,414	2,414	2,414	2,414	2,414	2,414

Tabela 1: Quociente de um número da sequência de Pell pelo seu anterior
 Fonte: Autoria própria

Considerações Finais

A beleza da Matemática está presente em toda parte e é evidenciada nas possibilidades de aplicações em diversas áreas do conhecimento humano, apesar de serem desconhecidas por muitos. Tais aplicações podem ser mais exploradas em sala de aula e servirem de elo para a interdisciplinaridade entre conteúdos regularmente estudados, além de motivar os estudantes e deixar as aulas mais interessantes.

Não obstante ser um tema interessante, é pequeno o número de professores e de alunos que conhecem sobre a razão de prata, talvez porque não seja explorado nos livros didáticos, tornando-o pouco conhecido. Além de ser possível explorar as propriedades dessa razão, com os estudos feitos ao longo do texto, viu-se a possibilidade de explorar as propriedades matemáticas do retângulo de prata e da razão de prata, e mostrar que a Matemática está presente no nosso dia a dia, com aplicações na indústria gráfica e na Arquitetura, e relacionar a razão de prata com a sequência de Pell.

Em linhas gerais, este artigo trouxe uma forma de trabalhar a Matemática e a interdisciplinaridade relacionada com o número de prata e mostrou que a Matemática necessária para isso é, de fato, acessível aos professores e alunos do Ensino Médio. Acreditamos que seja possível trabalhar diversos tópicos de Matemática em um contexto interdisciplinar, porém, para isso, além de conhecer o próprio conteúdo matemático a ser ensinado, é necessário que o professor mergulhe um pouquinho em outras áreas, o que não é tão simples, mas é factível.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a José Heldemir Moreira dos Santos, ex-aluno do Curso de Matemática da Feclesc/Uece, ex-bolsista e ex-orientando, por sua ajuda no L^AT_EX, na construção das figuras do texto.

Também, queria agradecer ao Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho que, na conversa que tive com ele no II Corem, em Mossoró - RN, em dezembro de 2019, incentivou-me a escrever um artigo sobre a razão de prata para a RPM. Este artigo é um dos frutos dessa conversa.

Referências

- [1] ARCHITECTES ZONE *Golden and Silver in Architecture*. Disponível em: <<https://architects.zone/golden-and-silver-ratio-in-architecture/>>. Acesso em: 23 set. 2021.
- [2] Ávila, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, n°6, p. 9-14, 1985.
- [3] Azevedo, N. C. *O Número de Ouro e Construções Geométricas*. Dissertação de Mestrado (Profmat), Universidade Federal do Goiás - UFG, 2013.
- [4] BRITANNICA. Moronobu, H. *Japanese printmaker*. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Hishikawa-Moronobu>>. Acesso em: 24 set. 2021.
- [5] Spinadel, V. W. *La familia de números metálicos*. Cuadernos del CIMBAGE, p. 17-44, 2004.
- [6] Huntley, H. E. *The divine proportion*. Massachusetts: Courier Corporation, 2012
- [7] Stakhov, A. *The mathematics of harmony: from Euclid to contemporary mathematics and computer science*. Singapore: World Scientific, v. 22, 2009.
- [8] Paulino, F. F., Santos, F. W. M. e Oliveira, J. L. O Código Da Vinci e o encontro entre Matemática, História e Arte. *Educação Matemática Debate*, v. 5, n°11, p. 10-26, 2021.
- [9] Oliveira, J. L. A Razão de Prata. *Revista do Professor de Matemática*, n°103, p. 42-46, 2021.
- [10] Kappraff, J. Connections: The geometric bridge between art and science. *Singapore: World Scientific*, v. 25, 2001.
- [11] Kappraff, J. Beyond measure: A guided tour through nature, Myth and Number. *Singapore: World Scientific*, v. 28, 2002.
- [12] Kappraff, J. *Systems of Proportion in Design and Architecture and their Relationship to Dynamical Systems Theory*. Mathematical Institute SASA, p. 27-40, 1999.
- [13] Silva, M. M. *Desmistificando o conjunto dos Números Irracionais*. Dissertação de Mestrado (Profmat), Universidade Estadual do Ceará - UECE, 2018.

João Luzeilton de Oliveira
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central
FECLESC
Universidade Estadual do Ceará - UECE
<joao.luzeilton@uece.br>

Recebido: 27/08/2022
Publicado: 06/04/2022

Contando quadrados coloridos com o Lema que não é de Burnside

Diogo Diniz¹ Caio Antony Gomes²

Resumo

Neste artigo contamos quantos quadrados coloridos podem ser construídos utilizando palitos de picolé pintados, cada um, com uma de m cores. Duas situações são consideradas, pintamos apenas um ou os dois lados de cada palito. Veremos que para construir um quadrado com palitos que tenham os dois lados pintados da mesma cor, gastamos mais tinta, porém, o número de quadrados que podemos construir é menor que usando palitos com apenas um lado pintado. O processo de contagem dos quadrados coloridos envolve as rotações e reflexões que preservam o quadrado, chamadas simetrias. No primeiro caso o conjunto de simetrias que consideramos consiste apenas das rotações que preservam o quadrado enquanto, no segundo caso, devemos considerar também reflexões. Em cada caso, com a composição de funções, o conjunto de simetrias que consideramos constitui uma estrutura algébrica denominada grupo. No decorrer do artigo, apresentaremos o conceito de ação de grupo e um resultado relacionado que, entre várias denominações, ficou também conhecido como o Lema que não é de Burnside.

Palavras-chave: Grupos; ação de grupos; órbitas.

Abstract

In this paper we count how many colored squares may be constructed with popsicle sticks painted, each one, with one of m colors. Two situations are considered, we paint one or both sides of each stick. We will see that in order to construct a square with sticks that have both sides painted, with the same color, we use more paint, however, the number of squares that may be constructed is smaller than using sticks with only one side painted. The method used to count the coloured squares involves rotations and reflections that preserve the square, called symmetries. In the first case the symmetries that we consider are the rotations that preserve the square while, in the second, case we also need to consider reflections. In each case, with the composition of functions, the set of symmetries considered forms an algebraic structure known as group. Throughout the paper we present the notion of group actions and a related result that, among many eponymous, became known also as The Lemma that is not Burnside's.

Keywords: Groups; group actions; orbits.

¹Apoiado pelo CNPq, projeto 301704/2019-8

²Apoiado pela Capes com uma bolsa de Mestrado

1. Introdução

Os amigos Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo constroem um quadrado utilizando palitos de picolé com um dos lados pintados de azul ou verde. Cada um escolhe um palito de uma cor e o coloca formando um dos lados do quadrado; em seguida desenha a representação do quadrado que vê, como na Figura 1.

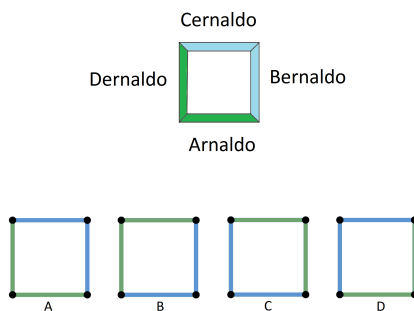


Figura 1: Quadrado colorido construído e suas representações

Arnaldo propõe ao grupo o problema de contar quantos quadrados podem ser formados desse modo. Bernaldo afirma, rapidamente, invocando o princípio multiplicativo de contagem, que existem duas escolhas de cor para cada um dos quatro lados do quadrado e que, portanto, podem ser construídos $2^4 = 16$ quadrados coloridos. Cernaldo, entretanto, observando as representações construídas, diz que há representações do mesmo tipo de quadrado, no seguinte sentido: há representações em que as posições entre as cores são as mesmas. Dernaldo, observando as representações A, B, C e D na Figura 1, afirma que, de modo geral, as representações de um mesmo quadrado podem ser obtidas uma a partir de outra por meio de uma rotação em torno do centro do quadrado de um múltiplo de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Os 4 amigos põem-se a construir quadrados e desenhar as suas representações. Dessa forma resolveram analisar representações que correspondem ao mesmo quadrado, uma obtida da outra por meio de uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, π ou $\frac{3\pi}{2}$ radianos, em torno do centro do quadrado (o centro do círculo no qual o quadrado está inscrito). Ao total foram obtidos os 6 conjuntos de representações na Figura 2; cada um é o conjunto das possíveis representações de um quadrado; o total de elementos nesses conjuntos é 16. Desse modo, os 4 amigos concluíram que existem ao todo 6 quadrados coloridos que podem ser construídos.

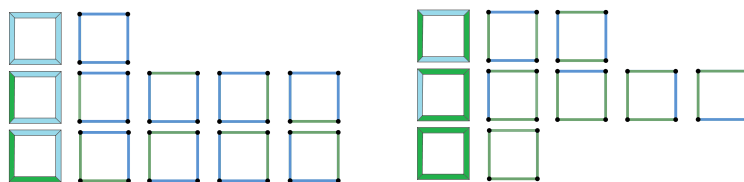


Figura 2: Os 6 quadrados coloridos e suas representações

2. Contando quadrados coloridos

O problema e a solução dos quatro amigos, naturalmente, nos levam a outras perguntas. Se tivermos um número m cores à disposição quantos quadrados coloridos podem ser construídos? Nosso objetivo nesta seção é apresentar a resposta para essa questão; para $m = 2$ vimos que a resposta é 6. Podemos também indagar o que ocorre se construímos polígonos regulares em vez de quadrados. De fato, as ideias apresentadas pelos 4 amigos na Introdução permitem-nos desenvolver um método para abordar a questão a seguir.

Questão 1. Para $n = 3, 4, 5, \dots$, quantos polígonos regulares coloridos de n lados podem ser construídos com palitos de picolé pintados, de um dos lados, com uma de m cores?

Iremos considerar as representações dos polígonos que podem ser construídos no plano com centro no ponto O , como na Figura 3.

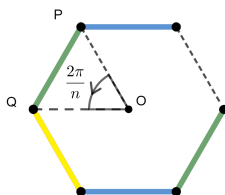


Figura 3: Representação de um polígono colorido

Denotamos por X o conjunto de todas as representações dos polígonos; o princípio multiplicativo de contagem utilizado por Bernaldo permite concluir que X tem m^n elementos, pois para cada um dos n lados do polígono temos m escolhas de cores. Consideremos O o centro do polígono regular de n lados. A rotação r de um ângulo $\frac{2\pi}{n}$, em torno do ponto O , no sentido anti-horário³, é a função do plano que fixa o ponto O e para $P \neq O$, associa o ponto $Q = r(P)$ de modo que o ângulo $\angle POQ$ mede $\frac{2\pi}{n}$ radianos (Figura 3) e seja R o conjunto das rotações de $\frac{2k\pi}{n}$ radianos, $k = 0, 1, \dots, n-1$, em torno do ponto O .

Podemos fazer a composição de quaisquer funções em que o domínio e contradomínio coincidem com um conjunto dado. Em particular, a composta $r \circ r$, que denotaremos por r^2 , é a rotação de $\frac{4\pi}{n}$ radianos. De modo geral para $0 < k < n$ a composta

$$r^k = \underbrace{r \circ \dots \circ r}_{k \text{ parcelas}}$$

é a rotação de um ângulo igual a $\frac{2k\pi}{n}$. Vamos denotar por I a função identidade, vale a igualdade $r^n = I$. Temos então

$$R = \{I, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}.$$

Adotaremos a convenção que $r^0 = I$. Dada uma rotação s em R existe $s^{-1} \in R$ de modo que $s \circ s^{-1} = I = s^{-1} \circ s$,⁴ de fato sendo $s = r^k$, com $0 \leq k < n$, então s^{-1} é a rotação de $\frac{2(n-k)\pi}{n}$ radianos.

³Iremos assumir que as rotações são no sentido anti-horário

⁴Note que s^{-1} é a função inversa de s , o que justifica a notação.

Observe que a composição de rotações em R é comutativa, ou seja, se $s, t \in R$ então $s \circ t = t \circ s$. Tal propriedade será utilizada adiante no Lema 2.

Sejam $s \in R$ e $x \in X$, denotamos por $s \cdot x$ a representação obtida aplicando a rotação s à representação x .

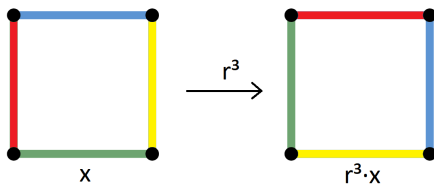


Figura 4: Representações x e $s \cdot x$ para $s = r^3$

É simples verificar que para qualquer x em X e para quaisquer $r_1, r_2 \in R$ temos

$$I \cdot x = x, \quad r_1 \cdot (r_2 \cdot x) = (r_1 r_2) \cdot x \quad (1)$$

Dado $x \in X$ sabemos que $R \cdot x := \{s \cdot x \mid s \in R\}$ é o conjunto das possíveis representações de um dos polígonos coloridos, portanto o número de polígonos coloridos que podemos construir é o número de tais conjuntos. Iremos nos referir a $R \cdot x$ como a *órbita* de x . Denotamos por X/R o conjunto das órbitas dos elementos de X , isto é,

$$X/R = \{R \cdot x \mid x \in X\}.$$

Com essa notação, o número de polígonos coloridos que podem ser construídos é igual a $|X/R|$, em que $|X/R|$ denota o número de elementos de X/R .

Com essas considerações obtemos os resultados que apresentamos a seguir.

Lema 1. Se x' é um elemento de uma órbita $A \in X/R$, então $R \cdot x' = A$.

Demonstração. Seja x um elemento de X tal que $A = R \cdot x$. Vamos utilizar as igualdades em (1) para mostrar que $R \cdot x' = R \cdot x$. De fato, como $x' \in R \cdot x$ existe uma rotação $s \in R$ de modo que $x' = s \cdot x$. Assim, para qualquer $t \in R$, temos

$$t \cdot x' = t \cdot (s \cdot x) = (ts) \cdot x \in R \cdot x,$$

daí segue que $R \cdot x' \subseteq R \cdot x$. Como $x' = sx$ segue das igualdades em (1) que $x = (s^{-1}) \cdot x'$. De modo análogo concluímos que $R \cdot x \subseteq R \cdot x'$. Assim obtemos a igualdade $R \cdot x = R \cdot x'$. \square

Teorema 1. Seja $c = |X/R|$ e sejam A_1, \dots, A_c as distintas órbitas em X/R . Então

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$,
2. $X = A_1 \cup \dots \cup A_c$.

Demonstração. Vamos demonstrar primeiro o item 1 do enunciado. Sejam $i, j \in \{1, \dots, c\}$ tais que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, nesse caso podemos considerar um elemento $x \in A_i \cap A_j$. O Lema 1 implica que $A_i = R \cdot x$ e $A_j = R \cdot x$, logo $A_i = A_j$. Lembramos que as órbitas A_1, \dots, A_c são distintas, portanto da igualdade $A_i = A_j$ segue que $i = j$. Assim concluímos que se $i \neq j$ então $A_i \cap A_j = \emptyset$. Agora iremos provar a igualdade no item 2 do enunciado. Dado $x \in X$ o conjunto $R \cdot x$ é uma órbita, logo existe um índice i tal que $R \cdot x = A_i$. Como $x = I \cdot x \in R \cdot x$ concluímos que $x \in A_i$, portanto $x \in A_1 \cup \dots \cup A_c$. Daí segue que $X \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_c$. A inclusão contrária é claramente verdadeira, portanto $X = A_1 \cup \dots \cup A_c$. \square

Como consequência dos resultados acima podemos provar a igualdade no corolário a seguir, que determina o número de órbitas $|X/R|$ em termos da quantidade de representações na órbita de cada $x \in X$. Mais precisamente, para cada $x \in X$ associamos o número $\frac{1}{|R \cdot x|}$, em que $|R \cdot x|$ denota o número de elementos de $R \cdot x$. Em seguida, enumeramos os elementos de X e somamos os valores associados a cada um deles; tal soma é denotada por $\sum_{x \in X} \frac{1}{|R \cdot x|}$. Mostraremos a seguir que essa soma coincide com o número de órbitas. Esse corolário é nosso primeiro passo em direção ao Teorema 2 que nos permite determinar $|X/R|$, e é o principal resultado desta seção.

Corolário 1. *Vale a igualdade*

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|R \cdot x|} = |X/R|.$$

Demonstração. Vamos provar primeiro que para cada órbita $A_i \in X/R$ temos

$$\sum_{x \in A_i} \frac{1}{|R \cdot x|} = 1. \tag{2}$$

De fato, segue do Lema 1 que $R \cdot x = A_i$ para qualquer $x \in A_i$. Desse modo, cada uma das parcelas na soma (2) é igual a $\frac{1}{|A_i|}$, por outro lado o número de parcelas é $|A_i|$, portanto

$$\sum_{x \in A_i} \frac{1}{|R \cdot x|} = \frac{1}{|A_i|} + \dots + \frac{1}{|A_i|} = |A_i| \cdot \frac{1}{|A_i|} = 1.$$

O Teorema 1 implica que cada elemento de X pertence a uma, e somente uma, órbita. Podemos então agrupar as parcelas da soma $\sum_{x \in X} \frac{1}{|R \cdot x|}$ que pertencem a uma mesma órbita. Procedendo dessa forma e utilizando a igualdade em (2) temos

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|R \cdot x|} = \sum_{x \in A_1} \frac{1}{|R \cdot x|} + \dots + \sum_{x \in A_c} \frac{1}{|R \cdot x|} = 1 + \dots + 1 = c = |X/R|.$$

\square

Como próximo passo em direção ao Teorema 2, para cada $x \in X$ denotamos por E_x o conjunto $\{r \in R \mid r \cdot x = x\}$ das rotações em R que fixam x . Iremos obter, utilizando o Corolário 1 e os dois lemas a seguir, a igualdade na Proposição 1 que relaciona as quantidades de elementos nos conjuntos E_x , denotado por $|E_x|$, e o número de órbitas.

Proposição 1. *A soma das quantidades de elementos em cada um dos conjuntos E_x é igual ao produto $|R| \cdot |X/R|$, mais precisamente*

$$\sum_{x \in X} |E_x| = |R| \cdot |X/R|.$$

Antes de demonstrar a proposição acima precisamos dos seguintes lemas.

Lema 2. *Seja $x \in X$. Se $x' \in R \cdot x$ então $E_{x'} = E_x$.*

Demonstração. Como $x' \in R \cdot x$ temos $x' = s \cdot x$ para alguma rotação $s \in R$. Seja t uma rotação em E_x . Utilizando a segunda igualdade em (1) e a comutatividade em R temos

$$t \cdot x' = t \cdot (s \cdot x) = (ts) \cdot x = (st) \cdot x = s \cdot (t \cdot x) = s \cdot x = x',$$

assim $t \in E_{x'}$. Concluimos portanto que $E_x \subseteq E_{x'}$. Utilizando mais uma vez as igualdades em (1) concluimos que $x = s^{-1} \cdot x'$ e de modo análogo provamos que $E_{x'} \subseteq E_x$. \square

Lema 3. *Para cada $x \in X$ temos*

$$|E_x| = \frac{|R|}{|R \cdot x|}.$$

Demonstração. Sejam I, r, \dots, r^{n-1} as rotações em R , onde r é a rotação de $\frac{2\pi}{n}$ radianos. Os elementos de $R \cdot x$ são

$$x, r \cdot x, \dots, (r^{n-1}) \cdot x. \tag{3}$$

Note que o elemento $x' \in R \cdot x$ aparece $|E_{x'}|$ vezes na lista (3). Segue do Lema 2 que $E_{x'} = E_x$, portanto cada elemento listado em (3) é repetido $|E_x|$ vezes. Assim concluimos que o número de elementos na órbita determinada por x é $\frac{|R|}{|E_x|}$, isto é,

$$|R \cdot x| = \frac{|R|}{|E_x|},$$

donde segue a igualdade no enunciado do lema. \square

O resultado acima nos permite concluir que para qualquer $x \in X$ o número de rotações que fixam x divide n , fato que é em si interessante. Além disso, juntamente com o Corolário 1, tem como consequência a Proposição 1.

A igualdade na Proposição 1 parece ser a solução para determinar o número de órbitas; por outro lado pode não ser prático calcular a soma $\sum_{x \in X} |E_x|$. Com efeito, no caso dos quadrados coloridos, i.e., $n = 2$, a soma tem m^4 parcelas. Para superar tal dificuldade, o próximo, e último, passo para provar o Teorema 2 é interpretar essa soma e escrevê-la de outra maneira, mais conveniente. Com esse objetivo marcamos na tabela abaixo as entradas em que $r \cdot x = x$.

\cdot	x_1	x_2	\dots	x_{m^n}
I	$I \cdot x_1$	$I \cdot x_2$	\dots	$I \cdot x_{m^n}$
r	$r \cdot x_1$	$r \cdot x_2$	\dots	$r \cdot x_{m^n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
r^{n-1}	$r^{n-1} \cdot x_1$	$r^{n-1} \cdot x_2$	\dots	$r^{n-1} \cdot x_{m^n}$

O número de entradas marcadas na coluna correspondente a um elemento x de X é $|E_x|$. Assim $\sum_{x \in X} |E_x|$ é o número de entradas marcadas na tabela, i. e., o número de pares (r, x) com $r \in R$ e $x \in X$ tais que $r \cdot x = x$. Podemos determinar esse número de outra forma; para isso, dada uma

rotação $r \in R$, considere o conjunto $X^r := \{x \in X \mid r \cdot x = x\}$ das representações fixadas por r . Então o número de entradas marcadas na linha r é $|X^r|$. Portanto a soma $\sum_{r \in R} |X^r|$ também é o total de pares $(r, x) \in R \times X$ com $r \cdot x = x$. Assim temos a igualdade

$$\sum_{r \in R} |X^r| = \sum_{x \in X} |E_x|.$$

Com isso podemos simplificar, e muito, os cálculos. De fato, no caso dos quadrados ($n = 4$), por exemplo, a soma do lado esquerdo tem 4 parcelas. Essa igualdade juntamente com a Proposição 1 implicam o teorema que enunciaremos a seguir.

Teorema 2. *Vale a igualdade*

$$|X/R| = \frac{1}{|R|} \sum_{r \in R} |X^r|.$$

Esse resultado tem uma interpretação interessante: a quantidade de órbitas é igual ao número médio de elementos fixados por rotações.

Vamos agora utilizar o Teorema 2 para resolver a Questão 1 para quadrados; então assumimos até o final da seção que $n = 4$. O conjunto X tem m^4 elementos. Lembramos que r é a rotação de $\frac{2\pi}{4}$ radianos. Podemos verificar diretamente que $X^1 = X$ e também que X^r, X^{r^3} consistem dos quadrados em que todos os lados têm a mesma cor. O conjunto X^{r^2} consiste dos quadrados em que os lados paralelos têm a mesma cor, como na Figura 5.

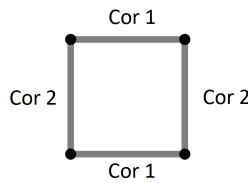


Figura 5: Elemento genérico de X^{r^2}

Temos então m escolhas para a Cor 1 e também para a Cor 2. Assim concluímos que $|X^{r^2}| = m^2$. Desse modo obtemos a igualdade

$$\sum_{r \in R} |X^r| = |X^1| + |X^r| + |X^{r^2}| + |X^{r^3}| = m^4 + m + m^2 + m = m^4 + m^2 + 2m.$$

Portanto concluímos, utilizando o Teorema 2, que podem ser construídos $\frac{m^4+m^2+2m}{4}$ quadrados coloridos quando pintamos os palitos de picolé de um dos lados escolhendo uma entre m cores.

É interessante observar que como $\frac{m^4+m^2+2m}{4}$ é um número natural, então $m^4 + m^2 + 2m$ é múltiplo de 4 para qualquer natural m , fato esse que não é trivial. Encerramos esta seção convidando o leitor a experimentar e resolver o problema de contar quantos são os triângulos, pentágonos e hexágonos coloridos podem ser construídos e, de modo geral, como o Teorema 2 pode ser utilizado para resolver a Questão 1.

3. Contando novamente quadrados coloridos

Nesta seção iremos determinar quantos quadrados coloridos podem ser construídos com palitos de picolé pintados dos dois lados com a mesma cor escolhida entre m cores.

Veremos adiante que o número de quadrados coloridos que podem ser construídos neste caso é, em geral, menor que o número de quadrados que podem ser construídos pintando os palitos de apenas um dos lados. Para $m = 2$ podem ser construídos 6 quadrados coloridos, assim como ocorreu na situação da Introdução. Porém com 3 cores podemos construir apenas 21 quadrados coloridos neste caso (veja a Figura 6), enquanto pintando os palitos apenas de um dos lados temos 24 quadrados coloridos, como vimos na Seção 2.

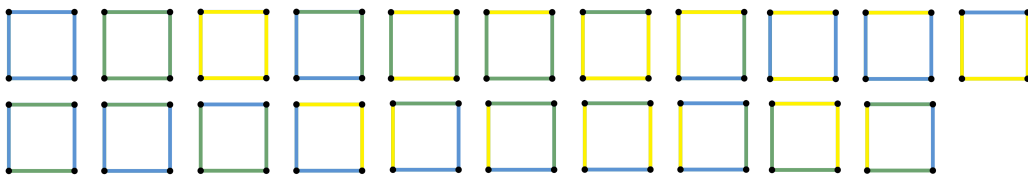


Figura 6: Os 21 quadrados coloridos construídos com palitos pintados dos dois lados e $m = 3$

A diferença é que quando pintamos os palitos apenas de um dos lados, os quadrados na Figura 7 são diferentes.

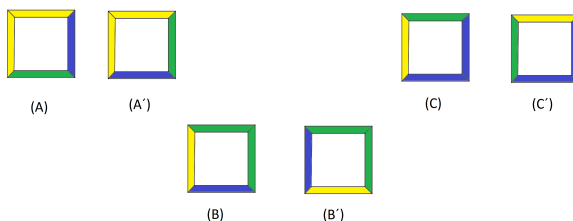


Figura 7: Pares de quadrados

Porém, quando pintamos cada um dos palitos dos dois lados com uma das cores, temos em (A) e (A') um mesmo quadrado em duas posições diferentes: podemos pegar o quadrado (A) e girar no espaço e posicioná-lo como está em (A'). Analogamente em (B) e (B') temos o mesmo quadrado em posições diferentes e também em (C) e (C'). Então, se pintamos cada palito dos dois lados, para obter as representações de um mesmo quadrado a partir de uma representação dada, utilizamos, além das rotações I, r, r^2, r^3 no plano, as reflexões R_{D_1}, R_{D_2} em torno das diagonais D_1 e D_2 , na Figura 8, e também as reflexões R_M, R_N em torno das retas M, N .

Essas transformações constituem o conjunto D_4 das simetrias do quadrado que, com a composição de funções, tem propriedades de uma estrutura algébrica chamada grupo. Essas são as isometrias do plano que preservam o quadrado, i. e., que associam a um ponto do quadrado outro ponto que pertence também ao quadrado.

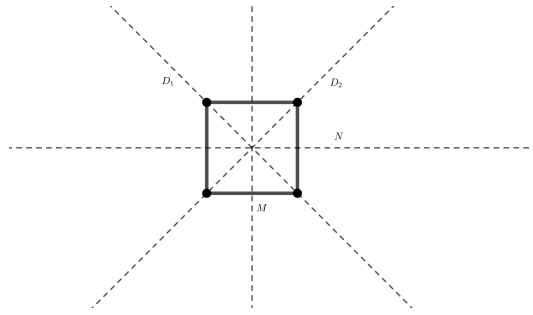


Figura 8: Retas que determinam as reflexões que preservam o quadrado

Definição 1. Seja G um conjunto não vazio com uma operação binária \circ , isto é, uma aplicação que associa a cada par (g_1, g_2) em $G \times G$ um elemento $g_1 \circ g_2$ de G . Dizemos que G , com essa operação, é um grupo se:

- (i) A operação \circ é associativa, isto é, $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ para quaisquer g_1, g_2, g_3 em G .
- (ii) Existe um elemento e em G , chamado de elemento neutro, de modo que $e \circ g = g = g \circ e$ para qualquer elemento g de G .
- (iii) Para cada g em G existe um elemento g^{-1} em G , chamado inverso de g , tal que $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$.

Podemos verificar que, com a composição, o conjunto D_4 das simetrias do quadrado é um grupo. Na Figura 9 vemos, por exemplo, que $R_M \circ R_N = r^2$ e que $R_{D_1} \circ r = R_M$.

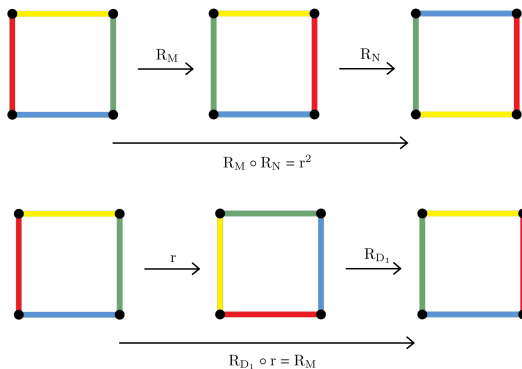


Figura 9: As compostas $R_M \circ R_N$ e $R_{D_1} \circ r$

Com a operação de composição obtemos a seguinte tabela de composições de elementos de D_4 . Observe que a composição não é comutativa.

o	I	r	r ²	r ³	R _N	R _M	R _{D₁}	R _{D₂}
I	I	r	r ²	r ³	R _N	R _M	R _{D₁}	R _{D₂}
r	r	r ²	r ³	I	R _{D₂}	R _{D₁}	R _N	R _M
r ²	r ²	r ³	I	r	R _M	R _N	R _{D₂}	R _{D₁}
r ³	r ³	I	r	r ²	R _{D₁}	R _{D₂}	R _M	R _N
R _N	R _N	R _{D₁}	R _M	R _{D₂}	I	r ²	r	r ³
R _M	R _M	R _{D₂}	R _N	R _{D₁}	r ²	I	r ³	r
R _{D₁}	R _{D₁}	R _M	R _{D₂}	R _N	r ³	r	I	r ²
R _{D₂}	R _N	R _N	R _{D₁}	R _M	r	r ³	r ²	I

Assim concluímos que D_4 com a composição é de fato um grupo, chamado grupo Diedral. Do mesmo modo que no problema proposto na Seção 2 o conjunto X das representações dos quadrados tem m^4 elementos. Para cada $d \in D_4$ e $x \in X$ também denotamos por $d \cdot x$ a representação obtida aplicando d , que é uma rotação ou uma reflexão, à representação x . Valem igualdades análogas às que estão em (1); elas refletem a ideia de que temos uma ação do grupo D_4 no conjunto X das representações dos quadrados coloridos.

Definição 2. Sejam G um grupo com elemento neutro e , seja X um conjunto não vazio. Uma ação de G em X é uma aplicação que associa a cada par (g, x) em $G \times X$ um elemento $g \cdot x$ de X de modo que para qualquer $x \in X$ e quaisquer g_1, g_2 em G temos

$$e \cdot x = x, \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \circ g_2) \cdot x, \tag{4}$$

onde, na segunda igualdade, \circ é a operação binária do grupo G .

Na Seção 2 o conjunto R com a composição é um grupo e temos uma ação de R no conjunto X das representações dos polígonos coloridos. A terminologia que utilizamos neste caso particular é utilizada em geral.

Definição 3. Sejam G um grupo, X um conjunto não vazio e $(g, x) \rightarrow g \cdot x$, onde $g \in G$ e $x \in X$, uma ação de G em X . Se $x \in X$, então dizemos que o conjunto $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$ é a órbita de x . O conjunto das órbitas é denotado por X/G . Para um elemento g do grupo G denotamos X^g o conjunto $\{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ dos elementos de X fixados por g .

O Teorema 2 é um caso particular de um resultado que vale, de modo geral, para ações de um grupo em um conjunto, o número de órbitas da ação é igual ao número médio de pontos fixos de um elemento do grupo.

Lema 4 (Cauchy-Burnside-Frobenius). *Seja G um grupo finito e seja X um conjunto não vazio finito com uma ação $(g, x) \rightarrow g \cdot x$, $g \in G$, $x \in X$, de G em X . Então*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

O resultado que enunciamos com Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius é também conhecido com Teorema de contagem de Burnside, Lema de Cauchy-Frobenius, Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius, Lema de contagem de órbitas e, algumas vezes, é referido na literatura como o Lema que não é de Burnside (veja, por exemplo, [2], [3]). É possível comparar as demonstrações do caso particular que fizemos na Seção 2 e a demonstração do resultado acima que pode ser encontrada em [4] e verificar que com algumas adaptações temos a demonstração do Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius.

Observamos que na prova do Lema 2 foi utilizada a comutatividade da operação em R ; mesmo a operação em D_4 não sendo comutativa ainda vale a igualdade no Lema 3. Tal resultado não será provado aqui, uma prova pode ser encontrada em [4, Teorema 6.1].

Vamos agora usar esse lema para determinar quantos quadrados coloridos podemos construir com os palitos de picolé pintados dos dois lados. Seja então X o conjunto das m^4 representações dos quadrados coloridos. Dois elementos de X representam o mesmo quadrado se, e somente se, estão na mesma órbita pela ação de D_4 em X . O número de quadrados coloridos nesse caso é então igual a $|X/D_4|$. Verificamos na Seção 1 que

$$|X^I| = m^4, |X^r| = m, |X^{r^2}| = m^2, |X^{r^3}| = m.$$

O conjunto X^{R_M} consiste dos elementos de X em que os lados verticais têm a mesma cor e as cores dos lados horizontais são escolhidas independentemente, como na Figura 10 a seguir.

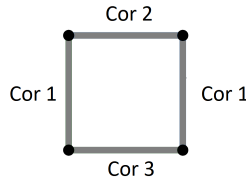


Figura 10: Elemento genérico de X^{R_M}

Temos então m escolhas para cada uma das três cores, portanto $|X^{R_M}| = m^3$. De modo análogo X^{R_N} consiste dos elementos de X em que os lados horizontais têm a mesma cor e $|X^{R_N}| = m^3$. Os elementos de $X^{R_{D_1}}$ são as representações em que os lados que têm em comum um dos vértices da diagonal D_1 têm a mesma cor, como na Figura 11.

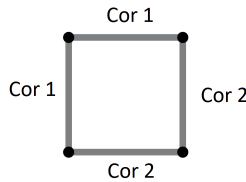


Figura 11: Elemento genérico de $X^{R_{D_1}}$

Temos m escolhas para cada uma das duas cores, portanto $|X^{R_{D_1}}| = m^2$. Analogamente concluímos que $|X^{R_{D_2}}| = m^2$. Utilizando o Lemma de Cauchy-Burnside-Frobenius concluímos que podem ser construídos

$$\frac{m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m}{8}$$

quadrados coloridos quando pintamos cada palito de picolé dos dois lados.

Lembramos que X/D_4 denota o conjunto das órbitas pela ação de D_4 , sejam $x_1, \dots, x_{|X/D_4|}$ elementos de X tais que $D_4 \cdot x_1, \dots, D_4 \cdot x_{|X/D_4|}$ são as distintas órbitas em X/D_4 . Temos a inclusão $R \subset D_4$, logo $R \cdot x_i \subseteq D_4 \cdot x_i$ para $i = 1, \dots, |X/D_4|$. O Teorema 1 vale para ações de grupos de modo geral, portanto duas órbitas distintas em X/D_4 são disjuntas. Assim se $i \neq j$ temos

$$(R \cdot x_i) \cap (R \cdot x_j) \subseteq (D_4 \cdot x_i) \cap (D_4 \cdot x_j) = \emptyset,$$

donde segue que $R \cdot x_1, \dots, R \cdot x_{|X/D_4|}$ são elementos dois a dois distintos em X/R . Portanto vale a desigualdade $|X/D_4| \leq |X/R|$. Vemos, então, que utilizando palitos de picolé pintados dos dois lados podemos construir menos quadrados coloridos do que com os palitos pintados de apenas um lado.

O Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius também pode ser utilizado para contar polígonos coloridos de modo análogo ao que fizemos para quadrados coloridos nesta seção.

Questão 2. Para $n = 3, 5, 6, 7, \dots$, quantos polígonos regulares regulares de n lados podem ser construídos com palitos de picolé coloridos dos dois lados com m cores?

Para abordar essa questão utilizando o Lema de Cauchy-Burnside-Frobenius é necessário conhecer o grupo das simetrias de um polígono regular de n lados, o grupo diedral D_n (veja, por exemplo, [1]), que é muitas vezes estudado em disciplinas de "Estruturas Algébricas" ou "Álgebra" de um curso de graduação em Licenciatura ou Bacharelado em Matemática.

Os problemas considerados aqui são exemplos de contagem que não são facilmente resolvidos com os métodos usuais apresentados no Ensino Médio. Apontamos a relevância desses para os professores motivarem seus alunos a ir além do conteúdo curricular trazendo à tona conceitos abstratos como grupo a partir de enunciados elementares. Esperamos que este texto possa servir para motivar professores e alunos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática a estudarem os conceitos e resultados de Álgebra que usualmente fazem parte da grade curricular desses cursos.

4. Agradecimentos

Os autores agradecem ao revisor pelas sugestões que ajudaram a melhorar a versão final do artigo. O primeiro autor agradece ao CNPq e à Fapesq pelo apoio através dos projetos 301704/2019-8 e 3099/2021, respectivamente.

Referências

- [1] A. Gonçalves, *Introdução à Álgebra*. 5^a ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides/Impa, 1999.
- [2] P. Neumann, *A lemma that is not Burnside's*, Math. Sci. **4**, 133-141, 1979.
- [3] V. Vatter, *A probabilistic proof of a lemma that is not Burnside's*, Amer. Math. Monthly **127** (2020), no. 1, 63.
- [4] D. S. Marques, *Teorema de Burnside e Algumas Aplicações à Contagem*, Dissertação de Mestrado (Profmat), Florestal, MG, 2019.

Diogo Diniz
Universidade Federal de Campina Grande
<diogo@mat.ufcg.edu.br>

Caio Antony Gomes
Universidade Federal de Campina Grande
<caioagma@gmail.com>

Recebido: 09/09/2020
Publicado: 13/05/2022

Alguns Números 2-Quasemonodígitos Primos

Fernando Soares de Carvalho

Eudes Antonio Costa

Resumo

Neste trabalho são apresentadas propriedades de uma classe de números inteiros denominados 2-Quasemonodígitos, representados por $2 - \text{QM}(k, a, b)$. Os resultados exibidos estão relacionados a critérios de divisibilidade, primalidade e quadrados perfeitos. Destaca-se que nesta classe de números, nenhum quadrado perfeito com mais de três algarismos foi encontrado (com k par) e que foram determinados todos os números 2-Quasemonodígitos primos com até 13 algarismos.

Palavras-chave: Quasemonodígito; Divisibilidade; Números Primos; Quadrados Perfeitos.

Abstract

In this work, properties of a class of integers called 2-Quasimonodigits, represented by $2 - \text{QM}(k, a, b)$ are presented. The results displayed are related to divisibility, primality and perfect squares criteria. It is noteworthy that in this number class no perfect square with more than three digits was found (with even k) and that all 2-Quasimonodigits prime with up to 13 digits were determined.

Keywords: Quasimonodigits; Divisibility; Prime numbers; Perfect squares.

1. Introdução

O interesse pelos números primos é recorrente na História da Matemática, seja pelas diversas aplicabilidades (em criptografia, por exemplo) ou apenas por deleite de entusiastas. Técnicas para a busca de números primos, ou, ainda, o estudo da primalidade de certas classes de números inteiros avançam cada vez mais com a atual evolução computacional. Várias propriedades relacionadas a números primos podem ser vistas em [7]. Na literatura encontram-se propriedades relacionadas a critérios de divisibilidade, primalidade e também quadrados perfeitos que envolvem algumas classes de números [4, 5, 6, 10].

Um número *monodígito* (um dígito) ou *repdígito* (repetição de um dígito) é um número natural não nulo formado pela repetição do mesmo dígito (algarismo) num sistema numérico posicional, isto é, em uma base $b > 1$ fixada. Aqui utilizaremos a base decimal, ou seja $b = 10$. São exemplos de números *monodígitos*: 2, 33, 111, 4444, 55555555 e 999999. O conceito de números *monodígitos* foi usado pela primeira vez por Beiler [2], que também apresentou o termo *repunidades* (repetição da unidade) no caso em que o dígito repetido for 1, ou seja, a unidade. Um número natural não nulo formado por $n \geq 2$ dígitos em que um dígito a apareça $n - 1$ vezes e o dígito b apareça apenas 1 vez é um *quasemonodígito*, sendo a e b distintos com $a, b \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$. No caso em que o algarismo a for 1 (unidade) diremos que o número é uma *quaserepunidade*. As *repunidades* e alguns *quasemonodígitos*, são números da forma:

• *repunidades*

$$R_k = \underbrace{11\dots11}_k = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^k - 1}{9}, \quad (1)$$

• *quasemonodígitos*

$$a) \text{QM}_1 = \underbrace{aa\dots a}_k b, \quad b) \text{QM}_2 = b \underbrace{aa\dots a}_k, \quad \text{QM}_3 = \underbrace{a\dots a}_k b \underbrace{a\dots a}_k, \quad \text{com } a, b \in S, \quad (2)$$

em que $k \geq 1$ é um número inteiro e $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Em [10, 1978] são apresentadas algumas propriedades de números quase repunidades e uma lista de primos dessa classe.

Nosso interesse no decorrer destas notas estará concentrado em números que denominamos de *2-Quasemonodígitos*, que são definidos a seguir.

Definição 1. No sistema decimal, um número natural não nulo formado por $n \geq 3$ dígitos (algarismo), no qual o dígito b apareça exatamente duas vezes e o dígito a apareça exatamente $n - 2$ vezes é um *2-Quasemonodígito*, com $a, b \in S$ e $a \neq b$.

Por exemplo, 121, 2332, 44777, 51551555, 888822, 99955999 e 161111116 são exemplos de *2-Quasemonodígito*. Em particular, vamos considerar um subconjunto de números *2-Quasemonodígitos*, denotados por:

$$2 - \text{QM}(k, a, b) = b \underbrace{aa\dots aa}_k b \quad a, b \in S \quad \text{e} \quad a \neq b. \quad (3)$$

Inspirados em estudos e tópicos já apresentados na literatura relacionados aos números primos, monodígitos, *repunidades* e *quaserepunidades* [8, 10, 11, 12], apresentamos nosso estudo acerca dos $2 - \text{QM}(k, a, b)$, explorando primalidade e quadrados perfeitos. Além disso, serão apresentados alguns critérios de divisibilidade e uma lista de $2 - \text{QM}(k, a, b)$ primos (Tabela 1). Os principais resultados são:

Teorema 1. Nenhum $2 - \text{QM}(k, a, b)$ é primo, para k par.

Teorema 2. Nenhum $2 - \text{QM}(k, a, b)$ é um quadrado perfeito, para k par.

2. Critérios de Divisibilidade

Primeiro observamos que os números $2 - \text{QM}(k, a, b)$ podem ser escritos de acordo com o resultado a seguir:

Proposição 1. Para $a, b \in S$ e $k \geq 1$ inteiro, temos

$$2 - \text{QM}(k, a, b) = b \underbrace{aa\dots aa}_k b = b(10^{k+1} + 1) + 10aR_k,$$

sendo R_k uma repunidade.

Demonstração. Basta notar que,

$$\begin{aligned}
 2 - \text{QM}(k, a, b) &= \underbrace{b \text{ aa} \dots \text{aa} b}_k \\
 &= b10^{k+1} + a10^k + \dots + a10^1 + b \\
 &= b(10^{k+1} + 1) + 10a(10^{k-1} + \dots + 10 + 1) \\
 &= b(10^{k+1} + 1) + 10aR_k .
 \end{aligned}$$

□

E mais,

Proposição 2. Se $a = 2$, $b = 1$ e $k \geq 2$, então $2 - \text{QM}(k - 1, 2, 1) = R_k \times R_2$.

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}
 2 - \text{QM}(k - 1, 2, 1) &= (10^k + 1) + 20R_{k-1} \\
 &= (10^k + 1) + (2 \cdot 10^k + \dots + 2 \cdot 10^1) \\
 &= 10^k + 2 \cdot 10^{k-1} + \dots + 2 \cdot 10^1 + 1 \\
 &= (10^{k-1} + \dots + 10 + 1)(10 + 1) \\
 &= R_k \times R_2 .
 \end{aligned}$$

□

Em particular, segue diretamente da Proposição 2 que:

Corolário 1.(a) Nenhum $2 - \text{QM}(k, 2, 1)$ é primo;

(b) O número $2 - \text{QM}(1, 2, 1)$ é um quadrado perfeito.

Lema 1. [7, 9] (*Pequeno Teorema de Fermat*) Sejam a, p números naturais e p primo. Se $(a, p) = 1$, então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, sendo (a, b) o maior divisor comum entre os números a e b .

Uma consequência do Lema 1 (o pequeno Teorema de Fermat) e da Proposição 2 é dada pelo *Corolário 2.* Se $p > 5$ é um número primo então p divide $2 - \text{QM}(p - 2, 2, 1)$.

Demonstração. Observe que $9 \cdot R_{p-1} = 10^{p-1} - 1$, como $(10, p) = 1$ segue do Lema 1 que $10^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, ou seja, p divide R_{p-1} . Portanto, p divide o produto $R_{p-1} \times R_2 = 2 - \text{QM}(p - 2, 2, 1)$. □

Ademais, é fácil observar que

Proposição 3. Nenhum $2 - \text{QM}(k, a, b)$ é primo, para b par ou $b = 5$.

Demonstração. Note que se b é par ou $b = 5$, o número $2 - \text{QM}(k, a, b)$ é par ou múltiplo de 5, respectivamente. Portanto, em ambos os casos, tem-se um número composto. □

E ainda,

Proposição 4. Se $ka \equiv 0 \pmod 3$ e $b \equiv 0 \pmod 3$, então $2 - \text{QM}(k, a, b)$ é múltiplo de 3.

Demonstração. Seja x um número do tipo $2 - \text{QM}(k, a, b)$, isto é, $x = b \underbrace{aa\dots aa}_k b$. Agora, seja $S(x)$ a soma dos algarismos de x , ou seja, $S(x) = 2b + ka$. Se ka e b são múltiplos de 3, então a soma $S(x)$ é múltiplo de 3. Portanto o número $x \in 2 - \text{QM}(k, a, b)$ também é múltiplo de 3. \square

3. Prova do Teorema 1

O Teorema 1 é uma consequência direta do critério de divisibilidade por 11 (Lema 2), enunciado a seguir

Lema 2. [7, 9] Um número é divisível por 11 se a soma alternada de seus algarismos for igual a zero ou divisível por 11.

Exemplo 1. Veja que 11 divide $2 - \text{QM}(2, a, b)$. De fato, basta observar que a soma alternada dos algarismos é $b - a + a - b = 0$. E mais, é de fácil fatoração, pois

$$\begin{aligned} 2 - \text{QM}(2, a, b) &= b \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b = b(10^3 + 1) + 10a(10 + 1) \\ &= 11 \cdot 91b + 11 \cdot 10a = 11(91b + 10a) . \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 1: Para qualquer k par, considere $x \in 2 - \text{QM}(k, a, b)$, isto é, $x = b \underbrace{aa\dots aa}_k b$ e seja $S^*(x)$ a soma alternada dos algarismos de x , ou seja,

$$S^*(x) = b + \underbrace{(-a + a) + \dots + (-a + a)}_{(k/2) \text{ vezes}} - b = 0 .$$

Logo, segue do Lema 2 que x é divisível por 11. Portanto, x não é um número primo.

Utilizando o *software Octave* foi escrito um código para determinar os números $2 - \text{QM}(k, a, b)$ primos com $k \leq 11$. Os números encontrados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Números primos da forma $2 - \text{QM}(k, a, b)$, $k \leq 11$.

b	(k, a)
1	(1,3), (1,5), (1,8), (1,9), (3,3), (3,5), (3,6), (3,9), (5,3), (5,4), (5,7), (7,8), (7,9), (11,6)
3	(1,1), (1,5), (1,7), (1,8), (5,2), (5,4), (7,2), (7,5), (11,1), (11,4), (11,8)
7	(1,2), (1,5), (1,8), (1,9), (3,2), (3,5), (3,6), (3,8), (3,9), (5,6), (7,2), (9,4), (9,5)
9	(1,1), (1,2), (5,2), (5,8), (11,2)

4. Quadrados Perfeitos

Existem propriedades relacionadas a números quadrados perfeitos bem conhecidas, bem como propriedade de divisibilidade por 4. A seguir são apresentadas algumas dessas propriedades.

Lema 3. [7, 9] *Um quadrado perfeito não pode ser da forma $4q + 3$, q um número inteiro.*

Lema 4. [7, 9] *Um quadrado perfeito não termina em 2, 3, 7 e 8.*

Lema 5. [7, 9] *Um quadrado perfeito par é sempre divisível por 4.*

Lema 6. [7, 9] *Um número é divisível por 4 quando o último algarismo somado com o dobro do penúltimo resultar em 0 ou um número divisível por 4.*

Uma consequência imediata do Lema 4 é que se, $b = 2, 3, 7$ ou 8 , o número $2 - \text{QM}(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito. Os dois próximos resultados seguem dos Lemas 3, 4, 5, 6. Vejamos,

Proposição 5. *Seja a um número ímpar, então o número $2 - \text{QM}(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito para $b \in C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.*

Demonstração. Nos casos em que $b = 2, 3, 7$ ou 8 , segue do Lema 4 que o número $2 - \text{QM}(k, a, b)$, não é um quadrado perfeito. Já nos casos em que $b = 1, 5$ ou 9 , de acordo com o Lema 6, deve-se analisar a soma $2a + b$. Observe que, se a é ímpar, $2a$ e b deixam restos 2 e 1 na divisão por 4, respectivamente. Dessa forma, a soma $2a + b$ terá resto três na divisão por 4, ou seja, $2 - \text{QM}(k, a, b)$ deixará resto 3 na divisão por 4. Logo pelo Lema 3, o número $2 - \text{QM}(k, a, b)$ não pode ser um quadrado perfeito. Finalmente, se $b = 4$ o número $2a + b$ deixa resto 2 na divisão por 4, isto é, temos um número par que não é divisível por 4. Pelo Lema 5, o número $2 - \text{QM}(k, a, b)$ também não é um quadrado perfeito. \square

Proposição 6. *Se a é um número par, então o número $2 - \text{QM}(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito para $b \in C_2 = \{2, 3, 6, 7, 8\}$.*

Demonstração. Nos casos em que $b = 2, 3, 7$ ou 8 , recorremos novamente ao Lema 4 para concluir que $2 - \text{QM}(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito. Como por hipótese a será par, o produto $2a$ é divisível por 4. Para $b = 6$, a soma $2a + b$ deixa resto 2 na divisão por 4, ou seja, tem-se um número par que não é divisível por 4. Portanto, pelo Lema 5, o número $2 - \text{QM}(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito. \square

Por fim, um resultado mais restritivo

Proposição 7. *Para todo $k \geq 2$, se $2 - \text{QM}(k, a, b)$ é um número da forma $4q + r$, com q, r inteiros e $r \in \{2, 3\}$, então $2 - \text{QM}(k + 1, a, b)$ também é um número da forma $4q_1 + r$, com q_1 inteiro.*

Demonstração. Temos que,

$$2 - \text{QM}(k, a, b) = 4q + r. \tag{4}$$

Veja que

$$\begin{aligned} 2 - \text{QM}(k + 1, a, b) &= b(10^{k+2} + 1) + aR_{k+1} \cdot 10 \\ &= b \cdot 10 \cdot 10^{k+1} + aR_k \cdot 10 + a10^{k+1} + b \\ &= (b \cdot 10^{k+1} + aR_k \cdot 10 + b) + 9b \cdot 10^{k+1} + a10^{k+1} \\ &= 2 - \text{QM}(k, a, b) + (9b + a) \cdot 10^{k+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Sendo $k \geq 2$ tem-se, $10^{k+1} = 4t_1$ para algum t_1 inteiro. Assim $(9b+a)10^{k+1} = 4t$, com $t = (9b+a)t_1$, e juntamente com a Equação (4) (substituindo na Equação (5)), obtém-se

$$2 - \text{QM}(k+1, a, b) = 4 \underbrace{(q+t)}_{q_1} + r .$$

Portanto, o número $2 - \text{QM}(k+1, a, b)$ é um número da forma $4q_1 + r$, com $r \in \{2, 3\}$. □

Nota 1. Segue da Proposição 7 que, se o número $2 - \text{QM}(k, a, b)$ não é um quadrado perfeito e é da forma $4q+r$, com q e r inteiros, $r \in \{2, 3\}$, então $2 - \text{QM}(k+1, a, b)$ não é um quadrado perfeito, pois também é um número da forma $4q+r$.

5. Prova do Teorema 2

Observe que os números $2 - \text{QM}(1, 2, 1) = 11^2 = 121$, $2 - \text{QM}(1, 8, 4) = 22^2 = 484$ e $2 - \text{QM}(1, 7, 6) = 26^2 = 676$, são quadrados perfeitos, ou seja, existem quadrados perfeitos do tipo $2 - \text{QM}(1, a, b)$. No entanto,

Exemplo 2. Nenhum número $2 - \text{QM}(2, a, b)$ é um quadrado perfeito. De fato, de acordo com o Lema 4, se $b = 2, 3, 7$ ou 8 , o número $2 - \text{QM}(2, a, b)$ não pode ser um quadrado perfeito. Considerando $k = 2$ nas Proposições 5 e 6, restam dois casos a serem verificados, a saber: 1) a é ímpar e $b = 6$; nesse caso, as fatorações de todos os possíveis números, 6116, 6336, 6556, 6776 e 6996, são listadas na Tabela 2, observando que nenhum desses números é um quadrado perfeito. 2) a é par e $b = 1, 4, 5$ ou 9 , para esses números (veja Tabela 2) verifica-se também que nenhum deles é um quadrado perfeito. Portanto, é possível concluir que os números da forma $2 - \text{QM}(2, a, b)$, não são quadrados perfeitos.

Veremos que o Teorema 2 é uma consequência direta dos próximos resultados.

Lema 7. [3] Para todo número n natural, temos que R_2 divide R_{2n} .

Lema 8. Para todo número n natural, temos

$$10^{2n+1} + 1 = 11 \cdot (10^{2n} - 10^{2n-1} + \dots + 10^2 - 10^1 + 1) .$$

Demonstração. Sejam a, b naturais, com $a + b \neq 0$, veja que

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - a^1b^{2n-1} + b^{2n}) .$$

Agora faça $a = 10$ e $b = 1$. □

Lema 9. Para todo número n natural, 11 não divide $10^{2n} - 10^{2n-1} + \dots + 10^2 - 10^1 + 1$.

Demonstração. Primeiro façamos $y = 10^{2n} - 10^{2n-1} + \dots + 10^2 - 10^1 + 1$. Veja que

$$y = (10^{2n} + 10^{2n-1} + \dots + 10^2 + 1) - (10^{2n-1} + 10^{2n-3} + \dots + 10^3 + 10^1) .$$

Na primeira parcela da direita temos n algarismos 1 e na segunda temos $n - 1$; assim a soma dos algarismos das parcelas (ou a soma alternado dos algarismos) do número y é diferente de 0, logo segue do Lema 2 que y não é múltiplo de 11. □

Tabela 2: Não Quadrados Perfeitos

baab	Fatoração
6116	$2^2 \times 11 \times 139$
6336	$2^6 \times 3^2 \times 11$
6556	$2^2 \times 11 \times 149$
6776	$2^3 \times 7 \times 11^2$
6996	$2^2 \times 11 \times 53$
1221	$3 \times 11 \times 37$
1441	11×31
1661	11×51
1881	$3^2 \times 11 \times 19$
4224	$2^7 \times 3 \times 11$
4664	$2^3 \times 11 \times 53$
4884	$2^2 \times 3 \times 11 \times 37$
5225	$5^2 \times 11 \times 19$
5445	$3^2 \times 5 \times 11^2$
5665	$5 \times 11 \times 103$
5885	$5 \times 11 \times 107$
9229	11×839
9449	11×859
9669	$3 \times 11 \times 293$
9889	$11 \times 29 \times 31$

Agora, vamos a

Demonstração do Teorema 2 : Considere x um número da forma $x \in 2 - \text{QM}(k, a, b)$, temos que k é par, ou seja, $k = 2n$ para algum n natural. Pela Proposição 1, tem-se

$$x = b(10^{k+1} + 1) + 10aR_k = b(10^{2n+1} + 1) + 10aR_{2n},$$

sendo R_k uma *repunidade*. Pelo Teorema 1, sabe-se que 11 divide qualquer número $x \in 2 - \text{QM}(2n, a, b)$. Vamos mostrar que 11^2 não divide x . Pelo Lema 8, temos que 11 divide $b(10^{k+1} + 1)$ e pelo Lema 7, 11 divide $10 \cdot aR_{2n}$. Se n também for par, teríamos que 11^2 divide $10 \cdot aR_{2n}$. No entanto, 11^2 nunca divide $b(10^{k+1} + 1)$, pois 11 não divide $y = 10^{2n} - 10^{2n-1} + \dots + 10^2 - 10^1 + 1$, conforme Lema 9. Logo, se k é par, x é divisível por 11, mas não é divisível por 11^2 . Portanto, x não pode ser um quadrado perfeito.

6. Considerações Finais

Os resultados apresentados neste trabalho tratam de números da forma $2 - \text{QM}(k, a, b)$. Inicialmente, utilizando critérios de divisibilidade foi possível identificar condições sobre os valores de k , a e b , que garantem a não primalidade do número. Foram determinados todos os números primos da forma 2-Quasemonodígitos com até treze algarismos ($k \leq 11$). Observa-se que apenas 43 números primos foram encontrados. No caso em que k é ímpar, uma pergunta que ainda nos intriga é a quantidade de números primos nesse subconjunto. É finita ou não? Finalmente, fizemos uma breve análise de números 2-Quasemonodígitos quadrados perfeitos, e nesse caso, apenas três

desses números foram encontrados e são números de três algarismos. E mostramos que não existe nenhum outro quadrado perfeito quando k é par.

Referências

- [1] ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. *Mathematical olympiad challenges*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [2] BEILER, A. H. *Recreations in the theory of numbers: The queen of mathematics entertains*, Chapter 11: 111...111. Courier Corporation, 1964.
- [3] CARVALHO, F. S.; COSTA, E. A. Escrever o número 111...111 como produto de dois números, **Revista do Professor de Matemática**, SBM, 87, (15–19), 2015.
- [4] COSTA, E. C.; SANTOS, D. C. Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas, *Revista do Professor de Matemática online*, SBM, 8(4), (495–503), 2020.
- [5] DUBNER, H. “Repunit R_{49081} is a probable prime.” *Mathematics of computation*. 71, (833–835), 2002.
- [6] DUBNER, H.; WILLIAMS, H. C. “A Primality de R_{1031} .” *Mathematics of Computation*, 47, 703–711, 1986.
- [7] MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. *Teoria dos Números: Um Passeio com Primos e Outros Números Familiares Pelo Mundo Inteiro*. Projeto Euclides. Sociedade Brasileira de Matemática, 2018.
- [8] TRIGG, C. W. “Infinite sequences of palindromic triangular numbers.” **The Fibonacci Quarterly**, 12, (209–212), 1974.
- [9] NIVEN, I.; ZUCKERMAN, H. S.; MONTEGOMERY, H. L. *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley and Sons. 1991.
- [10] WILLIAMS, H. C. “Some Primes with Interesting Digit Patterns.” *Mathematics of Computation*, 32(144), 1306–1310, 1978.
- [11] RIBENBOIM, P. Números primos: velhos mistérios e novos recordes. IMPA, 2012.
- [12] SNYDER, W. M. “Factoring repunits”. *The American Mathematical Monthly*. n. 89.7, p. 462–466. 1982.

Fernando Soares de Carvalho
Universidade Federal do Tocantins
<fscarvalho@uft.edu.br>

Eudes Antonio Costa
Universidade Federal do Tocantins
<eudes@uft.edu.br>

Recebido: 09/06/2021
Publicado: 16/05/2022

Sombras de triângulos ao sol: uma demonstração algébrica elementar do Teorema de Lhuillier em geometria espacial

Victor Ibrahim Santos El Adji Humberto José Bortolossi 

Resumo

Recorte um triângulo ABC qualquer de uma folha de cartolina. Supondo um dia ensolarado em que os raios do Sol cheguem paralelos e perpendiculares a uma superfície plana, que tipo de sombras esse triângulo irá produzir nessa superfície, dependendo de como ele é segurado no espaço? Se o triângulo ABC não estiver paralelo aos raios solares, sua sombra será um triângulo. Mas, nesse caso, quais tipos de sombras triangulares podem ser produzidas? Seria possível, por exemplo, segurar o triângulo ABC (suposto qualquer) de forma que sua sombra seja um **triângulo equilátero**? A resposta é afirmativa, como atesta o teorema seguinte. Apresentaremos uma demonstração algébrica um pouco longa, mas elementar (isto é, acessível a alunos do Ensino Médio), e de nosso conhecimento, inédita.

Palavras-chave: Geometria espacial, projeção ortogonal; Teorema de Lhuillier.

Abstract

Cut out any triangle ABC from a sheet of paper. Assuming a sunny day when the sun's rays are parallel and perpendicular to a flat surface, what kind of shadows will this triangle produce on this surface depending on how it is held in the space? If the triangle ABC is not parallel to the sun's rays, its shadow will be a triangle. In this case, what types of triangular shadows could be produced? It would be possible, for example, to hold the triangle ABC (supposed any) so that its shadow is an **equilateral triangle**? The answer is affirmative, as the following theorem attests. we will present a little bit lengthy but elementary (that is, accessible to high school students) algebraic demonstration, of our knowledge, unpublished.

Keywords: Spatial Geometry, orthogonal Projection; Lhuillier's Theorem.



Teorema de Lhuillier. Dado um triângulo ABC qualquer, sempre é possível posicioná-lo no espaço \mathbb{R}^3 de tal forma que sua projeção ortogonal sobre o plano xy seja um triângulo equilátero.

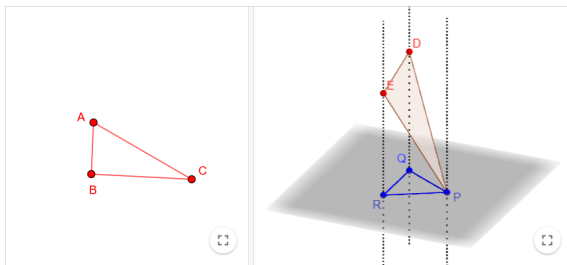
Demonstração. Considere, no plano xy , o triângulo equilátero de vértices

$$P = (1, 0, 0), \quad Q = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad R = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

Considere também as retas s e t perpendiculares ao plano xy nos pontos Q e R , respectivamente. Vamos provar que existem números reais $\beta \geq 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que os pontos

$$D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \beta\right) \quad \text{e} \quad E = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \gamma\right)$$

sobre as retas s e t formam um triângulo PDE que é semelhante ao triângulo ABC dado inicialmente. Uma mudança de escala apropriada transformará PDE em um triângulo congruente a ABC, cuja projeção ortogonal sobre o plano xy será um triângulo equilátero, estabelecendo assim o teorema.



Sejam $u = d(A, B)$, $v = d(A, C)$ e $w = d(B, C)$. Renomeando-se os pontos se necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \geq v \geq w > 0$. Para que PDE seja semelhante a ABC, então deve existir uma constante real $k > 0$ tal que

$$\begin{cases} d(P, D) = k u, \\ d(P, E) = k v, \\ d(D, E) = k w, \end{cases} \quad \text{ou, ainda,} \quad \begin{cases} d(P, D)^2 = k^2 u^2, \\ d(P, E)^2 = k^2 v^2, \\ d(D, E)^2 = k^2 w^2. \end{cases}$$

Mas, $d(P, D)^2 = 3 + \beta^2$, $d(P, E)^2 = 3 + \gamma^2$ e $d(D, E)^2 = 3 + (\beta - \gamma)^2$. Sendo assim, o triângulo PDE é semelhante ao triângulo ABC se, e somente se, o seguinte sistema de três equações e três variáveis ($\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ e $k > 0$) possui pelo menos uma solução:

$$\begin{cases} 3 + \beta^2 = k^2 u^2, \\ 3 + \gamma^2 = k^2 v^2, \\ 3 + (\beta - \gamma)^2 = k^2 w^2. \end{cases}$$

Destacamos duas ideias fundamentais da prova algébrica que será apresentada: (1) “quem fatora, fatura” no sentido de que por meio de várias fatorações adequadas será possível estabelecer que várias expressões são ≥ 0 e (2) baixar a dimensão: (u, v, w) para $(x, y, 1)$ e, depois, para $y + \alpha$, com α um parâmetro.

Expandindo-se a terceira equação, obtemos que $3 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 = k^2w^2$. Mas, das duas primeiras equações, segue-se que $\beta^2 = k^2u^2 - 3$ e $\gamma^2 = k^2v^2 - 3$. Portanto,

$$\begin{aligned} 3 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 = k^2w^2 &\Leftrightarrow 3 + (k^2u^2 - 3) - 2\beta\gamma + (k^2v^2 - 3) = k^2w^2 \\ &\Leftrightarrow 2\beta\gamma = k^2(u^2 + v^2 - w^2) - 3. \end{aligned}$$

Mas, se $2\beta\gamma = k^2(u^2 + v^2 - w^2) - 3$, então, elevando-se ao quadrado os dois lados da equação (observe que os dois lados da equação são não negativos, pois $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ e $k^2(u^2 + v^2 - w^2) - 3 = (k^2u^2 - 3) + k^2(v^2 - w^2) = \beta^2 + k^2(u - v)(u + v) \geq 0$), segue-se que, de forma equivalente, que

$$\begin{aligned} 4\beta^2\gamma^2 &= (k^2(u^2 + v^2 - w^2) - 3)^2 \\ &= k^4(u^2 + v^2 - w^2)^2 - 6k^2(u^2 + v^2 - w^2) + 9. \end{aligned}$$

Dado que $4\beta^2\gamma^2 = 4(k^2u^2 - 3)(k^2v^2 - 3) = 4k^4u^2v^2 - 12k^2(u^2 + v^2) + 36$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} 4\beta^2\gamma^2 = k^4(u^2 + v^2 - w^2)^2 - 6k^2(u^2 + v^2 - w^2) + 9 \\ \Updownarrow \\ 4k^4u^2v^2 - 12k^2(u^2 + v^2) + 36 = k^4(u^2 + v^2 - w^2)^2 - 6k^2(u^2 + v^2 - w^2) + 9 \\ \Updownarrow \\ [4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2]k^4 - 6(u^2 + v^2 + w^2)k^2 + 27 = 0. \end{aligned}$$

agora, note que

$$4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2 = (v + w - u)(u + w - v)(u + v - w)(u + v + w) > 0$$

pois u , v e w são medidas dos lados de um triângulo, as quais, portanto, devem satisfazer as desigualdades triangulares. Assim, a equação

$$[4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2]k^4 - 6(u^2 + v^2 + w^2)k^2 + 27 = 0 \quad (*)$$

é, de fato, uma equação quadrática em k^2 . Dado que

$$\begin{aligned} \Delta &= [-6(u^2 + v^2 + w^2)]^2 - 4[4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2][27] \\ &= 144(u^4 - u^2v^2 - u^2w^2 + v^4 - v^2w^2 + w^4) \\ &= 72[(u^2 - v^2)^2 + (u^2 - w^2)^2 + (v^2 - w^2)^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Tal equação quadrática em k^2 possui soluções reais, a maior delas dada por

$$k^2 = \frac{3(u^2 + v^2 + w^2) + 3\sqrt{2}\sqrt{(u^2 - v^2)^2 + (u^2 - w^2)^2 + (v^2 - w^2)^2}}{4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2}.$$

Note que, como $4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2 > 0$, então

$$\frac{\overbrace{3(u^2 + v^2 + w^2)}^{>0} + \overbrace{3\sqrt{2}\sqrt{(u^2 - v^2)^2 + (u^2 - w^2)^2 + (v^2 - w^2)^2}}^{\geq 0}}{\underbrace{4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2}_{>0}} > 0.$$

Para obter os valores de β e γ a partir das equações $\beta^2 = k^2u^2 - 3$ e $\gamma^2 = k^2v^2 - 3$, precisamos mostrar que $k^2u^2 - 3 \geq 0$, $k^2v^2 - 3 \geq 0$ e $k^2w^2 - 3 \geq 0$. Como $u \geq v \geq w$, basta mostrar que $k^2w^2 - 3 \geq 0$. Escrevendo

$$T(u, v, w) = \sqrt{2}\sqrt{(u^2 - v^2)^2 + (u^2 - w^2)^2 + (v^2 - w^2)^2},$$

temos que

$$\begin{aligned} k^2w^2 - 3 &= \frac{3(u^2 + v^2 + w^2) + 3T(u, v, w)}{4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2} w^2 - 3 \\ &= 3 \left[\frac{(u^2 + v^2 + w^2 + T(u, v, w)) w^2}{4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2} - 1 \right] \\ &= 3[F(u, v, w) - 1], \end{aligned}$$

com a função F definida por

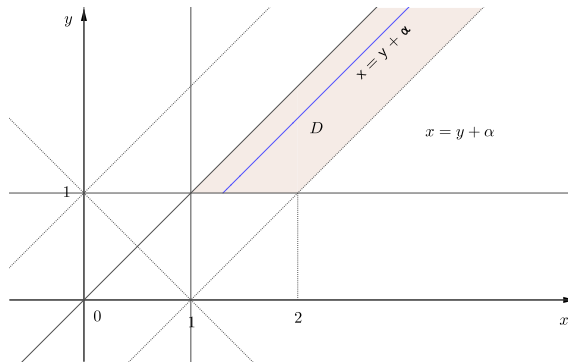
$$F(u, v, w) = \frac{(u^2 + v^2 + w^2 + T(u, v, w)) w^2}{4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2}.$$

Devemos mostrar que $F(u, v, w) \geq 1$ para todo $u, v, w \in]0, +\infty[$ com $u + v > w$, $u + w > v$ e $v + w > u$ e $u \geq v \geq w > 0$. Note que F é uma função homogênea, pois para todo $\lambda > 0$, vale que $F(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = F(u, v, w)$. Assim,

$$F(u, v, w) = F\left(\frac{1}{w}u, \frac{1}{w}v, \frac{1}{w}w\right) = F(x, y, 1),$$

com $x = u/w$ e $y = v/w$. Dessa maneira, basta mostrar que $F(x, y, 1) \geq 1$ para todo $x, y \in [1, +\infty[$ com $x + y > 1$, $x + 1 > y$ e $y + 1 > x$ e $x \geq y \geq 1$. O conjunto dos pares ordenados que satisfazem simultaneamente essas desigualdades pode ser escrito da seguinte maneira:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + \alpha \text{ com } 0 \leq \alpha < 1 \text{ e } y \geq 1\}.$$



Assim, é suficiente mostrar que $F(x, y, 1) = F(y + \alpha, y, 1) \geq 1$ para todo $0 \leq \alpha < 1$ e $y \geq 1$. Escrevendo:

$$\begin{aligned} N_1 &= y^2 + (\alpha + y)^2 + \sqrt{2} \sqrt{(y^2 - 1)^2 + ((\alpha + y)^2 - 1)^2 + (-y^2 + (\alpha + y)^2)^2} + 1, \\ D_1 &= 4y^2(\alpha + y)^2 - (y^2 + (\alpha + y)^2 - 1)^2, \\ N_2 &= 1, \\ D_2 &= 1 - \alpha^2, \end{aligned}$$

vamos mostrar que

$$F(y + \alpha, y, 1) - \frac{1}{1 - \alpha^2} = \frac{N_1}{D_1} - \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 D_2 - N_2 D_1}{D_1 D_2} \geq 0,$$

pois, nesse caso, $F(y + \alpha, y, 1)$ seria maior do que ou igual a $1/(1 - \alpha^2)$ que é maior do que ou igual a 1 dado que $0 \leq \alpha < 1$. Uma vez que $D_1 D_2 > 0$, resta mostrar que $N_1 D_2 - N_2 D_1 \geq 0$. Mas,

$$N_1 D_2 - N_2 D_1 = -2(\alpha - 1)(\alpha + 1)E = 2(1 - \alpha^2)E,$$

onde

$$E = \sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^3 y + 5\alpha^2 y^2 - \alpha^2 + 2\alpha y^3 - 2\alpha y + y^4 - 2y^2 + 1} - y^2 - y\alpha + 1.$$

Dado que $2(1 - \alpha^2) \geq 0$, resta mostrar que $E > 0$ e, para isso, é suficiente mostrar que

$$\sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^3 y + 5\alpha^2 y^2 - \alpha^2 + 2\alpha y^3 - 2\alpha y + y^4 - 2y^2 + 1} \geq y^2 + y\alpha - 1.$$

Visto que $y^2 + y\alpha - 1 \geq 0$ para todo $0 \leq \alpha < 1$ e $y \geq 1$, a condição anterior é equivalente a

$$(\sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^3 y + 5\alpha^2 y^2 - \alpha^2 + 2\alpha y^3 - 2\alpha y + y^4 - 2y^2 + 1})^2 \geq (y^2 + y\alpha - 1)^2$$

ou, ainda,

$$\alpha^4 + 4\alpha^3 y + 5\alpha^2 y^2 - \alpha^2 + 2\alpha y^3 - 2\alpha y + y^4 - 2y^2 + 1 - (y^2 + y\alpha - 1)^2 \geq 0.$$

Mas,

$$\alpha^4 + 4\alpha^3 y + 5\alpha^2 y^2 - \alpha^2 + 2\alpha y^3 - 2\alpha y + y^4 - 2y^2 + 1 - (y^2 + y\alpha - 1)^2 = \alpha^2(\alpha^2 + 4y^2 + 4\alpha y - 1).$$

Mas $\alpha^2 + 4\alpha y \geq 0$ e $4y^2 - 1 \geq 3$, de modo que $\alpha^2(\alpha^2 + 4y^2 + 4\alpha y - 1) \geq 0$. ■

Existe uma prova geométrica sintética do Teorema de Lhuillier, disponível no clássico livro *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*, de Heinrich Dörrie. Uma vantagem da nossa prova algébrica é que ela nos ensina como posicionar exatamente o triângulo ABC para que sua projeção ortogonal no plano xy seja um triângulo equilátero. Uma versão interativa dessa construção feita no GeoGebra está disponível neste endereço: <<https://ggbm.at/ukycq8ch>>. Um vídeo exibindo este *applet* do GeoGebra em ação pode ser visto aqui: <https://youtu.be/yxOcRAQFLA>.

Uma outra maneira de se interpretar o Teorema de Lhuillier é a seguinte: seções planas adequadas de um prisma “infinito” cuja base é um triângulo equilátero (uma barra de chocolate trobлерone infinito) reproduzem, a menos de semelhança, qualquer triângulo especificado.

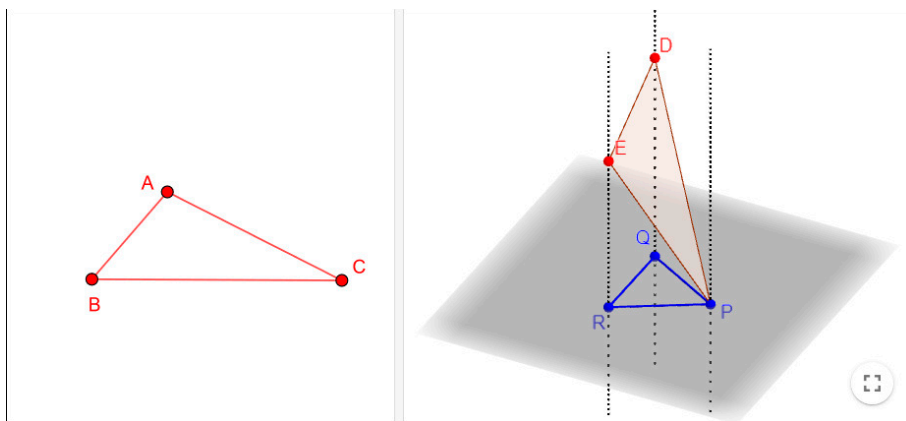


Figura: implementação do Teorema de Lhuillier no GeoGebra.

O Teorema de Lhuillier é frequentemente usado como um lema para a demonstração do Teorema Fundamental da Axonometria (o Teorema de Pohlke): dados três segmentos arbitrários \overline{OU} , \overline{OV} e \overline{OW} em um plano π , com mesma origem O e que não estão todos contidos em uma mesma reta, podem ser considerados como uma projeção paralela das três arestas OU , OV e OW de um cubo no espaço (Klein, 2016). É esse teorema que garante que os desenhos de sistemas ortonormais no \mathbb{R}^3 que se costuma fazer nas aulas de Geometria Analítica estão todos corretos.

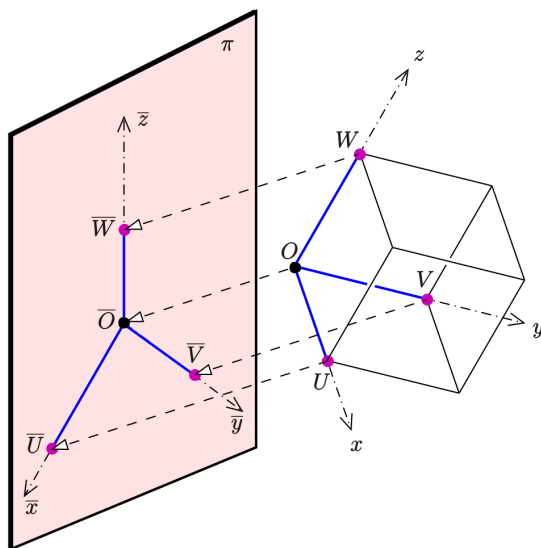


Figura: o Teorema Fundamental da Axonometria.

Observação: esse trabalho foi motivado por uma das atividades do capítulo de vistas ortogonais e projeções em perspectiva do Projeto Livro Aberto de Matemática da Obmep/Impa (<https://www.umlivroaberto.com/>).

Observamos que a outra solução de(*), a saber, $k^4 = \frac{3(u^2+v^2+w^2)-3\sqrt{2}\sqrt{(u^2-v^2)^2+(u^2-w^2)^2+(v^2-w^2)^2}}{4u^2v^2-(u^2+v^2-w^2)^2}$ pode eventualmente ser negativa e, então, deve ser descartada (tome, por exemplo $u = 3/2$, $v = 1$ e $w = 1$, de modo que $k^2 = 4/3$, com $k^2w^2 - 3 < 0$, o que não convém!).

Segundo o *site* MacTutor <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lhuilier/>, Simon Antoine Jean Lhuilier (1750-1840) foi um matemático suíço que trabalhou em análise, topologia e probabilidade. Simon Lhuilier (às vezes escrito Simon L'Huilier) era filho de Laurent Lhuilier, um joalheiro e ourives. Sua mãe, Suzanne-Constance Matte, era a segunda esposa de Laurent Lhuilier e havia três filhos mais velhos na família. Os Lhuilier eram uma família huguenote, originária de Mâcon, mas depois que o Édito de Nantes (que concedeu liberdade religiosa aos huguenotes) foi revogado por Luís XIV em 1685, eles tiveram que fugir. Eles se estabeleceram em Genebra em 1691.

Lhuilier foi um aluno excepcional do ensino médio e passou a estudar matemática na Academia Calvin, onde aprendeu matemática com um dos ex-alunos de Euler, Louis Bertrand, e física com Georges-Louis Le Sage. Foi por meio de Le Sage que Lhuilier obteve seu primeiro cargo como tutor da família Rilliet-Plantamour, cargo que ocupou por dois anos.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Projeto Livro aberto (<https://umlivroaberto.org/>) (de onde a questão nasceu) e à Faperj pela bolsa de iniciação científica concedida ao autor El Adji. Os autores agradecem a Carlos Tomei, Josy Santos e Caroline Fagundes pela revisão do texto. Agradecemos também ao parecerista anônimo pelas importantes considerações feitas.

Referências

- [1] Dörrie, Heinrich. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. New York: Dover Publications, Inc., 1965.
- [2] Klein, Felix. *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*. Volume II: Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2016.

Victor Ibrahim Santos El Adji
Universidade Federal Fluminense
<vicoribrahim@id.uff.br>

Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
<humbertobortolossi@id.uff.br>

Recebido: 15/01/2021
Publicado: 26/05/2022

Relacionando critérios de divisibilidades com sistemas de numeração

Thiago Rodrigues Cavalcante¹ 

Rafael Pimenta Alves 

Resumo

Neste trabalho vamos relacionar a divisibilidade de um número com o sistema de numeração desse em uma dada base. Mais precisamente, determinamos quando um número escrito em uma dada base r é divisível por $(r-1)$ e $(r+1)$. Partimos dessa generalização e obtemos os conhecidos critérios de divisibilidade por 9 e por 11, quando o número em questão está escrito na base $r = 10$. Utilizamos tais conceitos para resolver exercícios de olimpíadas de matemática, questões de pós-graduação e desvendar algumas *brincadeiras* comuns nas rodas de amigos, em que as respostas secretas, estão diretamente ligadas a sistemas de numeração.

Palavras-chave: sistema de numeração; divisibilidade por 9 e por 11;

Abstract

In this work we are going to relate the divisibility of a number to its numbering system on a given basis. More precisely, we determine when a number written on a given base r is divisible by $(r-1)$ and $(r+1)$. We started from this generalization and obtained the well-known divisibility criteria for 9 and 11, when the number in question is written in the base $r = 10$. We use these concepts to solve math olympics exercises, graduate questions and unveil some common *games* in the circles of friends that, the *secret* answers, are directly linked to numbering systems.

Keywords: numbering system; divisibility by 9 and by 11;

1. Introdução

Sistema de numeração e divisibilidade são temas recorrentes em questões de diversas olimpíadas de matemática em diversos níveis, além de estarem presentes em disciplinas da graduação e pós-graduações, bem como exames de qualificação de programas de pós-graduação. Nosso principal objetivo deste trabalho foi o de relacionar esses dois temas, de modo a obter um padrão e, desse, deduzirmos os conhecidos critérios de divisibilidade por 9 e por 11. O que está "escondido" nesses dois critérios é que o número a ser verificada sua divisibilidade tanto por 9, quanto por 11 esta representado na base 10.

Ao escrevermos um numero, precisamos reconhecer em que base numérica estamos trabalhando. Apesar de usualmente trabalharmos com a base decimal (base 10), podemos pensar em outras

¹Parcialmente apoiado pela Propesq 05/2021

bases, as quais possuem várias aplicações e historicamente vêm sendo utilizadas e deixam resquícios até os dias atuais.

Na computação, por exemplo, temos a utilização da base binária (onde utilizam-se apenas os algarismos 1 e 2). Outro sistema de numeração conhecido é o sexagenal, o qual tem resquícios na medição de uma hora com 60 minutos e na circunferência contendo 360. Do sistema duodecimal (com doze unidades), ainda utilizamos para a contagem de uma dúzia e, no sistema inglês, temos que 1 pé equivale a 12 polegadas.

Uma brincadeira interessante envolvendo sistemas de numeração é sobre a escolha de uma peça de dominó. Para o leitor que não conhece uma peça de dominó, trata-se de um retângulo dividido ao meio, no qual em cada um dos seus lados existe uma quantidade de pontos, de 0 a 6 pontos. Dois amigos encontram-se e um deles pede ao segundo para escolher uma peça de dominó, a qual possui dois algarismos, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, combinados dois a dois. O primeiro pede que este escolha uma das duas quantidades e multiplique-a por 5. Em um segundo momento, some 3 ao resultado, e, no que segue, some o número obtido por 2. Por fim, pede-se que some o resultado final com o outro número da peça e pergunta-se qual o resultado. A partir desse, é possível determinar a peça do dominó escolhida pelo amigo.

Trabalhando matematicamente a brincadeira citada, consideremos $n = xy$ um número de dois algarismos, onde x e y representam a quantidade de pontos da peça do dominó. Vamos estudar todos os passos da brincadeira e, partindo de uma resposta aleatória, tentar obter a peça do dominó.

- i) Escolher um dos algarismos x ou y e multiplicá-lo por 5. Sem perda de generalidade, vamos escolher x . Portanto obtemos $5x$, como resultado.
- ii) Somar 3 ao resultado, resultando em $5x + 3$.
- iii) Multiplicar o número obtido por 2, ficando com $2(5x + 3)$
- iv) Some o resultado final ao segundo número da peça e fale o valor final, ou seja, $2(5x + 3) + y$.

Supondo que o resultado final seja 52, então teremos que

$$\begin{aligned}2(5x + 3) + y &= 52 \\10x + 6 + y &= 52 \\10x + y &= 46,\end{aligned}$$

de onde concluímos que $x = 4$ e $y = 6$, pois podemos reescrever $46 = 4 \cdot 10 + 6$.

Uma outra atividade interessante é *O Nove Misterioso*, que consiste em:

Peça para alguém escolher, em segredo, um número natural com, pelo menos, três algarismos (no sistema decimal, é claro). Peça, ainda, para que efetue uma permutação qualquer dos seus algarismos, obtendo um novo número, e que subtraia o menor do maior desses dois números. Finalmente, peça ao seu parceiro de jogo para reter um dos algarismos diferentes de zero desse novo número e divulgar os restantes. É possível adivinhar o algarismo retido!

Vamos analisar matematicamente, o que acontece nessa atividade. Sejam $a = (r_2r_1r_0)_{10}$ o número escolhido e $b = (\bar{r}_2\bar{r}_1\bar{r}_0)_{10}$ o número obtido pela permutação dos algarismos de a . Para que fique mais claro, vamos dar um exemplo. Suponho que $a = 530$, então um possível b , seria $b = 305$.

Temos que $a = (r_2r_1r_0)_{10} = r_210^2 + r_110 + r_0$, logo

$$\begin{aligned}
 a - (r_2 + r_1 + r_0) &= (r_210^2 + r_110 + r_0) - (r_2 + r_1 + r_0) \\
 &= r_2(10^2 - 1) + r_1(10 - 1).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Não é difícil verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ é múltiplo de 9. Portanto, segue de (1) que:

$$a = (r_2 + r_1 + r_0) + 9q \text{ e, obrigatoriamente}$$

$$b = (r_2 + r_1 + r_0) + 9q'.$$

Portanto, supondo sem perda de generalidade que $a < b$, temos que

$$b - a = 9(q' - q) = 9k.$$

Finalmente, para adivinhar o algarismo omitido na resposta do seu parceiro, basta descobrir o quanto devemos somar à soma dos dois dígitos divulgados para que tal soma seja divisível por 9.

Além dessas duas particularidades, podemos encontrar outras que envolvem diretamente o estudo de sistemas de numerações e divisibilidade. Motivados por essas *brincadeiras* comuns em redes sociais e rodas de amigos, onde um sabe a resposta e os demais não sabem diretamente o motivo por trás dessas, que é um estudo dos sistemas de numerações e divisibilidade com certas adaptações, realizamos este trabalho no qual relacionamos estes conteúdos, abordando-os em exercícios de olimpíadas e aplicações interessantes.

De modo a não tornar o texto extenso e de leitura cansativa, vamos supor que o leitor esteja familiarizado com algumas definições e propriedades estudadas nos cursos de Aritmética, no quesito Divisibilidade, Congruência e Sistemas de Numeração. Entretanto, para que o texto seja autocontido, os Teoremas e as Proposições necessários para a demonstração dos principais resultados farão parte das Preliminares deste trabalho.

Neste trabalho, não fazemos apenas uma dedução do critério de divisibilidade de um número escrito na base 10, por 9 ou por 11, utilizando sistemas de numerações. Aqui generalizamos este, para um caso geral de um número escrito em uma base $r \in \mathbb{N}$ ser ou não divisível por $(r - 1)$ ou por $(r + 1)$. Dessa generalização, seguem diretamente os critérios, para o caso em que o número esteja na base $r = 10$, o caso da divisibilidade por 9 e por 11.

Além das atividades interessantes pré-citadas, este trabalho é motivado por questões oriundas de olimpíadas, adaptadas para o nosso tema. Dentre elas destacamos:

Problema 1.1. Mostre que $2 \nmid (1120122)_3$, quando é representado na base 10.

Problema 1.2. Sobre qual condição o número $(abc)_6$ é divisível por 5?

Problema 1.3. Usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, construímos vários números de sete dígitos distintos. Existem dois deles, distintos, tais que um divida o outro?

Note que, nos dois primeiros problemas citados, estamos relacionando um número em uma certa base r com sua divisibilidade por $(r - 1)$ e/ou $(r + 1)$. O terceiro problema é bastante interessante e estará ligado ao estudo de congruência. Além de resolver tais questões, vamos provar nossos principais resultados e exemplificar, utilizando sistemas de numeração relacionando estes com divisibilidade, provando que são de grande relevância para o estudo de divisibilidade de um inteiro, escrito em uma certa base, por um número fixado.

De modo a tornar o texto autocontido, enunciaremos e demonstraremos alguns dos resultados utilizados neste trabalho, utilizando técnicas de indução e a familiaridade do leitor com as noções de aritmética e matemática discreta.

2. Preliminar

Antes de partirmos para algumas proposições e resultados interessantes e que estão ligados aos principais resultados deste texto, vamos definir o que vem a ser um número estar escrito em uma certa base $\beta > 1$ qualquer. Dizemos que um número $\alpha \in \mathbb{R}_+$ está expresso na base β se ele é escrito na forma:

$$\alpha := (\alpha)_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n,$$

em que a_n são inteiros entre 0 e $(\beta - 1)$.

No que segue, vamos ilustrar o conceito de sistemas de numeração com dois exemplos, um mais simples e o segundo com um pouco mais de detalhes.

Exemplo 2.1. Considerando $\beta = 5$ vamos escrever o número 3421 na base 5. Nesse caso, temos que $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$ e $a_3 = 3$. Portanto:

$$(3421)_5 = 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0.$$

De onde segue que $(3421)_5 = (486)_{10} = 486$.

Ao analisarmos alguns problemas oriundos de olimpíadas que envolvem divisibilidade e sistema de numeração, deparamo-nos com a seguinte situação:

Observação 1. Note que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(a + 1)^3 = (a + 1) \cdot (a + 1) \cdot (a + 1).$$

Ao analisarmos o termo do lado direito da identidade anterior, verificamos que se trata de um produto de três termos idênticos, onde em cada um temos duas possibilidades de números a serem escolhidos, o número a e o 1. Não é difícil verificar que temos 8 possíveis escolhas dos números, já que são três produtos, com 2 elementos em cada a e 1. Para continuar com nossos propósitos, vamos listar as possibilidades a seguir:

$$\begin{aligned}
 a \cdot a \cdot a &= a^3 \text{ onde escolhemos } (a, a, a) \\
 a \cdot a \cdot 1 &= a^2 \text{ onde escolhemos } (a, a, 1) \\
 a \cdot 1 \cdot a &= a^2 \text{ onde escolhemos } (a, 1, a) \\
 a \cdot 1 \cdot 1 &= a \text{ onde escolhemos } (a, 1, 1) \\
 1 \cdot a \cdot a &= a^2 \text{ onde escolhemos } (1, a, a) \\
 1 \cdot a \cdot 1 &= a \text{ onde escolhemos } (1, a, 1) \\
 1 \cdot 1 \cdot a &= a \text{ onde escolhemos } (1, 1, a) \\
 1 \cdot 1 \cdot 1 &= 1 \text{ onde escolhemos } (1, 1, 1)
 \end{aligned}$$

Portanto, temos 8 termos dos quais os 7 primeiros são múltiplos de a e o último termo vale 1. E consequentemente,

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 + 3 \cdot a + 1 = (a^2 + 3 \cdot a + 3) \cdot a + 1 = k \cdot a + 1,$$

onde $k = k(a) \in \mathbb{Z}$.

Se aumentarmos a potência, utilizando o mesmo raciocínio para $(a+1)^4$, vamos obter 16 elementos, dos quais 15 são múltiplos de a e um termo vale 1. Em um modo geral, $(a+1)^n$ possui 2^{n-1} múltiplos de a e um termo vale 1. Sobre tal perspectiva, vamos ao seguinte resultado

Proposição 1. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, existe $k = k(a) \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$(a + 1)^n = k \cdot a + 1.$$

Demonstração. Dá-se a demonstração utilizando o critério de indução sobre o natural n . Mais precisamente, temos que para $n = 1$, $(a + 1)^1 = a \cdot 1 + 1$ e portanto o resultado é verdadeiro.

Suponha que

$$P(n) : (a + 1)^n = k \cdot a + 1$$

seja verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que o mesmo é satisfeito para o sucessor de n , ou seja, $P(n + 1) : (a + 1)^{n+1} = \bar{k} \cdot a + 1$, para algum $\bar{k} \in \mathbb{Z}$.

Note que

$$\begin{aligned} (a + 1)^{n+1} &= (a + 1)^n \cdot (a + 1)^1 \\ &= (k \cdot a + 1) \cdot (a + 1) \\ &= k \cdot a^2 + k \cdot a + a + 1 \\ &= a \cdot (k \cdot a + k + 1) + 1 \\ &= \bar{k} \cdot a + 1, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Uma pergunta que cabe aqui é como seria se em vez de determinarmos o valor de $(a + 1)^n$, procurássemos saber quanto vale $(b - 1)^n$, para um número arbitrário $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Esse caso é um pouco mais detalhado, pois dependendo da paridade do natural n obtemos um resultado, e, para outra, um outro, devido à potenciação do termo negativo.

Para estudar tal caso, vamos realizar um estudo sobre o *Binômio de Newton*. Claramente o binômio, tem relação direta com a **Proposição 1**, entretanto, na nossa pesquisa, não encontramos a demonstração da forma que segue.

Antes de o apresentarmos a demonstração do *Binômio de Newton*, é necessário lembrar da definição de número binomial:

Definição 2.1 (Número Binomial). Tal número, que também representa a combinação simples de n elementos tomados k a k , é denotado por C_n^p ou $\binom{n}{p}$ e definido como:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

onde $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ é o fatorial de $n \in \mathbb{N}$. Se $p < 0$ ou $p > n$, admitimos que $\binom{n}{p} = 0$ e por convenção denotamos $0! = 1$.

Proposição 2 (Binômio de Newton). *Sejam x e y inteiros e n um natural. Então:*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k \tag{2}$$

Demonstração. Para demonstrar esta expansão por Binômio de Newton, vamos precisar utilizar a seguinte relação, conhecida como Relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}. \quad (3)$$

Demonstração. A demonstração dessa identidade pode ser encontrada em Hefez [2]. □

Inicialmente, vamos escrever a expansão (2) :

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

A técnica utilizada será indução sobre a potência $n \in \mathbb{N}$. Para evitar qualquer contrariedade, a base de indução será verificada para $n = 0$ e $n = 1$

- i) $[n = 0]$ Supondo que a soma $x + y \neq 0$, vemos que $(x+y)^0 = 1$ e, por outro lado, $\binom{n}{0}x^0 = 1$, donde segue que a base indutiva é satisfeita.
- ii) $[n = 1]$ Para $n = 1$, temos que $(x+y)^1 = x+y$. Na expansão, temos que $\binom{1}{0}x^1 + \binom{1}{1}y^1 = x+y$, portanto o resultado é verdadeiro para $n = 1$.

A hipótese de indução será que o resultado é válido para um certo $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$(x+y)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y^1 + \dots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + \binom{k}{k}y^k \quad (4)$$

e provar que continua sendo satisfeito para o sucessor $(k+1)$.

Inicialmente, vamos multiplicar (4) por $(x+y)$, obtendo:

$$\begin{aligned} (x+y)^{k+1} &= (x+y) \cdot \left[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y^1 + \dots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + \binom{k}{k}y^k \right] \\ (x+y)^{k+1} &= \left[\binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k y + \dots + \binom{k}{k-1}x^2 y^{k-1} + \binom{k}{k}xy^k \right] + \\ &+ \left[\binom{k}{0}x^k y + \binom{k}{1}x^{k-1}y^2 + \dots + \binom{k}{k-1}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Analisando os termos em (5), temos que, tirando o primeiro termo da expansão $\binom{k}{0}x^{k+1}$ e o último $\binom{k}{k}y^{k+1}$, os demais podem ser agrupados, da seguinte forma:

$$(x+y)^{k+1} = \left[\binom{k}{0}x^{k+1} + \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{0} \right) x^k y + \dots + \left(\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right) xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1} \right] \quad (6)$$

Aplicando a relação de Relação de Stifel (3) em cada um dos termos entre parênteses de (6) obtemos:

$$(x+y)^{k+1} = \left[\binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \dots + \binom{k+1}{k}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1} \right]. \quad (7)$$

Como $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1$ e $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$, então podemos substituir os mesmos em (7):

$$(x+y)^{k+1} = \left[\binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^ky + \dots + \binom{k+1}{k}xy^k + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1} \right],$$

verificando assim a hipótese de indução. □

Segue diretamente da expansão dada em (2), para $x = a$ e $y = 1$, que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

$$(a+1)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}(1)^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}(1)^2 + \dots + \binom{n}{n-2}a^2(1)^{n-2} + \binom{n}{n-1}a(1)^{n-1} + \binom{n}{n}(1)^n$$

que, da **Proposição 1**, obtemos que $(a+1)^n = k(a) \cdot a + 1$. Nesse caso, não obtemos alteração com a paridade de n , pois o segundo membro da expansão (2), $y = 1$, é positivo. Para determinarmos o valor de $(b-1)^n$, para um número arbitrário $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar $x = b$ e $y = (-1)$ em (2), obtendo:

$$\begin{aligned} (b-1)^n = [b+(-1)]^n &= \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}b^{n-1}(-1)^1 + \binom{n}{2}b^{n-2}(-1)^2 + \binom{n}{3}b^{n-3}(-1)^3 + \binom{n}{4}b^{n-4}(-1)^4 + \dots \\ &+ \binom{n}{n-2}b^2(-1)^{n-2} + \binom{n}{n-1}b(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n \end{aligned}$$

Analisando o termo do lado direito da última igualdade, verificamos que esse dependerá diretamente da paridade de n . Por exemplo, se $n = 4$ temos que

$$\begin{aligned} (b-1)^4 &= \binom{4}{0}b^4 + \binom{4}{1}b^3(-1)^1 + \binom{4}{2}b^2(-1)^2 + \binom{4}{3}b^1(-1)^3 + \binom{4}{4}b^0(-1)^4 \\ &= b^4 - 4b^3 + 6b^2 - 4b + 1, \end{aligned}$$

de onde temos que os sinais dos coeficientes que multiplicam b alternam-se em positivos e negativos, com o último termo que multiplica b tem sinal negativo ($-4b$) e o final somamos 1. De modo que, obtemos

$$(b-1)^4 = k_n(b) \cdot b + 1,$$

onde $k_n(b)$ depende de b e da paridade de n .

Supondo $n = 5$ temos que

$$\begin{aligned} (b-1)^5 &= \binom{5}{0}b^5 + \binom{5}{1}b^4(-1)^1 + \binom{5}{2}b^3(-1)^2 + \binom{5}{3}b^2(-1)^3 + \binom{5}{4}b^1(-1)^4 + \binom{5}{5}b^0(-1)^5 \\ &= b^5 - 5b^4 + 10b^3 - 10b^2 + 5b - 1. \end{aligned}$$

Novamente, temos que o sinais dos coeficientes são alternados, e, aqui, o último termo que multiplica b tem sinal positivo ($+5b$) e subtraímos 1. De onde segue que

$$(b - 1)^5 = \bar{k}_n(b) \cdot b - 1,$$

$\bar{k}_n(b)$ depende de b e da paridade de n . Utilizando este raciocínio e a demonstração da **Proposição 1**, somos capazes de provar o seguinte resultado:

Proposição 3. *Sejam $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, existe $k = k_n(b) \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$(b - 1)^n = k_n(b) \cdot b \pm 1,$$

onde $k_n(b)$ depende de b e da paridade de n . Mais precisamente se n for par, temos que

$$(b - 1)^n = k_n(b) \cdot b + 1$$

e quando n for ímpar

$$(b - 1)^n = \bar{k}_n(b) \cdot b - 1$$

O próximo exemplo irá utilizar algumas noções básicas de congruência modular. Mais precisamente, vamos precisar da seguinte definição:

Definição 2.2. *Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m , escreve-se*

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Segue da **Definição 2.2** o seguinte resultado:

Proposição 4. *Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m|(b-a)$.*

Demonstração. A demonstração dessa identidade pode ser encontrada em Hefez [2]. □

Exemplo 2.2. Vamos encontrar os dois últimos algarismos, em representação decimal, do número 3^{200} .

Temos que um número real positivo a escrito na base 10, ou em representação decimal, é dado por:

$$a = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Como estamos atrás dos dois últimos algarismos desse número, vamos trabalhar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a &= (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = 10^2 (a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \dots + a_2) + (10a_1 + a_0) \\ &= 100(a_n a_{n-1} \dots a_2)_{10} + (a_1 a_0)_{10}. \end{aligned} \tag{8}$$

Portanto, segue de (8), que para determinar os dois últimos algarismos de 3^{200} basta determinarmos o resto da divisão desse por 100, pois daí teremos $(a_1 a_0)_{10} = a_1 \cdot 10 + a_0$, onde a_1 é o algarismo das dezenas e a_0 da unidade.

Note que

$$3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100} = (10 - 1)^{100}.$$

Segue de (8), para $b = 10$ e $n = 100$, que

$$\begin{aligned} (10 - 1)^{100} &= \binom{100}{0} 10^{100} + \binom{100}{1} 10^{99}(-1)^1 + \binom{100}{2} b^{98}(-1)^2 + \binom{100}{3} b^{97}(-1)^3 + \binom{100}{4} 10^{96}(-1)^4 + \dots \\ &+ \binom{100}{98} 10^2(-1)^{98} + \binom{100}{99} b(-1)^{99} + \binom{100}{100} (-1)^{100} \\ &= 10^{100} - 100 \cdot 10^{99} + \frac{100 \cdot 99}{2!} \cdot 10^{98} - \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} \cdot 10^{97} + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{4!} \cdot 10^{96} - \dots \\ &+ \frac{100 \cdot 99}{2!} \cdot 10^2 - 100 \cdot 10 + 1, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$3^{200} \equiv 1 \pmod{100}.$$

Portanto, temos que $(a_1 a_0)_{10} = 0 \cdot 10 + 1$, de onde segue que os dois últimos algarismos desse número são 01.

Na próxima sessão, vamos enunciar e demonstrar os principais resultados do trabalho, bem como exemplificá-los de modo a tornar os resultados interessantes para o leitor.

3. Resultados Principais

Aqui se encontra a parte principal e a que, de certa forma, motivou a construção deste texto. Inicialmente, vamos construir a ideia do critério de divisibilidade por 9, utilizando dois problemas que geram um resultado com uma propriedade bastante curiosa, a qual é enunciada e demonstrada. Essa propriedade possibilitará a construção de um critério de divisibilidade de um número escrito numa base r por $(r-1)$. Além disso, também deduzimos um critério de divisibilidade de um número escrito numa base r por $(r+1)$, de onde segue o conhecido critério de divisibilidade por 11. Para tais construções, vamos começar com dois problemas, citados na introdução, de modo a motivar as deduções dos critério que serão demonstrados

Problema 3.1. Mostre que $2 \nmid (1120122)_3$, quando esse é representado na base 10.

Solução 3.1. Antes de partir pra solução do problema propriamente dito, observe que estamos analisando um número na base $r = 3$ e verificando se é ou não divisível por $(r-1) = 2$.

Realizando a mudança de base do número $(1120122)_3$ para a base 10, temos

$$\begin{aligned} (1120122)_3 &= 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \\ &= 729 + 243 + 162 + 9 + 6 + 2 \\ &= (1151)_{10} \end{aligned} \tag{9}$$

De fato, o número $(1151)_{10}$ não é divisível por 2.

Embora seja esse um problema simples, ele foi escolhido de forma conveniente para podermos conjecturar um padrão que relaciona o número escrito na base 3, com sua divisibilidade por 2.

Mais precisamente, vamos resolver o mesmo problema de outra forma. Primeiramente, vamos utilizar a **Proposição 1** na decomposição de $(1120122)_3$. Reescrevendo esse número, temos que

$$\begin{aligned} (1120122)_3 &= 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \\ &= 1 \cdot (2+1)^6 + 1 \cdot (2+1)^5 + 2 \cdot (2+1)^4 + 0 \cdot (2+1)^3 + 1 \cdot (2+1)^2 + 2 \cdot (2+1)^1 + 2 \end{aligned}$$

Pela **Proposição 1**, temos para cada potência de $(2 + 1)$, que existem inteiros k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 e k_6 tais que

$$\begin{aligned}
 (102012)_3 &= 1 \cdot (2 \cdot k_1 + 1) + 1 \cdot (2 \cdot k_2 + 1) + 2 \cdot (2 \cdot k_3 + 1) + 0 \cdot (2 \cdot k_4 + 1) + \\
 &+ 1 \cdot (2 \cdot k_5 + 1) + 2 \cdot (2 \cdot k_6 + 1) + 2 \\
 &= 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6) + (1 + 1 + 2 + 0 + 1 + 2 + 2)
 \end{aligned} \tag{10}$$

Como $2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6)$ é múltiplo de 2, então segue de (10) que $2 \mid (102012)_3$ se, e somente se, $2 \mid (1 + 1 + 2 + 0 + 1 + 2 + 2)$, o que não é verdade, já que $2 \nmid 9$.

O segundo problema em destaque irá ilustrar, de forma mais abstrata, o nosso resultado principal:

Problema 3.2. Sobre qual condição o número $(abc)_6$ é divisível por 5?

Solução 3.2. Fazendo a mudança de base do número $(abc)_6$ para a base 10, temos

$$\begin{aligned}
 (abc)_6 &= a \cdot 6^2 + b \cdot 6^1 + c \cdot 6^0 \\
 &= a \cdot (5 + 1)^2 + b \cdot (5 + 1)^1 + c \cdot (5 + 1)^0
 \end{aligned}$$

Portanto, pela **Proposição 1**, temos que existe $k_1 \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\begin{aligned}
 (abc)_6 &= a \cdot (5k_1 + 1) + b \cdot (5 + 1) + c \\
 &= a \cdot 5 \cdot k_1 + a + b \cdot 5 + b + c \\
 &= 5(a \cdot k_1 + b) + (a + b + c)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Logo, segue de (11) que $(abc)_6$ será divisível por 5 se a soma $(a + b + c)$ for múltipla de 5. Note novamente que a soma $(a + b + c)$ é exatamente a soma dos algarismos do número $(abc)_6$. Essa propriedade não acontece por acaso, ela é generalizada no seguinte resultado:

Teorema 1. Um número a escrito na base $r \in \mathbb{N}$, $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_r$ é divisível por $(r - 1)$ se, e somente se, a soma $(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$ for divisível por $(r - 1)$.

Demonstração. Por hipótese, o número a representado na base r , ou seja,

$$a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_r.$$

Reescrevendo a , temos que

$$\begin{aligned}
 a &= a_n(r)^n + a_{n-1}(r)^{n-1} + \cdots + a_1(r)^1 + a_0(r)^0 \\
 a &= a_n[(r - 1) + 1]^n + a_{n-1}[(r - 1) + 1]^{n-1} + \cdots + a_1[(r - 1) + 1]^1 + a_0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Note que, em (12), apenas reescrevemos a base numérica $r = (r - 1) + 1$.

Segue da **Proposição 1** que existem $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\begin{aligned}
 a &= a_n[k_n(r - 1) + 1] + a_{n-1}[k_{n-1}(r - 1) + 1] + \cdots + a_1[(r - 1) + 1] + a_0 \\
 a &= (r - 1)(a_n k_n + a_{n-1} k_{n-1} + \cdots + a_1) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Em (13), aplicamos a distributiva e colocando o termo $(r - 1)$ em evidência. Portanto, como o primeiro termo do lado direito de (13) é divisível por $(r - 1)$, a será divisível por $(r - 1)$ se, e somente se, a soma $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$ for divisível por $(r - 1)$. \square

O critério de divisibilidade por 9 é, na verdade, um caso particular do **Teorema 1**, para o caso de $r = 10$. Mais precisamente,

Proposição 5. Um número $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)$ escrito na base 10 é divisível por 9 se, e somente se a soma $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$ for divisível por 9.

Exemplo 3.1. Seja $(21101)_3$. Segue do **Teorema 1** que $(2 = 3 - 1) \mid (21101)_3$ se, e somente se, $2 \mid (2 + 1 + 1 + 0 + 1) = 5$. Como $2 \nmid 5$, então obrigatoriamente $2 \nmid (21101)_3$. Vamos verificar tal fato, realizando a expansão de $(21101)_3$ na base 10,

$$(21101)_3 = 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 199,$$

que claramente não é divisível por 2.

Nesse momento, vamos relacionar um número escrito em uma base r com sua divisibilidade por $(r + 1)$, com o objetivo de obter um padrão, e, desse, para o caso $r = 10$, deduzirmos o critério de divisibilidade por 11. Mais precisamente, vamos ao seguinte resultado:

Teorema 2. Um número $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_r$ é divisível por $(r + 1)$ se, e somente se, a soma $(a_n - a_{n-1} + \dots - a_1 + a_0)$ for divisível por $(r + 1)$.

Demonstração. De forma análoga à demonstração do **Teorema 1**, escrevemos um número arbitrário a na base r ,

$$a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_r,$$

como:

$$\begin{aligned} a &= a_n(r)^n + a_{n-1}(r)^{n-1} + \dots + a_1(r)^1 + a_0(r)^0 \\ &= a_n[(r + 1) - 1]^n + a_{n-1}[(r + 1) - 1]^{n-1} + \dots + a_1[(r + 1) - 1]^1 + a_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Nesse caso, dividiremos o problema em duas situações, pra o caso onde o número tenha uma quantidade ímpar de algarismos, ou seja, quando n for ímpar e o outro caso, para n par. Mais precisamente, se n for um natural par segue da **Proposição 3** que

$$[(r + 1) - 1]^n = [k_n((r + 1)) \cdot (r + 1)] + 1$$

e se n for um natural ímpar, então

$$[(r + 1) - 1]^n = [\bar{k}_n((r + 1)) \cdot (r + 1)] - 1.$$

Sem perda de generalidade, supondo n ímpar, segue de (14) e da **Proposição 1**, que existem $k_1, \bar{k}_1, k_2, \bar{k}_2, \dots, k_n, \bar{k}_n \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\begin{aligned} a &= a_n[(r + 1) - 1]^n + a_{n-1}[(r + 1) - 1]^{n-1} + \dots + a_1[(r + 1) - 1]^1 + a_0 \\ &= a_n[\bar{k}_n \cdot (r + 1) - 1] + a_{n-1}[k_{n-1}(r + 1) + 1] + a_{n-2}[\bar{k}_{n-2} \cdot (r + 1) - 1] + \dots + a_1[(r + 1) - 1]^1 + a_0 \\ &= (r + 1)[a_n \bar{k}_n + a_{n-1} k_{n-1} + a_{n-2} \bar{k}_{n-2} + \dots + a_1] - [a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots + a_1 - a_0]. \end{aligned} \quad (15)$$

Como $(r + 1)$ divide o primeiro termo da identidade (15), segue que a é divisível por $(r + 1)$ se, e somente se, a soma $(a_n - a_{n-1} + \dots - a_1 + a_0)$ for divisível por $(r + 1)$. Fica a cargo do leitor verificar tal resultado supondo que n seja um natural par. \square

Exemplo 3.2. Seja $(50431)_6$ um número escrito na base 6. Segue do **Teorema 2** que $(7 = 6 + 1) \mid (50431)_6$ se, e somente se, $7 \mid (5 - 0 + 4 - 3 + 1) = 7$. Como $7 \mid 7$, então obrigatoriamente $7 \mid (50431)_6$.

Vamos verificar que $7 \mid (50431)_6$, realizando a expansão de $7 \mid (50431)_6$ na base 10:

$$\begin{aligned} (50431)_6 &= 5 \cdot 6^4 + 0 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 \\ &= 6480 + 144 + 18 + 1 \\ &= 6643 \end{aligned}$$

e $6643 = 949 \cdot 7$.

Segue que o critério de divisibilidade por 11 é, na verdade, um caso particular do **Teorema 2**, para o caso de $r = 10$. Mais precisamente,

Proposição 6. *Um número $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)$ escrito na base 10 é divisível por 11 se, e somente se, a soma $(a_n - a_{n-1} + \dots - a_1 + a_0)$ for divisível por 11*

Utilizando os **Teoremas 1 e 2**, vamos resolver dois problemas que, a princípio, não tem consonância com o conteúdo dos resultados, mas a resolução fica mais clara quando aplicamos os Teoremas.

Exemplo 3.3. Descubra o último número divisível por 11 menor que $a = 23412$.

Solução 3.3. Aplicando o critério de divisibilidade por 11, temos que $2 - 3 + 4 - 1 + 2 = 4$, como $11 \nmid 4$, então $11 \nmid 23412$. Agora, vamos verificar a divisibilidade por 11, dos números menores do que $a = 23412$.

Note que, denotando $a_1 = (a - 1) = (23412) - 1 = 23411$, temos que

$$11 \mid a_1 \Leftrightarrow 11 \mid (2 - 3 + 4 - 1 + 1) = 3,$$

o que não é verdade. Para $a_2 = (a - 2) = (23412) - 2 = 23410$,

$$11 \mid a_2 \Leftrightarrow 11 \mid (2 - 3 + 4 - 1 + 0) = 2$$

como $11 \nmid 2$, então $11 \nmid 23410$. Fazendo $a_3 = (a - 3) = (23412) - 3 = 23409$,

$$11 \mid a_3 \Leftrightarrow 11 \mid (2 - 3 + 4 - 0 + 9) = 12$$

e, de $11 \nmid 12$, segue que $11 \nmid 23409$. Portanto, o último número menor do que 23412 que é divisível por 11 é $a_4 = 23408$, já que $(2 - 3 + 4 - 0 + 8 = 11)$ e $11 \mid 11$.

No exemplo que segue, vamos utilizar algumas definições, consequências e propriedades de congruência modular. Mais precisamente, vamos precisar do seguinte resultado:

Proposição 7. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e m, n, m_1, \dots, m_r inteiros maiores do que 1. Então, temos que*

i) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $n \mid m$, então $a \equiv b \pmod{n}$;

ii) $a \equiv b \pmod{m_i} \forall i = 1, 2, \dots, r \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[m_1, \dots, m_r]}$;

iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $(a, m) = (b, m)$, onde (a, m) denota o máximo divisor comum entre a e m , e $[m_1, \dots, m_r]$ o mínimo múltiplo comum entre m_1, \dots, m_r

Demonstração. A demonstração desta Proposição pode ser vista em Hefez [2]. □

Exemplo 3.4. Usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, construímos vários números de sete dígitos distintos. Existem dois deles, distintos, tais que um divide o outro?

Solução 3.4. Suponha por absurdo que existam dois desses números inteiros distintos m e n que possuem 7 dígitos cada, tais que $m|n$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $m < n$. Como $m|m$ e, por hipótese $m|n$, então segue diretamente que $m|(n - m)$.

Inicialmente, note que a soma dos algarismos $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ e $9 \nmid 28$, portanto $9 \nmid m$ e $9 \nmid n$, pois a soma dos algarismos de m e n são iguais a 28 e, caso $9 | m$ e $9 | n$, pelo critério de divisibilidade por 9, 9 deveria ter que dividir 28.

Por outro lado, como $28 \equiv 1 \pmod{9}$, então

$$\begin{aligned} m &\equiv 1 \pmod{9} \\ n &\equiv 1 \pmod{9} \\ n - m &\equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 9|n - m \end{aligned} \tag{16}$$

usando o item *ii*) da Proposição (7) em (16), teremos

$$n - m \equiv 0 \pmod{[m, 9]}$$

mas como $9 \nmid m$ e $m > 9$, então $\text{mdc}(m, 9) = 1$ o que implica $[m, 9] = 9m$, portanto $9m|n - m$, assim $n - m = 0$ que é impossível, pois $m \neq n$ ou $|9m| \leq |n - m|$, logo

$$\begin{aligned} |9m| &\leq |n - m| \\ 9m &\leq n - m \\ 10m &\leq n. \end{aligned} \tag{17}$$

Nesse caso (17) é absurdo, pois m e n possuem a mesma quantidade de algarismos, portanto $10m$ possuirá um algarismo a mais que n ; na verdade temos que $10m \geq n$, ou seja, é absurdo supor a existência do m, n , tais que $m|n$.

4. Considerações Finais

Este trabalho inicia-se na elaboração de uma dissertação de mestrado profissional em matemática, com tema principal divisibilidade. Durante a elaboração do texto, nas demonstrações dos critérios de divisibilidade, deparamo-nos com o estudo de sistemas de numeração. Pesquisamos sobre trabalhos que relacionam os dois temas e não encontramos algo como pensávamos e daí surgiu a ideia de elaborar este texto.

Pesquisamos sobre questões que envolvessem os dois conteúdos divisibilidade e bases numéricas, encontramos diversos exemplos de questões e algumas *brincadeiras entre amigos*, em que no fundo as soluções baseavam-se em divisibilidade e sistemas de numeração.

Surgiu a ideia do texto e as demonstrações foram sendo formuladas juntamente com os resultados principais. Esperamos que este trabalho auxilie discentes e professores do ensino básico, médio

e superior. Acreditamos que este texto contenha exemplos e conteúdos de suma importância no estudo de divisibilidades e sistemas de numeração e o pode ser suporte para a elaboração de outros trabalhos acadêmicos.

O autor deste artigo agradece a Propesq/UFT pelo apoio financeiro referente ao edital 05/2021.

Referências


- [1] RIBEIRO, H. S; TÁBOAS, C. M. G. *RPM 06 - Sobre critério de divisibilidade*. São Carlos, SP, 2020.
- [2] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.
- [3] SILVA, T. P; *Critérios de divisibilidade: usuais, incomuns e curiosos*. Mestrado Profissional - PROFMAT, João Pessoa, PB, 2019.
- [4] LOPES, D; *Bézout e Outros Bizus*. 18^a Semana Olímpica – São José do Rio Preto, SP, 2017.
- [5] SANT'ANNA, I. K; *A Aritmética Modular como Ferramenta para as Séries Finais do Ensino Fundamental*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – Rio de Janeiro, RJ, 2013.

Thiago Rodrigues Cavalcante
Universidade Federal do Tocantins
<thiago.cavalcante@mail.uft.edu.br>

Rafael Pimenta Alves
Universidade Federal do Tocantins

Recebido: 12/04/2021
Publicado: 30/05/2022

Um erro interessante ou sequências log-côncavas e o triângulo de Pascal

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke 

Resumo

Neste artigo fazemos um relato de como um erro no enunciado de um exercício levou-nos muito mais longe do que o acerto teria levado. Na tentativa de explicar aos alunos por que o exercício, tal com estava proposto, não teria solução, fomos levados a explorar um aspecto que normalmente não é focado quando se estuda o triângulo de Pascal e os coeficientes binomiais, que é o da log-concavidade das linhas do triângulo de Pascal. Este conceito, normalmente não explorado, proporcionou um entendimento mais aprofundo da impossibilidade no problema, muito além de meramente trancar nos cálculos. Os alunos estão familiarizados com os conceitos de convexidade e concavidade de funções. Essa foi uma oportunidade de familiarizá-los com esses mesmos conceitos no contexto de sequências.

Palavras-chave: triângulo de Pascal, coeficientes binomiais, sequências log-côncavas.

Abstract

In this article we report on how an error in the statement of an exercise took us much further than the correct statement would have taken us. In an attempt to explain the students why the exercise, as it was proposed, would not have a solution, we were led to explore an aspect usually not focused when studying Pascal's triangle and binomial coefficients, which is the log-concavity of Pascal's triangle rows. This concept, normally unexplored, provided a deeper understanding of the nonexistence of solution to the problem, far beyond merely getting stuck in the calculations. Students are familiar with the concepts of convexity and concavity of functions. This was an opportunity to familiarize them with the same concepts in the context of sequences.

Keywords: Pascal's triangle; binomial coefficients; log-concave sequences.

1. Introdução

Tudo começou quando propuz aos alunos da disciplina de Tópicos de Aritmética, do segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, entregar, entre outros, um exercício que pedia para encontrar três coeficientes binomiais consecutivos de uma mesma linha do triângulo de Pascal, ou seja, da forma $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ e $\binom{n}{k+2}$, que estivessem na proporção 6 : 11 : 45. Perguntava ainda se esses eram os únicos possíveis. Vamos ver que esse enunciado continha um erro de digitação. A análise desse erro junto com os alunos deu origem a considerações bastante

interessantes, que serão expostas a seguir, motivando inclusive o estudo de um conceito novo para os alunos.

A disciplina está sendo desenvolvida na forma de Ensino Remoto Emergencial e os alunos estão sendo avaliados através de listas de exercícios mais ou menos semanais. O exercício em questão, junto com outros dois, fazia parte da atividade de recuperação de três alunos, o que exigiu que a atividade fosse avaliada de maneira a não prejudicar os alunos.

2. Tentativa de resolução do exercício

Para início de conversa, vamos ver o que aconteceria se tentássemos resolver a questão. Queremos

$$\frac{\binom{n}{k}}{6} = \frac{\binom{n}{k+1}}{11} = \frac{\binom{n}{k+2}}{45},$$

ou seja,

$$\frac{n!}{6k!(n-k)!} = \frac{n!}{11(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{45(k+2)!(n-k-2)!}.$$

Dividindo por $n!$ e multiplicando por $k!(n-k-2)!$, obtemos

$$\frac{1}{6(n-k)(n-k-1)} = \frac{1}{11(k+1)(n-k-1)} = \frac{1}{45(k+2)(k+1)}.$$

Invertendo as frações, ficamos então com

$$6(n-k)(n-k-1) = 11(k+1)(n-k-1) = 45(k+2)(k+1).$$

Da igualdade $6(n-k)(n-k-1) = 11(k+1)(n-k-1)$, segue que $6(n-k) = 11(k+1)$, isto é, $6n = 17k + 11$.

Da igualdade $11(k+1)(n-k-1) = 45(k+2)(k+1)$, segue que $11(n-k-1) = 45(k+2)$, isto é, $11n = 56k + 101$.

Portanto as condições dadas no enunciado equivalem a

$$\begin{cases} 6n = 17k + 11 \\ 11n = 56k + 101 \end{cases}$$

que é um sistema linear de duas equações com duas variáveis. Da primeira equação segue que

$$n = \frac{17k + 11}{6}$$

e, da segunda equação, segue que

$$n = \frac{56k + 101}{11}.$$

Portanto devemos ter

$$\frac{17k + 11}{6} = \frac{56k + 101}{11},$$

ou seja, $11 \cdot 17k + 11^2 = 6 \cdot 56k + 6 \cdot 101$, isto é, $187k + 121 = 336k + 606$. Então $149k + 485 = 0$, o que nos dá

$$k = -\frac{485}{149}.$$

Só que devido à natureza do problema, buscamos soluções n e k no conjunto dos números naturais e ainda satisfazendo $k + 2 \leq n$, já que o coeficiente binomial $\binom{n}{k+2}$ foi considerado. O valor de k encontrado é negativo e não é inteiro. Portanto, tal como está formulado, o problema não tem solução.

É interessante notar que os alunos encontraram na linha 12 do triângulo de Pascal os números

$$\binom{12}{2} = 66 = 6 \cdot 11, \quad \binom{12}{3} = 220 = 20 \cdot 11, \quad \binom{12}{4} = 495 = 45 \cdot 11,$$

só que esses três números estão na proporção $6 : 20 : 45$, e não $6 : 11 : 45$. Portanto uma maneira de consertar o enunciado, de modo a que passasse a ter solução, e até mesmo solução única, seria trocar a proporção para $6 : 20 : 45$. Mas, como veremos na próxima seção, podemos fazer muito mais do que isso.

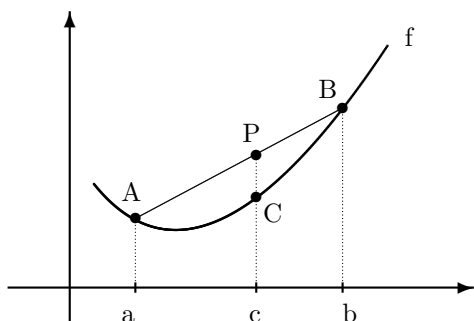
3. Sequências côncavas e log-côncavas

A seguir vamos relembrar os conceitos de função convexa e de função côncava. Sejam $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ dois pontos do gráfico de uma função f definida em um intervalo I . A corda que passa por A e B é o segmento de reta ligando A com B . Dizemos que f é uma *função convexa* se a corda que passa por dois pontos quaisquer de seu gráfico está acima do gráfico (mais precisamente, a corda não contém ponto algum abaixo do gráfico da função). Na figura a seguir, para qualquer $c \in (a, b)$, o ponto $C = (c, f(c))$ está abaixo do ponto P . Dados $a < c < b$ em I , chamando de $\lambda = \frac{c-a}{b-a}$, temos

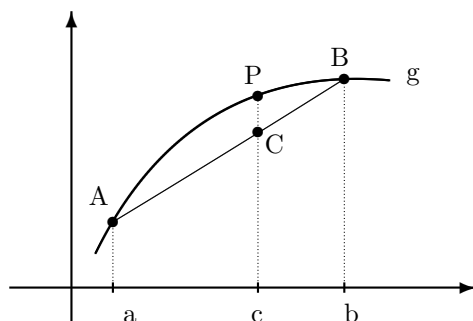
$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad c = a + (c-a) = a + \lambda(b-a) = (1-\lambda)a + \lambda b.$$

Os pontos C e D da figura têm coordenadas

$$C = ((1-\lambda)a + \lambda b, f((1-\lambda)a + \lambda b)) \quad \text{e} \quad P = ((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)).$$



Função convexa



Função côncava

A função f é convexa quando o ponto P está sempre acima de C . Isso se expressa como

$$\forall a, b \in I, \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad \text{tem-se} \quad f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b), \quad (1)$$

motivando a seguinte definição.

Definição 1. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função convexa* se valer a condição (1).

Exemplo 1. São convexas as funções $f_1(x) = e^{kx}$ e $f_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, se $A > 0$.

Uma figura $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ é convexa quando para quaisquer dois pontos A e B de \mathcal{A} , o segmento de reta que une A e B está contido em \mathcal{A} . A função f é convexa se e somente se o seu epigráfico, isto é, o conjunto

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \geq f(x)\}$$

que está acima de seu gráfico, for convexo. Esta é a justificativa para o nome função convexa.

Invertendo o sentido da desigualdade, temos a seguinte definição.

Definição 2. Dizemos que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função côncava* se

$$\forall a, b \in I, \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad \text{tem-se} \quad g((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)g(a) + \lambda g(b). \quad (2)$$

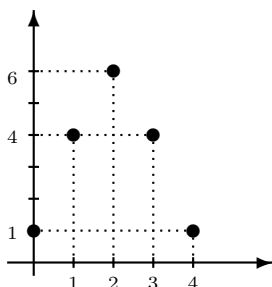
Geometricamente, g é uma função côncava se a corda que une dois pontos quaisquer de seu gráfico está abaixo do gráfico.

Exemplo 2. São côncavas as funções $g_1(x) = \log x$ e $g_2(x) = \sqrt{x}$ definidas no intervalo $I = (0, +\infty)$. Existem funções que não são convexas nem côncavas, por exemplo a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$.

Agora vamos relacionar os conceitos de convexidade e de concavidade de funções com correspondentes conceitos para seqüências. Começamos com um exemplo, considerando a linha 4 do triângulo de Pascal, formada pelos números

$$a_0 = \binom{4}{0} = 1, \quad a_1 = \binom{4}{1} = 4, \quad a_2 = \binom{4}{2} = 6, \quad a_3 = \binom{4}{3} = 4, \quad a_4 = \binom{4}{4} = 1.$$

Vamos fazer um gráfico da função $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \mapsto a_k$. O gráfico é formado por um conjunto finito de pontos, $C = \{(0, 1), (1, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 1)\}$, pois a função leva $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 6$, etc.



Se, em vez de um número finito de pontos, tivéssemos uma linha contínua ligando esses pontos (poderia ser mesmo uma linha poligonal formada por segmentos de reta ligando cada um desses pontos a seus dois vizinhos, da esquerda e da direita), a figura sugere que teríamos um função côncava. Esse raciocínio sugere que consideremos o conceito de seqüência côncava. O importante é que cada ponto do conjunto C (exceto as duas extremidades) está acima do segmento de reta que une os seus dois vizinhos.

Assim, no gráfico acima, o ponto (1, 4) está acima do segmento de reta que une os pontos (0, 1) e (2, 6). Do mesmo modo, o ponto (2, 6) está acima do segmento de reta que une os pontos (1, 4) e (3, 4), e o ponto (3, 4) está acima do segmento de reta que une os pontos (2, 6) e (4, 1).

Pergunta: Como podemos tornar preciso esse conceito? Muito simples, a condição é que a ordenada de cada ponto seja maior ou igual à média aritmética das ordenadas dos dois pontos vizinhos mais próximos, à esquerda e à direita. No exemplo acima, temos de fato

$$4 \geq \frac{1+6}{2}, \quad 6 \geq \frac{4+4}{2}, \quad 4 \geq \frac{6+1}{2}.$$

Agora podemos dar a definição formal.

Definição 3. Uma sequência $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ de números reais é chamada de *sequência côncava* se

$$a_k \geq \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}.$$

Dizemos que a sequência é *convexa* se valer a desigualdade com o sentido invertido.

Conceitos relacionados são os de sequência log-côncava (por extenso, logaritmicamente côncava) e de sequência log-convexa.

Definição 4. Uma sequência $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ de números reais não negativos é chamada de *sequência log-côncava* se

$$a_k^2 \geq a_{k-1} \cdot a_{k+1}, \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}.$$

Dizemos que a sequência é *log-convexa* se valer a desigualdade com o sentido invertido.

A razão para os nomes é que não é difícil mostrar que a sequência dos a_k é log-côncava se e somente se a sequência dos $\log a_k$ for côncava. Vale o mesmo para log-convexa. Mas isto não será importante aqui. Mais detalhes sobre sequências log-côncavas podem ser vistos em [3] e [6].

Teorema 1. *Toda sequência côncava é log-côncava.*

Observação 1. Para sequências convexas a propriedade análoga a essa não vale, o que vale é justamente a recíproca, toda sequência log-convexa é convexa. Mas não vamos nem enunciar tal fato como teorema para não desviar o foco da discussão.

O Teorema 1 diz-nos que a propriedade de ser log-côncava é mais fraca do que a propriedade de ser côncava. O conjunto das sequências log-côncavas contém o conjunto das sequências côncavas. Mas existem sequências log-côncavas que não são côncavas. Vamos ver um exemplo no mais adiante.

A seguir, vamos recordar a desigualdade entre média aritmética e média geométrica, que será usada da demonstração do Teorema 1. Dados dois números a e b , a média aritmética e a média geométrica de a e b são definidas como sendo os números m_a e m_g dados por

$$m_a = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad m_g = \sqrt{ab}.$$

Define-se média geométrica somente no caso $a \geq 0$ e $b \geq 0$, para evitar raiz quadrada de número negativo.

Teorema 2 (Desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica). *Se a e b forem números reais não negativos, então*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Demonstração do Teorema 2. Sejam $a, b \geq 0$ números reais. Então suas raízes quadradas estão bem definidas. Todo quadrado é não negativo. Portanto

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Expandindo, temos

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0,$$

ou seja,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

Logo

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Dividindo por 2, segue a conclusão. □

Demonstração do Teorema 1. Seja $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ uma sequência côncava de números reais não negativos. Vamos mostrar que a sequência é log-côncava. Seja $k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Utilizando o Teorema 2 (desigualdade entre média aritmética e média geométrica), temos

$$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \geq \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}.$$

Mas pela definição de sequência côncava, temos que

$$a_k \geq \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Logo

$$a_k \geq \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$$

e, elevando ao quadrado,

$$a_k^2 \geq a_{k-1} \cdot a_{k+1},$$

ou seja, a sequência dos a_k é log-côncava. □

Proposição 1. *Cada uma das linhas do triângulo de Pascal é uma sequência log-côncava, ou seja*

$$\binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1}, \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}.$$

Demonstração. Basta notarmos que

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}^2 \frac{n+1}{(n-k+1)(k+1)} > 0.$$

□

Exemplo 3. Consideremos a sequência (s_n) , onde para cada $n \geq 0$, s_n indica o produto de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal,

$$s_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k} = \prod_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n!)^{n+1}}{(1! \cdot 2! \cdots n!)^2}.$$

Os primeiros termos dessa sequência são $s_0 = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 9$, $s_4 = 96$, $s_5 = 2500$, $s_6 = 162000$, ... e ela é a sequência A001142 da Online Encyclopedia of Integer Sequences [5].

Temos

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{[(n+1)!]^{n+2}}{(n!)^{n+1} [(n+1)!]^2} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Portanto

$$\frac{s_{n+1} \cdot s_{n-1}}{s_n^2} = \frac{s_{n+1}/s_n}{s_n/s_{n-1}} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

A igualdade acima implica que $s_{n+1} \cdot s_{n-1} > s_n^2$, o que nos diz que a sequência (s_n) é log-convexa.

É muito curioso que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1} \cdot s_{n-1}}{s_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Tal exemplo é devido a Harlan J. Brothers [1] e mostra que o número e pode ser obtido a partir do triângulo de Pascal.

Que o número π pode ser obtido a partir do triângulo de Pascal, já era conhecido há mais tempo. Daniel Hardisky, um engenheiro aposentado norte-americano muito envolvido com problemas em Matemática elementar, descobriu a seguinte maneira com que π aparece no triângulo de Pascal, ver [2],

$$\pi = 3 + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{\binom{4}{3}} - \frac{1}{\binom{6}{3}} + \frac{1}{\binom{8}{3}} - \cdots \right].$$

É claro que, como já era conhecido por Euler,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

o que nos dá um exemplo um tanto artificial de π no triângulo de Pascal, já que os denominadores $2n+1$ são iguais a $\binom{2n+1}{1}$.

4. Aplicação

Não existem coeficientes binomiais de uma mesma linha

$$\binom{n}{k}, \quad \binom{n}{k+1}, \quad \binom{n}{k+2}$$

com a razão de proporcionalidade $6 : 11 : 45$. De fato, se isso acontecesse, teríamos

$$\binom{n}{k+1} = \frac{11}{6} \binom{n}{k} \quad \text{e} \quad \binom{n}{k+2} = \frac{45}{6} \binom{n}{k}.$$

Em consequência, teríamos

$$\binom{n}{k+1}^2 - \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+2} = \binom{n}{k}^2 \left[\frac{11^2}{6^2} - \frac{45}{6} \right] = \binom{n}{k}^2 \cdot \frac{11^2 - 45 \cdot 6}{6^2} < 0,$$

pois $11^2 - 45 \cdot 6 = 121 - 270 < 0$, o que é uma contradição, pois pela Proposição 1 acima cada linha do triângulo de Pascal é log-côncava, e assim $\binom{n}{k+1}^2 \geq \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+2}$.

O raciocínio acima pode ser usado para mostrar que para que existam três coeficientes binomiais consecutivos numa mesma linha do triângulo de Pascal na razão $\alpha : \beta : \gamma$, é necessário que $\beta^2 - \alpha\gamma \geq 0$.

Já tínhamos mostrado acima que não existem coeficientes binomiais nessa razão de proporcionalidade mas, usando a log-concavidade, obtivemos uma justificativa envolvendo muito menos contas e proporcionado um entendimento mais aprofundado da questão.

Exemplo 4. Passemos agora ao exemplo prometido acima, que mostra que nem toda sequência log-côncava é côncava. Consideremos a linha 5 do triângulo de Pascal

$$\binom{5}{0} = 1, \quad \binom{5}{1} = 5, \quad \binom{5}{2} = 10, \quad \binom{5}{3} = 10, \quad \binom{5}{4} = 5, \quad \binom{5}{5} = 1.$$

Tal sequência, como qualquer linha do triângulo de Pascal, é log-côncava. No entanto ela não é uma sequência côncava, pois

$$5 < \frac{1 + 10}{2}.$$

Exemplo 5. Observamos que as colunas do triângulo de Pascal também são sequências log-côncavas. De fato, para k fixo, pondo

$$a_n = \binom{n}{k}$$

é imediato calcular

$$\begin{aligned} a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} &= \binom{n}{k}^2 - \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k} = \frac{k}{n(n-k+1)} \binom{n}{k}^2 \\ &= \frac{n(n-1)^2 \cdots (n-k+2)^2 (n-k+1)}{k!(k-1)!} \geq 0. \end{aligned}$$

O problema 11985, proposto por Donald Knuth em 2017 no American Mathematical Monthly [4], generaliza este exemplo. Para $s, t \in \mathbb{N}$, com $s \leq t$, seja

$$x_n = \binom{n}{s} + \binom{n}{s+1} + \cdots + \binom{n}{t}.$$

O problema propõe provar que a sequência (x_n) é log-côncava, isto é, $x_n^2 \geq x_{n-1} \cdot x_{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Em nosso exemplo, consideramos o caso particular $s = t$.

5. Questões de existência e unicidade

Pergunta 1: Quais são as condições para que existam três elementos consecutivos em uma linha do triângulo de Pascal com a proporção $a : b : c$?

Queremos encontrar n e k inteiros com $0 \leq k \leq n - 2$ e tais que

$$\frac{\binom{n}{k}}{a} = \frac{\binom{n}{k+1}}{b} = \frac{\binom{n}{k+2}}{c} \quad (3)$$

A condição (3) é equivalente a

$$ak!(n-k)! = b(k+1)!(n-k-1)! = c(k+2)!(n-k-2)!,$$

ou seja,

$$a(n-k)(n-k-1) = b(k+1)(n-k-1) = c(k+2)(k+1).$$

Isto equivale a duas equações

$$\begin{cases} a(n-k) = b(k+1) \\ b(n-k-1) = c(k+2) \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} an = (a+b)k + b \\ bn = (b+c)k + (b+2c) \end{cases} \quad (4)$$

Multiplicando a primeira equação por b e a segunda por a , para eliminar n , obtemos

$$(ab + b^2)k + b^2 = (ab + ac)k + ab + 2ac,$$

isto é

$$(b^2 - ac)k = ab + 2ac - b^2$$

Vamos sempre supor que a condição de log-concavidade $b^2 - ac > 0$ seja satisfeita. Segue que

$$k = \frac{ab + 2ac - b^2}{b^2 - ac} = \frac{a(b+c)}{b^2 - ac} - 1. \quad (5)$$

Substituindo esse valor de k na primeira igualdade de (4), encontramos

$$n = \frac{(a+b)(b+c)}{b^2 - ac} - 1. \quad (6)$$

Esse argumento prova a unicidade da solução. Não prova a existência, pois, para isso, teríamos que ter n e k inteiros com $0 \leq k \leq n - 2$.

Notação: Seja $\Delta = b^2 - ac$.

Segue que uma condição necessária para existam n e k satisfazendo (3) é que

$$\Delta \mid a(b+c) \quad \text{e} \quad \Delta \mid (a+b)(b+c).$$

Subtraindo $a(b+c)$ de $(a+b)(b+c)$, obtemos a condição mais simétrica

$$\Delta \mid a(b+c) \quad \text{e} \quad \Delta \mid b(b+c).$$

Essa condição é também suficiente, como mostra o próximo resultado.

Proposição 2. Dados inteiros positivos a , b e c satisfazendo a condição de log-concavidade

$$\Delta := b^2 - ac > 0,$$

uma condição necessária e suficiente para que existam três elementos consecutivos em uma linha do triângulo de Pascal na proporção $a : b : c$ é que

$$\Delta \mid a(b+c) \quad e \quad \Delta \mid b(b+c). \quad (7)$$

Além disso, se existirem, esses três elementos são únicos.

Demonstração. Vimos acima que a condição (7) é necessária. Falta mostrar que também é suficiente. Dados inteiros positivos a , b e c satisfazendo $\Delta > 0$ e a condição (7), definimos n e k por (5) e (6). A condição (7) implica que n e k são inteiros não negativos. Note que

$$n - k = \frac{b(b+c)}{\Delta},$$

o que implica que $n - k \geq 1$. Na verdade,

$$n \geq k + 2,$$

pois, se $n - k = 1$, teríamos $b^2 + bc = b^2 - ac$, logo $c(a+b) = 1$, o que é uma contradição, pois $a \geq 1$ e $b \geq 2$. Portanto

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1} = \frac{b(b+c)}{a(b+c)} = \frac{b}{a}.$$

Analogamente, temos

$$\frac{\binom{n}{k+2}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n-k-1}{k+2} = \frac{b(b+c) - b^2 + ac}{a(b+c) + b^2 - ac} = \frac{c(a+b)}{b(a+b)} = \frac{c}{b}.$$

Logo os três elementos $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ e $\binom{n}{k+2}$ estão na proporção $a : b : c$. □

Pergunta 2: Quais são as condições para que existam três elementos consecutivos em uma coluna do triângulo de Pascal com a proporção $a : b : c$?

Queremos encontrar n e k inteiros com $0 \leq k \leq n$ e tais que

$$\frac{\binom{n}{k}}{a} = \frac{\binom{n+1}{k}}{b} = \frac{\binom{n+2}{k}}{c} \quad (8)$$

Por um raciocínio semelhante ao que foi feito acima para responder a Pergunta 1, concluímos que n e k , se existirem, serão dados por

$$n = \frac{bc + ac - 2b^2}{\Delta} = \frac{b(c-b)}{\Delta} - 1 \quad e \quad k = \frac{bc - b^2 - ac + ab}{\Delta}. \quad (9)$$

Novamente, isso prova a unicidade de solução. Prova também que uma condição necessária para a existência da solução é que

$$\Delta \mid b(c-b), \quad \Delta \mid (bc + ac - 2b^2) \quad e \quad \Delta \mid (bc - b^2 - ac + ab). \quad (10)$$

Mas, por subtração, obtemos

$$(bc + ac - 2b^2) - (bc - b^2 - ac + ab) = (ac - b^2) + a(c - b) = a(c - b) - \Delta.$$

Portanto, de (10), segue que $\Delta \mid a(c - b)$. Obtemos assim uma condição necessária mais simétrica, $\Delta \mid a(c - b)$ e $\Delta \mid b(c - b)$. Por um raciocínio análogo ao empregado para responder a Pergunta 1, mostra-se que essa condição é também suficiente.

Proposição 3. *Dados inteiros positivos a, b e c satisfazendo a condição de log-concavidade*

$$\Delta := b^2 - ac > 0,$$

uma condição necessária e suficiente para que existam três elementos consecutivos em uma coluna do triângulo de Pascal na proporção $a : b : c$ é que

$$\Delta \mid a(c - b) \quad e \quad \Delta \mid b(c - b). \quad (11)$$

Além disso, se existirem, esses três elementos são únicos.

Exemplo 6. Vimos que existem três elementos consecutivos em uma linha do triângulo de Pascal com a proporção $6 : 20 : 45$. Aplicando a Proposição 3 acima, podemos ver que em uma coluna não existe. De fato, para $a = 6$, $b = 20$ e $c = 45$, temos

$$\Delta = 130, \quad a(c - b) = 150 \quad e \quad b(c - b) = 1125.$$

Portanto Δ não divide $a(c - b)$ nem $b(c - b)$.

Pergunta 3. Será que isto que ocorreu no exemplo acima é a regra geral ou é possível encontrar três elementos consecutivos em uma linha e também em uma coluna do triângulo de Pascal com uma mesma proporção $a : b : c$? Em outras palavras, o que ocorreu no exemplo acima foi um acidente ou é um fato geral?

Vamos ver que é possível encontrar sim. Para encontrar um tal exemplo, basta utilizar as condições (7) e (11), como afirma a próxima proposição.

Proposição 4. *Dados inteiros positivos a, b e c satisfazendo a condição de log-concavidade*

$$\Delta := b^2 - ac > 0,$$

uma condição necessária e suficiente para que existam três elementos consecutivos em uma linha e também em uma coluna do triângulo de Pascal na proporção $a : b : c$ é que

$$\Delta \mid a(b + c), \quad \Delta \mid a(c - b), \quad \Delta \mid b(b + c) \quad e \quad \Delta \mid b(c - b).$$

Corolário 1. *Dados três inteiros positivos a, b e c satisfazendo a condição $\Delta = b^2 - ac = 1$, sempre existem três elementos consecutivos em uma linha e também em uma coluna do triângulo de Pascal na proporção $a : b : c$.*

Exemplo 7. Para $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$, temos $\Delta = 1$. As expressões (9) dizem-nos que os três elementos

$$\binom{1}{1} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \text{e} \quad \binom{3}{1} = 3$$

consecutivos na coluna 1 do triângulo de Pascal estão na proporção $1 : 2 : 3$.

Por (5) e (6), os três elementos

$$\binom{14}{4} = 1001, \quad \binom{14}{5} = 2002 \quad \text{e} \quad \binom{14}{6} = 3003$$

consecutivos da linha 14 também estão na mesma proporção $1 : 2 : 3$.

Exemplo 8. Para $a = 3$, $b = 5$ e $c = 8$, temos $\Delta = 5^2 - 3 \cdot 8 = 1$. As expressões (9), (5) e (6) permitem descobrir que os três elementos

$$\binom{14}{6} = 3003, \quad \binom{15}{6} = 5005 \quad \text{e} \quad \binom{16}{6} = 8008$$

consecutivos na coluna 6 do triângulo de Pascal estão na proporção $3 : 5 : 8$, e que o mesmo acontece com os elementos $\binom{103}{38}$, $\binom{103}{39}$ e $\binom{103}{40}$ da linha 103. Usando um *software* obtemos que

$$\binom{103}{38} = 3\alpha, \quad \binom{103}{39} = 5\alpha \quad \text{e} \quad \binom{103}{40} = 8\alpha,$$

onde $\alpha = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103$ e seu valor aproximado é $\alpha = 7,6522728443 \cdot 10^{27}$.

Exemplo 9. Finalmente, para desfazer uma possível impressão errônea de que só existem exemplos desse tipo para $\Delta = 1$, consideremos $a = 2$, $b = 4$ e $c = 7$. Temos que $\Delta = 2$ divide $a(c \pm b)$ e $b(c \pm b)$, satisfazendo as condições da Proposição 4. Na coluna 3 temos

$$\frac{\binom{5}{3}}{2} = \frac{\binom{6}{3}}{4} = \frac{\binom{7}{3}}{7} = 5$$

e na linha 32

$$\frac{\binom{32}{10}}{2} = \frac{\binom{32}{11}}{4} = \frac{\binom{32}{12}}{7} = 32.256.120.$$

6. Agradecimento

Agradeço ao/à parecerista, cujos comentários contribuíram para melhorar este artigo.

Referências

- [1] Brothers, H. J. “Math Bite: Finding e in Pascal’s Triangle”. *Mathematics Magazine*, v. 85, p. 51-51, (2012).
- [2] <https://www.cut-the-knot.org/arithmetric/algebra/PiInPascal.shtml>
- [3] Foldes, S.; Major, L. “Log-concavity of Rows of Pascal Type Triangles”. *Utilitas Mathematica*, v. 116, p. 203-210, 2020.
- [4] Knuth, D. “Problem 11985”. *The American Mathematical Monthly*, v. 124, p. 563, 2017.
- [5] Sloane, N. J. A. et al *Online Encyclopedia of Integer Sequences*. <https://oeis.org/>
- [6] Stanley, R. P. “Log-concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry”. *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 576, p. 500-535, 1989.

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
<brietzke@mat.ufrgs.br>

Recebido: 08/03/2022
Publicado: 03/06/2022

Determinante nulo e sistemas lineares

Claudemir Aniz

João Vitor Campos Torrezan

Resumo

A função determinante associa a toda matriz quadrada A o número $\det A$, definido por meio de somas dos produtos de seus termos. Tal número carrega características da matriz, por exemplo, se $\det A \neq 0$, a matriz é invertível e sistemas lineares que têm os coeficientes dados por A têm uma única solução. A interpretação de $\det A = 0$ e suas consequências no conjunto solução de sistemas lineares são pouco exploradas em geral. Esse é o caso que abordaremos.

Palavras-chave: Combinação Linear; Regra de Cramer; Teorema de Laplace

Abstract

The determinant function associates to every square matrix A the number $\det A$, defined through of sums of the products of its terms. Such number carries characteristics of the matrix, for example, if $\det A \neq 0$, the matrix is invertible and linear systems that has the coefficients given by A has a unique solution. The interpretation of $\det A = 0$ and its consequences in the solution set of linear systems are little explored in general. This is the case we will cover.

Keywords: Linear Combination; Cramer's Rule; Laplace's Theorem

1. Introdução

A Regra de Cramer é um método tradicional que fornece a única solução de um sistema linear quadrado por meio do uso de determinantes, no caso de a matriz dos coeficientes ter determinante diferente de zero. Se a matriz dos coeficientes tem determinante nulo é usual recorrer ao escalonamento para encontrar o conjunto solução. Essa mudança de procedimento gera a crença de que não é possível utilizar a teoria de determinantes para resolver sistemas lineares no segundo caso. Contrariando esse pensamento, na seção 5, apresentaremos um algoritmo para resolver alguns sistemas lineares com determinante da matriz dos coeficientes nulos através de determinantes, cobrindo um pouco dessa lacuna. O algoritmo surge em decorrência da interpretação do determinante nulo, dada na seção 4. Para o entendimento deste artigo é necessário apenas o conhecimento da álgebra básica de matrizes, os demais pré-requisitos são apresentados na seção 2 e 3. Para finalizar, na seção 6, discutiremos o uso de determinantes para resolver também sistemas lineares não quadrados. Este trabalho contém partes do capítulo 3 de [4] e um dos seus objetivos é fornecer uma ferramenta adicional as técnicas usuais para a compreensão e resolução de sistemas lineares.

2. Propriedades do determinante

Em geral os livros apresentam as propriedades do determinante utilizando as linhas da matriz;

optamos por utilizar as colunas, por ser mais adequado ao objetivo deste artigo. As propriedades podem ser encontradas em [1, 4].

Para uma matriz real quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n , denotaremos por $A^{(j)}$ os seus vetores coluna, isto é,

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \text{ e escreveremos } A = [A^{(1)} \cdots A^{(n)}].$$

Propriedade 1. $\det A = \det A^t$, onde A^t é a matriz transposta de A .

A propriedade 1, garante que em todas as propriedades do determinante a palavra “coluna” pode ser substituída por “linha” e vice-versa.

Propriedade 2. *A função determinante é linear como função de cada coluna separadamente.*

i) $\det [A^{(1)} \cdots B^{(j)} + C^{(j)} \cdots A^{(n)}] = \det [A^{(1)} \cdots B^{(j)} \cdots A^{(n)}] + \det [A^{(1)} \cdots C^{(j)} \cdots A^{(n)}]$

ii) $\det [A^{(1)} \cdots \alpha \cdot A^{(j)} \cdots A^{(n)}] = \alpha \cdot \det [A^{(1)} \cdots A^{(j)} \cdots A^{(n)}]$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriedade 3. *Se uma matriz A tiver duas colunas iguais, então $\det A = 0$.*

Propriedade 4. *Se a matriz B é obtida da matriz A pela troca da ordem de duas colunas, então $\det B = -\det A$.*

Propriedade 5. (Teorema de Laplace) *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n , $n \geq 2$. O determinante de A é dado por:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \text{ para } j = 1, \dots, n$$

ou

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

sendo a matriz A_{ij} de ordem $n - 1$, obtida da matriz A pela exclusão da i -ésima linha e j -ésima coluna.

3. Sistemas lineares e Regra de Cramer

Definição 1. Sejam m e n números naturais maiores ou iguais a um. Um sistema linear S de ordem $m \times n$ é um conjunto de m equações lineares em n incógnitas, consideradas simultaneamente

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Uma n -upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é uma *solução* de S , quando satisfaz simultaneamente todas as m equações. O *conjunto solução (CS)* de S é formado por todas as suas soluções.

Um sistema linear $m \times n$ é dito *homogêneo* quando todos os termos independentes são nulos, isto é, $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. A n -upla $(0, 0, 0, \dots, 0)$ é uma solução do sistema linear homogêneo, chamada *solução trivial*. Um sistema linear é dito *quadrado* quando o número de equações é igual ao número de incógnitas.

O sistema linear S pode ser expresso na forma matricial pela equação $A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1}$, onde A é a *matriz de coeficientes*, X a *matriz das incógnitas* e B a *matriz dos termos independentes*. Mais precisamente

$$S : \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_B$$

Outra maneira de apresentar o sistema linear S é o formato vetorial,

$$A^{(1)} \cdot x_1 + A^{(2)} \cdot x_2 + \dots + A^{(n)} \cdot x_n = B.$$

Definição 2. Para matrizes de mesmo tamanho D_1, D_2, \dots, D_n, E , dizemos que E é combinação linear de D_1, D_2, \dots, D_n se existem números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$D_1 \cdot \alpha_1 + D_2 \cdot \alpha_2 + \dots + D_n \cdot \alpha_n = E.$$

Do formato vetorial e da definição de combinação linear, o sistema linear S possui solução se, e somente se, a matriz B é combinação linear dos vetores coluna $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$.

Lema 1. Se um sistema linear homogêneo $A \cdot X = 0$ possuir uma solução não trivial, então ele terá infinitas soluções.

Demonstração. Seja $X_0 \neq 0$ uma solução de $A \cdot X = 0$. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, αX_0 é solução de $A \cdot X = 0$, dado que

$$A \cdot (\alpha \cdot X_0) = \alpha \cdot (A \cdot X_0) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Logo o conjunto solução CS_h de $A \cdot X = 0$ contém αX_0 para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. O fato de $\alpha_1 X_0 \neq \alpha_2 X_0$ sempre que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, implica que o conjunto formado pelos αX_0 com α percorrendo \mathbb{R} é infinito. \square

Lema 2. Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear e $A \cdot X = 0$ seu sistema homogêneo associado. Considere CS e CS_h os conjuntos solução desses sistemas, respectivamente. Se X_0 é uma solução particular de $A \cdot X = B$ então $CS = X_0 + CS_h$, onde $X_0 + CS_h = \{X_0 + X' \mid X' \in CS_h\}$.

Demonstração. i) Provemos que $X_0 + CS_h \subset CS$. De fato, para $X_1 \in X_0 + CS_h$ existe $X' \in CS_h$ tal que $X_1 = X_0 + X'$. A igualdade

$$A \cdot (X_0 + X') = A \cdot X_0 + A \cdot X' = B + 0 = B,$$

acarreta que $X_1 \in CS$.

ii) Provemos que $CS \subset X_0 + CS_h$. Se $X_2 \in CS$, então

$$A \cdot (X_2 - X_0) = A \cdot X_2 - A \cdot X_0 = B - B = 0.$$

Portanto $X_2 - X_0 \in CS_h$ e $X_2 = X_0 + (X_2 - X_0) \in X_0 + CS_h$.

De (i) e (ii), segue a igualdade dos conjuntos CS e $X_0 + CS_h$. □

Proposição 1. *Se um sistema linear $A \cdot X = B$ possuir duas soluções distintas, então ele terá infinitas soluções.*

Demonstração. Sejam X_0 e X_1 soluções distintas de $A \cdot X = B$, então

$$A \cdot (X_0 - X_1) = A \cdot X_0 - A \cdot X_1 = B - B = 0,$$

ou seja, $X_0 - X_1 \in CS_h$ e $X_0 - X_1 \neq 0$. Pelo lema 1, o conjunto CS_h é infinito, e pelo lema 2, $CS = X_0 + CS_h$, também é infinito. □

Como consequência da proposição 1, há três possibilidades para o conjunto solução de um sistema linear:

- i) *Sistema possível e determinado*, quando possuir uma única solução;
- ii) *Sistema possível e indeterminado*, quando possuir infinitas soluções;
- iii) *Sistema impossível*, quando não possuir solução.

Para um sistema linear $A \cdot X = B$, quadrado de ordem n , a matriz A_j denotará a matriz obtida de A substituindo a j -ésima coluna por B .

Proposição 2. (Regra de Cramer) *Se $\det A \neq 0$, então o sistema linear $A \cdot X = B$ possui uma única solução, sendo dada por:*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

4. Determinante nulo

A Regra de Cramer é um resultado clássico que garante a existência de uma única solução quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Porém, se o determinante da matriz dos coeficientes for nulo, não é possível classificar o conjunto solução apenas com tal informação. Um erro comum entre estudantes e professores, e até mesmo presente em livros didáticos, é classificar um sistema linear $A \cdot X = B$ que possui $\det A = 0$ e $\det A_1 = \det A_2 = \dots = \det A_n = 0$, como sistema possível e indeterminado. Segundo Elon Lages Lima [3], isso acontece porque pela Regra de Cramer, sob essas hipóteses, a solução do sistema seria $X_0 = \left(\frac{0}{0}, \dots, \frac{0}{0}\right)^t$, e como $\frac{0}{0}$ é uma indeterminada diz-se, erroneamente, que o sistema é possível e indeterminado. O exemplo a seguir comprova a falsidade de tal afirmação.

Exemplo 1. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

Note que $\det A = \det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = 0$, pois estas matrizes possuem duas linhas iguais. Porém, esse sistema é impossível, dado que

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot (x + y + z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e não existe $x + y + z \in \mathbb{R}$ que satisfaça tal igualdade.

Na linguagem da matemática, o exemplo mostra que a hipótese $\det A = \det A_1 = \dots = \det A_n = 0$ não é suficiente para garantir que o sistema é possível e indeterminado. Porém, elas são necessárias conforme o próximo resultado.

Proposição 3. *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem n tal que $\det A = 0$. Se $A \cdot X = B$ tem solução, então $\det A_1 = \det A_2 = \dots = \det A_n = 0$.*

Demonstração. Seja $X_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ uma solução de $A \cdot X = B$, ou seja,

$$\alpha_1 \cdot A^{(1)} + \alpha_2 \cdot A^{(2)} + \dots + \alpha_n \cdot A^{(n)} = B.$$

Pela linearidade da função determinante em cada coluna,

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \det [B \quad A^{(2)} \quad \dots \quad A^{(n)}] \\ &= \det [\alpha_1 \cdot A^{(1)} + \alpha_2 \cdot A^{(2)} + \dots + \alpha_n \cdot A^{(n)} \quad A^{(2)} \quad \dots \quad A^{(n)}] \\ &= \alpha_1 \cdot \det [A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad \dots \quad A^{(n)}] + \alpha_2 \cdot \det [A^{(2)} \quad A^{(2)} \quad \dots \quad A^{(n)}] \\ &\quad + \dots + \alpha_n \cdot \det [A^{(n)} \quad A^{(2)} \quad \dots \quad A^{(n)}] \end{aligned}$$

Como matrizes com duas colunas iguais tem determinante nulo, então $\det A_1 = \alpha_1 \cdot \det A = 0$. Analogamente, $\det A_2 = \dots = \det A_n = 0$. \square

A proposição 3 fornece um critério para detectar sistemas impossíveis no caso de a matriz dos coeficientes ter determinante nulo.

Corolário 1. *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem n e $\det A = 0$. Se existir $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\det A_j \neq 0$, então $A \cdot X = B$ não tem solução.*

Exemplo 2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ -3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Nesse caso, $\det A = 0$ e $\det A_1 = -35$. Portanto, pelo corolário 1, o sistema linear é impossível.

Teorema 1. Se a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n é tal que $\det A = 0$ e $\det A_{ij} \neq 0$ para algum $i, j \in \{1, \dots, n\}$, então j -ésima coluna de A , é combinação linear das outras colunas.

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, $i = j = n$, e provar que a n -ésima coluna é combinação linear das demais colunas. Partindo de $\det A_{nn} \neq 0$, pela Regra de Cramer existem únicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ reais tais que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{(n-1)n} \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{aligned} a_{1n} &= a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1(n-1)}\lambda_{n-1} \\ a_{2n} &= a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2(n-1)}\lambda_{n-1} \\ &\vdots \\ a_{(n-1)n} &= a_{(n-1)1}\lambda_1 + a_{(n-1)2}\lambda_2 + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\lambda_{n-1} \end{aligned}$$

Provemos que $a_{nn} = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{n(n-1)}\lambda_{n-1}$. Como $\det A = 0$, o Teorema de Laplace utilizado na n -ésima linha, fornece

$$\sum_{j=1}^n a_{nj} \cdot (-1)^{n+j} \cdot \det A_{nj} = 0 \tag{1}$$

Vamos agora analisar o determinante da primeira parcela deste somatório. Note que

$$\det A_{n1} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$\det A_{n1} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1(n-1)}\lambda_{n-1} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2(n-1)}\lambda_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)1}\lambda_1 + a_{(n-1)2}\lambda_2 + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\lambda_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pelas propriedades 2 e 3, temos:

$$\det A_{n1} = \lambda_1 \cdot \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)1} \end{bmatrix}$$

Podemos então realizar $n - 2$ trocas ordenadas entre as colunas, duas a duas da direita para a esquerda, de modo que, considerando tais trocas:

$$\det A_{n1} = \lambda_1 \cdot (-1)^{n-2} \cdot \det A_{nn}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, e fazendo as trocas necessárias, obtemos

$$\begin{aligned} \det A_{n2} &= \lambda_2 \cdot (-1)^{n-3} \cdot \det A_{nn} \\ \det A_{n3} &= \lambda_3 \cdot (-1)^{n-4} \cdot \det A_{nn} \\ &\vdots \\ \det A_{n(n-1)} &= \lambda_{n-1} \cdot (-1)^0 \cdot \det A_{nn} \end{aligned}$$

Da equação (1),

$$\begin{aligned} a_{n1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \lambda_1 \cdot (-1)^{n-2} \cdot \det A_{nn} &+ \\ a_{n2} \cdot (-1)^{n+2} \cdot \lambda_2 \cdot (-1)^{n-3} \cdot \det A_{nn} &+ \\ a_{n3} \cdot (-1)^{n+3} \cdot \lambda_3 \cdot (-1)^{n-4} \cdot \det A_{nn} &+ \\ &\dots + \\ a_{n(n-1)} \cdot (-1)^{n+n-1} \cdot \lambda_{n-1} \cdot (-1)^0 \cdot \det A_{nn} &+ \\ a_{nn} \cdot (-1)^{n+n} \det A_{nn} &= 0. \end{aligned}$$

Colocando $\det A_{nn} \neq 0$ em evidência e simplificando,

$$a_{n1} \cdot \lambda_1 \cdot (-1)^{2n-1} + a_{n2} \cdot \lambda_2 \cdot (-1)^{2n-1} + \dots + a_{n(n-1)} \cdot \lambda_{n-1} \cdot (-1)^{2n-1} + a_{nn} \cdot (-1)^{2n} = 0.$$

Como $(-1)^{2n-1} = -1$ e $(-1)^{2n} = 1$, então

$$a_{nn} = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \dots + a_{n(n-1)}\lambda_{n-1}.$$

Portanto, a n -ésima coluna de A é combinação linear das demais colunas de A . Caso tenhamos $\det A_{ij} \neq 0$ com $i \neq n$ ou $j \neq n$ podemos trocar ordenadamente, duas a duas, na matriz A as linhas ou as colunas, respectivamente, de modo que a linha i fique na linha n ou a coluna j fique na coluna n , processo que transformará A em A' , onde $A'_{nn} = A_{ij}$ e $\det A' = \det A = 0$. \square

A demonstração do teorema 1 traz como informação adicional que na combinação linear

$$\lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_{j-1} A^{(j-1)} + \lambda_{j+1} A^{(j+1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = A^{(j)} \quad (2)$$

os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n$ são únicos e dados pela Regra de Cramer.

Corolário 2. Se a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n é tal que $\det A = 0$ e $\det A_{ij} \neq 0$ para algum $i, j \in \{1, \dots, n\}$, então o sistema linear $A \cdot X = 0$ é possível e indeterminado.

Demonstração. A equação (2) significa que a n -upla $(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, -1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ é uma solução de $A \cdot X = B$, dado que

$$\lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_{j-1} A^{(j-1)} - A^{(j)} + \lambda_{j+1} A^{(j+1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = 0.$$

Pelo lema 1, $A \cdot X = 0$ é possível e indeterminado. \square

O teorema 1 e o corolário 2 podem ser enunciados com algumas adequações retirando da hipótese a condição $\det A_{ij} \neq 0$, como foi feito em [2], capítulo 1, teorema 13, sem a utilização da teoria de determinante. Como o objetivo aqui é explorar o uso de determinantes na resolução de sistemas lineares, optamos por acrescentar esta hipótese, pois ela torna as demonstrações mais claras, não constitui uma restrição que invalida a solução da maioria dos sistemas lineares do cotidiano do ensino médio e fornece um algoritmo para resolvê-los.

Proposição 4. *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem n tal que $\det A = 0$. Se $\det A_{ij} \neq 0$ e $\det A_j = 0$, então $A \cdot X = B$ é um sistema possível e indeterminado.*

Demonstração. De $\det A_{ij} \neq 0$ e $\det A_j = 0$, segue do teorema 1, que existem números reais únicos $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n$ tais que

$$\lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_{j-1} A^{(j-1)} + \lambda_{j+1} A^{(j+1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = B$$

Assim, a n -upla $(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, 0, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n)$ é uma solução do sistema $A \cdot X = B$. O fato de $\det A = 0$, juntamente ao lema 2 e ao corolário 2, permite concluir que o sistema linear $A \cdot X = B$ é possível e indeterminado. \square

Na proposição 4, a hipótese $\det A_{ij} \neq 0$ é essencial para garantir que o sistema tenha solução, visto que, no exemplo 1 a matriz dos coeficientes não satisfaz tal condição e o sistema não tem solução mesmo tendo $\det A_j = 0$ para $j = 1, 2, 3$.

Teorema 2. *Suponha $\det(A) = 0$ e $\det A_{ij} \neq 0$ para algum $i, j \in \{1, \dots, n\}$. O sistema linear $A \cdot X = B$ é possível e indeterminado se, e somente se, $\det A_j = 0$.*

Demonstração. Pela proposição 4, se $\det A_j = 0$, então o sistema linear $A \cdot X = B$ é possível e indeterminado. Pela proposição 3, se $A \cdot X = B$ tem solução, então $\det A_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. \square

O raciocínio usado na demonstração do teorema 1, dá-nos um método para resolver alguns sistemas lineares quadrados com determinante da matriz dos coeficientes nulo usando determinantes.

Exemplo 3. Considere o sistema linear

$$S : \begin{cases} 5x + 6y + 7z = 8 \\ -3x - 2y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Cálculos de rotina produz,

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \det A_{33} = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0 \text{ e } \det A_3 = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

Pela proposição 4, o sistema S é possível e indeterminado. Para cada $z \in \mathbb{R}$, o sistema linear S' nas incógnitas x e y é possível e determinado pois $\det A_{33} \neq 0$.

$$S' : \begin{cases} 5x + 6y = 8 - 7z \\ -3x - 2y = z \end{cases}$$

Aplicando a Regra de Cramer em S' ,

$$\det(A_{33})_1 = \det \begin{bmatrix} 8-7z & 6 \\ z & -2 \end{bmatrix} = 8z - 16 \implies x = \frac{\det(A_{33})_1}{\det A_{33}} = \frac{8z - 16}{8} = z - 2$$

$$\det(A_{33})_2 = \det \begin{bmatrix} 5 & 8-7z \\ -3 & z \end{bmatrix} = 24 - 16z \implies y = \frac{\det(A_{33})_2}{\det A_{33}} = \frac{24 - 16z}{8} = 3 - 2z$$

Assim, o terno $(z - 2, 3 - 2z, z)$ é solução da primeira e da segunda equação de S , para qualquer valor de z . Por fim, a demonstração do teorema 1 garante que essas soluções irão satisfazer também a terceira equação, pois

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7z-8 \\ -3 & -2 & -z \\ 1 & 2 & 3z-4 \end{bmatrix} = z \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 5 & 6 & -8 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} = 0$$

Portanto, o conjunto solução de S é $\{(z - 2, 3 - 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

5. Algoritmo

Seja $S : A \cdot X = B$ um sistema linear quadrado de ordem n tal que $\det A = 0$ e $\det A_{ij} \neq 0$ para algum $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

i) Se $\det A_j \neq 0$, o sistema S é impossível.

ii) Se $\det A_j = 0$, o sistema S é possível e indeterminado e para encontrar seu conjunto solução, seguimos os seguintes passos:

(a) Seja $S_1 : A' \cdot X = B'$ o sistema linear obtido de S pela exclusão da i -ésima equação.

(b) Seja $S_2 : A'' \cdot X = B''$ o sistema de ordem $n - 1$, sendo A'' obtida de A' pela exclusão da j -ésima coluna e $B'' = B' - (A')^j x_j$.

(c) Use a Regra de Cramer para determinar a solução do sistema S_2 em função da incógnita x_j .

(d) O conjunto solução de S será $\{(x_1(x_j), \dots, x_{j-1}(x_j), x_j, x_{j+1}(x_j), \dots, x_n(x_j)) \mid x_j \in \mathbb{R}\}$.

A definição de determinante garante que $x_k(x_j)$ para $k \neq j$ são funções afins na variável x_j . A escolha de A_{ij} não é única, mas não altera o conjunto solução do sistema linear; para exemplificar, vamos resolver o sistema linear S do exemplo 3 escolhendo a submatriz A_{32} . Nesse caso,

$$S_2 : \begin{cases} 5x + 7z = 8 - 6y \\ -3x - z = 2y \end{cases}$$

Aplicando a Regra de Cramer em S_2 ,

$$\det(A_{32})_1 = \det \begin{bmatrix} 8-6y & 7 \\ 2y & -1 \end{bmatrix} = -8y-8 \implies x = \frac{\det(A_{32})_1}{\det A_{32}} = \frac{-8y-8}{16} = \frac{-1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$\det(A_{32})_2 = \det \begin{bmatrix} 5 & 8-6y \\ -3 & 2y \end{bmatrix} = -8y+24 \implies z = \frac{\det(A_{32})_2}{\det A_{32}} = \frac{-8y+24}{16} = \frac{-1}{2}y + \frac{3}{2}$$

Assim, o conjunto solução de S é $\left\{ \left(\frac{-1}{2}y - \frac{1}{2}, y, \frac{-1}{2}y + \frac{3}{2} \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$. Note que a escolha de submatrizes diferentes pode gerar conjuntos soluções com apresentações distintas (aparência), mas representam o mesmo conjunto.

6. Considerações finais

A interpretação de $\det A = 0$ dada pelo teorema 1 é o resultado central deste artigo e pode ser usado para resolver também sistemas lineares não quadrados usando determinantes. Considere o sistema linear

$$S : \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = 1 \\ 4x + 5y + 6z + 9t = 1 \\ 7x + 8y + 9z + 15t = 1 \end{cases}$$

O sistema linear nas incógnitas x e y

$$S' : \begin{cases} x + 2y = 1 - 3z - 3t \\ 4x + 5y = 1 - 6z - 9t \end{cases}$$

possui uma única solução para cada z e t fixados, pois $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -3$. A Regra de Cramer aplicada a S' dá-nos, $x = -1 + z - t$ e $y = 1 - 2z - t$. O fato de

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-3z-3t \\ 4 & 5 & 1-6z-9t \\ 7 & 8 & 1-9z-15t \end{bmatrix} = \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}}_0 + z \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}}_0 + t \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -9 \\ 7 & 8 & -15 \end{bmatrix}}_0 = 0$$

garante que x e y são soluções automaticamente da terceira equação de S. Assim, o conjunto solução de S é $\{(-1 + z - t, 1 - 2z - t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$.

Agradecimentos

Este trabalho foi feito com o suporte da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. O segundo autor contou com o apoio da Capes, Brasil, Código de Financiamento 001.

Referências


- [1] Hefez, A. e Fernandez, C. F. *Introdução à Álgebra Linear*. Coleção Profmat, SBM, 2016.
- [2] Hoffman, H. e Kunze, R. *Álgebra Linear*. Segunda edição, Tradução de Renate Watanabe, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.
- [3] Lima, E. L. “Sobre o Ensino de Sistemas Lineares”. *Revista do Professor de Matemática*, RPM 23, p.8-18, 1993.
- [4] Torrezan, J. V. C. *Determinante - Teoria e Aplicações*. Dissertação do Profmat, UFMS-Campo Grande, 2020.


Claudemir Aniz
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS
<claudemir.aniz@ufms.br>


João Vitor Campos Torrezan
Faculdade Novoeste, Campo Grande, MS
<professorjoao96@hotmail.com>

Recebido: 10/12/2021
Publicado: 03/06/2022

Ensino de matemática por meio de jogos on-line

Gláucia Maria Bressan 

Daniela Schmidt Caminhas 

Claudia Brunosi Medeiros 

Resumo

Este trabalho tem como objetivo explorar o uso de jogos *on-line* no processo ensino e aprendizagem de Matemática na educação básica. São apresentadas propostas de atividades a fim de investigar e compreender de que forma o uso de jogos pode intervir no processo de ensino e aprendizagem da matemática, tendo em vista que proporcionam maior interesse dos alunos durante a sua utilização. Tais atividades foram aplicadas de forma *on-line*, devido ao momento de pandemia atravessado por todos e pelas escolas. Os resultados das aplicações mostram melhor compreensão do conteúdo, por meio de uma aprendizagem lúdica.

Palavras-chave: Números inteiros; educação básica; aprendizagem lúdica; aplicação de jogos *on-line*.

Abstract

The goal of this work is to explore the use of online games in the teaching-learning process of Mathematics in basic education. Proposals for activities are presented in order to investigate and understand how the use of games can intervene in the teaching-learning process of mathematics, given that they provide greater interest to students during their use. Such activities were applied online, due to the moment of pandemic that everyone and schools are going through. The results of the applications show a better understanding of the content, through ludic learning.

Keywords: Integer numbers; basic education; ludic learning; online games application

1. Introdução

A matemática é vista como uma área prioritária na educação, mostrando-se uma disciplina indispensável para a formação de estudantes, pois desde os tempos mais remotos, quando os homens viviam de caça e pesca, já utilizavam a matemática mesmo intuitivamente. Nos dias atuais, a matemática faz parte da vida de todos, desde as experiências cotidianas, como contar, comprar e operar determinadas quantidades, quanto no trabalho, na conta bancária e no pagamento de produtos e serviços. Por outro lado, observamos uma falta de interesse em seu aprendizado por parte dos alunos em geral, em virtude de sua abstração, simbologias e da exigência de um raciocínio lógico [7]. Nesse cenário, o uso de jogos no ensino de matemática, inseridos no contexto escolar, propiciam o desenvolvimento de habilidades, bem como auxiliam no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, permitindo um caminho de construção do conhecimento que vai da imaginação à abstração de ideias, mediadas pela resolução de problemas.

A importância de fazer o uso dos jogos é tão fundamental que podemos encontrar informações sobre isso nos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN), na disciplina de Matemática, em que é relatado que esses recursos são um princípio fundamental para o estabelecimento do estudante no censo crítico para Matemática. Afirmando que:

Os recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão [2].

O Ensino de Matemática por meio de jogos tem se mostrado uma ferramenta fundamental para promover o interesse e motivar a participação dos alunos nas aulas. Esse contato com o conteúdo de uma forma lúdica e surpreendente pode primeiramente levar o aluno a relacionar o conteúdo com o jogo e, em seguida, introduzir os conceitos mais formais. Caso haja dificuldades, o professor pode começar aos poucos, introduzindo o jogo no conteúdo, modificando a metodologia, ir chamando a atenção do aluno por meio de uma metodologia diferente da tradicional. Segundo Moura [8], é necessário desenvolver o raciocínio lógico e estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Dessa forma, os professores de matemática devem concentrar-se em aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo e sentido cooperativo, aumentando a socialização e as interações pessoais.

As aulas mais dinâmicas e lúdicas proporcionam uma atração para os alunos, podendo contribuir para o desenvolvimento do aluno e de suas habilidades, como concentração e criatividade. Diante disso, Agranionih e Smaniotto [1] definem a importância de se utilizarem jogos no ensino de Matemática. Para os autores, essa metodologia deve ser intencionalmente planejada, com objetivos claros, sujeita a regras construídas coletivamente, que oportuniza a interação com os conhecimentos e os conceitos matemáticos, social e culturalmente produzidos, o estabelecimento de relações lógicas e numéricas e a habilidade de construir estratégias para a resolução de problemas. Nesse sentido, os jogos, se convenientemente planejados, são um recurso pedagógico eficaz para a construção do conhecimento matemático. O uso de jogos no ensino da Matemática tem o objetivo de fazer com que os estudantes gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do estudante [6].

Ao fazer uso de jogos, o professor pode observar nos alunos as suas habilidades e identificar suas principais competências e fragilidades. Dessa forma, o processo educativo será mais democrático e satisfatório. Além disso, o ensino por meio de jogos tem se mostrado uma eficiente alternativa metodológica, proporcionando significativos resultados, levando o discente a avançar na construção e compreensão das propriedades, regras e conceitos matemáticos. Os autores Dias, Meira e Silva [5] confeccionaram um jogo com o objetivo de possibilitar novas formas de trabalhar com um olhar mais dinâmico o conteúdo dos números inteiros. Os resultados foram no sentido da socialização entre os alunos, melhor compreensão no conteúdo dos números inteiros, trabalho em equipe e auxílio no ensino e aprendizagem.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é desenvolver e aplicar jogos para o ensino de matemática na educação básica, envolvendo números inteiros. Devido ao momento de pandemia em que todos atravessam, inclusive as escolas, os jogos são aplicados na modalidade remota, ajudando a resgatar a socialização e a interação entre os estudantes. A principal contribuição deste trabalho é despertar o

interesse de alunos da educação básica pela Matemática, mas sem transformá-la em algo meramente utilitário. Desta forma, os jogos auxiliam no primeiro contato de um determinado tema de estudo, mostrando que a matemática também pode ser lúdica e incentivando para a construção de ideias e de resolução de problemas.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 2 descreve as atividades propostas, envolvendo jogos *on-line* para o ensino de números inteiros. Na Seção 3, são descritos os resultados obtidos a partir da aplicação dessas atividades em salas de aula do Ensino Fundamental utilizando plataformas de ensino *online* (*Google Meet*). Por fim, a Seção 4 apresenta as conclusões extraídas deste trabalho.

2. Atividades propostas

Esta seção descreve as atividades propostas para aplicação em sala de aula, presencial ou remotamente, envolvendo alunos do Ensino Fundamental, por meio de jogos *on-line*. A aplicação e os resultados observados são apresentados na Seção 3, de forma que o leitor possa reproduzir a elaboração das atividades conforme segue.

2.1. Atividade 1: Show do Milhão

Na Atividade 1, é proposto trabalhar com o jogo *Show do Milhão*, uma adaptação de [3], que em alguns anos atrás era exibido na televisão aberta, havendo versões em diversos países. Essa adaptação foi realizada para que essa atividade pudesse ser aplicada também de forma *on-line*. Por meio desse jogo, o objetivo é que os alunos fixem o aprendizado de números inteiros e tirem suas dúvidas a respeito do conteúdo de adição algébrica e multiplicação envolvendo números inteiros.

Com as adaptações, o jogo é definido da seguinte forma: cada aluno deve jogar uma rodada contendo dez questões de múltipla escolha, onde apenas uma resposta é a correta. Existe a possibilidade de solicitar, no decorrer da rodada, até duas ajudas da plateia, composta pelos demais alunos que não jogam a rodada, e uma ajuda do professor. As perguntas escolhidas devem ser diferentes, porém com o mesmo grau de dificuldade, tendo um tempo de resposta de 40 segundos e um valor que aumenta de mil reais até um milhão. Algumas perguntas que ocorrem durante o jogo do *Show do Milhão* e o cronômetro, são ilustrados na Figura 1. Ganha o jogo quem acumular mais dinheiro, e, ao contrário do jogo original, quem erra não para de jogar, mas perde todo dinheiro já acumulado e na próxima pergunta volta a contagem para o menor valor: mil reais.



Figura 1: Perguntas para o jogo *Show do Milhão*

2.2. Atividade 2: Bingo os inteiros

Na Atividade 2, é proposto um jogo de bingo com os números inteiros, adaptado pela Secretária de Educação do Paraná (2019) [4]. Esse jogo é composto por cartelas de números que são resultados de operações que serão sorteados para os alunos. O objetivo desse jogo é reforçar os conceitos de operações com números inteiros.

O jogo deve ser desenvolvido da seguinte forma: primeiro, é entregue uma cartela distinta para cada aluno. No caso de a aplicação ocorrer de forma *on-line*, também há a opção de os alunos copiarem as cartelas em seus cadernos. Em seguida, são sorteadas as operações que precisam ser resolvidas pelos jogadores/alunos (soma e subtração de números inteiros). Quem tiver o resultado em sua cartela irá marcá-lo, vencendo quem completar a cartela inteira primeiro. As Figuras 2 e 3 mostram, respectivamente, algumas das cartelas e das equações utilizadas no jogo do bingo.

BINGO					BINGO				
-1	-23	66	-86	120	-12	46	-34	-31	120
2	-16	-66	-91	-145	7	-62	32	-19	-145
13	33	Z	-100	-150	9	-54	Z	10	-150
17	44	71	96	145	12	58	35	16	145
22	50	90	99	0	20	78	41	25	0

Figura 2: Cartelas utilizadas no jogo do Bingo

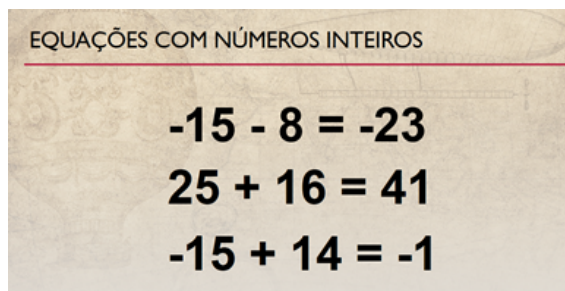


Figura 3: Algumas equações utilizadas no jogo do Bingo

3. Resultados da aplicação

A aplicação das atividades propostas na seção anterior foi realizada por meio da plataforma utilizada para a realização das aulas no formato remoto (Google Meet), em um colégio estadual de ensino fundamental e médio, localizado em Cornélio Procópio, município do estado do Paraná. Participaram das atividades alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, e as atividades foram ofer-

tadas em contraturno das aulas, para todos os alunos das turmas do 7^o ano A, B e C do ano letivo de 2021.

No encontro referente à Atividade 1, o *Show do Milhão*, compareceram 8 alunos de forma remota. Inicialmente, perguntou-se aos alunos se já tinham ouvido falar sobre esse jogo; disseram que não, mas que estavam curiosos para saber como se jogava. Após essa conversa de ambientação, foram explicadas as regras do jogo e seu procedimento, conforme descrito na seção anterior. Por meio desse jogo, os alunos deveriam fixar o conteúdo de adição algébrica e multiplicação envolvendo números inteiros. A Figura 4 exibe um dos momentos de aplicação desta atividade.

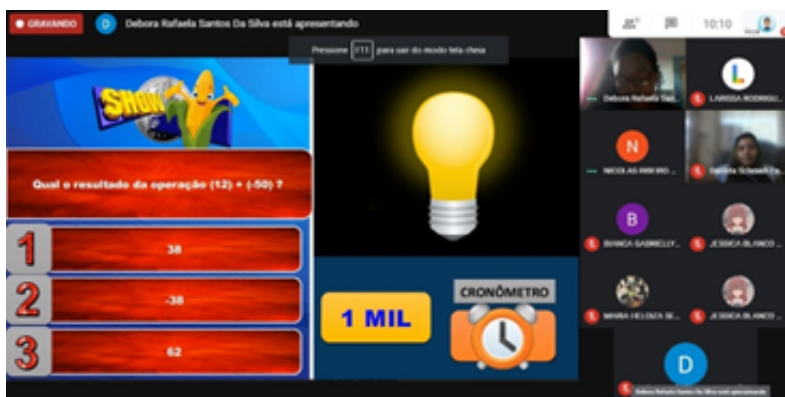


Figura 4: Momento de aplicação do Jogo do Milhão

Depois de toda a explicação de como funcionaria o jogo, os alunos ficaram bem animados com essa atividade, participaram ativamente e, nas perguntas que tinham mais dificuldades, pediam a ajuda permitida. Foi possível observar que, no momento em que as ajudas terminavam, eles ficavam mais ansiosos, prestavam atenção no tempo e tentavam responder. Quando erravam e viam a correção, mostravam uma certa indignação, pois achavam que poderiam ter acertado.

No encontro referente à Atividade 2, o jogo do Bingo, participaram 6 alunos na modalidade remota. Houve uma ambientação inicial, em que os alunos se manifestaram sobre o interesse por jogos. Ao perguntar se já haviam jogado Bingo, os alunos responderam que sim, que já conheciam as regras e explicaram como costumavam jogar em outros ambientes. Esse momento foi importante para ajudar na interação inicial com os alunos e revisar as regras do jogo do Bingo. Em seguida, foi explicado para a turma que o jogo seria bem parecido com o original, mas teriam algumas mudanças como, em vez de sortearmos os números para eles marcarem nas cartelas, seriam sorteadas operações envolvendo os números inteiros, conteúdo que estavam estudando naquele momento nas aulas de Matemática. Realizou-se uma breve revisão do conteúdo, perguntando aos alunos como resolvíamos algumas operações de adição e subtração de números inteiros.

Depois dessa preparação, cada aluno copiou em seu caderno cartelas diferentes do bingo que foram disponibilizadas nos *slides*, para todos iniciarem o jogo, como pode ser visto na Figura 5. Finalizando essa etapa, o sorteio das operações de adição e subtração de números inteiros foi iniciado. Os alunos deveriam resolver as operações e, aqueles que tivessem o resultado da operação sorteada em sua cartela, deviam marcá-lo. O ganhador seria aquele que completasse primeiro toda a cartela. A Figura 6 mostra um momento da aplicação dessa atividade.

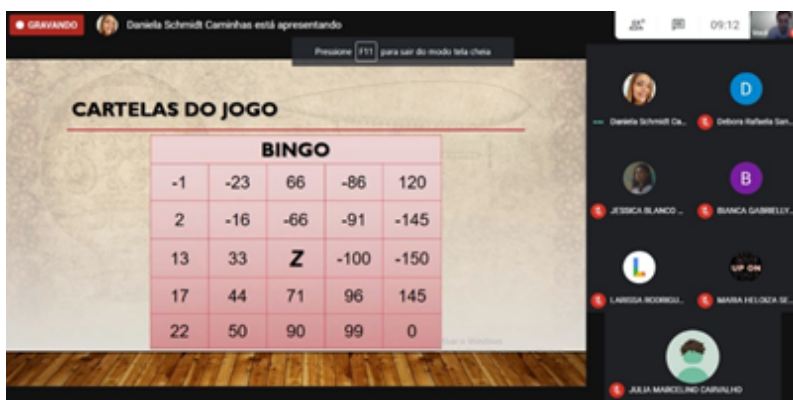


Figura 5: Exemplo de cartela disponibilizada nos slides



Figura 6: Momento de aplicação do jogo do Bingo

Os alunos ficaram muito animados com o jogo e competiram para vencê-lo. Foi possível observar que alguns alunos erraram na soma e deixaram de marcar o número em sua cartela. A maioria dos erros desse tipo referia-se à soma de números negativos, pois se confundiam um pouco com os sinais. Então, durante o jogo, algumas dicas eram dadas, para que observassem mais atentamente os sinais das operações. Quando um aluno conseguiu completar a tabela inteira, o jogo foi paralisado e anunciado o ganhador. Em seguida, foram conferidos os resultados de cada operação realizada, explicando a forma correta de se efetuar as operações e conversando com os alunos sobre a maneira que pensaram para chegar àquele resultado.

Tal atividade também proporcionou uma interação e um conhecimento maior entre alunos e professor, já que durante os horários das aulas de matemática, não havia muita participação, principalmente nesse momento em que as aulas estão sendo ministradas remotamente, o que prejudica a interação e a socialização.

Portanto, pode-se afirmar que desenvolver essas duas atividades com as operações de números

inteiros auxilia o aluno no processo de construção de seu conhecimento, tornando mais palpável as operações neste conjunto numérico e, de acordo com o seu ritmo de aprendizagem, cada um percebe o momento de começar a trabalhar de uma maneira mais abstrata, fato esse que é um dos objetivos do ensino da Matemática.

4. Conclusão

Este trabalho apresenta a proposta de desenvolver atividades para o ensino de Matemática no ensino básico por meio de jogos, proporcionando aulas dinâmicas e lúdicas para auxiliar o aprendizado de conceitos matemáticos. Dessa forma, pretende-se despertar o interesse do aluno por meio de materiais, promovendo interações entre os alunos, socialização e maior participação nas aulas. Assim, pretende-se proporcionar um aprendizado lúdico e efetivo dos conceitos matemáticos abstratos.

É importante ressaltar que todos os autores citados neste trabalho destacam a importância de haver interações entre os alunos, que conseqüentemente levam a uma participação maior nas aulas. Apesar de, em virtude da pandemia, termos perdido a socialização, a proposta deste trabalho propiciou a socialização, mesmo que remotamente, como pode ser visto nas aplicações descritas na Seção 3. Além disso, o uso de jogos propicia uma compreensão melhor dos temas de estudo e a conscientização de que conteúdos considerados difíceis, quando vistos de maneira mais concreta, acabam parecendo mais compreensíveis. Portanto, o uso de jogos, além de proporcionar benefícios aos alunos, também colabora com a construção de novos conhecimentos.

Percebe-se também que os alunos traziam algumas dúvidas sobre o conteúdo que, por algum motivo, não disseram durante a aula tradicional, mas a dinâmica do jogo proporcionou um ambiente favorável para que se manifestassem e esclarecessem essas dúvidas para vencerem os jogos.

Com os resultados obtidos podemos observar que esse tipo de abordagem envolvendo jogos proporciona uma melhor compreensão dos alunos e a fixação do conteúdo. Outro aspecto importante é destacar que, como normalmente as turmas são numerosas, essa metodologia proporciona uma maior interação entre os alunos, possibilitando que se conheçam melhor, de modo que eles possam debater e expor suas ideias. Portanto, este trabalho teve seu objetivo alcançado, visto que a criação e utilização dos jogos nas turmas do ensino fundamental funcionou como ferramenta facilitadora no ensino de alguns conteúdos.

Por fim, para concretizar por meio desses relatos, tem-se o quanto é importante trabalhar com diversas formas de ensino, para ajudar os alunos e aperfeiçoar ainda mais a metodologia do professor, promovendo um ensino mais efetivo para os alunos e também formar cidadãos criativos e construtivos.

Referências

- [1] AGRANIONIH, N. T.; SMANIOTTO, M. *Jogos e aprendizagem matemática: uma interação possível*. Erechim: EdIFAPES, 2002.
- [2] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quartos ciclos do Ensino fundamental: Matemática*. Brasília, MEC, 1998.
- [3] AMARAL, F.P.B.; PARAHYBA, F.; HONISCH, T.O.; PRESTES, T.F. *Olimpíada matemática - show do milhão: um incentivo ao estudo da matemática*. Matemática na Escola, Porto Alegre, p. 1- 12, out. 2014. Disponível em: <https://silو.tips/download/olimpiada-matematica-show-do-milhao-um-incentivo-ao-estudo-da-matematica-resumoç>. Acesso em: 11 abr. 2021.

- [4] PARANÁ. *Secretária de Estado da Educação: conteúdo para jogo em sala de aula, Bingo com Números Inteiros*. Curitiba: SEED/PR, 2019. Disponível em: www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=223. Acesso em 11 abr. 2021.
- [5] DIAS, R. K. de P.; MEIRA, G. G. e SILVA, A. B. Importância da utilização do material manipulável nas aulas de Matemática: o caso do jogo “trilha dos números inteiros”. *Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*, São Paulo. 2016.
- [6] NEVES, Edna Alves. *Jogos matemáticos como recursos didáticos*. Disponível em <https://meuartigo.brasilecola.uol.com.br/matematica/jogos-matematicos-como-recursos-didaticos.htm>. 2010. Acesso em 01 jul. 2021.
- [7] MOREIRA, D. S. C. e DIAS, V. M. *A importância dos jogos e dos materiais concretos na resolução de problemas de contagem no ensino fundamental*, 66 p. Monografia – Faculdade Pedro II, Instituto Superior de Educação, Universidade de Belo Horizonte. Belo Horizonte, 2010.
- [8] MOURA, P. C. e VIAMONTE, A. J. “Jogos matemáticos como recurso didático”. *Revista da Associação de Professores de Matemática*, Lisboa, Universidade Portucalense, 2006.


GlauCIA Maria Bressan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Departamento de Matemática
<glauciabressan@utfpr.edu.br>


Daniela Schmidt Caminhas
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Departamento de Matemática
<danielacaminhas@alunos.utfpr.edu.br>

Claudia Brunosi Medeiros
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Departamento de Matemática
<claudiamedeiros@utfpr.edu.br>

Recebido: 22/08/2021
Publicado: 07/06/2022

Discriminantes de polinômios com uma variável

Alberis L. de Souza¹ 

Wállace M. de Sousa 

Resumo

O presente artigo consiste em verificar a natureza das raízes de polinômios de acordo com valores assumidos por seu discriminante, iniciando com casos particulares; representa o discriminante em função das raízes dos polinômios de 2° e 3° graus, especificamente; e, de maneira geral, relaciona o discriminante com raízes de polinômios de qualquer grau. Também relaciona o discriminante em função dos coeficientes dos respectivos polinômios, fazendo uma conexão com matriz de Sylvester e resultantes polinomiais.

Palavras-chave: Discriminante; Matriz de Sylvester; Polinômio; Resultante;.

Abstract

The present article consists in verifying the nature of the roots of polynomials according to values assumed by their discriminant, starting with particular cases. The discriminant is represented as a function of the roots of 2nd and 3rd degree polynomials, specifically, and in general, the discriminant is related to the roots of degree polynomials of any degree. The discriminant is also related as a function of the polynomial coefficients, making a connection with the Sylvester Matrix and resultant of a polynomial and as well.

Keywords: Discriminant; Sylvester Matrix; Polynomial; Resultant.

1. Introdução

Os primeiros indícios do uso de equações estavam em dois valiosos papiros: Papiro Egípcio de Ahmes ou de Rhind, escrito cerca de 1650 a.C., e Papiro de Moscou, escrito cerca de 1850 a.C. [7]. O Papiro de Rhind foi copiado pelo escriba egípcio Ahmes e comprado em 1858, na cidade de Luxor, pelo arqueólogo, advogado e antiquário escocês Alexander Henry Rhind. Menciona que os registros provêm de um protótipo do Reino do Meio, cerca de 2000 a 1800 a.C.. Rhind morreu em 1863, seu papiro foi adquirido pelo British Museum, Museu Britânico de Londres. Além de equações lineares, nele há problemas matemáticos envolvendo aritmética, frações e trigonometria [3]. O Papiro de Moscou, é também chamado de Papiro de Golenischev em homenagem ao colecionador russo Abraão V. S. Golenischev, que o comprou no Egito em 1893. Em 1917, pertenceu ao Museu de Belas-Artes de Moscou, daí passou a ser conhecido como Papiro de Moscou. Até hoje é desconhecido o escriba que o escreveu. Possui 25 problemas matemáticos envolvendo áreas, volume, medições, equações e outros [3], [6].

¹Parcialmente apoiado pela Capes

Os Babilônios, no mesmo período, desenvolveram mais, pois já trabalhavam com equações de 2º grau e resolviam-nas por um método utilizado pelos hindus quase 3 milênios depois, o chamado “completamento do quadrado”. Os problemas algébricos eram colocados e solucionados em um mesmo enunciado, com representações um tanto abstratas, utilizando comprimento, largura ou lado de um quadrado e áreas retangulares [7]. Uma Plaqueta de Argila Babilônica, escrita cerca de 2000 e 1600 a.C., foi descoberta no sul da Mesopotâmia e encontra-se no Museu Britânico sob a denominação BM13901; contém 24 problemas algébricos, incluindo as formas simples de equações de segundo grau [8].

Na Universidade de Alexandria, por volta de 300 a.C., surgiu o talentoso gênio da Matemática, Euclides. Ele formou alguns conceitos que se tornaram extremamente importantes na solução de equações, como, por exemplo, as expressões abaixo, que são conhecidas como “noções comuns” de Euclides:

- Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;
- Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais;
- Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.

Nos primeiros séculos depois de Cristo, apareceram grandes matemáticos, dentre eles o famoso astrônomo Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa Al-Khwarizmi (783-850), conhecido como o pai da álgebra, foi considerado o melhor matemático de sua época. Nascido na província persa de Khwarezm, onde é atualmente o Uzbequistão, escreveu o livro em árabe com o título *Al-Kitab Al-jabr Wa'l Muqabalah*, trazendo discussões de equações lineares e quadráticas [7].

Na Índia, na cidade de Vijayapura, nasceu o mais importante matemático do século XII e astrônomo Bhaskara Akaria, aproximadamente (1114-1185) [3]. A fórmula que recebeu seu nome, ele mesmo relatou ter sido encontrada pelo matemático hindu Sridhara (870-930), um século antes. Bhaskara escreveu *Bijaganita*, um livro de Álgebra, onde se dedicou às resoluções de equações lineares e quadráticas, utilizando métodos já apresentados por outros matemáticos [12].

No ano de 1175, nasceu em Pisa, Itália, o matemático Leonardo Fibonacci, conhecido como Leonardo de Pisa. Em 1202 publicou o livro *Liber Abaci*. Os quinze capítulos da obra explicam métodos de cálculo com inteiros e frações, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas, cujas raízes negativas e imaginárias não são admitidas. Depois de Fibonacci, surgiu o grande matemático italiano Luca Paciolo, também conhecido como Pacioli. Sua primeira obra foi *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* publicada em 1494 em Veneza, onde introduziu alguns símbolos, simplificando os de Fibonacci, como, por exemplo, o desconhecido (a incógnita) que foi chamado de *cosa* [7].

O matemático francês François Viète (1540-1603) determinou um método para encontrar a solução de equações quadráticas utilizando uma mudança de variável. Da equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

após a aplicação do método de substituição de variável, encontra-se a expressão [1]

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Essa é a fórmula que atualmente no Brasil é conhecida por *Fórmula de Bhaskara*, onde o termo

$$\Delta := b^2 - 4ac \quad (2)$$

é conhecido como o *discriminante* do polinômio $ax^2 + bx + c$ [12].

No caso de equações cúbicas, o primeiro registro aconteceu com a antiga civilização babilônica, por volta de 1800 a 1600 a.C.. Foram encontradas tabelas de cubos e de raízes cúbicas. No período grego, os volumes de sólidos geométricos levavam a problemas que, nos tempos modernos, envolvem equações cúbicas. Por exemplo, a duplicação do cubo consiste em resolver a equação $x^3 = 2$.

O matemático árabe Umar Al-Khayammi (1050-1123) solucionou equações cúbicas usando abordagem geométrica, não conseguindo encontrar soluções aritméticas, que, por sinal, acreditava serem impossíveis de existir. Omar Khayyam generalizou o método de resolução de todas as equações de 3º grau (que tinham raízes positivas) usando cônicas [3].

Há registros de que o matemático Scipione del Ferro (1465-1526) foi o primeiro que descobriu as resoluções das equações cúbicas. Não se sabe como ou quando fez essa descoberta, pois nunca publicou obra alguma. Antes de sua morte, revelou a solução dos problemas do tipo “cubo e coisas igual a número” ($x^3 + px = q$) e “cubo igual a coisas e número” ($x^3 = px + q$) a seus discípulos Annibale Della Nave e Antonio Maria Fiore. Em 1535, Fiore propõe desafiar para uma disputa matemática o talentoso matemático de nacionalidade italiana, Nicolo Fontana. Fiore propôs 30 problemas, todos envolvendo equações cúbicas, e Tartaglia também preparou seus problemas. Iniciada a disputa, Tartaglia, inteligentemente, conseguiu resolver todas as 30 questões propostas por Fiore e ainda foi mais além: achou a fórmula geral para as equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0 \quad (3)$$

vencendo assim a competição. A notícia da disputa entre Tartaglia e Fiore chegou até Milão, onde vivia o matemático Girolamo Cardano, nascido em Pavia em 1501 e falecido em Roma em 1576. Mediante tantas pressões e confiando em juramentos feitos por Cardano, Tartaglia revela a Cardano as cobiçadas fórmulas para resolução das equações cúbicas. Em 1545, quebrou seu juramento feito a Tartaglia, publicando o maior artigo algébrico existente, a *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, também conhecida como *Ars Magna*, foi publicada em Nuremberg, na Alemanha.

Como as soluções encontradas foram para as equações cúbicas (3), então não podia ser aplicadas diretamente numa equação de terceiro grau geral. Mas qualquer equação de terceiro grau pode ser transformada em uma equação do tipo (3), e a *Fórmula de Cardano*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (4)$$

garante-nos pelo menos uma raiz [11]. Agora, basta usar o algoritmo da divisão para polinômios e encontrar as outras raízes.

Na seção 2 estudamos a relação entre a natureza das raízes e o sinal do discriminante de polinômios de 2º grau e de 3º grau da forma $x^3 + px + q$. Na seção 3 generalizamos a definição de discriminante para polinômios de graus arbitrários de duas maneiras equivalentes. Na primeira, escrevemos esse determinante em função de uma resultante, enquanto que na segunda, apresentamos o determinante em função de suas raízes.

2. Discriminante de polinômios de 2° grau e de 3° grau da forma $x^3 + px + q$

O discriminante de um polinômio, muitas vezes denotado pelo símbolo Δ , dá algumas dicas importantes sobre a natureza das raízes do polinômio.

2.1. Relação do discriminante com as raízes de um polinômio da forma $ax^2 + bx + c$

Proposição 1. Considere o polinômio $ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Se x_1, x_2 são as raízes desse polinômio, então o discriminante da Equação (2) satisfaz a seguinte equação

$$\Delta = a^2(x_1 - x_2)^2. \quad (5)$$

Demonstração. Pelas relações de Girard, temos que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Assim,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \implies (x_1 + x_2)^2 = \frac{b^2}{a^2} \implies x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} \implies x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} - 4 \cdot \frac{c}{a},$$

ou seja,

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{\Delta}{a^2},$$

como gostaríamos. □

Observação 1. Considere a notação da Proposição 1. Notemos que:

- Se $\Delta > 0$, então $x_1 \neq x_2$. Pela Equação (2), temos que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
- Se $\Delta = 0$, então $x_1 = x_2$, pois $a \neq 0$;
- Se $\Delta < 0$, então $x_1 \neq x_2$. Pela Equação (2), temos que $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Nesse caso, as raízes são conjugadas entre si e, portanto, $x_1 - x_2$ não é um número real.

2.2. Relação do discriminante com as raízes de um polinômio da forma $x^3 + px + q$

Considere os polinômios de 3° grau da forma $x^3 + px + q$, onde $p, q \in \mathbb{R}$ e destaquemos o radicando $q^2/4 + p^3/27$ da Fórmula de Cardano (4). Nesse caso, o discriminante Δ desse polinômio será definido por

$$\Delta := -108 \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right). \quad (6)$$

Podemos dividir os polinômios da forma $x^3 + px + q$ em três tipos, com base na natureza de suas raízes:

- I - Polinômios com três raízes reais distintas;
- II - Polinômios com três raízes reais, sendo uma delas com multiplicidade pelo menos dois;

III - Polinômios com duas raízes complexas conjugadas entre si e uma raiz real.

Exemplo 1. Calcule o sinal do discriminante de $x^3 + px + q$ do Tipo I.

Nesse caso,

$$x^3 + px + q = (x - a)(x - b)(x - c), \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ distintos.} \quad (7)$$

Analizando o termo de segundo grau da equação do segundo membro, concluímos que $c = -(a + b)$. Além disso, pela Equação (7) temos que

$$p = ab - (a + b)^2 \text{ e } q = ab(a + b). \quad (8)$$

Agora, substituindo as Equações (8) na Equação (6), obtemos que

$$\Delta = -108 \cdot \left[\left(\frac{ab(a + b)}{2} \right)^2 + \left(\frac{ab - (a + b)^2}{3} \right)^3 \right] = (a - b)^2(2a + b)^2(a + 2b)^2. \quad (9)$$

Sabendo que a, b e c são distintos, com $c = -(a + b)$, segue que $\Delta > 0$.

Exemplo 2. Calcule o sinal do discriminante de $x^3 + px + q$ do Tipo II.

Nesse caso,

$$x^3 + px + q = (x - a)(x - a)(x - b), \text{ com } a, b \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Analizando o termo de segundo grau da equação do segundo membro, concluímos que $b = -2a$. Além disso, pela Equação (10) temos que

$$p = -3a^2 \text{ e } q = -2a^3. \quad (11)$$

Agora, substituindo as Equações (11) na Equação (6), obtemos que

$$\Delta = -108 \cdot \left[\left(\frac{-2a^3}{2} \right)^2 + \left(\frac{-3a^2}{3} \right)^3 \right] = 0. \quad (12)$$

Segue que $\Delta = 0$.

Exemplo 3. Calcule o sinal do discriminante de $x^3 + px + q$ do Tipo III.

Nesse caso,

$$x^3 + px + q = (x - [a + bi])(x - [a - bi])(x - c), \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } b \neq 0. \quad (13)$$

Analizando o termo de segundo grau da equação do segundo membro, concluímos que $c = -2a$. Além disso, pela Equação (13) temos que

$$p = b^2 - 3a^2 \text{ e } q = 2a(a^2 + b^2). \quad (14)$$

Agora, substituindo as Equações (14) na Equação (6), obtemos que

$$\Delta = -108 \cdot \left[\left(\frac{2a(a^2 + b^2)}{2} \right)^2 + \left(\frac{b^2 - 3a^2}{3} \right)^3 \right] = -4 \cdot (81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6). \quad (15)$$

Sabendo que $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, segue que $\Delta < 0$.

Exemplo 4 (Discriminante de polinômio de 2° grau). Calcule $\Delta(f(x))$, onde $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ e $a \neq 0$.

Como $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $f'(x) = 2ax + b$. Segue que $\partial(f(x)) = 2$ e $\partial(f'(x)) = 1$. A matriz de Sylvester de $f(x)$ e $f'(x)$ é

$$\text{Syl}(f(x), f'(x)) = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Nesse caso,

$$\text{Res}(f(x), f'(x)) = \det(\text{Syl}(f(x), f'(x))) = 4a^2c - ab^2.$$

Portanto,

$$\Delta(f(x)) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{Res}(f(x), f'(x))}{a} = \frac{(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} [4a^2c - ab^2]}{a} = b^2 - 4ac,$$

ou seja,

$$\Delta(f(x)) = b^2 - 4ac.$$

Exemplo 5 (Discriminante de polinômio de 3° grau). Calcule $\Delta(f(x))$, onde $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x]$ e $a \neq 0$.

Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Segue que $\partial(f(x)) = 3$ e $\partial(f'(x)) = 2$. A matriz de Sylvester de $f(x)$ e $f'(x)$ é

$$\text{Syl}(f(x), f'(x)) = \begin{bmatrix} a & 0 & 3a & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 3a & 0 \\ c & b & c & 2b & 3a \\ d & c & 0 & c & 2b \\ 0 & d & 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Usando a regra de Laplace temos que

$$\text{Res}(f(x), f'(x)) = \det(\text{Syl}(f(x), f'(x))) = a(27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta(f(x)) &= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{Res}(f(x), f'(x))}{a} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{3(3-1)}{2}} [a(27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2)]}{a} \\ &= (-1) \cdot (27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2) \\ &= -27a^2d^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d + b^2c^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta(f(x)) = -27a^2d^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d + b^2c^2.$$

Observação 3. Notemos que se $f(x) = x^3 + px + q$, então $\Delta(f(x)) = -27q^2 - 4p^3 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$, ou seja, recuperamos a fórmula do discriminante da Equação (6).

3.2. Relação entre discriminante e raízes de polinômios

Vamos apresentar uma outra maneira de calcular o discriminante de um polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau arbitrário quando conhecemos as raízes.

Definição 3. Sejam $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, com $a_n \neq 0$ e

$$\Delta_0(f(x)) := a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2, \quad (16)$$

onde x_1, \dots, x_n são as raízes (em \mathbb{C}) de $f(x)$.

Exemplo 6. Mostre que $\Delta_0(f(x)) = \Delta(f(x))$, onde $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ e $a \neq 0$.

Suponhamos que $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ sejam as raízes de $f(x)$. Nesse caso,

$$\Delta_0(f(x)) = a^{2 \cdot 2 - 2} (x_1 - x_2)^2 = a^2 (x_1 - x_2)^2,$$

ou seja,

$$\Delta_0(f(x)) = a^2 (x_1 - x_2)^2.$$

Segue, pela Proposição 1, que $\Delta(f(x)) = \Delta_0(f(x))$.

Exemplo 7. Mostre que $\Delta_0(f(x)) = \Delta(f(x))$, onde $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ é do Tipo I.

Suponhamos que $x^3 + px + q = (x - a)(x - b)(x - c)$. Nesse caso, $c = -(a + b)$. Segue que

$$\Delta_0(f(x)) = (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2 = (a - b)^2 (a + a + b)^2 (b + a + b)^2 = (a - b)^2 (2a + b)^2 (a + 2b)^2,$$

ou seja,

$$\Delta_0(f(x)) = (a - b)^2 (2a + b)^2 (a + 2b)^2.$$

Segue, pela Equação (9), que $\Delta(f(x)) = \Delta_0(f(x))$.

Exemplo 8. Mostre que $\Delta_0(f(x)) = \Delta(f(x))$, onde $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ é do Tipo II.

Suponhamos que $x^3 + px + q = (x - a)(x - a)(x - b)$. Nesse caso, $b = -2a$. Segue que

$$\Delta_0(f(x)) = (a - a)^2 (a - b)^2 (a - b)^2 = 0$$

Segue, pela Equação (12), que $\Delta(f(x)) = \Delta_0(f(x))$.

Exemplo 9. Mostre que $\Delta_0(f(x)) = \Delta(f(x))$, onde $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ é do Tipo III.

Suponhamos que $x^3 + px + q = (x - [a + bi])(x - [a - bi])(x - c)$. Nesse caso, $c = -2a$. Segue que

$$\begin{aligned} \Delta_0(f(x)) &= ([a + bi] - [a - bi])^2 ([a + bi] - c)^2 ([a - bi] - c)^2 = (2bi)^2 (3a + bi)^2 (3a - bi)^2 \\ &= (-4b^2)(9a^2 + b^2)^2 = -4b^2(81a^4 + 18a^2b^2 + b^4), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta_0(f(x)) = -4(81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6).$$

Segue, pela Equação (15), que $\Delta(f(x)) = \Delta_0(f(x))$.

Observação 4. Os resultados verificados nos Exemplos 6, 7, 8 e 9 são, de fato, casos particulares do seguinte resultado mais geral.

Lema 1. Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau n ($n \geq 1$). Então

$$\Delta(f(x)) = \Delta_0(f(x)).$$

A demonstração do Lema 1 pode ser encontrada em Proposition V-22, [5].

4. Conclusão

Ao longo da história, conceitos algébricos foram desenvolvidos e publicados por uns matemáticos e continuados por outros. Dessa forma, observa-se como se deu a ligação entre eles e de que maneira se procedeu à sequência dos conteúdos construídos.

Os livros didáticos da educação básica trazem métodos de resolução apenas para as equações de 1° e 2° graus que, no que se refere às de 2° grau, é mostrada a resolução das equações de 4° grau, chamadas de biquadradas, da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Apresentamos, neste artigo, para o conhecimento de discentes e docentes, também a fórmula resolvente para as equações de 3° grau da forma $x^3 + px + q = 0$, incluindo o estudo do sinal do discriminante. Quanto ao discriminante de polinômios nos livros didáticos, somente é mencionado para polinômios de 2° grau; exploramos, também neste trabalho, o estudo de discriminantes de polinômios de graus arbitrários.

Almejamos, com este trabalho, auxiliar professores no estudo de equações polinomiais e discriminantes de polinômios para nossas práticas pedagógicas, mesmo que alguns conceitos não sejam comuns no ensino básico, mas poderão ser explorados na íntegra ou como complemento de conteúdos programáticos já previstos.

Referências

- [1] Amaral, João T. “Método de Viète para Resolução de Equações do 2° Grau”. *Revista do Professor de Matemática* - Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, Universidade de Guarulhos, v. 13, p. 18-20, 1988.
- [2] Baumgart, J. K. *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula*, Tradução de Hygino Hugueros Domingues, São Paulo, Atual, Vol. 4, 1992.
- [3] Boyer, C. B. *História da Matemática*, Tradução de Elza F. Gomide, São Paulo, 2. ed., Edgard Blucher Ltda, 1996.
- [4] Dias, D. P. *O Binômio Discriminante na Fórmula Resolvente, ou o Discriminante da Fórmula de Bháskara, de uma Equação de Segundo Grau com Coeficientes Inteiros*, São Paulo, IME-USP, 2018.
- [5] Eisenbud, D.; Harris J. “The Geometry of Schemes”, *Graduate texts in mathematics*, Board, 197, 1991.
- [6] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*, Tradução de Hygino Hugueros Domingues, São Paulo, Editora da Unicamp, 2004.
- [7] Garbi, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*, São Paulo, 2ª. ed., Livraria de Física, 2007.
- [8] Hoyrup, J. “Old Babylonian “Algebra”, and What it Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics”. Kozhikode: ICM Satellite Conference, *Mathematics in Ancient times*, p. 11-14, sep. 2010.
- [9] Janson, S. *Resultant and Discriminant of Polynomials*, Department of Mathematics, Uppsala University, aug. 2010.
- [10] Souza, A. L. *Discriminantes de Equações Com Uma Variável*, Dissertação, Mestrado Profissional em Rede Nacional - Profmat. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2021.
- [11] Lima, Elon L. “A Equação do 3° Grau”. Rio de Janeiro: *Artigos - Matemática Universitária*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, n. 5, p. 9-23, jun. 1987.

- [12] Pedroso, Hermes A. “Uma Breve História da Equação do 2° grau”. São Paulo: *Revista Eletrônica de Matemática* (REMat), n. 2. 2010.
- [13] Woody, H. *Polynomial Resultants*, Department of Mathematics and Computer Science University of Puget Sound, 2016.

Alberis L. de Souza
Universidade Federal da Paraíba
<berislins@gmail.com>

Wállace M. de Sousa
Universidade Federal da Paraíba
<wallace@mat.ufpb.br>

Recebido: 20/10/2021

Publicado: 08/06/2022

Parábolas versus logaritmos: intersecções

José Carlos Magossi

Antônio César da Costa Barros

Resumo

Uma pergunta muito comum entre alunos universitários é: *Por que estudar Cálculo?* Nos dias de hoje, mesmo com todas as tecnologias que se apresentam, essa pergunta ainda se torna frequente, e sua resposta, mais complicada, haja vista que nem sempre é fácil esclarecer a conexão entre uma determinada tecnologia e a matemática necessária para implementá-la. Do lado da matemática a situação é semelhante, nem sempre é fácil determinar qual é a matemática necessária para solucionar um determinado problema. Neste artigo expõe-se um problema sobre a intersecção entre parábolas e logaritmos, para o qual, no sentido geométrico, a percepção da solução é rapidamente visualizada, sem a necessidade de conhecimento matemático. No entanto, para mostrar que essa intuição visual coincide com a resposta correta, deve-se necessariamente considerar a matemática ensinada nos cursos de Cálculo. Isso abre espaço para discussões acerca do ensino de Cálculo e também das diferenças entre a matemática vista no ensino médio e aquela vista na universidade.

Palavras-chave: cálculo; intuição geométrica; ensino; intersecção de curvas.

Abstract

A very common question among university students is: *Why study Calculus?* Nowadays, even with all the current technologies, this question still becomes frequent, and its answer more complicated, since it is not always easy to clarify the connection between a given technology and the mathematics necessary to implement it. From the point of view of mathematics the situation is similar, it is not always easy to determine which mathematics is necessary to solve a given problem. In this article we present a problem about the intersection between parabolas and logarithms in which, in the geometric sense, the perception of the solution is quickly visualized, without the need to know mathematics. However, to show that this visual intuition coincides with the correct answer, one must necessarily consider the mathematics taught in Calculus courses. This opens space for discussions about the teaching of Calculus and also the differences between the mathematics seen in high school and the one seen in university.

Keywords: calculus; geometric intuition; teaching; intersecting curves.

1. Introdução

Uma questão que vez ou outra vem à tona é: Por que é preciso estudar Cálculo? Acredita-se que sua importância e necessidade sejam, nos dias de hoje, bem aceitas, haja vista a realidade de toda a tecnologia presente na sociedade moderna, o que de certa forma justifica a existência da

“matemática aplicada”. Mas, por mais que possamos utilizar aparelhos de telefonia celular, viajar de avião, utilizar ressonância magnética, construir edifícios, viajar ao espaço etc., ainda fica uma pontinha de dúvida sobre a relevância da matemática, uma vez que não é simples mensurar o quanto de matemática se tem em cada tecnologia. Há muitos “serve para isso” que poderiam ser utilizados para responder a essa pergunta, e há inúmeros fatores que se inserem nos “porquês” das dificuldades em estudar Cálculo. Neste artigo, opta-se por uma estratégia que se volta a outras perguntas. Como resolver problemas sem as ferramentas do Cálculo? A matemática do ensino médio dá conta de resolver os problemas que nos são apresentados? Estaríamos em apuros no quesito “problemas de matemática e tecnologia”, caso não tivéssemos à disposição a matemática do Cálculo, diga-se, *Cálculo Diferencial e Integral*? Para auxiliar na resposta dessas perguntas, mostra-se um simples exemplo de um problema matemático, uma discussão sobre um problema geométrico que, com a matemática do ensino médio, teria uma solução bem difícil, talvez impossível, mas, com a matemática do Cálculo, ela se torna acessível. Mais ainda, é um problema que, no sentido da intuição geométrica, tem a solução rapidamente visualizada, mesmo para quem não conhece matemática. No entanto, essa visualização geométrica de uma propensa resposta não garante correção, pois, para alcançar uma resposta com rigor, torna-se necessário lançar mão das ferramentas de uma matemática contínua, própria dos cursos de Cálculo. Com isso, justifica-se que a matemática do ensino médio é necessária para um bom acompanhamento dos cursos de Cálculo, mas ela não é suficiente [5]. Nessa mesma esteira, pode-se argumentar que a matemática do ensino médio é necessária para o avanço tecnológico, mas também não é suficiente, haja vista as inúmeras tecnologias que se fundamentam em uma matemática mais sofisticada que a do ensino médio. A exposição neste texto tem um viés matemático cujo objetivo é mostrar como as ferramentas matemáticas presentes em um curso de Cálculo, de funções de uma variável real, podem ser utilizadas na solução de problemas aparentemente simples.

2. Parábolas e logaritmos: propriedades

O gráfico da função $y = x^2$ é uma parábola que corta o eixo x em $x = 0$, no ponto $(0, 0)$. Essa função é clássica na literatura e apresenta-se sob muitas formas na matemática do ensino médio [4]. Sua versão mais geral tem a forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Para determinar suas raízes leva-se em conta a famosa fórmula de Bhaskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Com as parábolas iniciam-se também os primeiros passos na determinação de pontos em que a função tem seu valor máximo (caso em que a parábola tem concavidade para baixo) e pontos em que a função tem seu valor mínimo (caso em que a parábola tem concavidade para cima), isto é, busca-se pelo ponto que representa o vértice $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ da parábola. Por outro lado, logaritmos (e diga-se, sua contraparte, a função exponencial $y = e^x$) também são clássicos na literatura e na matemática do ensino médio [4]. A função $y = \log_a x$ é a função logarítmica, em que $0 < x \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. As propriedades clássicas da função logarítmica são estudadas no colégio e podem ser observadas em [3, 4], tais como $\log x^\alpha = \alpha \log x$, $\log x + \log y = \log(x \cdot y)$ e $\log x - \log y = \log(\frac{x}{y})$. Além disso, se $a > 1$, a função logarítmica é uma função crescente que corta o eixo dos x em $x = 1$, caso em que $\log 1 = 0$. Os logaritmos podem ser escritos em bases diferentes da base 10, tais como $y = \log_2 x$ e $y = \log_e x$ (isto é, $y = \ln x$). Nota-se também que a função $y = \ln x$ tem sua concavidade voltada para baixo, isto é, o ponto médio de qualquer corda (reta secante) da curva $y = \ln x$ encontra-se abaixo, ou sobre a curva $y = \ln x$. Com base nisso, para logaritmos na base e , isto é, para $y = \ln x$, tem-se uma importante desigualdade, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, para todo $x > 0$, que auxilia na dedução do número e ([4], p.201).

3. Parábolas e logaritmos: uma visão intuitiva

Na sequência, apresenta-se um problema matemático cuja formulação é simples e prepara-se o raciocínio para uma extensão sua, mais complicada, cuja solução pode ser obtida com base na matemática ensinada em cursos de Cálculo, num sistema de números reais.

Problema 1): Quais são os pontos de intersecção, se existirem, entre a parábola $y = x^2$ e a função logarítmica, na base e, $y = \ln x$?

O gráfico da função $y = x^2$ e o da função $y = \ln x$ podem ser observados na figura 1. Com base nessa figura, e também em uma simples análise de valores de ambas as funções, é possível inferir que o gráfico de $y = x^2$ não cruza o gráfico da função $y = \ln x$. Isso significa que $x^2 = \ln x$ é uma equação cuja solução em \mathbb{R} é o conjunto vazio. Essa solução pode ser avaliada, no sentido da intuição geométrica, no sentido visual, sem a necessidade *a priori* de conhecimento matemático.

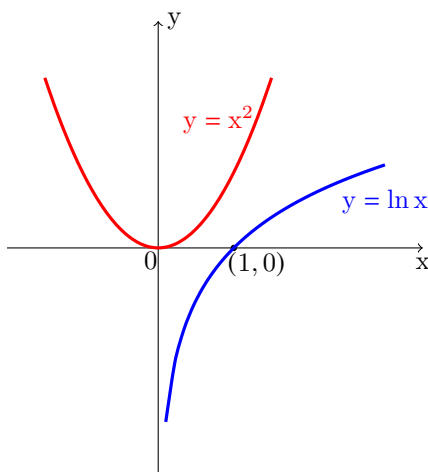


Figura 1: Gráficos de $y = \ln x$ e $y = x^2$

Ao observar o gráfico da figura 1, é possível notar, com base na intuição geométrica, que, se a parábola tiver sua concavidade mais aberta, existirá intersecção com a função logarítmica. Mais ainda, como essa abertura é arbitrária, pode-se deduzir que existem infinitas parábolas, do tipo $y = kx^2$, que têm intersecção com a função $y = \ln x$, para algum valor apropriado de $0 < k \in \mathbb{R}$.

Como identificar os pontos de intersecção entre as parábolas do tipo $y = kx^2$ e a função logarítmica $y = \ln x$? Mais ainda, qual seria o valor de k para que haja um único ponto de intersecção?

Indica-se uma solução para essas perguntas ao considerar, tal como nos cursos de Cálculo, a existência da derivada de uma função de números reais, e tendo em conta que a derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto $(a, f(a))$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. Essa inclinação [2], que substitui a inclinação da curva $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ pela inclinação da reta tangente à $y = f(x)$ em $(a, f(a))$, pode ser vista como a derivada de $f(x)$ em $x = a$. O conceito de derivada, brevemente exposto nestas linhas, é a grande contribuição de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), em fins do século XVII, que fez com que eles sejam considerados os inventores do Cálculo [1].

3.1. Intersecção de uma reta com a função logarítmica

Antes de abordar o problema principal desse artigo, qual seja intersecção entre parábola e logaritmo, inicia-se, como preparação de raciocínio, a investigação da intersecção entre uma reta e a função logarítmica.

No sentido intuitivo e geométrico é possível estimar que a reta $r(x) = mx$ cruza a função logarítmica em vários pontos, de acordo com a inclinação da reta $r(x) = mx$, ou seja, de acordo com o valor da constante $m \in \mathbb{R}$. Há, no entanto, um ponto em que essa reta é tangente à curva logarítmica, isto é, há um único ponto de intersecção¹. Essa intersecção ocorre quando a inclinação da reta $r(x) = mx$ coincide com a inclinação da curva $g(x) = \ln x$. Nesse caso, a inclinação da reta $r(x) = mx$ é dada pelo seu coeficiente angular, isto é, pelo valor m . A inclinação da curva $g(x) = \ln x$, em $x = c$, é dada pela derivada $g'(c)$. Assim, como $g'(x) = \frac{1}{x}$, tem-se então que $g'(c) = \frac{1}{c}$. Portanto, a reta $r(x) = mx$ e a curva $g(x) = \ln x$ terão a mesma inclinação no caso em que $\frac{1}{c} = m$. Tendo em conta que a reta e a curva têm um ponto de intersecção em $x = c$, então, como $m = \frac{1}{c}$, tem-se:

$$r(c) = g(c) \Rightarrow mc = \ln c \Rightarrow \frac{1}{c} \cdot c = \ln c \Rightarrow 1 = \ln c \Rightarrow c = e^1 = e.$$

Assim, para $m = \frac{1}{e}$ a reta $r(x) = mx$ e a curva $g(x) = \ln x$ terão a mesma inclinação e , além disso, um único ponto de intersecção em $x = e$, conforme pode ser observado na figura 2. Para $x = e$ tem-se que $r(e) = g(e) = 1$.

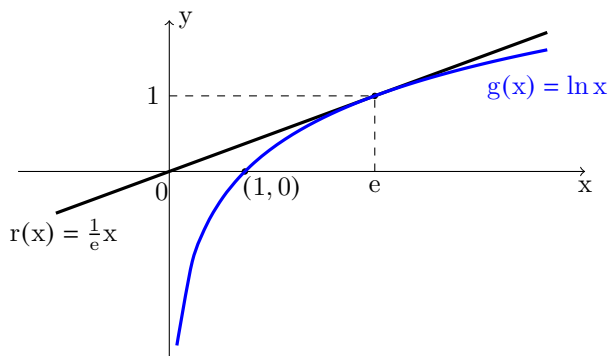


Figura 2: Gráficos de $y = \ln x$ e $y = \frac{1}{e}x$

O objetivo da discussão nesta seção foi o de preparar o raciocínio para as perguntas que virão na sequência, perguntas sobre a intersecção não de retas e logaritmos, mas entre parábolas e logaritmos.

4. Parábolas e logaritmos: intersecção

É possível notar, com base no sentido geométrico, no desenho dos gráficos, que parábolas com vértice na origem têm sim pontos de intersecção com a função logarítmica. No entanto, como precisar qual é o ponto em que as duas curvas interceptam-se, tendo em conta a abertura da concavidade das parábolas?

¹Convém indicar que esse ponto é a solução da equação em que $mx = \ln x$, ou seja, escrito de outra forma, é a solução da equação $x = e^{mx}$.

Problema 2): Sejam $f(x) = kx^2$ e $g(x) = \ln x$ funções de números reais. Determinar o valor positivo de $k \in \mathbb{R}$, para o qual existe um e um único $x = c$ tal que $f(c) = g(c)$.

No sentido geométrico é possível observar que a intersecção entre as funções $f(x) = kx^2$ e $g(x) = \ln x$ vai depender do valor de $k > 0$. Um caso particular, em que $k = 1$, situação de não intersecção, apresenta-se na figura 1. A existência da intersecção vai depender da abertura da parábola. Uma parábola com concavidade muito fechada, e positiva, não vai cruzar a função logarítmica. Assim, almeja-se determinar quão aberta deve ser a concavidade da parábola para que haja uma única intersecção com a função logarítmica. A abertura da parábola depende do valor de k . Quanto menor for o valor de k , mais aberta será a parábola; quanto maior for o valor de k , mais fechada será a parábola.

O objetivo é determinar um valor $x = c$ tal que as retas tangentes em $f(x) = kx^2$ e $g(x) = \ln x$ tenham a mesma inclinação, isto é, mesmo coeficiente angular. Além disso, esse valor $x = c$ deve ser a abscissa do ponto de intersecção dos dois gráficos, isto é, $f(c) = g(c)$. A derivada de $f(x)$, em $x = c$, indica a inclinação da reta tangente à curva $f(x) = kx^2$, e a derivada de $g(x)$, ainda em $x = c$, indica também a inclinação da reta tangente à curva $g(x) = \ln x$. Nota-se que duas retas quaisquer r e s são paralelas, ou coincidentes, se ambas tiverem a mesma inclinação, isto é, se ambas tiverem o mesmo coeficiente angular, $m_r = m_s$, em que m_r e m_s são os coeficientes angulares das retas r e s , respectivamente. Assim, $f'(c) = g'(c)$ indica o valor, se existir, em que as duas curvas terão a mesma inclinação², tendo em conta que $x = c$ pertença tanto à função $f(x)$ quanto à função $g(x)$. Se $f(x) = kx^2$, então $f'(x) = 2kx$, e se $g(x) = \ln x$, então $g'(x) = \frac{1}{x}$. Segue-se, então, que

$$f'(c) = g'(c) \Rightarrow f'(c) = 2kc = \frac{1}{c} = g'(c).$$

Desse modo,

$$2kc = \frac{1}{c} \Rightarrow k = \frac{1}{2c^2}.$$

Portanto, quando $k = \frac{1}{2c^2}$, as duas curvas terão a mesma inclinação em $x = c$. Logo, para que $x = c$ pertença a ambas as curvas, tem-se:

$$\begin{aligned} f(c) = g(c) &\Rightarrow kc^2 = \ln c \Rightarrow \frac{1}{2c^2} \cdot c^2 = \ln c \Rightarrow \frac{1}{2} = \ln c. \\ &\Rightarrow c = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Resta agora determinar o valor de k . Tendo em conta que $k = \frac{1}{2c^2}$ e $c = \sqrt{e}$, segue-se que:

$$k = \frac{1}{2c^2} \Rightarrow k = \frac{1}{2(\sqrt{e})^2} \Rightarrow k = \frac{1}{2e}.$$

Assim, para $x = \sqrt{e}$ e $k = \frac{1}{2e}$, tem-se que:

$$y = kx^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2e} \cdot (\sqrt{e})^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Em síntese, o valor de k onde as duas curvas se cruzam é $k = \frac{1}{2e}$, e o valor de x dessa intersecção é $x = \sqrt{e}$ com $y = \frac{1}{2}$. No gráfico da figura 3 é possível observar essa intersecção das duas curvas no ponto $(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$.

²Nota-se que $h(x) = x^2$ e $g(x) = \ln x$ têm a mesma inclinação em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, uma vez que, para $h'(x) = 2x = \frac{1}{x} = g'(x)$, se tem que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. No entanto $h(\frac{\sqrt{2}}{2}) \neq g(\frac{\sqrt{2}}{2})$, ou seja, não há intersecção entre as curvas $h(x) = x^2$ e $g(x) = \ln x$.

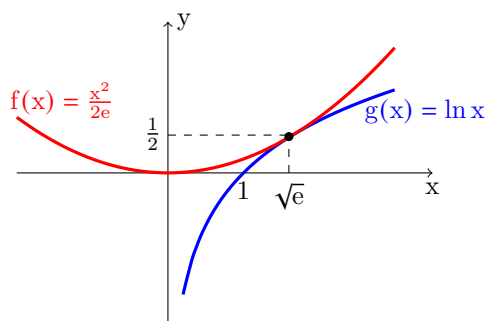


Figura 3: Gráfico da intersecção entre $f(x) = \frac{x^2}{2e}$ e $g(x) = \ln x$

5. Parábolas e logaritmos: abordagem numérica

Com base no gráfico da figura 4 percebe-se que há situações em que dois pontos de intersecção ocorrem entre a parábola e a função logarítmica. Isso sugere o seguinte problema, abordado neste texto de modo numérico, via auxílio de *softwares* computacionais:

Problema 3): No sentido intuitivo é possível estimar os valores de $k > 0$ para os quais se tem intersecção com a função logarítmica?

Com base no gráfico da figura 4, é possível analisar as intersecções entre a parábola $f(x) = kx^2$ e a função logarítmica $g(x) = \ln x$ de acordo com a variação dos valores positivos de k , isto é, de acordo com a abertura da concavidade da parábola.

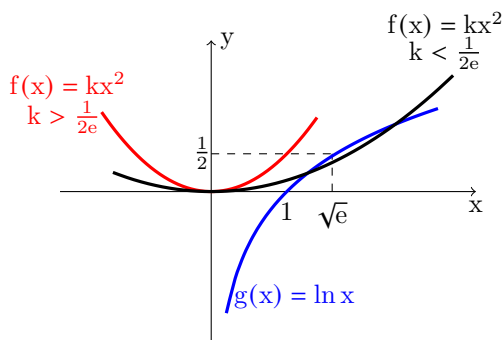


Figura 4: Gráfico de $f(x) = kx^2$ ($k < \frac{1}{2e}$ e $k > \frac{1}{2e}$) e $g(x) = \ln x$

Assim, se $k > \frac{1}{2e}$, a concavidade da parábola será mais fechada e não haverá intersecção entre as curvas $f(x) = kx^2$ e $g(x) = \ln x$. Se $0 < k < \frac{1}{2e}$, a concavidade da parábola será mais aberta e haverá dois pontos de intersecção. Nota-se que, com base na tabela 1, se $k \rightarrow 0$, então a parábola estará em seu limite de abertura e, desse modo, a intersecção tende a dois pontos: por um lado, o ponto $(1, 0)$ e, por outro, para pontos com valores crescentes de x e de $f(x)$. Determinar esses valores no sentido analítico implicaria resolver a equação $kx^2 = \ln x$ para valores de $0 < k < \frac{1}{2e}$, o que implicaria uma análise mais cuidadosa, além do escopo deste artigo.

k	x_1	$f(x_1) \approx g(x_1)$	x_2	$f(x_2) \approx g(x_2)$
$\frac{1}{2e} \approx 0,1839$	$\sqrt{e} \approx 1,6487$	0,4999	$\sqrt{e} \approx 1,6487$	$\frac{1}{2}$
0,1	1,1384	0,1296	3,5656	1,2713
0,01	1,0103	0,0102	16,7963	2,8212
0,001	1,001	0,001	64,5565	4,1675
0,0001	1,0001	0,0001	233,523	5,4533
0,00001	1,00001	0,00001	819,031	6,7081

Tabela 1: Valores de $k \leq \frac{1}{2e}$ e as raízes de $kx^2 = \ln x$

Problema 4): No sentido intuitivo e geométrico, é possível estimar os valores de $k < 0$ para os quais se tem, sempre, intersecção com a função logarítmica, isto é, existe x tal que $kx^2 = \ln x$?

Conforme mostrado na figura 5, é intuitivo pensar que haverá sempre uma intersecção entre essas duas curvas. Na tabela 2 é possível observar os valores de x para os quais há sempre intersecção entre a parábola e a função logarítmica, desde que os valores de k sejam negativos e não nulos³. Com base na tabela 2, nota-se que, quanto mais aberta for a parábola (concavidade voltada para baixo), mas próximo do ponto $(1,0)$ estará a intersecção. Quanto mais fechada for a parábola (ainda com a concavidade voltada para baixo), mais os valores de x e $f(x)$ ($= g(x)$) tornam-se pequenos.

k	Ponto de intersecção
-0,0001	(0,9999; -0,0001)
-0,001	(0,9990; -0,0010)
-0,01	(0,9902; -0,0098)
-0,1	(0,9190; -0,0845)
-1	(0,6529; -0,4263)
-2	(0,5482; -0,6011)
-3	(0,4886; -0,7162)
-4	(0,4480; -0,8029)

Tabela 2: Valores de $k < 0$ e as raízes de $kx^2 = \ln x$

6. Parábolas e logaritmos: um pouco mais de matemática

Com base na figura 5, torna-se evidente, no sentido visual, que, para cada parábola em que $k < 0$, ou seja, para parábolas com a concavidade voltada para baixo, haverá sempre uma intersecção com a função logarítmica. No entanto, como provar esse fato?

³Essa tabela foi construída com auxílio de *softwares* matemáticos.

Problema 5): Seja $\lambda > 0$ um número real. Provar que, independentemente do valor de λ , sempre existirá um número $\xi \in (0, 1)$, tal que $-\lambda\xi^2 = \ln \xi$.

O objetivo é provar matematicamente que, no intervalo $(0, 1)$, as duas curvas sempre terão um ponto de intersecção, conforme pode ser observado na figura 5.

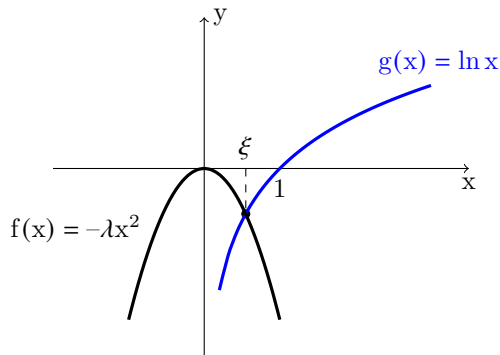


Figura 5: Gráfico da intersecção entre $f(x) = -\lambda x^2$ e $g(x) = \ln x$

Na sequência, prova-se, para $\lambda > 0$, que:

$$\exists \xi \in (0, 1) \text{ tal que } -\lambda \xi^2 = \ln \xi.$$

Para isso, consideram-se as funções $u(x) = -\lambda x^2 - \ln x$ e $v(x) = \ln x + \lambda x^2$.

Análise da função $u(x) = -\lambda x^2 - \ln x$. A derivada de $u(x)$ será utilizada para analisar o crescimento, ou decrescimento, da função $u(x)$. Assim,

$$u'(x) = -2\lambda x - \frac{1}{x}.$$

Tendo em conta que $\lambda > 0$, para qualquer valor de $x \in (0, 1)$, tem-se que $u'(x) < 0$. Portanto, a função $u(x)$ é uma função decrescente em $(0, 1)$, ([2], p. 237), conforme pode ser observado na figura 6.

Tendo em conta uma análise intuitiva e geométrica da função $u(x)$, tem-se que, se $x \rightarrow 0^+$, então $u(x) \rightarrow +\infty$. Por outro lado, se $x \rightarrow 1^-$, então $u(x) \rightarrow -\lambda$, que é um valor negativo. Assim, para valores próximos de 0, a função assume valores positivos, e para valores próximos de 1, ela assume valores negativos. Assim, como a função é decrescente, e contínua em $(0, 1)$, ela corta o eixo x em algum ponto ξ . Desse modo, com base na intuição e na aplicação do teorema do valor intermediário ([2], p. 111), tem-se que existe $\xi \in (0, 1)$ tal que $g(\xi) = 0$, ou seja, $0 = u(\xi) = -\lambda \xi^2 - \ln \xi$. Assim, tem-se que:

$$-\lambda \xi^2 = \ln \xi.$$

Para provar o escrito acima, considera-se, para $x_1 \in (0, 1)$, que $u(x_1) > 0$, ou seja, $-\lambda x_1^2 - \ln x_1 > 0$, ou ainda, $-\lambda x_1^2 > \ln x_1$. Como a função $\ln x$ é uma função crescente, contínua e bijetora para todo $x \in (0, 1)$ com imagem em $(-\infty, 0)$, tem-se que existe um valor real $x_2 \in (0, 1)$ com $\ln x_2 = -\lambda x_1^2$ e

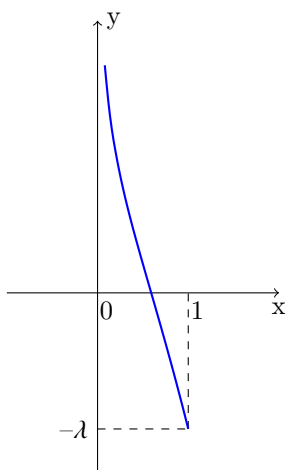


Figura 6: Gráfico de $u(x) = -\lambda x^2 - \ln x$

tal que $\ln x_2 > \ln x_1$. Nota-se que $-\lambda x_1^2 \in (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. Assim, como $\ln x_2 > \ln x_1$, então $x_2 > x_1$. Por outro lado, como a função $-\lambda x^2$ é uma função decrescente e contínua em $(0, 1)$, tem-se, então,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 < -\lambda x_1^2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 < \ln x_2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 - \ln x_2 < 0 \Rightarrow u(x_2) < 0.$$

Assim, $u(x_1) > 0$ e $u(x_2) < 0$ para $x_1 < x_2$, com $x_1, x_2 \in (0, 1)$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $\xi \in [x_1, x_2]$ tal que $u(\xi) = 0$, ou seja, $-\lambda \xi^2 - \ln \xi = 0$, isto é, $-\lambda \xi^2 = \ln \xi$.

Análise da função $v(x) = \ln x + \lambda x^2$. A derivada de $v(x)$ será utilizada, tal como para a função $u(x)$, para analisar seu crescimento ou decrescimento. Assim,

$$v'(x) = \frac{1}{x} + 2\lambda x.$$

Tendo em conta que $\lambda > 0$, para qualquer valor de $x \in (0, 1)$, tem-se que $v'(x) > 0$. Portanto, a função $v(x)$ é uma função crescente em $(0, 1)$, ([2], p. 237), conforme pode ser observado na figura 7. Se $x \rightarrow 0^+$, então $v(x) \rightarrow -\infty$. Por outro lado, se $x \rightarrow 1^-$, então $v(x) \rightarrow \lambda$, que é um valor positivo.

Assim, para valores próximos de 0, a função assume valores negativos, e para valores próximos de 1, assume valores positivos. Assim, como ela é crescente, e contínua em $(0, 1)$, ela corta o eixo x em algum ponto ξ . Desse modo, com base na intuição e no teorema do valor intermediário ([2], p. 111), tem-se que existe $\xi \in (0, 1)$ tal que $v(\xi) = 0$, ou seja, $0 = v(\xi) = \ln \xi + \lambda \xi^2$. Assim, tem-se que:

$$-\lambda \xi^2 = \ln \xi.$$

Para comprovar o escrito no parágrafo acima, considera-se, para $x_1 \in (0, 1)$, que $v(x_1) < 0$, ou seja, $\ln x_1 + \lambda x_1^2 < 0$, ou ainda, $\ln x_1 < -\lambda x_1^2$. Como a função $\ln x$ é uma função crescente, contínua e bijetora para todo $x \in (0, 1)$ com imagem em $(-\infty, 0)$, tem-se que existe um valor real $x_2 \in (0, 1)$ com $\ln x_2 = -\lambda x_1^2$ e tal que $\ln x_2 > \ln x_1$. Nota-se que $-\lambda x_1^2 \in (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. Assim, como $\ln x_2 > \ln x_1$,

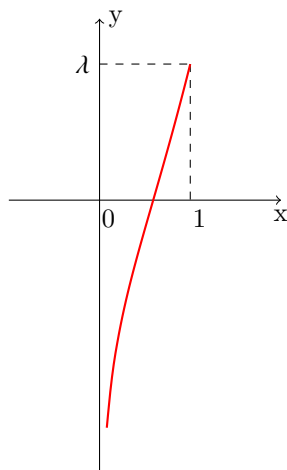


Figura 7: Gráfico de $v(x) = \ln x + \lambda x^2$

então $x_2 > x_1$. Por outro lado, como a função $-\lambda x^2$ é uma função decrescente e contínua em $(0, 1)$, tem-se, então,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 < -\lambda x_1^2 \Rightarrow -\lambda x_2^2 < \ln x_2 \Rightarrow \ln x_2 + \lambda x_2^2 > 0 \Rightarrow v(x_2) > 0.$$

Assim, $v(x_1) < 0$ e $v(x_2) > 0$ para $x_1 < x_2$, com $x_1, x_2 \in (0, 1)$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $\xi \in [x_1, x_2]$ tal que $v(\xi) = 0$, ou seja, $\lambda \xi^2 + \ln \xi = 0$, isto é, $\ln \xi = -\lambda \xi^2$.

Provou-se o problema 5, ou seja, provou-se que sempre vai existir um ponto $\xi \in (0, 1)$ tal que $-\lambda \xi^2 = \ln \xi$.

7. Conclusão

A exposição neste artigo não deixa de ser uma justificativa da importância dos cursos de Cálculo na formação de estudantes da área de exatas, mesmo que seja com base num simples problema. Existem outros exemplos, análogos ao exposto neste texto, em que é possível caracterizar um certo divisor de águas entre a matemática do ensino médio e a matemática dos cursos de Cálculo. No exemplo deste texto mostrou-se que para alguns problemas é possível obter uma solução visual, sem ter que lançar mão de uma matemática mais sofisticada. No entanto, fica sempre a dúvida sobre se a solução visual está correta. A discussão neste artigo vem ao encontro de avaliar as possíveis interações entre a intuição geométrica e as respostas com rigor, as respostas consistentes no sentido da matemática. De acordo com a história da matemática, o rigor matemático tornou-se necessário para o avanço não só da matemática como das tecnologias associadas. Como exemplo, podem-se citar as séries de Fourier, presentes na solução da equação da condução do calor. No caso das séries de Fourier, o rigor matemático auxiliou na consistência matemática de sua solução [6] e, por conseguinte, das inúmeras tecnologias que se valem dessas séries. No caso deste texto, mostrou-se que as ferramentas apresentadas em cursos de Cálculo são suficientes para resolver alguns simples problemas de intersecção entre parábolas e logaritmos. Mostrou-se também que os problemas podem, nos dias de hoje, ser resolvidos via algum *software* de matemática e obter resultados numéricos. Além disso, fica implícita neste texto a análise de outro problema, o de

explicitar por completo, se possível, todas as soluções da equação $kx^2 = \ln x$ em termos dos valores de k .

Estima-se que este texto possa auxiliar, no sentido pedagógico, a percepção de problemas matemáticos e suas soluções no sentido da intuição geométrica, no sentido do rigor matemático e no sentido de uma análise qualitativa, via simulações com *softwares* matemáticos.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (Capes) – Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] Hairer, E., Wanner, G. *Analysis by Its History*. Springer-Verlag. New York, 1996.
- [2] Leithold, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Volume I, Editora Harbra Ltda. São Paulo, 1994.
- [3] Lima, E. L. *Logaritmos*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. Rio de Janeiro, 1991.
- [4] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. Morgado, A. C. *A matemática do ensino médio*. Volume 1. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. Rio de Janeiro, 2006.
- [5] Magossi, José Carlos. *O sonho de Lagrange*. Professor de Matemática Online – PMO v.8, n.1, pp.43-63, 2020, SBM, 2020.
- [6] Toeplitz, O. *The Calculus — A Genetic Approach*. Chicago University Press. Chicago, 2007.

José Carlos Magossi
Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Tecnologia - FT
<magossi@unicamp.br>

Antônio César da Costa Barros
Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Tecnologia - FT
<cesarmatema@gmail.com>

Recebido: 16/12/2021
Publicado: 13/06/2022