

# Simplificando a resolução da equação do terceiro grau

João Francisco da Silva Filho  Odete Elana Sousa Pereira   
Fábio César Silveira de Castro 

## Resumo

No presente trabalho, abordamos as equações polinomiais do terceiro grau (ou simplesmente, *equações do terceiro grau*) e os polinômios do terceiro grau, apresentando uma nova fórmula que simplifica o cálculo das suas respectivas raízes. Como aplicação natural da fórmula citada, obtemos critérios alternativos para caracterizar as raízes de equações e polinômios do terceiro grau, concluindo o trabalho com a resolução de exemplos.

**Palavras-chave:** Equações do terceiro grau; Polinômios do terceiro grau; Raízes; Fórmula de Cardano-Tartáglia.

## Abstract

In this present work, we approach third degree polynomial equations (or simply, *third degree equations*) and third degree polynomials, presenting a new formula that simplify the calculation of their respective roots. As natural application of this formula, we obtain alternative criteria to characterize the roots of third degree polynomial equations and third degree polynomials, concluding the work with solving examples.

**Keywords:** Third degree equations; Third degree polynomials; Roots; Cardano-Tartáglia's formula.

## 1. Introdução

Inicialmente, recordamos que a resolução da equação do terceiro grau foi obtida no século XVI, de forma independente, por Scipione del Ferro (1465-1526) e por Niccolò Tartáglia (1499-1557), publicada em 1545 no livro *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501-1576), que foi escrito com a colaboração de Ludovico Ferrari (1522-1565). Nesse contexto, podemos expressar as raízes da equação do terceiro grau através da *fórmula de Cardano-Tartáglia*, que por bastante tempo ficou conhecida apenas como *fórmula de Cardano*. Convém salientar que Cardano foi quem verificou que a equação do terceiro grau na sua *forma geral* pode ser reduzida a um interessante caso particular, conhecido na literatura por *forma reduzida* (ou *forma deprimida*), cujo coeficiente líder é igual a um, e o coeficiente do termo quadrático é nulo.

No intuito de esboçar a demonstração da fórmula de Cardano-Tartáglia, devemos lembrar que a *forma geral* assumida pela equação do terceiro grau é dada por

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (1)$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  com  $a \neq 0$ . Dividindo essa equação pelo coeficiente líder e fazendo  $x = y - \frac{b}{3a}$ , obtemos a *forma reduzida*

$$y^3 + py + q = 0, \quad (2)$$

cujos coeficientes são expressos por

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}.$$

Agora, escrevendo  $y = u + v$  e substituindo na forma reduzida (2), chegamos à igualdade

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0,$$

portanto basta encontrar  $u, v \in \mathbb{C}$ , tais que

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{e} \quad uv = -\frac{p}{3} \quad (3)$$

para que  $y = u + v$  seja raiz da equação (2).

Decorre das relações constantes em (3) que  $u^3$  e  $v^3$  satisfazem a equação quadrática

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

então resolvendo-a, deduzimos que

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} \quad \text{e} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}, \quad (4)$$

onde a constante, definida por

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

é chamada de *discriminante*.

Sabendo que  $y = u + v$  e usando as expressões (4), temos que

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}},$$

consequentemente,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \quad (5)$$

que é a *fórmula de Cardano-Tartáglia* para equações do terceiro grau na forma reduzida.

Finalmente, recordando a relação inicial estabelecida por

$$x = y - \frac{b}{3a},$$

concluimos da expressão (5) que

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \quad (6)$$

que corresponde à *fórmula de Cardano-Tartáglia* para equações do terceiro grau na forma geral.

*Observação 1.* Através do sinal do discriminante, podemos caracterizar as raízes de polinômios e/ou equações do terceiro grau (cf. [4] ou [6]). Mais precisamente, temos que:

- (a) Se  $D < 0$ , então a equação possui três raízes reais distintas.
- (b) Se  $D = 0$ , então a equação possui uma raiz real de multiplicidade dois ou três.
- (c) Se  $D > 0$ , então a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas não reais.

A fórmula de Cardano-Tartaglia foi decisiva na concepção do método de Ferrari (cf. Gonçalves [3]) e de grande importância na introdução dos números complexos, no entanto em alguns casos a referida fórmula não é muito prática. Para equações do terceiro grau que possuem três raízes reais distintas, temos o *caso irreduzível*, no qual o discriminante é negativo e nem sempre é possível eliminar os radicais da expressão das raízes, resultando na necessidade de utilizar funções trigonométricas e trigonométricas inversas. Mais informações sobre o assunto podem ser encontradas em Lima [4], onde o referido autor apresenta uma interessante abordagem sobre as equações do terceiro grau, incluindo o contexto histórico.

Na perspectiva de minimizar as dificuldades de trabalhar com equações do terceiro grau e com a fórmula de Cardano-Tartaglia, estaremos introduzindo neste trabalho uma *nova forma reduzida*, que simplifica o cálculo e a caracterização das raízes (reais e complexas não reais) desse tipo de equação polinomial. Nessas condições, deduzimos uma nova fórmula para calcular as raízes de polinômios e equações polinomiais do terceiro grau com coeficientes complexos, cuja expressão é mais simples que a expressão da fórmula de Cardano-Tartaglia. Por fim, obtemos como aplicações, critérios alternativos para caracterizar as raízes de polinômios e equações do terceiro grau com coeficientes reais.

## 2. A Nova Forma Reduzida

Nesta seção, vamos introduzir conceitos e notações sobre polinômios e equações do terceiro grau, que serão essenciais ao longo do nosso trabalho. Estaremos aqui considerando apenas polinômios e equações do terceiro grau sobre os complexos, ou seja, polinômios e equações do terceiro grau com coeficientes complexos. Nas próximas seções, faremos menção a polinômios do terceiro grau com coeficientes reais em momentos oportunos.

Inspirado na *forma reduzida* da equação do terceiro grau, introduzimos uma *nova forma reduzida* para polinômios e equações do terceiro grau sobre os complexos. De modo similar à forma reduzida, mostraremos nas próximas seções que a nova forma reduzida também simplifica a expressão das raízes de polinômios e equações do terceiro grau.

**Definição 1.** Seja  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  um polinômio do terceiro grau sobre os complexos, cujos coeficientes satisfazem  $c^2 = 3bd$ . Em tais condições, diremos que:

- a)  $P(x)$  é um polinômio da *nova forma reduzida*.
- b) A equação  $P(x) = 0$  está (ou encontra-se) na *nova forma reduzida*.

Novamente, vamos considerar um polinômio do terceiro grau, dado por

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  com  $a \neq 0$ .

Partindo de uma constante  $t \in \mathbb{C}$  e do polinômio  $P(x)$ , podemos definir um novo polinômio do terceiro grau por

$$P_t(x) = P(x + t),$$

ou equivalentemente,

$$P_t(x) = a(x + t)^3 + b(x + t)^2 + c(x + t) + d,$$

onde a expressão de  $P(x)$  justifica a igualdade anterior.

Desenvolvendo a última expressão e organizando os termos, obtemos

$$P_t(x) = ax^3 + (3at + b)x^2 + (3at^2 + 2bt + c)x + (at^3 + bt^2 + ct + d).$$

que pode ser reescrito na forma simplificada

$$P_t(x) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t,$$

onde  $a_t = a$ ,  $b_t = 3at + b$ ,  $c_t = 3at^2 + 2bt + c$  e  $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$ .

*Observação 2.* Usando a definição de raiz, verifica-se facilmente que  $w \in \mathbb{C}$  será uma raiz de  $P(x)$ , se e somente se,  $w - t$  for uma raiz de  $P_t(x)$ .

### 3. Resultados Principais

Conforme apresentado na introdução, sabe-se que o estudo das raízes de equações do terceiro grau resume-se ao estudo da *forma reduzida*, que torna mais simples a expressão das raízes desse tipo de equação. De modo análogo, mostraremos nesta seção que o estudo das raízes de polinômios ou equações do terceiro grau também resume-se ao estudo da *nova forma reduzida* (cf. Definição 1), que simplifica ainda mais a expressão das raízes de equações do terceiro grau.

Nesse contexto, nosso primeiro teorema expressa as raízes de polinômios do terceiro grau da *nova forma reduzida*.

**Teorema 1.** *Seja  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  um polinômio do terceiro grau com coeficientes complexos da nova forma reduzida. Diante do exposto, valem as seguintes afirmações:*

a) *Se o termo independente de  $P(x)$  é nulo, então suas raízes são dadas por*

$$x_1 = x_2 = 0 \quad e \quad x_3 = -\frac{b}{a}.$$

b) *Se o termo independente de  $P(x)$  é não nulo, então suas raízes são expressas pela fórmula*

$$x_k = \frac{3d}{\sqrt[3]{3d(bc - 9ad) - c}}.$$

onde  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

*Demonstração.* Faremos a demonstração de cada item separadamente, conforme descrito a seguir:

a) Sabendo que  $P(x)$  é um polinômio da nova forma reduzida, então

$$c^2 = 3bd,$$

mas lembrando que o termo independente  $d$  é nulo, segue que  $c = 0$ , e, assim,

$$P(x) = ax^3 + bx^2 = x^2(ax + b).$$

Dessa forma, observe que  $P(x) = 0$  equivale à equação

$$x^2(ax + b) = 0,$$

cujas soluções são dadas por  $x_1 = x_2 = 0$  e  $x_3 = -\frac{b}{a}$ , concluindo o primeiro item.

b) Como o termo independente  $d$  é não nulo, então para todo  $x \in \mathbb{C} - \{0\}$ , podemos escrever

$$P(x) = dx^3 \left( \frac{a}{d} + \frac{b}{dx} + \frac{c}{dx^2} + \frac{1}{x^3} \right);$$

então reorganizamos os termos entre parênteses, obtendo

$$P(x) = dx^3 \left( \frac{1}{x^3} + \frac{c}{dx^2} + \frac{b}{dx} + \frac{a}{d} \right). \quad (7)$$

Por outro lado, observe que

$$\left( \frac{1}{x} + \frac{c}{3d} \right)^3 = \frac{1}{x^3} + \frac{c}{dx^2} + \frac{c^2}{3d^2x} + \frac{c^3}{27d^3},$$

ou, ainda,

$$\left( \frac{1}{x} + \frac{c}{3d} \right)^3 = \frac{1}{x^3} + \frac{c}{dx^2} + \frac{b}{dx} + \frac{bc}{9d^2}, \quad (8)$$

onde usamos a relação  $c^2 = 3bd$ , visto que  $P(x)$  é um polinômio da nova forma reduzida.

Combinando as expressões (7) e (8), vamos ter

$$P(x) = dx^3 \left[ \left( \frac{1}{x} + \frac{c}{3d} \right)^3 - \frac{bc - 9ad}{9d^2} \right],$$

para todo  $x \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Desde que  $P(0) = d$  e  $d$  é não nulo, então  $P(x) = 0$  equivale à equação

$$\left( \frac{1}{x} + \frac{c}{3d} \right)^3 = \frac{bc - 9ad}{9d^2},$$

obtida a partir da última expressão de  $P(x)$ .

Por um cálculo direto, decorre da última equação que as raízes de  $P(x)$  são dadas pela fórmula

$$x_k = \frac{3d}{\sqrt[3]{3d(bc - 9ad) - c}} \quad (k = 1, 2 \text{ e } 3),$$

concluindo a demonstração. □

Em condições similares ao Teorema 1, explicitamos as expressões das raízes de polinômios do terceiro grau com coeficientes reais.

**Corolário 1.** *Seja  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais da nova forma reduzida. Suponha que  $P(x)$  possui termo independente não nulo, então suas raízes são dadas por*

$$x_1 = \frac{3d}{\delta - c} \quad e \quad x_{2,3} = -\frac{6d}{(\delta + 2c)^2 + 3\delta^2} [(\delta + 2c) \pm \sqrt{3}\delta i],$$

onde  $\delta$  denota a raiz cúbica real de  $3d(bc - 9ad)$ .

*Demonstração.* Decorre diretamente do Teorema 1(b) que as raízes de  $P(x)$  são expressas por

$$x_k = \frac{3d}{\sqrt[3]{3d(bc - 9ad) - c}},$$

ou, equivalentemente,

$$x_k = \frac{3d}{\delta \omega_k - c}, \tag{9}$$

onde  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\omega_1 = 1$  e  $\omega_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

Finalmente, basta substituir  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$  (raízes cúbicas da unidade) em (9) para chegarmos às expressões das raízes de  $P(x)$ , conforme enunciado.  $\square$

O próximo resultado garante que o estudo das raízes de polinômios ou equações do terceiro grau resume-se ao estudo da *nova forma reduzida*. Como consequência, podemos aplicar o Teorema 1 (direto ou indiretamente) a qualquer polinômio ou equação do terceiro grau.

**Teorema 2.** *Seja  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  um polinômio do terceiro grau com coeficientes complexos, então  $P_t(x)$  é um polinômio do terceiro grau da nova forma reduzida para alguma constante  $t \in \mathbb{C}$ . Em particular, toda equação do terceiro grau com coeficientes complexos pode ser escrita na nova forma reduzida.*

*Demonstração.* Dividimos a demonstração do teorema em dois casos, apresentados a seguir:

**1º Caso:**  $b^2 = 3ac$ .

Nessas condições, vamos definir uma constante  $t \in \mathbb{C}$  por

$$t = -\frac{b}{3a}, \tag{10}$$

bem como o polinômio  $P_t(x) = P(x + t)$ , que pode ser escrito na forma

$$P_t(x) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t,$$

onde  $a_t = a$ ,  $b_t = 3at + b$ ,  $c_t = 3at^2 + 2bt + c$  e  $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$  (cf. Seção 2).

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} c_t^2 - 3b_t d_t &= (3at^2 + 2bt + c)^2 - 3(3at + b)(at^3 + bt^2 + ct + d) \\ &= (b^2 - 3ac)t^2 + (bc - 9ad)t + (c^2 - 3bd), \end{aligned}$$

então usamos a hipótese  $b^2 = 3ac$  junto com (10) para obter

$$c_t^2 - 3b_t d_t = -\frac{b(bc - 9ad) - 3a(c^2 - 3bd)}{3a} = -\frac{c(b^2 - 3ac)}{3a} = 0,$$

logo  $c_t^2 = 3b_t d_t$  e assim concluímos que  $P_t(x)$  é um polinômio da nova forma reduzida.

**2º Caso:**  $b^2 \neq 3ac$ .

Neste último caso, consideramos a constante  $t \in \mathbb{C}$ , dada por

$$t = -\frac{1}{2(b^2 - 3ac)} [(bc - 9ad) \pm \sqrt{\Delta}], \quad (11)$$

onde  $\Delta = (bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd)$ . Em seguida, definimos o polinômio  $P_t(x) = P(x + t)$ , podendo ser expresso na forma

$$P_t(x) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t,$$

onde  $a_t = a$ ,  $b_t = 3at + b$ ,  $c_t = 3at^2 + 2bt + c$  e  $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$  (cf. Seção 2).

De modo análogo ao caso anterior, verificamos a igualdade

$$c_t^2 - 3b_t d_t = (b^2 - 3ac)t^2 + (bc - 9ad)t + (c^2 - 3bd),$$

implicando por (11) que

$$c_t^2 - 3b_t d_t = 0,$$

portanto  $c_t^2 = 3b_t d_t$ , e, com isso, concluímos que  $P_t(x)$  é um polinômio da nova forma reduzida.  $\square$

Na sequência, apresentamos dois corolários que nos permitem caracterizar as raízes de polinômios do terceiro grau sobre os reais. No primeiro deles, explicitamos as raízes em termos dos coeficientes dos polinômios.

**Corolário 2.** *Seja  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, tais que  $b^2 = 3ac$ . Nessas condições, temos que as raízes de  $P(x)$  são dadas por*

$$x_1 = \frac{\gamma - b}{3a} \quad e \quad x_{2,3} = \frac{-(\gamma + 2b) \pm \sqrt{3}\gamma i}{6a},$$

onde  $\gamma$  denota a raiz cúbica real de  $3a(bc - 9ad)$ .

*Demonstração.* Dividimos a demonstração em dois casos distintos, a saber:

**1º Caso:**  $bc = 9ad$ .

Decorre das igualdades  $b^2 = 3ac$  e  $bc = 9ad$  que

$$c = \frac{b^2}{3a} \quad e \quad d = \frac{bc}{9a} = \frac{b^3}{27a^2},$$

então a expressão de  $P(x)$  pode ser escrita na forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{b^2}{3a}x + \frac{b^3}{27a^2} = a \left( x + \frac{b}{3a} \right)^3,$$

portanto as raízes de  $P(x)$  são dadas por

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a},$$

que coincide com as expressões enunciadas, visto que  $\gamma = 0$  nesse caso.

**2º Caso:**  $bc \neq 9ad$ .

Considerando a constante real, definida por

$$t = -\frac{b}{3a}, \quad (12)$$

segue-se da prova do Teorema 2 (cf. 1º Caso) que  $P_t(x)$  é um polinômio da nova forma reduzida, o qual assume a expressão

$$P_t(x) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t, \quad (13)$$

onde  $a_t = a$ ,  $b_t = 3at + b$ ,  $c_t = 3at^2 + 2bt + c$  e  $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$  (cf. Seção 2).

Substituindo (12) na expressão  $d_t = at^3 + bt^2 + ct + d$ , temos que

$$d_t = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2},$$

mas como  $b^2 = 3ac$  e  $bc \neq 9ad$ , obtemos ainda

$$d_t = -\frac{bc - 9ad}{9a} \neq 0, \quad (14)$$

implicando pelo Teorema 1(b) que as raízes de  $P_t(x)$  são dadas por

$$x_k = \frac{3d_t}{\sqrt[3]{3d_t(b_t c_t - 9ad_t) - c_t}}, \quad (15)$$

onde  $k = 1, 2$  e  $3$ .

Combinando  $b_t = 3at + b$  e  $c_t = 3at^2 + 2bt + c$  com (12), vamos ter

$$b_t = 0 \quad \text{e} \quad c_t = -\frac{b^2 - 3ac}{3a} = 0, \quad (16)$$

onde foi usada a relação  $b^2 = 3ac$ . Substituindo (14) e (16) em (15), deduzimos que

$$\tilde{x}_k = \frac{\sqrt[3]{3a(bc - 9ad)}}{3a} \quad (k = 1, 2 \text{ e } 3),$$

fornece as raízes de  $P_t(x)$ .

Aplicando a Observação 2, obtemos que as raízes de  $P(x)$  são dadas por

$$x_k = \frac{\sqrt[3]{3a(bc - 9ad)} - b}{3a} = \frac{\gamma \omega_k - b}{3a}$$

onde  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\omega_1 = 1$  e  $\omega_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Fazendo as substituições, concluímos que

$$x_1 = \frac{\gamma - b}{3a} \quad \text{e} \quad x_{2,3} = \frac{-(\gamma + 2b) \pm \sqrt{3}\gamma i}{6a}$$

expressam as raízes de  $P(x)$ . □

Complementando o caso abordado no Corolário 2, apresentamos, a seguir, mais um resultado para caracterização de raízes de polinômios do terceiro grau sobre os reais.

**Corolário 3.** *Seja  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, tais que  $b^2 \neq 3ac$  e com derivada  $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ . Supondo que  $s \in \mathbb{R}$  seja uma constante, definida por*

$$s = -\frac{bc - 9ad}{2(b^2 - 3ac)},$$

então valem as seguintes afirmações:

- Se  $aP'(s) < 0$ , então  $P(x)$  possui três raízes reais distintas.
- Se  $aP'(s) > 0$ , então  $P(x)$  uma raiz real e duas complexas não reais.
- Se  $P'(s) = 0$ , então  $P(x)$  possui duas raízes reais, uma simples e outra de multiplicidade dois.

*Demonstração.* Sabendo que  $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ , obtemos a igualdade

$$P'(s) = \frac{3a(bc - 9ad)^2 - 4b(b^2 - 3ac)(bc - 9ad) + 4c(b^2 - 3ac)^2}{4(b^2 - 3ac)^2}; \quad (17)$$

então, desenvolvendo os termos e fazendo simplificações, vamos ter

$$P'(s) = -\frac{9a}{4(b^2 - 3ac)^2} (b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4b^3d - 4ac^3). \quad (18)$$

Por outro lado, observe que o discriminante é dado por

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}\right)^3 + \left(\frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{54a^3}\right)^2,$$

consequentemente,

$$D = \frac{1}{2916a^6} [-4(b^2 - 3ac)^3 + (2b^3 + 27a^2d - 9abc)^2].$$

Desenvolvendo a última expressão, temos ainda que

$$D = -\frac{1}{108a^4} (b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4b^3d - 4ac^3);$$

então, comparando com (18), inferimos a relação

$$P'(s) = \frac{243a^5}{(b^2 - 3ac)^2} D. \quad (19)$$

Nesse momento, passamos à prova de cada item separadamente:

- Supondo que  $aP'(s) < 0$ , então decorre da igualdade (19) que o discriminante é negativo, implicando pela Observação 1 que  $P(x)$  possui três raízes reais distintas.
- Supondo que  $aP'(s) > 0$ , segue diretamente da igualdade (19) que o discriminante é positivo, portanto a Observação 1 garante que  $P(x)$  possui uma raiz real e duas complexas não reais.
- Considere o polinômio do terceiro grau, definido por

$$P_s(x) = P(x + s),$$

que pode ser escrito na forma

$$P_s(x) = a_s x^3 + b_s x^2 + c_s x + d_s,$$

onde  $a_s = a$ ,  $b_s = 3as + b$ ,  $c_s = 3as^2 + 2bs + c$  e  $d_s = as^3 + bs^2 + cs + d$  (cf. Section 2).

Desde que  $P'(s) = 0$ , temos pela igualdade (17) que

$$3a(bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)[b(bc - 9ad) - c(b^2 - 3ac)] = 0;$$

no entanto,

$$b(bc - 9ad) - c(b^2 - 3ac) = 3a(c^2 - 3bd),$$

que substituído na igualdade anterior, resulta em

$$(bc - 9ad)^2 = 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd),$$

então segue da prova do Teorema 2 (cf. 2º Caso) que  $P_s(x)$  é da nova forma reduzida.

Em tais condições, vale a relação  $c_s^2 = 3b_s d_s$  e, conseqüentemente,

$$b_s d_s = 0,$$

visto que  $c_s = P'(s) = 0$ . Novamente usando a hipótese  $P'(s) = 0$ , verificamos que

$$b_s^2 = (3as + b)^2 = (9a^2 s^2 + 6abs + b^2) = 3a[P'(s) - c] + b^2 = b^2 - 3ac \neq 0,$$

donde concluímos que  $b_s \neq 0$  e  $d_s = 0$ .

Diante do exposto, decorre do Teorema 1(a) que as raízes de  $P_s(x)$  são dadas por

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{x}_3 = -\frac{b_s}{a} = -3s - \frac{b}{a},$$

portanto  $P_s(x)$  possui uma raiz simples e uma raiz dupla e o mesmo ocorre com o polinômio  $P(x)$ , cujas raízes satisfazem

$$x_1 = x_2 = s \quad \text{e} \quad x_3 = -\frac{b}{a} - 2s \neq s,$$

onde usamos a Observação 2 e também o fato de  $b_s$  não ser nulo. □

#### 4. Resolvendo Alguns Exemplos

Nesta última seção, apresentamos alguns exemplos nos quais aplicamos os resultados principais (cf. Seção 3) para determinar as raízes de polinômios do terceiro grau, mostrando a praticidade de trabalhar com a nova forma reduzida. Nos dois primeiros exemplos, usamos diretamente o Teorema 1 para calcular as raízes.

**Exemplo 1.** Determinar as raízes do polinômio  $P(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ .

**Solução:** Sabendo que  $a = 8$ ,  $b = -12$ ,  $c = 6$  e  $d = -1$ , observa-se a relação

$$c^2 = 3bd = 36;$$

então,  $P(x)$  é da nova forma reduzida e segue do Teorema 1 que

$$x_k = \frac{3(-1)}{\sqrt[3]{3(-1)[(-12) \cdot 6 - 9 \cdot 8 \cdot (-1)]} - 6} \quad (k = 1, 2 \text{ e } 3) \quad (20)$$

expressa as raízes de  $P(x)$ .

Como o radicando da última expressão é nulo, concluímos que

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$$

portanto,  $P(x)$  possui uma raiz com multiplicidade três.

**Exemplo 2.** Calcular as raízes do polinômio  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 2$ .

**Solução:** Desde que  $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 6$  e  $d = -2$ , verifica-se a igualdade

$$c^2 = 3bd = 36,$$

implicando pelo Teorema 1 (ou Corolário 1) que as raízes de  $P(x)$  são dadas por

$$x_1 = \frac{3 \cdot (-2)}{\delta - 6} \quad \text{e} \quad x_{2,3} = -\frac{6 \cdot (-2)}{(\delta + 2 \cdot 6)^2 + 3\delta^2} [(\delta + 2 \cdot 6) \pm \sqrt{3}\delta i], \quad (21)$$

onde  $\delta$  representa a raiz cúbica real de  $108 = 3^3 \cdot 4$ .

Simplificando as expressões em (21), temos que as raízes de  $P(x)$  são dadas por

$$x_1 = \frac{2}{2 - \sqrt[3]{4}} \quad \text{e} \quad x_{2,3} = \frac{12}{(3\sqrt[3]{4} + 12)^2 + 3(3\sqrt[3]{4})^2} [(3\sqrt[3]{4} + 12) \pm 3\sqrt{3}\sqrt[3]{4}i],$$

ou, ainda,

$$x_1 = 2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \quad \text{e} \quad x_{2,3} = \frac{1}{2(2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} [(4 + \sqrt[3]{4}) \pm \sqrt[3]{432}i]$$

onde  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{4}$  e  $\sqrt[3]{432}$  denotam números reais positivos.

Dando continuidade, apresentamos dois exemplos que nos mostram como se aplicar o Teorema 1 (ou Corolário 1) a polinômios que não são da nova forma reduzida.

**Exemplo 3.** Encontrar as raízes do polinômio  $P(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x + 1$ .

**Solução:** De posse dos coeficientes  $a = 4$ ,  $b = 6$ ,  $c = 3$  e  $d = 1$ , confirmam-se as relações

$$c^2 \neq 3bd \quad \text{e} \quad b^2 = 3ac;$$

portanto,  $P(x)$  não é um polinômio da nova forma reduzida. Dessa maneira, definimos a constante

$$t = -\frac{b}{3a} = -\frac{1}{2},$$

conforme o 1º Caso da demonstração do Teorema 2.

Nessas condições, segue da prova do Teorema 2 (cf. 1º Caso) que

$$P_t(x) = P\left(x - \frac{1}{2}\right) = 4x^3 + \frac{1}{2}$$

é um polinômio da nova forma reduzida, cujas raízes são dadas pela expressão

$$\tilde{x}_k = -\frac{1}{2\sqrt[3]{1}} \quad (k = 1, 2 \text{ e } 3), \quad (22)$$

que pode ser obtida pelo Teorema 1 ou através de um cálculo direto.

Substituindo as raízes cúbicas da unidade em (22), obtemos as raízes de  $P_t(x)$  dadas por

$$\tilde{x}_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{2,3} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i,$$

as quais somadas com  $t = -\frac{1}{2}$  (cf. Observação 2), resultam em

$$x_1 = -1 \quad \text{e} \quad x_{2,3} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

que correspondem às raízes do polinômio  $P(x)$ .

**Exemplo 4.** Determinar as raízes do polinômio  $P(x) = x^3 + 3x^2 + 8x + 6$ .

**Solução:** Podemos afirmar que  $P(x)$  não é da nova forma reduzida, visto que

$$c^2 \neq 3bd,$$

onde  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 8$  e  $d = 6$ . Desde que  $b^2 \neq 3ac$ , introduzimos a constante

$$t = -\frac{1}{2(b^2 - 3ac)} [(bc - 9ad) + \sqrt{\Delta}],$$

onde  $\Delta = (bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd)$ .

Substituindo os coeficientes de  $P(x)$ , vamos ter

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot (-15) \cdot 10 = 1500,$$

consequentemente,

$$t = -\frac{-30 + 10\sqrt{15}}{-30} = \frac{\sqrt{15}}{3} - 1,$$

daí definimos o polinômio  $P_t(x) = P(x + t)$ .

Deduzimos da prova do Teorema 2 (cf. 2º Caso) que o polinômio

$$P_t(x) = x^3 + \sqrt{15}x^2 + 10x + \frac{20\sqrt{15}}{9}$$

é da nova forma reduzida. Do Teorema 1 (ou Corolário 1), obtemos as raízes de  $P_t(x)$  dadas por

$$x_1 = \frac{3 \cdot 20\sqrt{15}}{9(\delta - 10)} \quad \text{e} \quad x_{2,3} = -\frac{6 \cdot 20\sqrt{15}}{9[(\delta + 2 \cdot 10)^2 + 3\delta^2]} [(\delta + 2 \cdot 10) \pm \sqrt{3}\delta i]$$

onde  $\delta$  denota a raiz cúbica real de  $-1000$ , isto é,  $\delta = -10$ .

Simplificando as últimas expressões, temos que as raízes de  $P_t(x)$  são as seguintes

$$\tilde{x}_1 = -\frac{\sqrt{15}}{3} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{2,3} = -\frac{\sqrt{15}}{3} \pm \sqrt{5}i,$$

portanto basta somar  $t = \frac{\sqrt{15}}{3} - 1$  a cada raiz acima (cf. Observação 2), obtendo

$$x_1 = -1 \quad \text{e} \quad x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{5}i,$$

que correspondem às raízes de  $P(x)$ .

Por fim, apresentamos um exemplo no qual recorremos a um polinômio da nova forma reduzida que possui coeficientes complexos não reais.

**Exemplo 5.** Calcular as raízes do polinômio  $P(x) = 2x^3 - 3x - 1$ .

**Solução:** De modo análogo ao Exemplo 4, inferimos as desigualdades

$$c^2 \neq 3bd \quad \text{e} \quad b^2 \neq 3ac,$$

visto que  $a = 2$ ,  $b = 0$ ,  $c = -3$  e  $d = -1$ . Sendo assim, podemos definir a seguinte constante

$$t = -\frac{1}{2(b^2 - 3ac)} [(bc - 9ad) + \sqrt{\Delta}],$$

onde  $\Delta = (bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd)$ .

Substituindo os coeficientes de  $P(x)$ , obtemos

$$\Delta = 18^2 - 4 \cdot 18 \cdot 9 = -324,$$

por conseguinte,

$$t = -\frac{1}{2 \cdot 18}(18 + 18i) = -\frac{1}{2}(1 + i).$$

implicando pela prova do Teorema 2 (cf. 2º Caso) que  $P_t(x)$  é da nova forma reduzida.

Realizando um cálculo direto, temos que

$$P_t(x) = P\left(x - \frac{1+i}{2}\right) = 2x^3 - 3(1+i)x^2 - 3(1-i)x + (1+i)$$

então aplicamos o Teorema 1 para chegar à expressão

$$\tilde{x}_k = \frac{3(1+i)}{\sqrt[3]{-27(1+i)^3 + 3(1-i)}} = \frac{(1+i)}{(1-i) - \sqrt[3]{(1+i)^3}}, \quad (23)$$

a qual fornece as raízes de  $P_t(x)$ .

Multiplicando  $1+i$  pelas raízes cúbicas da unidade, obtemos as raízes cúbicas de  $(1+i)^3$  dadas por

$$1+i, \quad -\frac{1}{2}[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i] \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2}[(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i];$$

daí basta substituí-las em (23), resultando em

$$\tilde{x}_1 = -\frac{1}{2}(1-i), \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{2}[(2-\sqrt{3}) + i] \quad \text{e} \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3}) + i],$$

que corresponde às raízes do polinômio  $P_t(x) = P_{-\frac{1+i}{2}}(x)$ .

Finalmente, somamos  $t = -\frac{1+i}{2}$  em cada raiz de  $P_t(x)$ , concluindo que

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$$

são as raízes do polinômio  $P(x)$ .

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao parecerista pelas contribuições e à *Revista Professor de Matemática Online* pela oportunidade.

## Referências

- [1] Boyer, C. B. *História da Matemática*. 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- [2] Carmo, M. P., Morgado, A. C. e Wagner, E. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [3] Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra*. 5<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013
- [4] Lima, E. L. *Equação do terceiro grau*. *Matemática Universitária*, v. 5, p. 10-23, 1987.
- [5] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. 10<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [6] Rechtschaffen, E. E. M. *Sobre aproximações polinomiais de raízes reais de cúbicas*. *Matemática Universitária*, v. 46, p. 12-16, 2009.

João Francisco da Silva Filho  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - Unilab  
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN  
<[joaofilho@unilab.edu.br](mailto:joaofilho@unilab.edu.br)>

Odete Elana Sousa Pereira  
Secretaria de Educação do Estado do Ceará - SEDUC  
<[odeteelana@hotmail.com](mailto:odeteelana@hotmail.com)>

Fábio César Silveira de Castro  
Secretaria de Educação do Estado do Ceará - SEDUC  
<[proffabio@hotmail.com](mailto:proffabio@hotmail.com)>

Recebido: 16/12/2021  
Publicado: 25/08/2022

# Redes Neurais no Ensino Básico

Márcio Batista 

André Oliveira Martins 

## Resumo

Neste trabalho propomos o uso, por parte dos professores de matemática, de Redes Neurais Artificiais, uma área da inteligência artificial que vem crescendo muito nos últimos anos. O trabalho apresenta como as redes neurais artificiais podem ser empregadas na educação básica, com o intuito de inserir os alunos em um projeto de matemática e tecnologias inovadoras. O trabalho tem como tema central a construção de uma rede neural para reconhecimento de dígitos manuscritos com códigos em linguagem Python.

**Palavras-chave:** Matemática; Redes Neurais; Ensino Médio; Python.

## Abstract

In this work we propose the use, by mathematics teachers, of Artificial Neural Networks, an area of the artificial intelligence, which has attracted many scholars in the recent years. We present how the artificial neural networks can be used in high school, in order to introduce students in a project of mathematics and innovative technologies. The main purpose of this paper is the construction of a neural network for the recognition of handwritten digits using codes in Python language.

**Keywords:** Mathematics; Neural Network; High School; Python.

## 1. Introdução

Diante da necessidade de uma participação ativa no acelerado processo das transformações do mundo tecnológico, a qual tem sido discutida como um dos desafios presentes na educação e na prática dos educadores, a escola vem sendo cobrada por uma modernização na prática educativa para se adequar à realidade atual de seus alunos, tanto social como profissional.

O Novo Ensino Médio traz mudanças importantes para o ensino, para serem implementadas nas escolas a partir de 2021. Espera-se que as modificações estejam em prática até 2022. Entre as propostas é cobrado que se tenha menos aulas expositivas e mais atividades como projetos, oficinas e atividades práticas significativas, que sejam determinantes na formação técnica e profissional dos alunos.

Nessa perspectiva, o presente trabalho propõe aos professores de matemática a utilização de redes neurais e *deep learning* no ensino básico, mais especificamente a utilização de redes neurais para reconhecimento de dígitos manuscritos. Tal proposta objetiva deixar o ensino de matemática mais significativo, visando combater o desinteresse dos alunos, visto que, temas que envolvem tecnologia são agradáveis aos estudantes tornando as aulas mais atrativas e participativas.

## 1.1. História das redes neurais

As redes neurais artificiais são modelos matemáticos que apresentam um grande poder de processamento que se estabelece na estrutura fisiológica do cérebro humano, com objetivo de reproduzir suas funções.

As redes neurais foram desenvolvidas inicialmente pelo neurofisiologista Warren McCulloch e pelo matemático Walter Pitts, ainda na década de 1940. Eles criaram um modelo computacional simplificado de como neurônios artificiais podem trabalhar para realizar cálculos usando lógica proposicional, construindo, assim, a primeira arquitetura de rede neural artificial, ainda sem capacidade de aprendizado. Desde então, foram criadas muitas outras arquiteturas de redes neurais, porém, a aplicação das técnicas esbarrou no poder computacional da época.

Durante os anos 80 novas arquiteturas foram inventadas, juntamente com novas técnicas de treinamento, o que provocou uma nova demanda de interesse em pesquisas na área, mas o avanço continuou lento. Nos anos 90, novas técnicas de aprendizado de máquina foram inventadas como o Support Vector Machine (SVM) que pôs as redes neurais em segundo plano.

A partir dos anos 2000, as redes neurais voltaram ao centro das atenções devido ao crescimento do poder de processamento dos computadores além da quantidade de dados disponíveis, o que facilitou a implementação e o treinamento dessas redes e, conseqüentemente, avanço do Deep Learning.

As Redes Neurais Artificiais são formadas por células computacionais denominadas neurônio ou unidades de processamento conectadas, onde cada neurônio é alimentado por todos os neurônios da camada imediatamente anterior. Tal modelo pode solucionar uma grande variedade de problemas como reconhecimento facial, classificação de imagens, recomendar vídeos de acordo com o interesse dos usuários de uma plataforma ou aprender vencer campeões de jogos como o xadrez.

## 1.2. Neurônio artificial

O neurônio biológico, com tamanho aproximado de  $100\mu\text{m}$ , é composto por um corpo celular com muitas extensões de ramificações chamadas dendritos, além de uma longa extensão chamada Axônio.

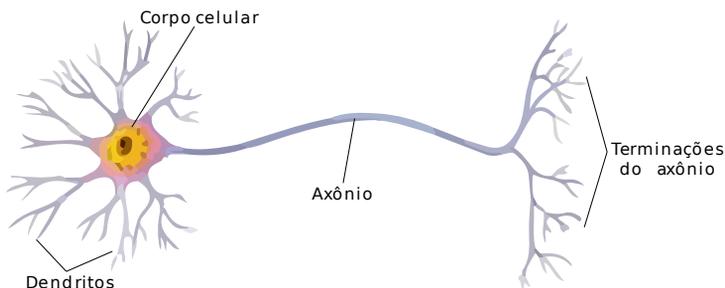


Figura 1: Neurônio biológico

Fonte:[8]

Os dendritos têm como função a recepção de estímulos nervosos vindos de outros neurônios ou do ambiente, que são transmitidos para o corpo celular, também chamado de soma, que combina

as informações e as processa, gerando um novo impulso que depende da intensidade e frequência do impulso anterior. O novo estímulo é transportado pelo axônio ao encontro de outro neurônio. O contato das terminações do axônio de um neurônio com os dendritos de outro é chamado de sinapse, desse modo, o sinal do neurônio flui da esquerda para a direita transmitindo estímulos elétricos através de sinapses.

As redes neurais são compostas por unidade de processamento, inspiradas em neurônios biológicos, denominadas neurônios artificiais, dispostos em camadas e densamente interligados. Um neurônio artificial é representado no diagrama abaixo:

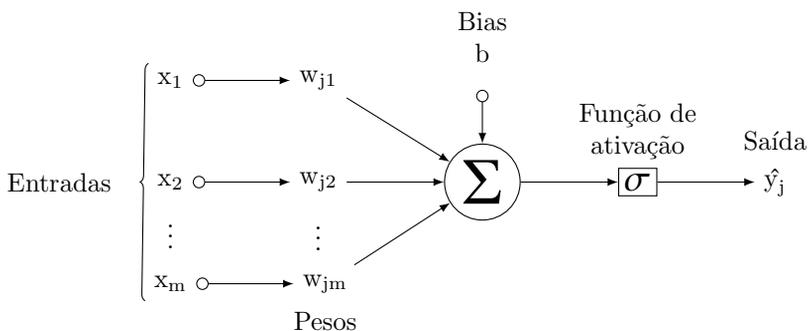


Figura 2: Neurônio artificial

Fonte: [12]

Elementos de um neurônio artificial:

- $\mathbf{X}_1 \mathbf{b} = [1, x_1, x_2, \dots, x_m]$  é um vetor, pertencente ao conjunto de treinamento, onde suas componentes são os sinais de entrada; inserimos como primeira componente 1, para trabalhar com o bias embutido no vetor de pesos;
- $\mathbf{W} = [w_{j0} = b, w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jm}]$  é o vetor onde suas componentes são os pesos sinápticos que são aprendidos durante o treinamento;
- $b$  é termo de bias, que é um parâmetro externo do neurônio;
- $v_j$  é chamado de campo local induzido;
- $\sigma$  é uma função de ativação;
- $\hat{y}_j$  é o sinal de saída do neurônio.

O integrador representado pela letra  $\Sigma$  realiza a soma das entradas ponderadas por esses pesos, isto é,  $v_j = \sum_{i=0}^m w_{ji} x_i$ . A saída da rede é obtida aplicando a função de ativação  $\sigma$  em  $v_j$ . Podemos simplificar esses cálculos usando representação matricial como segue:

$$v_j = \mathbf{X}_1 \mathbf{b} \cdot \mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{j0} = b \\ w_{j1} \\ w_{j2} \\ \vdots \\ w_{jm} \end{bmatrix} = x_0 w_{j0} + x_2 w_{j2} + \dots + x_m w_{jm} = \sum_{i=0}^m x_i w_{ji}$$

Aplicando a função de ativação  $\sigma$  no campo de ativação  $v_j$ , obtemos a saída do neurônio  $\hat{y}_j$ .

$$\hat{y}_j = \sigma(v_j)$$

Observe que, no neurônio, cada entrada está associada a um peso denominado peso sináptico que pode assumir valores positivos ou negativos, dependendo do comportamento da conexão ser excitatório ou inibitório, respectivamente.

**Exemplo 1.** Considere o conjunto  $D = \{[65, 2.5], [110, 3.2], [70, 2.2], [125, 3.1]\}$ , os elementos do conjunto têm como primeira componente o peso(g) e como segunda componente o pH de limões e laranjas, e a matriz  $R = [0, 1, 0, 1]$  traz os rótulos do conjunto  $D$ , onde 0 representa limão e 1 representa laranja. Nesse caso o neurônio a ser treinado terá duas entradas, uma para peso, outra para pH. A saída do neurônio será 0 para indicar que é um limão e, 1 para indicar que é uma laranja.

### 1.3. O termo bias

O termo bias é um parâmetro acrescentado na equação do campo local induzido  $v = w_{ji}x_i + b_j$ , o qual podemos interpretar como uma equação de uma reta, onde  $w_{ji}$  é o coeficiente angular e  $b_j$  é o coeficiente linear da reta. Em uma reta, fazendo variar o coeficiente angular, giramos a reta no sentido horário ou anti-horário. Por sua vez, o coeficiente linear, o termo de bias  $b_j$ , define o intercepto com o eixo y, desse modo, o bias aumenta a liberdade de posicionamento da reta. Cabe observar que sem o termos bias teríamos como intercepto sempre o 0, isto é, uma equação linear. A reta que separa as duas classes de um conjunto de dados binários é chamada reta de decisão.

Veja os gráficos abaixo

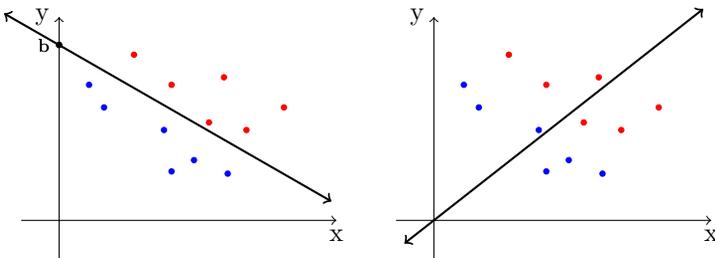


Figura 3: À esquerda temos o valor do bias livre, À direita fixado em 0, observe que se não existir um termo de bias diferente de 0, o hiperplano representado pela reta não conseguirá separar as classes, visto que, a reta só pode rotacionar em torno da origem.

Fonte: Elaborada pelos autores

### 1.4. Funções de ativação

As funções de ativação são transformações não lineares aplicadas no campo de ativação de cada neurônio agregando um maior poder de processamento às redes neurais. Assim, a importância da não linearidade de tais funções é permitir modelar problemas mais complexos, pois devido a serem os campos de ativação operações lineares, sem essas transformações as redes neurais só

poderiam ser aplicadas a problemas lineares. Veja abaixo os gráficos das funções de ativação

Degrau  $\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$  e da função Sigmoid  $\sigma(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$ .

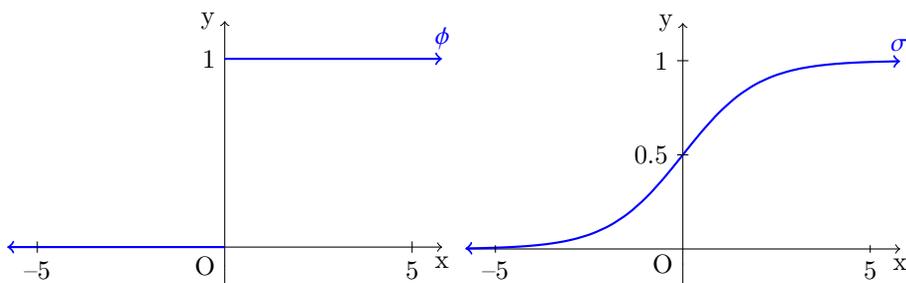


Figura 4: À esquerda: Função Degrau. À direita: Função Sigmoid.

Fonte: Elaborada pelos autores.

## 2. Redes neurais de camada única

As redes neurais de camada única, também chamadas de perceptrons, têm como característica principal que todas as entradas são conectadas diretamente com as saídas da rede neural. Tais redes só são capazes de resolver problemas linearmente separáveis, isto é, que as classes podem ser separadas por retas, como provou Rosemblatt, em 1958. Os perceptrons construídos com apenas um neurônio na camada de saída são limitados a classificação de problemas binários, aumentando a quantidade de neurônios da camada de saída é possível trabalhar com mais de duas classes.

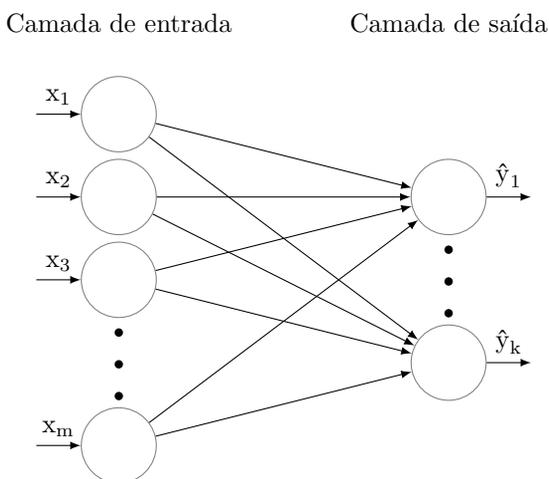


Figura 5: Rede perceptron com m entradas e k saídas.

Fonte: Elaborada pelos autores.

## 3. Treinamento de um perceptron de camada única

Para treinar uma rede perceptron de camada única vamos utilizar as equações de atualização de pesos obtidas com o algoritmo Least Mean Squares (LMS) Mínimos quadrados médios. Considere o conjunto  $T$  de treinamento com  $k$  classes e  $n$  amostras:

$$T = \left\{ \left( \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)} \right), \left( \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)} \right), \dots, \left( \mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{y}^{(n)} \right) \right\} \quad (1)$$

Onde:

- $\mathbf{x}^{(j)} = [x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}]$  é um vetor  $m$ -dimensional;
- $\mathbf{y}^{(j)} = [y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_k^{(j)}]$  é um vetor  $k$ -dimensional.

Para treinar o perceptron, vamos utilizar o termo de bias embutido, isto é, como primeira componente do vetor de pesos, desse modo acrescentaremos 1 como primeira componente do vetor de entrada. Assim, para o  $i$ -ésimo neurônio, um vetor de entrada é da forma  $\mathbf{x}^{(j)} = [1, x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}]$  e o vetor de pesos é da forma  $\mathbf{w}^{(j)} = [w_{i0}^{(j)} = b_i, w_{i1}^{(j)}, w_{i2}^{(j)}, \dots, w_{im}^{(j)}]$ .

Sendo  $\epsilon_{i(j)}$  o erro do  $i$ -ésimo neurônio da camada de saída, ao ser inserido na rede o  $j$ -ésimo exemplo do conjunto de treinamento, é definido por

$$\epsilon_i^{(j)} = y_i^{(j)} - \hat{y}_i^{(j)}. \quad (2)$$

Onde:

$$\hat{y}_j = \sigma(v_j)$$

é a predição da rede para a  $j$ -ésimo exemplo do conjunto de treinamento,  $\sigma$  a função de ativação do neurônio e

$$\begin{aligned} v_j &= \mathbf{x}^{(j)} \cdot \mathbf{w}^{(j)T} \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & \dots & x_m^{(j)} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} w_{i0}^{(j)} = b_i \\ w_{i1}^{(j)} \\ w_{i2}^{(j)} \\ \vdots \\ w_{im}^{(j)} \end{array} \right] \\ &= x_0^{(j)} w_{i0}^{(j)} + x_1^{(j)} w_{i1}^{(j)} + \dots + x_m^{(j)} w_{im}^{(j)} \\ &= \sum_{i=0}^m x_r^{(j)} w_{ir}^{(j)} \end{aligned} \quad (3)$$

O treinamento da rede é a atualização dos pesos para que predição se torne suficientemente precisa, para a correção do valor do peso  $w_{ir}$  referente do  $J$ -ésimo exemplo do conjunto de treinamento para o  $(j + 1)$ -ésimo utilizaremos a seguinte equação.

$$w_{ir}^{(j+1)} = w_{ir}^{(j)} + \eta \epsilon_1^{(j)} x_r^{(j)}. \tag{4}$$

Onde  $\eta$  é a taxa de aprendizado da rede.

**Exemplo 2.** Vamos construir um perceptron de camada única, para isso considere o conjunto de dados fictícios abaixo:

Temperatura(°C)	Umidade(%)	Label(rótulo)
21	91	chuvoso
20	70	ensolarado
18	70	chuvoso
29	85	ensolarado
23	80	chuvoso
23	70	ensolarado

Figura 6: Conjunto de dados fictícios de umidade, temperatura e dia chuvoso/ensolarado  
 Fonte: Elaborada pelos autores.

Vamos treinar uma rede perceptron de camada única para fazer a predição se o dia é chuvoso ou ensolarado, com base na temperatura e na umidade. Para isso vamos construir a matriz X com os dados de entrada na rede, retirados da tabela acima, e a matriz Y com os rótulos, onde 1 representa chuvoso e 0 representa ensolarado. Vamos utilizar como função de ativação a função degrau.

$$X = \begin{bmatrix} 21 & 20 & 18 & 29 & 23 & 23 \\ 91 & 70 & 70 & 85 & 80 & 70 \end{bmatrix}$$

$$Y = [ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 ]$$

Utilizaremos como matriz de pesos inicial a matriz de 1 linha e 3 colunas, com todos os seus elementos nulos – observe que o primeiro elemento se trata do termo bias.

$$W_0 = [ 0 \ 0 \ 0 ]$$

Utilizaremos  $\eta = 0.01$  como taxa de aprendizado, que determina a velocidade com que a rede aprende.

Como estamos trabalhando com o bias embutido na primeira coluna da matriz de pesos, será acrescentado o número como primeiro elemento nos vetores de entrada.

$$x_1b = [ 1 \ 21 \ 91 ]$$

$$x_2b = [ 1 \ 20 \ 70 ]$$

$$x_3b = [ 1 \ 18 \ 70 ]$$

$$x_4b = [ 1 \ 29 \ 85 ]$$

$$x_5b = [ 1 \ 23 \ 80 ]$$

$$x_6b = [ 1 \ 23 \ 70 ]$$

Vamos inserir os dados na rede, que terá apenas um neurônio, três entradas e uma saída.

Os dados entradas serão inseridos um a um na rede, veja:

Para a primeira entrada  $x_1b = [ 1 \quad 21 \quad 91 ]$  :

1. Calcular o campo local induzido para a primeira entrada;

$$v = x_1b \cdot W^T = [ 1 \quad 21 \quad 91 ] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 21 \cdot 0 + 91 \cdot 0 = 0$$

2. Aplicar a função de ativação degrau no campo local induzido;

$$y = \phi(v) = \phi(0) = 1$$

3. Calcular o erro E da predição da rede;

$$E_1 = Y_1 - y_1 = 1 - 1 = 0$$

4. Atualizar os pesos da rede.

$$W_1 = W_0 + \text{eta} \cdot E_1 \cdot x_1b$$

$$W_1 = [ 0 \quad 0 \quad 0 ] + 0.01 \cdot 0 \cdot [ 1 \quad 21 \quad 91 ]$$

$$W_1 = [ 0 \quad 0 \quad 0 ]$$

Note que  $W_1$  é igual a  $W_0$ , isto é, os pesos não foram atualizados. Isso ocorreu por que a rede acertou a predição. Os pesos só são atualizados quando a rede erra a predição.

Vamos repetir o processo para a segunda entrada:  $x_1b = [ 1 \quad 20 \quad 70 ]$

1. Calcular o campo local induzido para a primeira entrada;

$$v_2 = x_2b \cdot W_1^T = [ 1 \quad 20 \quad 70 ] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 21 \cdot 0 + 91 \cdot 0 = 0$$

2. Aplicar a função de ativação degrau no campo local induzido;

$$y = \phi(v) = \phi(0) = 1$$

3. Calcular o erro E da predição da rede;

$$E_2 = Y_2 - y_1 = 0 - 1 = -1$$

4. Atualizar os pesos da rede.

$$W_2 = W_1 + \text{eta} \cdot E_2 \cdot x_2b$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.01 \cdot (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 20 & 70 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} -0,01 & -0,2 & -0,7 \end{bmatrix}$$

Fazendo o mesmo procedimento para as entradas que faltam, isto é, de  $x_3$  até  $x_6$ , teremos completado a inserção de todos os elementos do conjunto de treinamento, chamaremos a apresentação de todos os dados do conjunto de treinamento de uma época. Para concluir o treinamento de maneira satisfatória devemos inserir o conjunto de treinamento varias vezes, no código abaixo utilizamos 30000 épocas.

```

1 >>> import numpy as np
2 >>> e = 30000 #define o número de épocas
3 >>> a = 6 #define o número de amostras
4 >>> t = np.array([21, 20, 18, 29, 23, 23]) #array com atributos Temperatura
5 >>> u = np.array([91, 70, 70, 85, 80, 70]) #array com atributos Umidade
6 >>> b = 1 #Define o bias como 1
7 >>> X = np.vstack((t, u)) # Cria uma matriz com 2 linhas e 6 colunas, onde a
    primeira linha é o atributo temperatura e a segunda linha é o atributo umidade.
    X são os dados de entrada da rede.
8 >>> Y = np.array([1, 0, 1, 0, 1, 0]) #São as clases a qual pertence os vetores
    colunas da matriz de atributos X.
9 >>> eta = 0.01 #define a taxa de aprendizado.
10 >>> W = np.zeros([1, 3]) #define a matriz de pesos iniciais como sendo uma matriz
    nula com 1 linha e 3 colunas
11 >>> erros = np.zeros(6)
12 >>> def f(n): #função de ativação
13     if n < 0.0:
14         return(0)
15     else:
16         return(1)
17 >>> for i in range(e): #Rede
18     for t in range(a):
19         Xb = np.hstack((b, X[:, t]))#insere o numero b=1 no vetor de entrada da rede
20
21         V = np.dot(W, Xb) #Calcula o campo local induzido.
22
23         Ys = f(V) # calcula a saída da rede.
24
25         erros[t] = Y[t] - Ys #calcula o erro da rede
26
27         W = W + eta*erros[t]*Xb #treina a rede, atualizando os pesos.
28
29 >>> print("vetor de erros (erros)= " + str(erros))
30 ...vetor de erros (erros)= [0. 0. 0. 0. 0. 0.]
31

```

Podemos agora, com a rede treinada, fazer a predição se o dia é chuvoso ou ensolarado com base na temperatura e umidade. Por exemplo, considere um dia com temperatura 21C e umidade de 79%.

```

1 >>>def p(n): #função Predição
2     if f(np.dot(W, n)) == 1:
3         print("O dia é chuvoso")
4     else:
5         print("O dia é ensolarado")
6 >>>q = np.array([1, 21, 79])
7 >>>p(q)
8 ...O dia é chuvoso
  
```

#### 4. Redes multicamada

As redes neurais multicamadas, também chamadas de perceptrons de múltiplas camadas (MLP, Multilayer perceptron), tem como característica principal a existência de uma ou mais camadas ocultas. Observe abaixo um diagrama de uma rede multicamada com alimentação para frente.

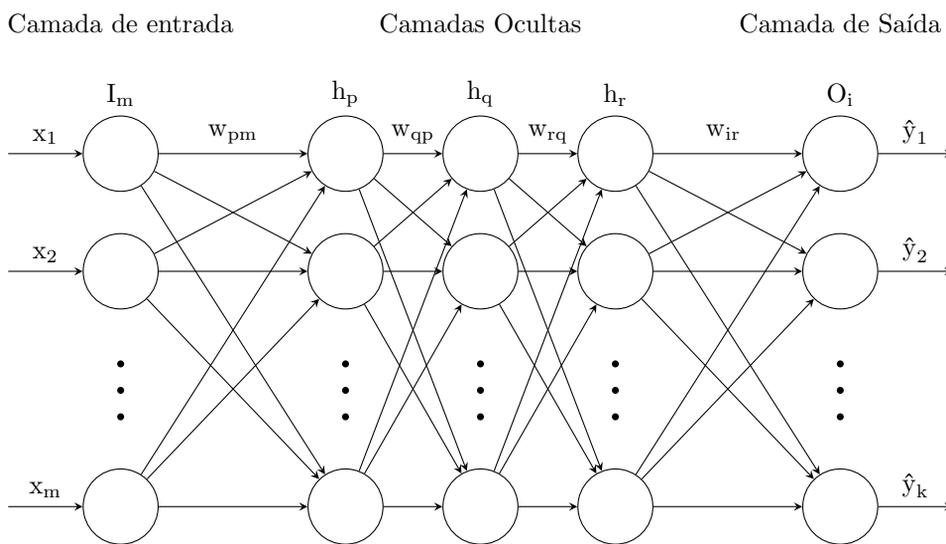


Figura 7: Rede neural artificial  
 Fonte: Elaborada pelos autores

Observe que a rede neural acima é composta pela camada de entrada  $I_m$ , com  $m$  entradas; temos três camadas ocultas  $h_p, h_q$  e  $h_r$  com  $p, q$  e  $r$  neurônios respectivamente; a camada  $O_i$  é a camada de saída da rede com  $k$  neurônios. Os pesos  $w_{pm}, w_{qp}, w_{rq}$  e  $w_{ir}$  são os pesos presentes em cada uma das ligações entre os neurônios de camadas subsequentes.

Vamos construir uma rede neural multicamada; para isso considere o conjunto  $T$  de treinamento com  $k$  classes e  $n$  amostras

$$T = \left\{ \left( \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)} \right), \left( \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)} \right), \dots, \left( \mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{y}^{(n)} \right) \right\},$$

onde

- $\mathbf{x}^{(j)} = [x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}]$  é um vetor  $m$ -dimensional;
- $\mathbf{y}^{(j)} = [y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_k^{(j)}]$  é um vetor  $k$ -dimensional.

Vamos construir e treinar uma rede com a camada de entrada, com  $m$  entradas, três camadas ocultas e a camada de saída com  $k$  neurônios.

O treinamento de uma rede neural é determinar os pesos sinápticos  $w_{pm}$ ,  $w_{qp}$ ,  $w_{rq}$  e  $w_{ir}$  que fazem as ligações entre as camadas  $I_m$  e  $h_p$ ,  $h_p$  e  $h_q$ ,  $h_q$  e  $h_r$ , e por fim  $h_r$  e  $O_i$ , respectivamente, e os bias,  $b_p$ ,  $b_q$ ,  $b_r$  e  $b_i$  de modo que o erro total, medido por uma função de custo, seja mínimo ou satisfatório, isto é, que a rede tenha uma boa precisão nas previsões para que foi treinada. Considere que  $\sigma_p$ ,  $\phi_q$ ,  $\zeta_r$  e  $\xi_i$  são respectivamente as funções de ativação dos neurônios das camadas  $h_p$ ,  $h_q$ ,  $h_r$  e  $O_i$ . Note que cada neurônio pode ter uma função de ativação específica.

Para treinar o perceptron vamos utilizar o termo de bias embutido, isto é, como primeira componente do vetor de pesos, desse modo acrescentaremos 1 como primeira componente do vetor de entrada. Assim, por exemplo, para o  $p$ -ésimo neurônio da camada  $h_p$ , um vetor de entrada é da forma  $\mathbf{x}^{(j)}b = [1, x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}]$  e o vetor de pesos é da forma  $\mathbf{w}^{(j)} = [w_{p0}^{(j)} = b_p, w_{p1}^{(j)}, w_{p2}^{(j)}, \dots, w_{pm}^{(j)}]$ .

Para iniciar o treinamento, com algoritmo *Backpropagation*, devemos escolher uma função de custo, utilizaremos o MSE (Mean Squared Error) Erro médio quadrático, amplamente utilizado em aprendizado supervisionado. Seja  $\epsilon_i^{(j)}$  o erro do  $i$ -ésimo neurônio da camada de saída  $O_i$  ao ser inserido na rede o  $j$ -ésimo exemplo do conjunto de treinamento, definido por

$$\epsilon_i^{(j)} = y_i^{(j)} - \hat{y}_i^{(j)}. \quad (5)$$

Assim a soma  $E^{(j)}$  dos erros de todos os neurônios da camada de saída da rede ao passarmos o  $j$ -ésimo exemplo do conjunto de teste é

$$E^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \epsilon_i^{(j)2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (y_i^{(j)} - \hat{y}_i^{(j)})^2, \quad (6)$$

onde  $k$  é o número de neurônios da camada de saída. Sendo  $n$  o número de amostras do conjunto de treinamento, definimos o erro total  $E_T$  da rede após a apresentação de todo o conjunto de treinamento como

$$E_T = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E^{(j)}. \quad (7)$$

onde  $E_T$ , a função de custo da rede, é uma função de várias variáveis dadas pelos pesos sinápticos e os níveis de bias. A atualização dos pesos ocorre a cada apresentação de um exemplo do conjunto de treinamento da rede, um a um, até a apresentação completa de todo o conjunto de treinamento, isto é, uma época. Por simplificação de notação, omitiremos o índice  $(j)$  que indica a apresentação do  $j$ -ésimo exemplo do conjunto de treinamento; na rede, por exemplo, utilizaremos  $\hat{y}_i$  em vez de  $\hat{y}_i^{(j)}$ , desde que esteja claro que todos os cálculos abaixo se referem à apresentação do  $j$ -ésimo exemplo do conjunto de treinamento.

Para treinar uma rede neural devemos encontrar os pesos e os bias que minimizam a sua função de custo. Para isso, vamos utilizar os conceitos de máximos e mínimos do cálculo diferencial, através do algoritmo gradiente descendente. Note que

$$\hat{y}_i = \xi(u_{O_i}(w_{ir})), \quad (8)$$

Onde  $u_{O_i}$ , dado em função de  $w_{ir}$ , é chamado de campo de ativação do  $i$ -ésimo neurônio da camada de saída  $O_i$ , definido por

$$u_{O_i}(w_{ir}) = \sum_{r=0}^R w_{ir} h_r. \quad (9)$$

onde  $R$  é o número de neurônios da camada  $h_r$ .

Substituindo (8) em (6), temos

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (y_i - \xi(u_{O_i}(w_{ir})))^2. \quad (10)$$

Utilizando a regra da cadeia, podemos derivar a função de custo  $E$  com relação aos pesos sinápticos  $w_{ir}$ , assim,

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ir}} = \frac{\partial E}{\partial \epsilon_i} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \hat{y}_i} \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial u_{O_i}} \frac{\partial u_{O_i}}{\partial w_{ir}}. \quad (11)$$

Calculando cada uma das derivadas do lado direito da equação (11), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial w_{ir}} &= \epsilon_i \cdot (-1) \cdot \xi'(u_{O_i}) h_r \\ &= -\epsilon_i \cdot \xi'(u_{O_i}) h_r. \end{aligned} \quad (12)$$

Assim, a variação do peso  $w_{ir}$  pode ser definida como

$$\begin{aligned} \Delta w_{ir} &= -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{ir}} \\ &= -\eta \frac{\partial E}{\partial \epsilon_i} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \hat{y}_i} \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial u_{O_i}} \frac{\partial u_{O_i}}{\partial w_{ir}} \\ &= \eta \epsilon_i \cdot \xi'(u_{O_i}) h_r, \end{aligned} \quad (13)$$

onde  $\eta$  é a taxa de aprendizado da rede. Observe que o sinal negativo na equação (13) é usado para inverter a direção do gradiente que aponta na direção de crescimento da curva, buscando então a direção para a mudança de peso que reduza o valor do erro da saída da rede. Podemos reescrever a equação (13) da seguinte forma:

$$\Delta w_{ir} = \eta \delta_i h_r, \quad (14)$$

onde  $\delta_i$  é o gradiente local definido como sendo a derivada parcial do erro E com relação ao campo de ativação  $u_{O_i}$ , isto é,  $\delta_i = \frac{\partial E}{\partial u_{O_i}} = \epsilon_i \cdot \xi'(u_{O_i})$ .

A correção de um peso  $w_{ir}$  é feita através da seguinte equação:

$$\begin{aligned} w_{ir}(j+1) &= w_{ir}(j) + \Delta w_{ir}(j) \\ &= w_{ir}(j) + 2\eta \delta_i h_r. \end{aligned} \quad (15)$$

Observe que  $\Delta w_{ir}^{(j)}$  se aproxima de 0 quando  $\frac{\partial E^{(j)}}{\partial w_{ir}^{(j)}}$  se aproxima de 0, isto é, um possível mínimo local da função de custo. Desse modo, quanto menor  $\frac{\partial E^{(j)}}{\partial w_{ir}^{(j)}}$ , menor a taxa de correção dos pesos e, conseqüentemente, mais o custo da rede se aproxima de um valor desejável.

De modo análogo, a variação dos pesos  $w_{rq}, w_{qp}, w_{pm}$  é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \Delta w_{rq} &= -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{rq}} \\ &= \eta \zeta'(u_{h_r}) h_q \sum_{i=1}^k \delta_i w_{ir} \\ &= \eta \delta_r h_q, \end{aligned} \quad (16)$$

onde  $\delta_r = \zeta'(u_{h_r}) \sum_{i=0}^k \delta_i w_{ir}$ ;

Onde  $k$  é o número de neurônios da camada de saída  $O_i$ .

$$\begin{aligned} \Delta w_{qp} &= -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{qp}} \\ &= \eta \phi'(u_{h_q}) h_p \sum_{r=0}^R \delta_r w_{rq} \\ &= \eta \delta_q h_p, \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $\delta_q = \phi'(u_{h_q}) \sum_{r=0}^R \delta_r w_{rq}$ ; e

onde  $R$  é o número de neurônios da camada de saída  $h_r$ .

$$\begin{aligned} \Delta w_{pm} &= -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{pm}} \\ &= \eta \sigma'(u_{h_p}) I_m \sum_{q=0}^Q \delta_q w_{qp} \\ &= \eta \delta_p I_m, \end{aligned} \quad (18)$$

onde  $\delta_p = \phi' \sigma' (u_{h_p}) \sum_{q=0}^Q \delta_q w_{qp}$ ,

onde  $Q$  é o número de neurônios da camada de saída  $h_q$ .

Assim, a correção dos pesos  $w_{rq}, w_{qp}, w_{pm}$  é feita de acordo com as equações abaixo:

$$\begin{aligned} w_{rq}(j+1) &= w_{rq}(j) + \Delta w_{rq}(j) \\ &= w_{rq}(j) + \eta \delta_r h_q. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} w_{qp}(j+1) &= w_{qp}(j) + \Delta w_{qp}(j) \\ &= w_{qp}(j) + \eta \delta_p h_p. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} w_{pm}(j+1) &= w_{pm}(j) + \Delta w_{pm}(j) \\ &= w_{pm}(j) + \eta \delta_p I_m. \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4.1. Algoritmo Backpropagation

1. *Inicialização*: Temos que criar os pesos e bias iniciais.
2. *Input x*: Apresente os exemplos de treinamento de uma época à rede neural.
3. *Feedforward*: Para cada neurônio  $j$ , da camada  $l$ ,  $l = 2, 3, \dots, L$ , onde  $L$  é a profundidade da rede, isto é, o número de camadas da rede, calcular o campo local induzido

$$v_j^l(n) = \sum_{i=0}^m w_{ji}^l \cdot y_i^{l-1}(n),$$

onde  $y_i^{l-1}(n)$  é o sinal de saída do neurônio  $i$  da camada  $l-1$ ; na apresentação do  $n$ -ésimo exemplo de treinamento,  $w_{ji}^l$  é o peso do neurônio  $j$  da camada  $l$ . Observe que,  $y_0^{l-1}(n) = +1$  e  $w_{j0}^l = b_j^l(n)$  que é o bias do neurônio  $j$  da camada  $l$ .

Sendo  $\sigma$  a função de ativação, a saída do neurônio  $j$  da camada  $l$  é

$$\hat{y}_j^l = \sigma(v_j^l(n)).$$

Note que  $y_j^0(n) = x_j$ , isto é, a  $j$ -ésima componente do vetor de entrada  $x(n)$ . Se o neurônio  $j$  pertence à camada de saída  $l = L$ , então

$$y_j^L(n) = \hat{y}_j,$$

calcular o sinal de erro

$$\epsilon_j(n) = y_j - \hat{y}_j,$$

onde  $y_j$  é a  $j$ -ésima componente do vetor de rótulos.

4. *Retropropagação*: Para cada  $l = L, L - 1, L - 2, \dots, 2$ , Calcular o gradiente local, definido por:

$$\delta_i^l = \begin{cases} \epsilon_{ij}^L \cdot \phi' \left( v_j^L \right), & \text{se } j \text{ pertence à camada de saída;} \\ \phi' \left( v_j^l \right) \sum_{i=1}^n \delta_i^{l+1} w_{ij}^{l+1}, & \text{se } j \text{ pertence à camada oculta.} \end{cases}$$

5. *Gradiente descendente*: Para cada  $l = L, L - 1, L - 2, \dots, 2$  atualize os pesos de acordo com a equação,

$$w_{ji}^l(n+1) = w_{ji}^l(n) + \eta \delta_j^l y_i^{l-1}.$$

Note que os bias também são atualizados por essa equação, visto que,  $w_{j0}^l = b_j^l$ .

### 5. Interpretação geométrica da derivada a partir da taxa média de variação

Para que os alunos compreendam como o algoritmo utilizado trabalha para treinar as redes neurais, podemos usar o conceito de derivada a partir de sua interpretação geométrica, isto é, a inclinação da reta tangente a uma curva, o qual é deduzido a partir de aproximações por retas secantes e da taxa de variação das mesmas.

Considere uma curva que seja o gráfico de uma função  $y = f(x)$  e  $P = (x_0, f(x_0))$ , um ponto de  $f$ , onde será traçada a reta tangente. Atribuindo a  $x_0$  um acréscimo  $\Delta x = h$ , temos que a variável  $y_0 = f(x_0)$  sofrerá um acréscimo  $\Delta y$ ; assim, saímos do ponto  $P(x, y)$  para um ponto  $Q = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ . Veja o gráfico abaixo.

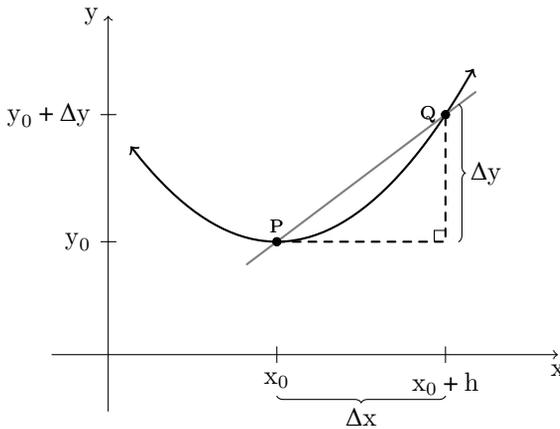


Figura 8: Reta secante

Fonte: [13]

Observe que o coeficiente angular da reta secante  $r = \overleftrightarrow{PQ}$  é  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Mantendo fixo o ponto  $P$  e fazendo  $Q$  variar na direção de  $P$ , temos que  $h$  vai se aproximando de zero, mas não zero. Veja o gráfico abaixo.

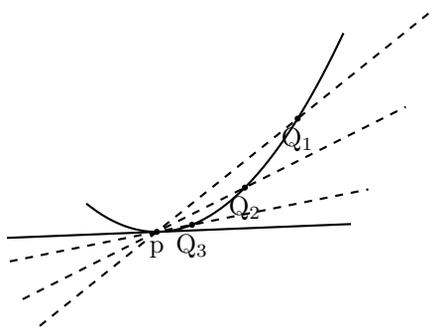


Figura 9: Aproximação de uma reta tangente por retas secantes  
 Fonte: [13]

Como Q se aproxima de P, mas diferente de P, temos uma posição limite para Q. Podemos definir a reta tangente a  $f$  em P, como sendo a reta  $r = \overleftrightarrow{PQ}$  quando Q está na sua posição limite e a derivada de  $f$  no ponto P é a inclinação ou o coeficiente angular da reta tangente a  $f$  em P.

Podemos definir precisamente a reta tangente a uma curva da seguinte forma.

A reta tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto  $P(x_0, f(x_0))$  é a reta passando por P e com inclinação

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

desde que o limite exista.

Analogamente podemos definir a derivada como a seguir.

A derivada de uma função  $y = f(x)$  em  $x_0$ , denotada por  $f'(x_0)$ , é

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se o limite existir.

**Exemplo 3.** Considere  $y = f(x) = x^2$  e  $P = (2, 4)$  um ponto de  $f$  e um acréscimo  $\Delta x = h$ . O acréscimo de  $y$  é dado por  $\Delta y = (2+h)^2 - 4 = 4 + 4h + h^2 - 4$ . Segue que o coeficiente angular da reta secante é

$$t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4h + h^2}{h}$$

Para determinar a derivada, basta fazer  $\Delta x$  aproximar-se de 0, isto é, fazer  $h$  se aproximar de 0, o que implica que a reta secante se aproxima da reta tangente, e, por sua vez, o coeficiente da reta secante aproxima-se do coeficiente da reta tangente. Note que

$$t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(4 + h)}{h}.$$

Como  $h$  tende a 0, mas nunca é igual a 0, temos:

$$t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4.$$

Portanto a derivada de  $f(x) = x^2$  em  $x = 2$  é 4; isso significa que em  $x = 2$  a função  $f$  tem uma taxa de crescimento igual a 4, e desse modo, se nosso objetivo é encontrar o mínimo de  $f$ , tratando-a como uma função de custo, devemos reduzir  $x$  para minimizar  $f$ .

## 6. Redes neurais e a visão computacional

Vamos treinar um modelo de rede neural para reconhecimento de imagens; neste caso, imagens de dígitos manuscritos. Para tal vamos usar o *keras*, o qual é uma API de alto nível para construir e treinar modelos no TensorFlow, que é uma biblioteca completa de código aberto para machine learning. Para usar o TensorFlow; disponível para Ubuntu, Windows, macOS e Raspberry Pi; é necessário fazer sua instalação com o gerenciador de pacotes *pip* do Python, usando os códigos abaixo

```
1 # Requer o pip mais recente
2 pip install --upgrade pip
3
4 # Versão estável atual para CPU e GPU
5 pip install tensorflow
6
7 # Se preferir tente também a compilação de visualização (instável)
8 pip install tf-nightly
```

Com o Tensorflow instalado, devemos importar as bibliotecas a serem utilizadas para treinar o modelo; neste caso temos o TensorFlow e a API Keras do TensorFlow.

```
1 >>> import tensorflow as tf #importe tensorflow como tf
2 >>> from tensorflow import keras #do tensorflow importe keras
```

Além das Bibliotecas auxiliares

```
1 >>> import numpy as np #importe numpy como np
2 >>> import matplotlib.pyplot as plt #importe matplotlib.pyplot como plt
```

O próximo passo é importar o conjunto de dados MNIST que se encontra na API *keras*.

```
1 >>> (train_images, train_labels), (test_images, test_labels) = tf.keras.datasets.
   mnist.load_data()
```

Com o código acima carregamos o conjunto de dados na forma de quatro NumPy arrays nos seguintes itens:

- Os arrays *train\_images* e *train\_labels*: É o conjunto de treinamento, dividido em duas numpy arrays. A primeira com as classes e a segunda com os rótulos;
- Os arrays *test\_images* e *test\_labels*: É o conjunto de teste configurado da mesma forma do conjunto de treinamento.

No conjunto MNIST, as imagens são arrays NumPy de 28x28, com os pixels variando entre 0 e 255. As labels (rótulos) são arrays de inteiros variando de 0 a 9, onde cada valor tem uma classe que corresponde ao respectivo dígito, conforme a tabela abaixo:

Classe	Label
Zero	0
Um	1
Dois	2
Três	3
Quatro	4
Cinco	5
Seis	6
Sete	7
Oito	8
Nove	9

Figura 10: Tabela de correspondência entre classes e rótulos

Fonte: Elaborada pelos autores

Cada imagem tem apenas um rótulo (label) que representa determinada classe. Como os nomes das classes não estão incluídos no conjunto de dados, podemos armazenar os nomes das classes para uso posterior com o código abaixo.

---

```

1 >>> class_names = ['Zero', 'Um', 'Dois', 'Três', 'Quatro',
2                   'Cinco', 'Seis', 'Sete', 'Oito', 'Nove']

```

---

Com os dados importados, podemos, agora, explorar os dados e verificar a sua forma com o comando `.shape`

---

```

1 >>> train_images.shape
2 ... (60000, 28, 28)

```

---

Assim, o conjunto tem 60000 imagens, onde cada imagem é representada por um NumPy array de 28x28

Com o comando `len()` podemos verificar o número de elemento do conjunto `train_labels` que é o conjunto de rótulos do conjunto de treinamento.

---

```

1 >>> len(train_labels)
2 ... 60000

```

---

Do mesmo modo, verificamos as configurações do conjunto de testes

---

```

1 >>> test_images.shape
2 ... (10000, 28, 28)
3 >>> len(test_labels)
4 ... 10000

```

---

Note que o conjunto dos rótulos é uma numpy array de inteiros, como dito antes; veja.

---

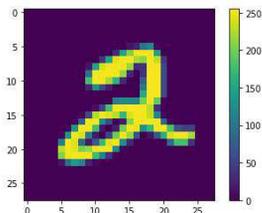
```
1 >>> train_labels
2 ... array([5, 0, 4, ..., 5, 6, 8], dtype=uint8)
```

---

A próxima fase é o pré-processamento dos dados. Se escolhermos uma das imagens do conjunto de treinamento, por exemplo, a número 5, veremos que os pixels estão variando entre 0 e 255

---

```
1 >>>plt.figure() #cria uma nova figura ou ativa uma figura existente.
2 >>>plt.imshow(train_images[5]) #Exibe os dados como uma imagem em 2D.
3 >>>plt.colorbar() #Adiciona uma barra de cores a um gráfico.
4 >>>plt.grid(False) #Configura as linhas de grade: Com linhas (True) sem linha (False).
5 >>>plt.show #Mostra a figura
```




---

Observe, na imagem acima, que a tonalidade dos pixels das imagens do conjunto MNIST varia de 0 a 255. Antes do treinamento do modelo, é conveniente escalar os valores dos pixels entre 0 e 1, para isso, dividimos os valores por 255.0. É importante observar que o conjunto de treinamento e o conjunto de testes devem ser pré-processados da mesma maneira.

---

```
1 >>>train_images = train_images / 255.0
2 >>>test_images = test_images / 255.0
```

---

Para construir o modelo de uma rede neural devemos, primeiramente, fazer a configuração das camadas e, por fim, compilar o modelo. Como vimos, ao encadear as camadas, o aprendizado é a otimização dos pesos sinápticos, a fim de minimizar a função de custo. Usando *tf.keras* temos modelos prontos que fazem praticamente todo o trabalho automaticamente.

Vamos utilizar, para treinar a rede neural, o modelo sequencial do keras que é apropriado para uma pilha simples de camadas onde cada camada tem exatamente um tensor de entrada e um tensor de saída.

Tensores são arrays multidimensionais, que vão fluindo pelos neurônios ou nós da rede neural.

---

```
1 >>>model = keras.Sequential([
2 ...     keras.layers.Flatten(input_shape=(28, 28)),
3 ...     keras.layers.Dense(128, activation='relu'),
4 ...     keras.layers.Dense(10, activation='softmax')
5 ...])
```

---

A primeira camada da rede neural, *tf.keras.layers.Flatten*, transforma o formato da imagem atual que é um array de duas dimensões (28x28 pixels) em um array de uma única dimensão de (28\*28=784 pixels), isto é, enfileira os pixels. Observe que essa camada só tem tal função de formatação dos dados, não tem parâmetros para aprender.

As duas outras camadas *keras.layers.Dense* com 128 e 10 nós (ou neurônios), respectivamente, são full connected (totalmente conectadas). A segunda camada, com 10 nós, retorna um array de 10 probabilidades, onde cada uma delas indica a probabilidade de que a imagem testada pertença a cada uma das 10 classes, que somadas retorna resultado 1.

O próximo passo é compilar o modelo, mas é necessário fazer algumas configurações adicionais.

---

```

1 >>>model.compile(optimizer='SGD',
2 ...               loss=tf.keras.losses.SparseCategoricalCrossentropy(from_logits=
3 ...               True),
               metrics=['accuracy'])
  
```

---

Onde:

- *Optimizer* É como o modelo atualiza os pesos de acordo com a função de perda;
- *loss* ou função loss (função de perda) mede a precisão do modelo em cada passo do treinamento, com objetivo de minimizá-lo.
- *Metrics* Usada para monitoramento dos passos de treinamento e teste. No caso de *accuracy*, trata-se da fração das imagens que foram classificadas corretamente.

## 6.1. Treinamento do modelo

Para treinar uma rede neural artificial, devemos seguir os passos abaixo:

1. Alimentar a rede com os dados de treinamento, que neste caso são as arrays *train\_imagens* e *train\_labels*;
2. Durante o treinamento o modelo aprende a associar as imagens aos respectivos rótulos;
3. São feitas predições com conjunto de teste que neste caso é a array *test\_imagens*;
4. É feita a verificação da precisão das predições com os rótulos do conjunto de teste, que neste caso é a array *test\_labels*.

Para iniciar o treinamento usamos o método *model.fit()*

---

```

1 >>> model.fit(train_images, train_labels, epochs=15)#A rede é alimentada com o
    conjunto de treinamento (train_images, train_labels) por 15 épocas.
2 ... loss: 0.2036 - accuracy: 0.9238 #Obtendo 92,38% de precisão
  
```

---

Agora, vamos avaliar o desempenho do modelo com o conjunto de testes.

---

```

1 >>> test_loss, test_acc = model.evaluate(test_images, test_labels, verbose=2) #
    verbose=2 detalha o processo como uma linha de log por época
2 ... 313/313 - 1s - loss: 0.3387 - accuracy: 0.8843
  
```

---

Observe que a accuracy teve uma *performance* um pouco menor com o conjunto de teste em relação ao conjunto de treinamento. Essa diferença entre a accuracy do conjunto de treinamento e o conjunto de teste representa um overfitting (sobreajuste).

Como o modelo já está treinado, vamos usá-lo para fazer algumas predições de imagens.

---

```

1 >>> probability_model = tf.keras.Sequential([model,
2         tf.keras.layers.Softmax()])
  
```

---

```

1 >>> predictions = probability_model.predict(test_images)
  
```

---

Com este código, estamos usando o modelo treinado para fazer a predição de todas as imagens do conjunto de testes. Como exemplo, podemos verificar qual a décima predição como a seguir:

---

```

1 >>> predictions[10]
2 ... array([9.9999809e-01, 8.1870361e-16, 1.9300867e-06, 2.5660890e-11,
3         5.4148463e-18, 4.0930523e-10, 2.9532365e-10, 4.9846087e-09,
4         7.2152120e-13, 9.8541431e-10], dtype=float32)
  
```

---

Observe que a predição é um array com dez números, que indica a confiança do modelo para qual classe a imagem pertence. O maior valor será a classe predita.

---

```

1 >>> np.argmax(predictions[10])
2 ... 0
  
```

---

Podemos verificar se o modelo acertou a predição, consultando o conjunto *test\_labels* com o seguinte código.

---

```

1 >>> test_labels[10]
2 ... 0
  
```

---

O que mostra que a rede neural fez a previsão correta. Podemos fazer um gráfico de barras indicando as probabilidades de cada classe para uma determinada imagem utilizando os códigos a seguir.

---

```

1 >>> def plot_image(i, predictions_array, true_label, img):
2 ...     true_label, img = true_label[i], img[i]
3 ...     plt.grid(False)
4 ...     plt.xticks(())
  
```

---

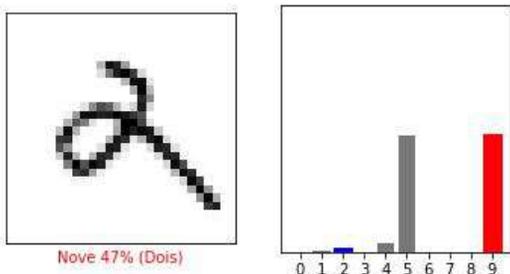
```

5 ... plt.yticks ([])
6
7 ... plt.imshow(img, cmap=plt.cm.binary)
8
9 ... predicted_label = np.argmax(predictions_array)
10 ... if predicted_label == true_label:
11 ...     color = 'blue'
12 ... else:
13 ...     color = 'red'
14
15 ... plt.xlabel("{} {:.20f}% ({})" .format(class_names[predicted_label],
16                                         100*np.max(predictions_array),
17                                         class_names[true_label]),
18                                         color=color)
19
20 >>>def plot_value_array(i, predictions_array, true_label):
21 ...     true_label = true_label[i]
22 ...     plt.grid(False)
23 ...     plt.xticks(range(10))
24 ...     plt.yticks ([])
25 ...     thisplot = plt.bar(range(10), predictions_array, color="#777777")
26 ...     plt.ylim([0, 1])
27 ...     predicted_label = np.argmax(predictions_array)
28
29 ...     thisplot[predicted_label].set_color('red')
30 ...     thisplot[true_label].set_color('blue')
  
```

O código acima introduziu as configurações de plotagem, onde rótulos de predição correta aparecerão na cor azul e os rótulos de predição incorretas aparecerão em vermelho.

```

1 >>> i = 149
2 >>>plt.figure(figsize=(6,3))
3 >>>plt.subplot(1,2,1)
4 >>>plot_image(i, predictions[i], test_labels, test_images)
5 >>>plt.subplot(1,2,2)
6 >>>plot_value_array(i, predictions[i], test_labels)
7 >>>plt.show()
  
```



Com o modelo já treinado e verificado no conjunto de testes, podemos usá-lo para fazer a previsão de uma única imagem específica, seja do conjunto de teste ou uma imagem em pasta. Primeiramente, vamos fazer a previsão de uma única imagem do conjunto de testes. Para isso criamos a variável *img* e armazenamos a segunda imagem do conjunto de testes, além de verificar a sua forma.

---

```

1 >>>img = test_imagens [1]
2 >>>print (img.shape)
3 ... (28 , 28)

```

---

Note que a imagem tem o tamanho de 28x28, mesmo tamanho de entrada da rede. O *tf.keras* é otimizado para fazer previsões em lote de imagens a cada vez. Desse modo temos que criar um lote com apenas uma imagem.

---

```

1 >>>img = (np.expand_dims (img , 0))
2 >>>print (img.shape)
3 ... (1 , 28 , 28)

```

---

Agora temos um lote com apenas uma imagem de acordo com as configurações de entrada da rede e já podemos prever o rótulo dessa imagem.

---

```

1 >>>predictions_single = probability_model.predict (img)
2 >>>print (predictions_single)
3 ... [[7.6395119e-13 6.5146011e-08 9.9999988e-01 7.3857691e-12 3.4266978e-24
4 2.7366560e-11 3.5776493e-11 1.8359487e-18 1.3914259e-09 1.4105835e-19]]

```

---



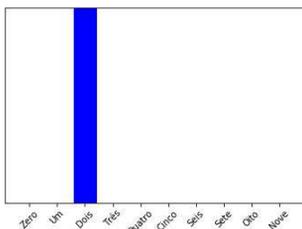
---

```

1 >>>plot_value_array (1 , predictions_single [0] , test_labels)
2 >>>g = plt.xticks (range (10) , class_names , rotation=45)

```

---



3

---



---

```

1 >>>np.argmax (predictions_single [0])
2 ... 2

```

---

Vamos agora fazer a predição de uma imagem localizada em uma pasta do disco local. Para isso devemos fazer todo o tratamento da imagem de modo que fique compatível com a entrada da rede. O código abaixo importa módulos necessários para o tratamento da imagem

---

```

1 >>>from keras.preprocessing.image import ImageDataGenerator , array_to_img ,
img_to_array , load_img

```

---

O próximo código insere a imagem na variável *img* a partir de um caminho do disco.

```
1 >>>img2 = load_img('img3.png')  
2 >>>img2
```



```
1 >>>print (img.mode)  
2 ...RGB #RedGreenBlue
```

Usando o comando `.mode` vemos que o canal de formato de pixel da imagem é RGB. Devemos converter a imagem para o formato (28,28) e em escala de cinza.

```
1 >>>from matplotlib import image  
2 >>>from matplotlib import pyplot
```

```
1 >>>img_resize = img.resize((28,28)) #Redimensiona a imagem para (28, 28).
```

```
1 >>>image_cinza = img_resize.convert(mode="L") #Converte a imagem em escala de cinza
```

```
2 >>>image_cinza
```



Como a rede foi configurada para fazer previsões em lote de imagens a cada vez, vamos criar um lote com `image_cinza`.

```
1 >>>img2 = (np.expand_dims(image_cinza , axis=0))#axis=0 determina a posição onde o eixo será inserido
```

```
1 >>>img2.shape #Retorna a forma da matriz, isto é, uma tupla referente ao número de elementos de cada dimensão.
```

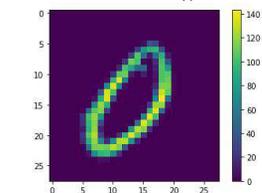
```
2 ...(1, 28, 28) #Eixo inserido na primeira posição: axis=0
```

Podemos visualizar a imagem com o código abaixo

```

1 >>>plt.figure()
2 >>>plt.imshow(img3[0])
3 >>>plt.colorbar()
4 >>>plt.grid(False)
5 >>>plt.show()

```



Note que os valores de pixel estão no intervalo de 0 a 143, devemos redimensionar esses valores para o intervalo de 0 a 1 antes de inserir na rede neural.

```

1 >>>img3 = img3 / 143.0

```

Agora a imagem está pronta para ser predita pela rede.

```

1 >>>predict = probability_model.predict(img3)

```

```

1 >>>predict
2 ... array([[9.4660956e-01, 1.8237397e-04, 4.8826247e-02, 1.5532545e-06,
3           1.2159522e-03, 2.3121331e-05, 3.6144556e-04, 2.6822658e-03,
4           9.1493923e-05, 5.8982700e-06]], dtype=float32)

```

```

1 >>>np.argmax(predict) #Calcula o maior argumento do array predict
2 ...0

```

Podemos visualizar a previsão através de um gráfico de barras que mostra as probabilidades, como fizemos anteriormente. Em azul a previsão correta e em vermelho as previsões incorretas, para isso temos que criar antes uma numpy array com dtype=uint8 com o rótulo correto para img3.

```

1 >>>img3_labels = np.array([0], dtype=np.uint8)
2 >>>img3_labels
3 ... array([0], dtype=uint8)

```

```

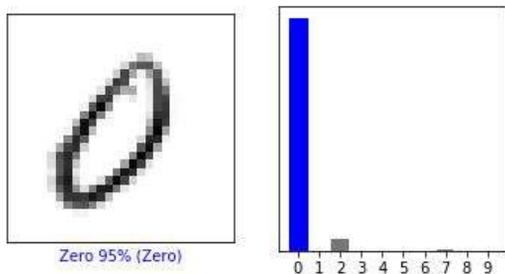
1 >>>i = 0
2 >>>plt.figure(figsize=(6,3))
3 >>>plt.subplot(1,2,1)
4 >>>plot_image(i, predict[i], img3_labels, img3)

```

```

5 >>>plt.subplot(1,2,2)
6 >>>plot_value_array(i, predict[i], img3_labels)
7 >>>plt.show()

```



## 7. Considerações Finais

Durante o planejamento e execução de um projeto dessa natureza, o professor encontrará alguns desafios, pois o conteúdo deste projeto abarca uma gama de conceitos novos e com apelo às tecnologias, mas facilmente alcançado através de texto e vídeos na internet. Pontuamos que a BNCC vem exigindo a mudança na praxe e uma adaptação a uma educação científica e tecnológica com base sólida, e, dessa forma, fazem-se necessários textos dessa natureza para auxiliar os professores e indicar possíveis caminhos. Com relação ao uso de tecnologias, devemos considerar que muitas escolas possuem uma infraestrutura de laboratório, e como os *softwares* usados aqui são de livre acesso e com vasto material de tutoriais na internet, acreditamos que tal projeto é exequível e de grande valia na formação de jovens nos variados recantos do país.

Ainda, notamos que é um consenso entre muito educadores que a formação de professores com competência e habilidades para tratar dos temas relevantes e atuais em todas as áreas, em especial a educação em matemática, é um desafio a ser superado e que necessita de muito empenho e diálogo da comunidade. Mas, uma vez atingida essa meta, os professores tornar-se-ão propulsores para o desenvolvimento do conhecimento por meio de metodologias interativas que conduzirão os estudantes a focarem em informações e geração de soluções nos diversos ramos da vida. Com essa perspectiva, as salas de aula tornar-se-ão espaços para a busca e construção de soluções dos problemas pertinentes a nossa sociedade.

Enfim, o ensino sobre redes neurais e aprendizado de máquinas ajuda a amadurecer o conhecimento básico e amplia o desenvolvimento do pensamento computacional. Nessa direção, a BNCC ressalta a importância de se trabalharem as capacidades de “*compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos*”, o que caracteriza a necessidade por mais textos com esse objetivo.

## Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer o *referee* pela leitura cuidadosa e por todas as sugestões que levaram ao trabalho ser mais preciso e claro em seus tópicos. O primeiro autor é parcialmente financiado pelo CNPq, Brasil, auxílios 308440/2021-8 e 405468/2021-0, e ambos os autores foram parcialmente financiados pela Capes, Brasil, Código de Financiamento 001.

## Referências

- [1] Ávila, Geraldo. *Limites e Derivadas do Ensino Médio?*. Disponível em: <<https://rpm.org.br/cdrpm/60/8.htm>>. Acesso em: 02 de agosto de 2020.
- [2] Géron, Aurélien. *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow*. 2nd Edition. Sebastopol, CA: O'Reilly, 2019.
- [3] Grus, Joel. *Data Science do Zero*. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Novatec, 2014.
- [4] Haykin, Simon. *Redes Neurais: Princípios e prática*. 2nd Edition. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- [5] James, G., Witten, D., Hastie, T., Tibshirani, R. *An Introduction to Statistical Learning*. New York 2013: Springer, 2013 (Corrected at 8th printing 2017).
- [6] Matplotlib *Matplotlib Version 3.1.2*. Disponível em: <<https://matplotlib.org/3.1.1/index.html>>. Acesso em: 18 de Setembro de 2020.
- [7] Menezes, Nilo Ney Coutinho. *Introdução à Programação com Python*. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Novatec, 2014.
- [8] Metodosupera *Neurônios – glossário do cérebro*. Disponível em: <<https://metodosupera.com.br/neuronios-glossario-do-cerebro/>>. Acesso em: 12 de Outubro de 2020.
- [9] Nielsen, Michael. *Neural Networks and Deep Learning*. Determination Press, 2015.
- [10] Python Software Foundation *The Python Tutorial 3.8*. Disponível em: <<http://python.org/>>. Acesso em: 10 de Setembro de 2020.
- [11] Russell, Stuart. *Inteligência Artificial*. Tradução da 3<sup>a</sup> Edição. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.
- [12] StackExchange *Diagram of an artificial neural network*. Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/questions/132444/diagram-of-an-artificial-neural-network>>. Acesso em: 12 de Outubro de 2020.
- [13] StackExchange *Tikz and Secant Line diagram*. Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/questions/460632/tikz-and-secant-line-diagram>>. Acesso em: 15 de Outubro de 2020.
- [14] StackExchange *A diagram about partial derivatives of  $f(x,y)$* . Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/questions/479814/a-diagram-about-partial-derivatives-of-fx-y>>. Acesso em: 18 de Outubro de 2020.
- [15] TensorFlow *Treinamente de Redes Neurais*. Disponível em: <<https://www.tensorflow.org/>>. Acesso em: 25 de Setembro de 2020.

Márcio Batista  
Universidade Federal de Alagoas  
<[mhbs@mat.ufal.br](mailto:mhbs@mat.ufal.br)>

André Oliveira Martins  
Universidade Federal de Alagoas  
<[andre.martins7@gmail.com](mailto:andre.martins7@gmail.com)>

Recebido: 04/09/2021

Publicado: 05/09/2022

# O GeoGebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações em Geometria.

Hilário Alencar 

Larissa Cândido 

Ronaldo Garcia 

Carmen Mathias 

## Resumo

Neste artigo temos como objetivo apresentar possibilidades de utilizar o *software* de matemática dinâmica GeoGebra para ilustrar demonstrações de resultados de geometria euclidiana presentes na literatura. Optamos por escolher o referido *software* visto que propicia aspectos dinâmicos visuais relevantes para compreender as demonstrações dos resultados elencados. Esperamos que as construções aqui apresentadas, assim como a discussões quanto às demonstrações, sirvam como suporte a professores e alunos que estão estudando os resultados apresentados nesse artigo.

**Palavras-chave:** Teorema de Pitágoras, Lei dos Senos, Lei dos cossenos, Número de ouro.

## Abstract

In this article we aim to present possibilities of using the mathematical software GeoGebra to illustrate demonstrations of results of Euclidean plane geometry present in the literature. We chose this software because it provides dynamic visual aspects relevant to understanding the demonstrations of the results listed. We hope that the constructions presented here, as well as the discussion about the demonstrations serve as support to teachers and students who are studying the results presented in this article.

**Keywords:** Pythagorean theorem, law of sines, law of cosines, golden number.

## 1. Introdução

O uso de recursos visuais na obtenção de resultados de geometria euclidiana plana ganhou novos horizontes usando ferramentas computacionais de matemática dinâmica, especialmente a partir dos mecanismos disponíveis no *software* GeoGebra, como, por exemplo, as elencadas em [1], [4] e [14].

Neste artigo, usamos esses recursos para obter demonstrações de resultados de geometria plana. Focaremos nos resultados que tem um apelo visual, uma figura expressa na sua essência um fato matemático e que nos favorece a encontrar e formalizar a demonstração do mesmo. Esse tipo de comunicação é conhecido como *provas sem palavras* e ficou popular na revista *Mathematics Magazine* que publica desde 1975, com regularidade, esses tipos de demonstrações, conforme [8]. Nesse contexto, destacamos a seguinte frase atribuída a Lynn Steen:

*Para a maioria das pessoas, a memória visual é mais poderosa do que a memória linear de passos em uma prova. Além disso, as várias relações incorporadas em um bom diagrama representam matemática real à espera de reconhecimento e verbalização. Então como um dispositivo para ajudar os alunos a aprender e lembrar matemática, provas sem palavras são muitas vezes mais precisas do que provas (mal lembradas) com palavras (Steen, 2012 apud Doyle et al, 2014).*

## 2. Matemática e reflexões

Vários autores dedicaram e refletiram sobre a questão da natureza da matemática. Dentre os mais contemporâneos podemos mencionar M. Atiyah [2], P. Halmos [10], T. Tao [29] e W. Thurston [30]. W. Thurston ao refletir sobre processo e tempo, defende que:

*Temos facilidade para pensar em processos ou sequências de ações que muitas vezes podem ser usadas para um bom efeito no raciocínio matemático. Uma maneira de pensar em uma função é como uma ação, um processo, que leva o domínio para o intervalo. Isso é particularmente valioso ao compor funções. Outro uso dessa facilidade é para lembrar provas: as pessoas geralmente se lembram de uma prova como um processo que consiste em várias etapas. Na topologia, a noção de homotopia é mais frequentemente pensada como um processo que evolui no tempo. Matematicamente, o tempo não é diferente que um espaço unidimensional, mas como os humanos interagem com ele de maneira bastante diferente, é psicologicamente muito diferente (Thurston, 1994).*

Ou seja, o processo como descrito por W. Thurston é particularmente aplicado na manipulação do *software* GeoGebra. Tais procedimentos podem ser observados desde as construções geométricas até a abordagem dinâmica presente nas animações e atividades interativas. No caso de uma demonstração de certo resultado de geometria euclidiana plana, são realizadas várias construções geométricas até estabelecer evidências heurísticas de que ele é verdadeiro. E esses procedimentos podem ser associados ao fazer matemática, que conforme Paul Halmos [10], significa:

*Não apenas leia; lute! Faça suas próprias perguntas, procure seus próprios exemplos, descubra suas próprias provas. A hipótese é necessária? A recíproca é verdadeira? O que acontece no caso especial clássico? E os casos degenerados? Onde a prova usa a hipótese? (Halmos, 1985).*

Com o *software* GeoGebra podemos aplicar com muita propriedade o que “significa fazer matemática”, explorando, criando estratégias, argumentando, conjecturando, etc.

Ainda sobre o fazer matemática, para Terence Tao [29] a “boa matemática” poderia se referir (sem ordem particular) a:

- Boa resolução de problemas matemáticos (por exemplo, um grande avanço em um problema matemático importante);
- Boa técnica matemática (por exemplo, um uso magistral de métodos existentes ou o desenvolvimento de novas ferramentas);

- *Boas relações públicas matemáticas (por exemplo, uma apresentação eficaz de uma realização matemática para não matemáticos ou de um campo de matemática para outra);*
- *Matemática intuitiva (por exemplo, um argumento que é natural e facilmente visualizável) (Tao, 2007).*

Acreditamos que “uma boa prova matemática” pode ser inspirada a partir dos recursos proporcionados por *softwares* como o GeoGebra, pois elas obedecem a um protocolo de construção designado pelo usuário, que as executa, desde um computador ou um dispositivo móvel, seguindo uma determinada ordem. E, essa ordenação necessária a realizar uma determinada construção, pode ser encarada como uma estratégia, assim como as utilizadas para resolver determinados problemas matemáticos.

### 3. Estratégias para resolução de problemas

A *resolução de problemas* é uma ferramenta indispensável para o treinamento e o aprimoramento do conhecimento da Matemática. Basicamente, devemos compreender bem o problema, avaliar nossa competência para resolvê-lo, dimensionar a sua relevância e a sua profundidade, organizar e propor ideias, fazer uso correto da linguagem matemática, procurar analogias, executar as etapas da solução pretendida, reavaliar o processo desenvolvido, verificar as coerências etc.

A seguir iremos discutir brevemente sobre as estratégias propostas por G. Pólya [21] e L. Larson [11] que julgamos úteis para o processo de construção das animações realizadas no *software* GeoGebra e que ilustram as demonstrações presentes neste artigo.

As estratégias para resolução de problemas descritivas por Pólya são difundidas em vários trabalhos [21, 22, 23, 24] e devem compreender quatro passos básicos: compreensão do problema, planejamento, execução e avaliação. Já Larson [11] cita doze estratégias para resolução de problemas. Ou seja, ele faz um refinamento daquelas citadas por Pólya. Ao abordar um problema existe a necessidade de procurar por um padrão, traçar uma figura, formular um problema equivalente, modificar o problema, escolher uma notação efetiva, explorar as simetrias; dividir em casos, usar um raciocínio diferente, argumentar por contradição, procurar paridades, considerar casos extremos e generalizar [11]. Para maiores detalhes sobre as estratégias adotadas por Larson, sugerimos [1].

Quando falamos em *resolução de problemas* devemos considerar os variados tipos de problemas propostos nos livros didáticos. Em geral, nos livros didáticos são propostas atividades em que os autores sabem que a solução existe. Tais atividades têm como objetivo o treinamento do aluno a um novo conteúdo, complementar a teoria exposta, e fazer interconexões com outros assuntos da matemática e de outras ciências. Isso é corroborado por [27] que diferencia um exercício de um problema. Para esse autor,

*O exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido pelo resolvidor, como a aplicação de um algoritmo CONHECIDO, de uma fórmula CONHECIDA etc. O exercício envolve mera aplicação e o problema necessariamente envolve invenção ou/e criação significativa. Um problema matemático é toda situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo, e/ou a invenção de*

*uma demonstração de um resultado matemático dado. O fundamental é que o resolvidor tenha de inventar estratégias e criar ideias; ou seja: pode até ocorrer que o resolvidor conheça o objetivo a chegar, mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem os meios para atingir tal objetivo.* (Silveira, 2001)

Existem também os problemas desafiadores (também conhecidos como conjecturas e/ou problemas abertos) que não sabemos *a priori* se têm ou terão soluções. Elaborar um bom problema matemático adequado ao processo de ensino-aprendizagem, isto é, aquele que pode ser resolvido aplicando as ferramentas e as estruturas matemáticas conhecidas até a sua época é um processo que demanda treinamento, conhecimento e maturidade.

Por outro lado, para os *problemas abertos* não temos nenhuma estratégia a seguir. Dependerá essencialmente do trabalho árduo e das ideias originais de quem pretende resolvê-los. As vezes é preciso criar/descobrir uma nova teoria matemática para resolver um problema aberto. Existem problemas abertos com mais de 350 anos de idade, como, por exemplo a chamada conjectura de Goldbach.

#### 4. O GeoGebra e as demonstrações

A seguir ilustramos vários fatos de geometria euclidiana plana em que aplicamos as ferramentas visuais e dinâmicas disponíveis no GeoGebra para estabelecer provas heurísticas. Inspiramos tais construções em pesquisas, como exemplificado em [6], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [25], [26], [28] e [31].

Caso seja o interesse reproduzir as animações que foram desenvolvidas, observamos que é necessário um certo nível de familiaridade com o *software* Geogebra.

##### 4.1. Teorema de Pitágoras

Nessa subseção serão exploradas duas demonstrações do Teorema de Pitágoras. A primeira, frequentemente encontrada em livros didáticos, utiliza a ideia de áreas equivalentes, e a segunda é atribuída a Leonardo da Vinci.

**Teorema 1** (Teorema de Pitágoras). *Considere um triângulo retângulo de lados  $a$  e  $b$  e hipotenusa  $c$ . Então:*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

A Figura 1 ilustra um recorte da animação relativa à primeira demonstração. Observamos que uma construção similar foi apresentada em [14] porém, no referido trabalho os autores não se preocuparam em justificar o porquê a animação caracteriza uma prova para o Teorema, o que faremos na sequência.

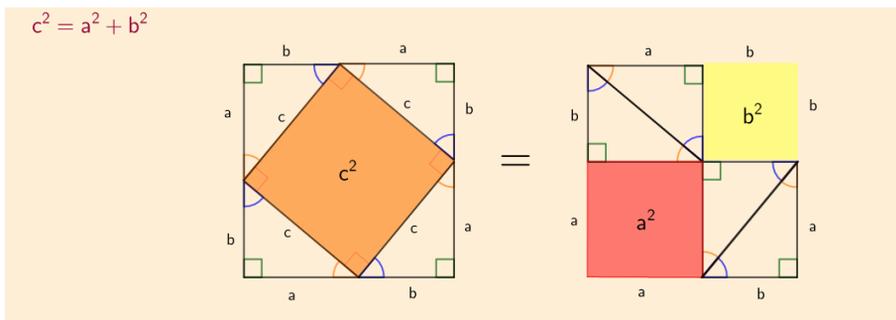


Figura 1: Ilustração da prova do Teorema de Pitágoras via equivalência de áreas.

Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/wwzd4d7j>

*Demonstração.* Conforme mencionado, o resultado é obtido usando equivalências de áreas. Na Figura 1 a esquerda, o quadrado de lado  $a + b$  é decomposto em quatro triângulos retângulos e um quadrado de lado  $c$ . Na construção final ilustrada à direita, o quadrado de lado  $a + b$  é decomposto em dois quadrados de lados  $a$  e  $b$  e dois retângulos de lados  $a$  e  $b$ .

Portanto temos:

$$c^2 + 4 \left( \frac{ab}{2} \right) = a^2 + b^2 + 2ab \implies c^2 = a^2 + b^2.$$

□

Uma outra demonstração do Teorema de Pitágoras é atribuída a Leonardo da Vinci, que nasceu na Itália em abril de 1452 e faleceu na França em maio de 1519, conforme aponta [12]. A Figura 2 ilustra uma foto original da referida prova.



"The Euclidean demonstration of the Pythagorean theorem" by Leonardo da Vinci displayed at the Louvre museum, Oct 20, 2019 in Paris. (RAFAEL YAGHOBZADEH / AP)

Figura 2: Foto original da prova do Teorema de Pitágoras por Leonardo da Vinci.

Fonte: Louvre exhibit acclaims Da Vinci (2019) [13]

Um recorte da animação realizada no GeoGebra é ilustrada na Figura 3 abaixo.

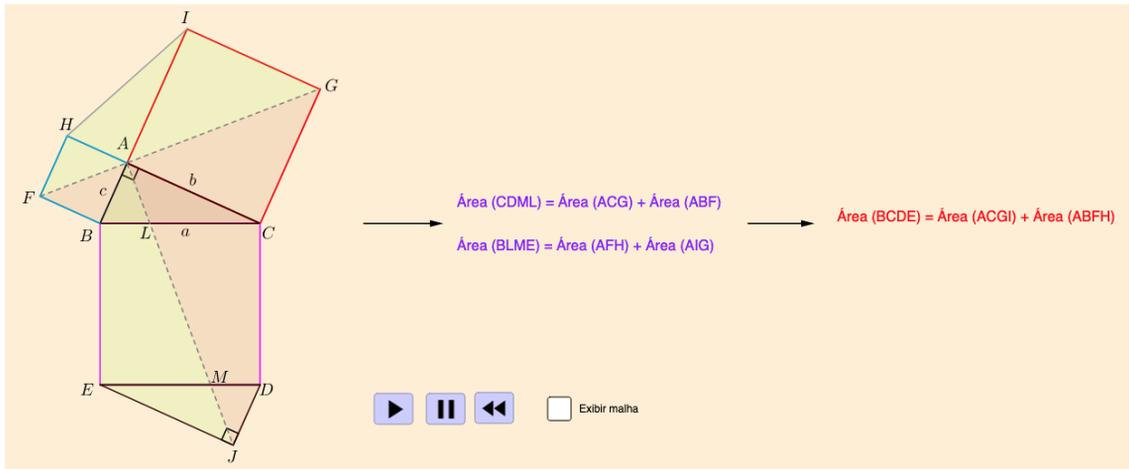


Figura 3: Ilustração da prova do Teorema de Pitágoras atribuída a da Vinci.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/u5hce3dq>

*Demonstração.* Para demonstrar o teorema, foram adicionados ao triângulo retângulo original  $ABC$  os quadrados  $BCDE$ ,  $ACGI$  e  $ABFH$  cujos lados medem  $a$ ,  $b$  e  $c$  respectivamente. Após, foram estrategicamente colocados dois triângulos ( $EDJ$  e  $AHI$ ) congruentes ao triângulo  $ABC$  e traçados os segmentos  $AJ$  e  $FG$ . Ao fazê-lo, determinou na figura quatro quadriláteros  $AFHI$ ,  $BCGF$ ,  $ABEJ$  e  $ACDJ$  congruentes entre si e, portanto, com mesma área. O segmento  $AJ$  dividiu os triângulos  $ABC$  e  $EDJ$  em outros quatro triângulos  $ABL$ ,  $ACL$ ,  $DJM$  e  $EJM$ . Notemos que os triângulos  $ABL$  e  $DMJ$  são congruentes e, conseqüentemente,  $ACL$  e  $MJE$  também o são. Voltando a atenção ao quadriláteros  $ACDJ$  e  $BCGF$ , e denotando por  $A(\text{polígono})$  a área do polígono, temos

$$A(ACDJ) = A(ACL) + A(CDML) + A(MDJ)$$

e

$$A(FBCG) = A(ACG) + A(ABC) + A(ABF)$$

Como essas áreas são iguais, vem

$$A(ACL) + A(CDML) + A(MDJ) = A(ACG) + A(ABC) + A(ABF)$$

Mas, como  $A(ABC) = A(ABL) + A(ACL)$  e como os triângulos  $DJM$  e  $ABL$  são congruentes, segue que

$$A(CDML) = A(ACG) + A(ABF)$$

Analogamente mostra-se que

$$A(BLME) = A(AFH) + A(AIG)$$

E, como

$$A(BCDE) = A(CDML) + A(BLME),$$

$$A(ACGI) + A(ACG) + A(AIG)$$

e

$$A(ABFH) = A(ABF) + A(AHF),$$

segue que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

□

Uma variação da prova de Leonardo da Vinci é ilustrada na Figura 4 que é um recorte da animação realizada para essa demonstração.

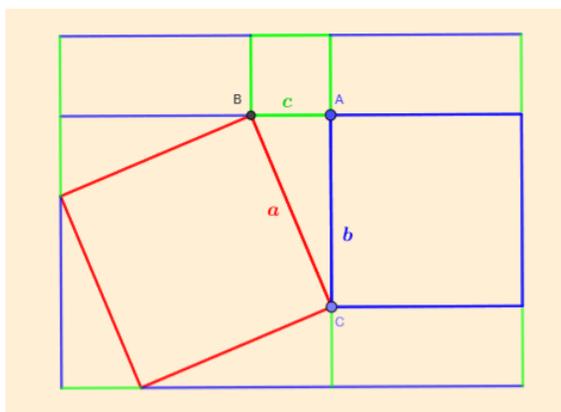


Figura 4: Decomposição de áreas.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/p8xgxwvs>

*Demonstração.* Nessa construção, um retângulo de lados  $2b+c$  e  $b+2c$  é decomposto em 3 quadrados (vermelho, azul, verde), três retângulos de lados  $b$  e  $c$ , além de quatro triângulos retângulos de lados  $b$  e  $c$  com hipotenusa  $a$ .

Logo, por equivalência de áreas, temos:

$$(b + 2c)(2b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 3bc + 4\left(\frac{bc}{2}\right) \iff a^2 = b^2 + c^2.$$

□

No que segue, listamos algumas consequências advindas da construção realizada.

*Observação 1.* Em um triângulo retângulo de lados  $b > 0$ ,  $c > 0$  e hipotenusa  $a$  temos:

$$a \leq b + c \leq \sqrt{2}a.$$

A Figura 5 ilustra esse fato.

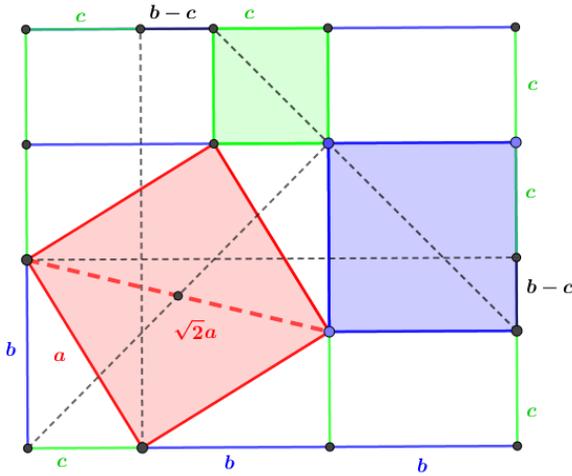


Figura 5: Ilustração que a desigualdade  $a \leq b + c \leq \sqrt{2}a$  é válida.

*Observação 2.* Referindo a Figura 6, temos que  $|AA_0| \geq |OQ_1|$  e a diferença  $|AA_0| - |OQ_1|$  é máxima quando  $\cos \beta = \sqrt[3]{2} - 1$ , sendo  $\beta \approx 74.93^\circ$ . Esse valor é igual a

$$\frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt[3]{2})^{\frac{3}{2}} a}{4}.$$

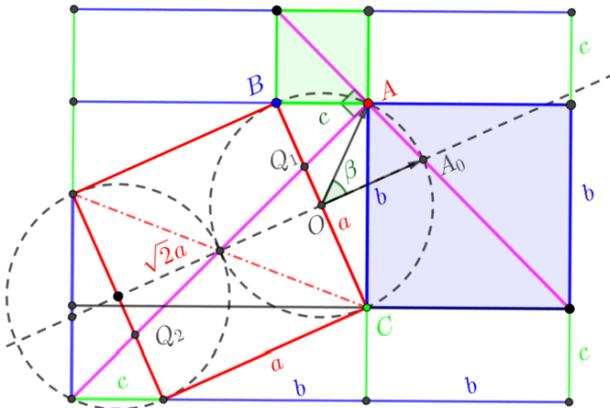


Figura 6: Conseqüências da prova do Teorema de Pitágoras usando decomposição de áreas.

*Observação 3.* Considere um triângulo com lados  $a, b, c$ , onde  $a \geq b \geq c$  e  $\varphi$  o número de ouro. Então:

$$1 < \frac{a+c}{b} < 3, \quad a \leq \frac{a+b+c}{2} = s, \quad 1 \leq \min\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}\right) < \varphi.$$

em que  $s$  é o semiperímetro do triângulo.

## 4.2. Alguns resultados de trigonometria

O teorema de Pitágoras enunciado no Teorema 1 é um caso particular da conhecida Lei dos Cossenos. Uma demonstração visual desse resultado pode ser encontrado em [4].

**Teorema 2** (Lei dos cossenos). *Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números positivos. Então:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

A figura 7 ilustra a animação feita no GeoGebra.

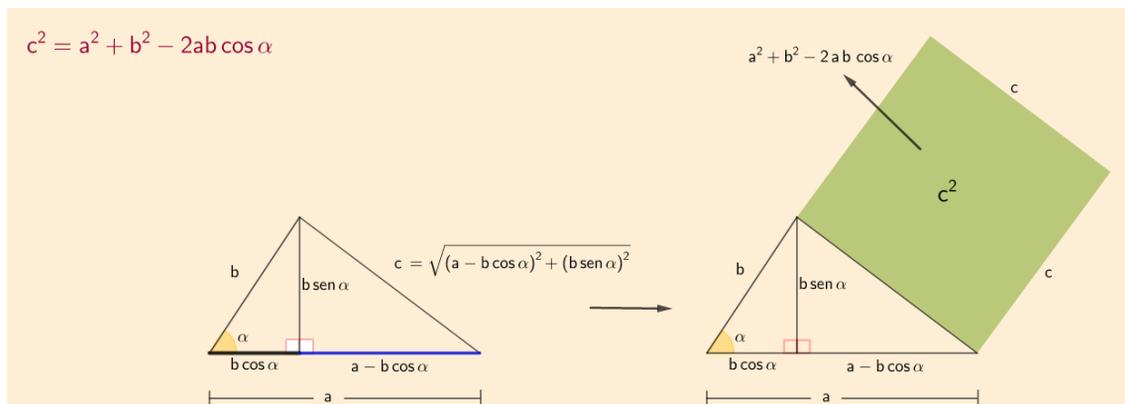


Figura 7: Ilustração da prova dinâmica do Teorema 2.

Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/pppurs6c>

*Demonstração.* O resultado é obtido usando as relações trigonométricas e o Teorema de Pitágoras. Como  $c^2 = (a - b \cos \alpha)^2 - (b \sin \alpha)^2$ , usamos a relação fundamental  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  para mostrar que  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ . □

Outro resultado importante também encontrado em [4] e em geral trabalhado no Ensino Médio é a conhecida expressão que determina o seno da diferença de dois arcos.

**Teorema 3** (Seno da diferença). *Considere dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ . Então:*

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

A figura que inspirou a animação ilustrada na Figura 8 é encontrada em [17].

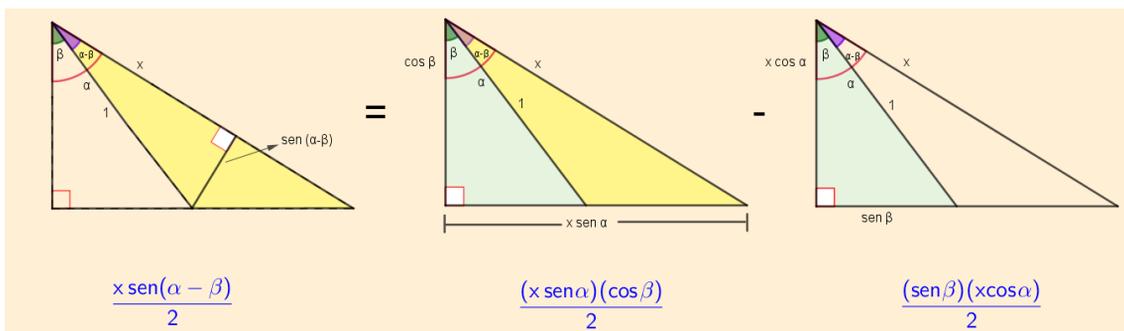


Figura 8: Ilustração da prova dinâmica do Teorema 3.

Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/rvrvndqe4>

*Demonstração.* Considere dois triângulos retângulos com hipotenusas 1 e  $x > 1$  e ângulos  $\beta$  e  $\alpha$  como ilustrado na Fig. 8 (esquerda). Usando o Teorema de Pitágoras e calculando a altura do triângulo ilustrado em amarelo, o resultado segue argumentando por equivalências de áreas. □

*Observação 4.* A hipótese  $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$  é feita somente para garantir a funcionalidade da construção dinâmica apresentada. O resultado vale sem essa restrição.

No que segue, enunciamos um resultado de trigonometria, denominado Cosseno do arco duplo, cuja prova sem palavras encontra-se em [31] e cujo processo de animação está ilustrado em [4].

**Teorema 4** (Cosseno do arco duplo). *Seja  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ . Então:*

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

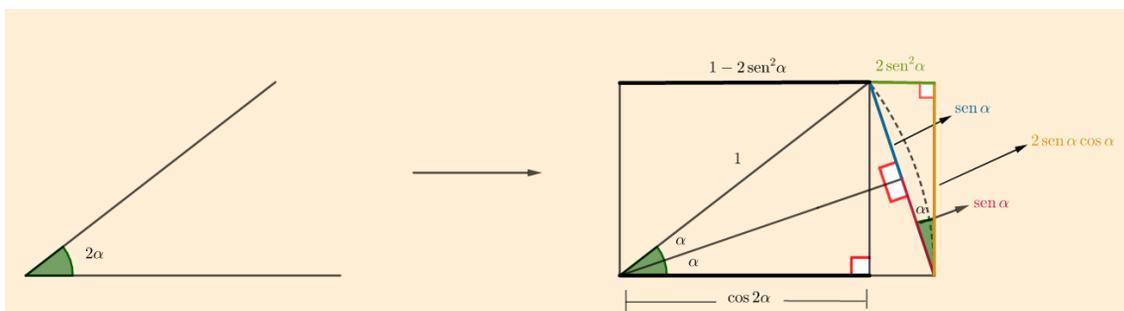


Figura 9: Ilustração da prova dinâmica do Teorema 4.

Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/vhwtaqfc>

*Demonstração.* Na construção dinâmica usamos o Teorema de Pitágoras para calcular os lados e hipotenusas dos triângulos envolvidos. O ponto crucial é convencer-se que  $a$  é um ângulo do triângulo retângulo de hipotenusa  $\sin a + \sin a = 2 \sin a$ . Mas esse fato segue-se observando na construção o triângulo isósceles de lado 1 e base  $2 \sin a$  e o triângulo retângulo com hipotenusa  $2 \sin a$  tendo um lado tangente ao arco de círculo (pontilhado) também construído.  $\square$

*Observação 5.* A hipótese  $0 < a < \frac{\pi}{4}$  foi feita somente para garantir que  $\cos 2a > 0$  (lado do retângulo) e construir a animação dinâmica. O resultado vale sem essa restrição.

O Teorema de Viviani é um resultado atribuído ao matemático, físico e astrônomo italiano Vincenzo Viviani. Encontramos na literatura ilustrações da prova desse Teorema em [17], [15], [9] e [25].

### 4.3. Teorema de Viviani e generalizações

**Teorema 5** (Teorema de Viviani). *Considere um triângulo equilátero  $\triangle ABC$  de lado  $l$  e  $P$  um ponto interior a  $\triangle ABC$  como ilustrado na Figura 10. Então as perpendiculares passando por  $P$  aos três lados do triângulo  $\triangle ABC$  determinam três segmentos com comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e cuja soma é igual à altura do triângulo denotada por  $h$ . Isto é:*

$$h = a + b + c.$$

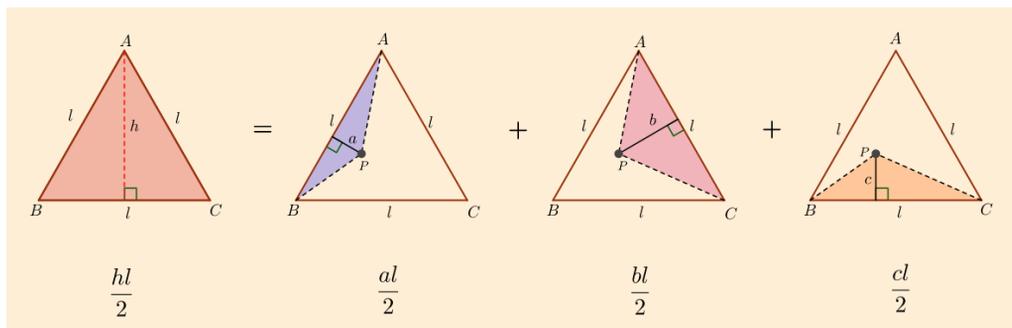


Figura 10: Ilustração da prova dinâmica do Teorema 5.  
 Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/pkrbngfe>

*Demonstração.* O resultado segue diretamente calculando as áreas dos triângulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle APB$ ,  $\triangle APC$  e  $\triangle BPC$ .

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \text{Área}(\triangle APB) + \text{Área}(\triangle APC) + \text{Área}(\triangle BPC)$$

Portanto,  $\frac{hl}{2} = \frac{al}{2} + \frac{bl}{2} + \frac{cl}{2}$  e  $h = a + b + c$ .  $\square$

Outra ilustração da animação de uma prova do Teorema 5 usando o *software* GeoGebra é esboçada na Figura 11.

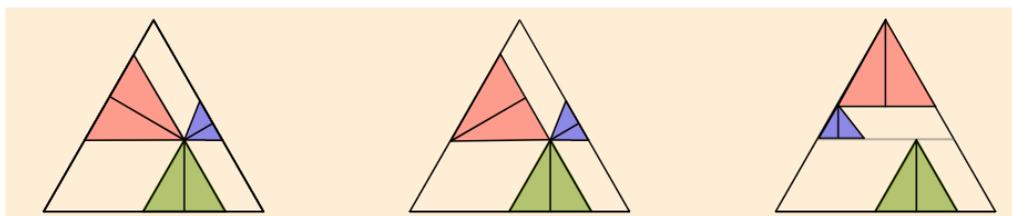


Figura 11: Versão alternativa da Prova do Teorema de Viviani  
 Animação: <https://www.GeoGebra.org/m/tvvuxn9j>

*Demonstração.* Pelo ponto  $P$  traçamos retas paralelas aos lados do triângulo  $\Delta ABC$  obtendo três triângulos equiláteros (vermelho, azul e verde). A seguir rotacionamos os triângulos (azul e vermelho) obtendo a configuração à direita como esboçado na Figura 11.  $\square$

*Observação 6.* A recíproca do teorema de Viviani é também verdadeira, ou seja, se a soma das distâncias do ponto  $P$  aos lados de um triângulo  $\Delta ABC$  é independente de  $P$ , então  $\Delta ABC$  é um triângulo equilátero. Esse resultado pode ser encontrado em [5].

*Observação 7.* Quando  $P$  é exterior ao triângulo devemos considerar a distância com sinal. Temos 6 regiões, e com a convenção de sinais, levando em consideração a orientação, temos que

$$\pm a \pm b \pm c = \pm h.$$

*Observação 8.* O artigo [5] apresenta uma generalização para esse resultado para todos os polígonos regulares. Ou seja, dado um ponto no interior do polígono regular  $\mathcal{P}_n$ , a soma das distâncias do ponto  $P$  às retas contendo os lados de  $\mathcal{P}_n$  é independente de  $P$ .

*Observação 9.* Para um quadrilátero, a soma das distâncias de um ponto interior  $P$  aos lados é independente de  $P$  se, e somente se, o quadrilátero é um paralelogramo.

Uma generalização do Teorema de Viviani para o espaço 3D é apresentada em [7]. A Figura 12 ilustra a animação realizada no GeoGebra.

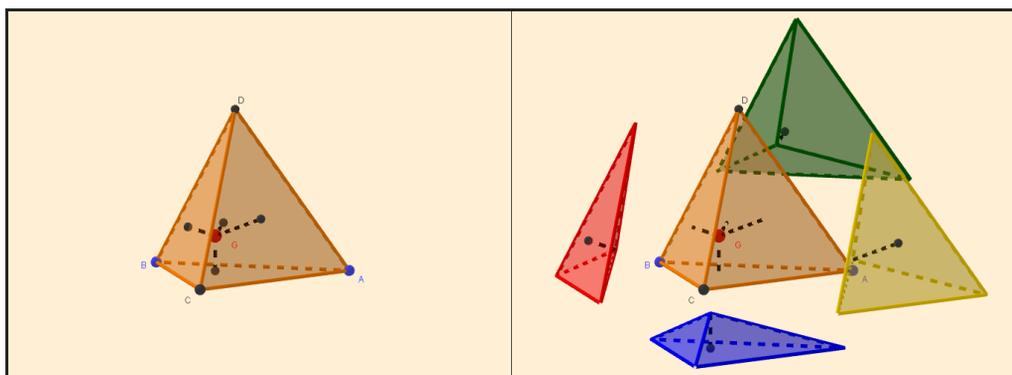


Figura 12: Generalização do Teorema de Viviani para o espaço.  
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/tzbu7ynq>

**Teorema 6** (Teorema de Viviani no espaço). *Em um tetraedro regular, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro.*

*Demonstração.* Consideremos o ponto  $G$  interior ao tetraedro regular  $ABCD$  de altura  $h$  e seja  $A$  a área de cada face. Notemos que  $G$  divide  $ABCD$  em quatro outros tetraedros de altura  $h_i$ . Então,

$$\text{Volume}(ABCD) = \frac{Ah}{3} = \frac{Ah_1}{3} + \frac{Ah_2}{3} + \frac{Ah_3}{3} + \frac{Ah_4}{3}.$$

Portanto,  $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ . Ou seja, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro. □

*Observação 10.* Conforme consta em [7] usando o mesmo argumento, o Teorema 6 pode ser generalizado para qualquer poliedro cujas faces possuem a mesma área. E, portanto, não inclui apenas os outros quatro poliedros regulares, mas também os irregulares que satisfazem tal condição.

Para encerrar esse artigo, vamos retomar alguns conceitos apresentados em [3] e que são temas frequentes nas salas de aula, visto suas aplicabilidades.

#### 4.4. Proporção áurea e números de Fibonacci

##### 4.4.1 Proporção áurea e o número de ouro

**Definição 1.** Um retângulo de lados  $a$  e  $b$  é chamado retângulo de ouro se  $a/b = (\sqrt{5} + 1)/2 = \varphi$ . O número  $\varphi$  é chamado número de ouro.

A Figura 13 ilustra uma animação da construção desse retângulo.

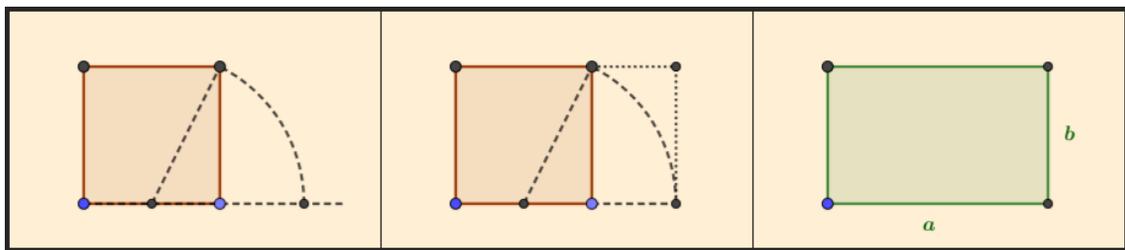


Figura 13: Construção do retângulo de ouro.  
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/qqanjgpe>

Conforme consta em [3] a proporção apresentada na definição acima é conhecida desde os pitagóricos de cinco séculos a.C. e foi descoberta no pentágono regular, ilustrada na Figura 14.

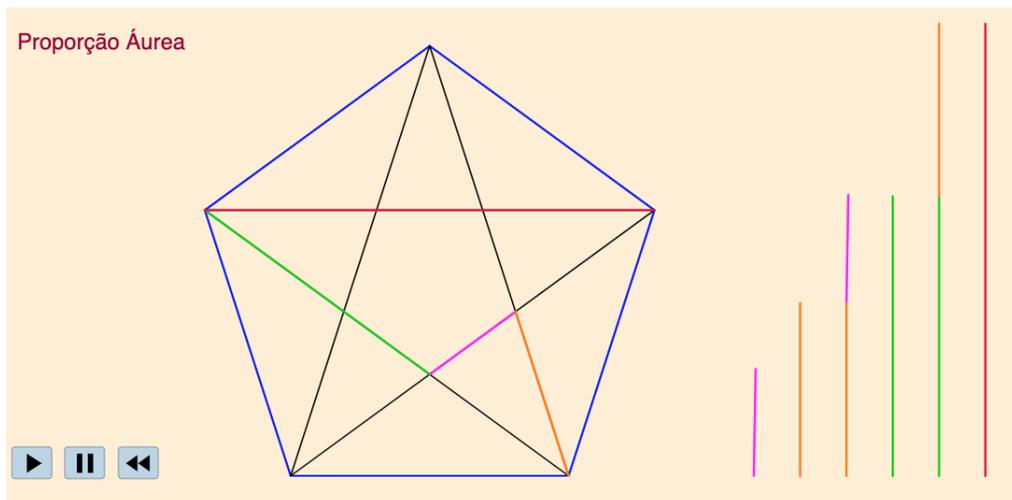


Figura 14: Proporção áurea no pentágono regular.  
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/w6exuftp>

Com o pentágono regular previamente construído, traçamos todas as diagonais desse polígono. Assim, por meio dessas extensões das diagonais formamos um pentagrama. Observando essas diagonais, utilizamos a proporção dois por um, isto é, vemos que a soma do comprimento das diagonais destacadas em roxo e laranja é igual ao comprimento da terceira diagonal em verde, e, além disso, a segunda e a terceira (laranja e verde) diagonais somadas são exatamente iguais à quarta (vermelha). Essa característica é conhecida como *Proporção Áurea*. Veja também [19].

Sejam dois números reais positivos  $a$  e  $b$  satisfazendo a equação

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b}{a}$$

e considere a Figura 15 construída partindo dos retângulos de ouro  $ABMI$  e  $ACEH$ . As diagonais  $IB$  e  $CH$  são paralelas e formam um ângulo  $\alpha = \arctan(\varphi)$  com os lados verticais.

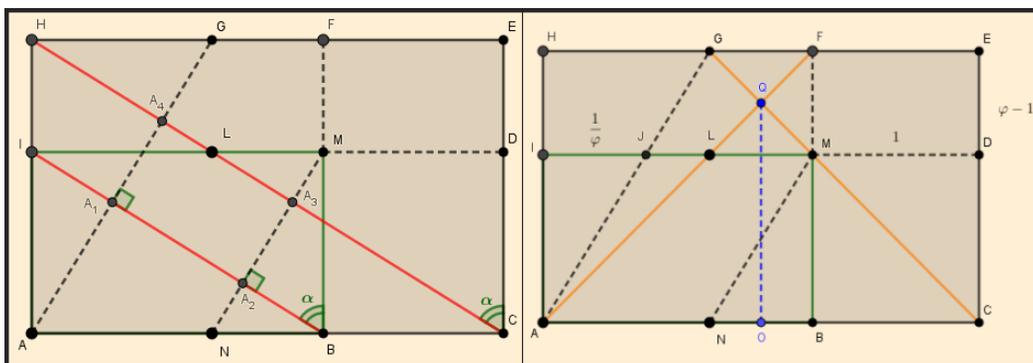


Figura 15: Propriedades do número de ouro  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

**Teorema 7.** Na Figura 15 os retângulos  $ABMI$ ,  $ACEH$ ,  $MDEF$ ,  $HILG$ ,  $ANGH$ ,  $NBML$ ,  $A_1A_2A_3A_4$  são retângulos de ouro. As diagonais  $AF$  e  $GC$  dos quadrados  $ABFH$  e  $NCEG$  de lados  $\varphi$  e  $1 + 1/\varphi = \varphi$  intersectam-se num ponto cuja projeção ao lado  $AC$  é o seu ponto médio  $(A + C)/2$ .

*Demonstração.* Na construção da Figura 15 observamos que as diagonais  $MN$  e  $AG$  são paralelas e ortogonais às diagonais  $HC$  e  $IB$ . Das construções efetuadas observamos que  $|IJ| = |LM| = 1/\varphi$  e  $|JL| = 1/\varphi^2$ . Fazendo uso das relações métricas de triângulos retângulos, todas as afirmações podem ser verificadas lembrando que  $\varphi^2 = \varphi + 1$ .  $\square$

#### 4.4.2 Sequência de Fibonacci, número Pi e relações trigonométricas

**Teorema 8.** A sequência de Fibonacci definida por  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ,  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$  é dada por

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n + (-\varphi)^{-n})$$

onde  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  é o número de ouro. Além disso,

$$\arctan\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{f_{n-1}}{f_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+2}}{f_{n-1}} = \varphi^3.$$

*Demonstração.* A solução da equação linear de recorrência  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ,  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$  é obtida procurando um candidato da forma  $f_n = \lambda^n$ . Substituindo, obtemos a equação do segundo grau  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$  cuja solução  $\{\varphi, -1/\varphi\}$  onde  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ . Finalmente, procurando uma solução na forma  $f_n = k_1\varphi^n + k_2(-\frac{1}{\varphi})^n$  obtemos o resultado com  $k_1 = 1/\sqrt{5}$  e  $k_2 = -1/\sqrt{5}$ .

A demonstração da segunda parte é baseada na Figura 16 inspirada em [9]. Na figura temos uma sequência de quadrados de lados  $f_n$  e retângulos de lados  $f_{n+1} > f_n$ ,  $f_{n+2} > f_{n+1}$  e  $f_{n+2} > f_{n-1}$ . Como mostrado, as diagonais de três retângulos definem um triângulo retângulo isósceles e, portanto, o resultado segue usando as relações trigonométricas.

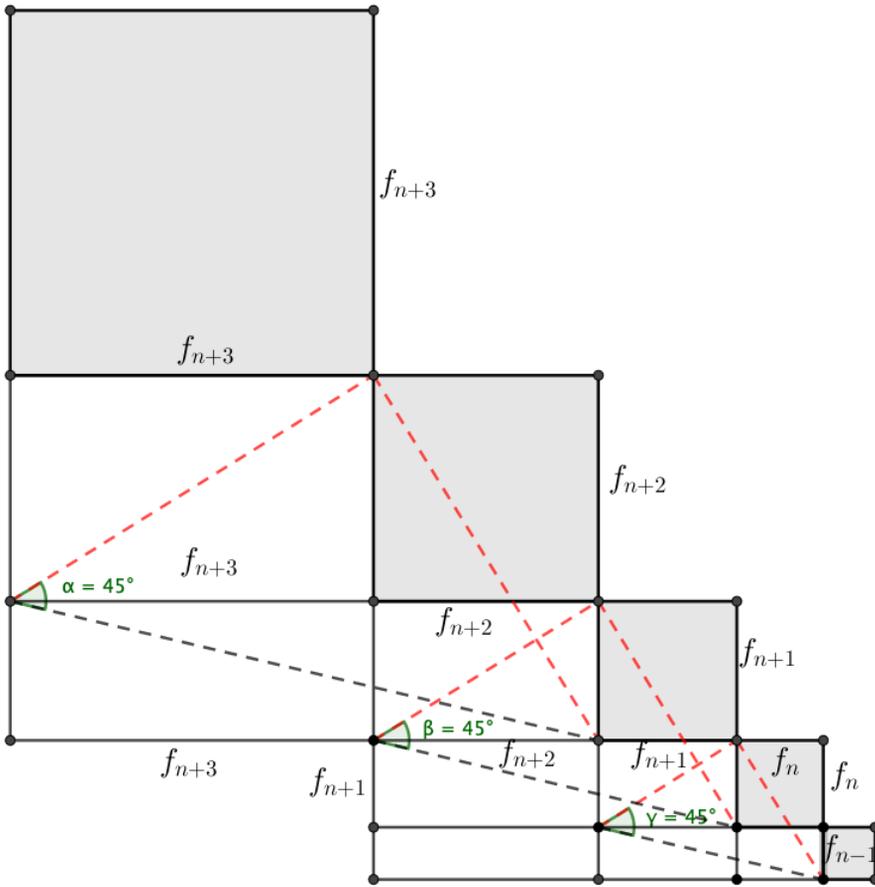


Figura 16: Sequência de Fibonacci e invariância envolvendo o número de ouro  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .  
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/vfzqjvfa>

□

**Corolário 1.** Nas condições anteriores,

$$\arctan(\varphi) + \arctan(\varphi^3) = \frac{3\pi}{4} \text{ e } \arctan\left(\frac{1}{\varphi}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\varphi^3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

*Demonstração.* Segue da relação

$$\arctan\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{f_{n-1}}{f_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

fazendo o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , e da relação

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Lembramos também que

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad xy \neq 1.$$

□

Uma relação trigonométrica muito conhecida, envolvendo arcos tangentes, é a seguinte:

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Um questionamento natural é se essa relação vale para outros valores. Na busca de respostas é possível perceber uma relação entre trigonometria e a sequência de Fibonacci.

Considere a Figura 17 decomposta em três triângulos retângulos  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ADG$  e  $\triangle DFG$ .

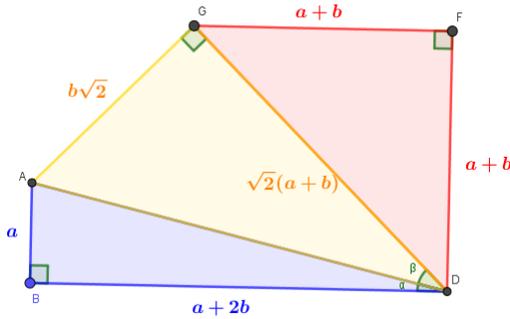


Figura 17: Relações trigonométricas e o número  $\pi$ .

**Teorema 9.** Nas condições acima tem-se:

$$\arctan\left(\frac{a}{a+2b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a+b}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

*Demonstração.* Segue diretamente das relações métricas dos triângulos retângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle ADG$ .

□

**Corolário 2.** Supondo  $a = f_n$ ,  $b = f_{n+1}$  na sequência de Fibonacci, tem-se que

$$\arctan\left(\frac{f_n}{f_{n+3}}\right) + \arctan\left(\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

e

$$\arctan\left(\frac{1}{\varphi^3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

*Demonstração.* Segue diretamente dos Teoremas 8 e 9.

□

**Corolário 3.**

$$\arctan(\varphi) + \frac{\arctan(2)}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \arctan\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\arctan(2)}{2}.$$

*Observação 11.* A Figura 18 ilustra uma configuração de quadrados cujos lados são os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8 e arcos de círculos formando uma espiral.

**Sequência de Fibonacci**

Exibir malha

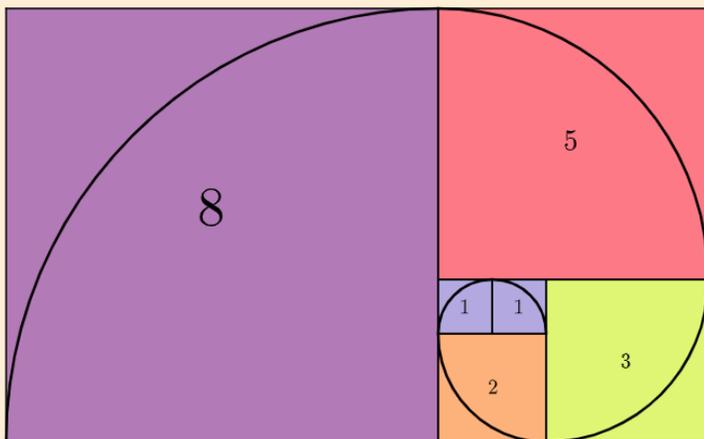


Figura 18: Sequência de Fibonacci e curva espiral formada por arcos de círculo.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/vv3vdmrj>

A espiral formada que se assemelha ao logotipo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

**5. Conclusão**

Usando a potencialidade das ferramentas disponíveis em um *software* de Matemática dinâmica, ilustramos demonstrações de resultados como o Teorema de Pitágoras, algumas relações trigonométricas e o Teorema de Viviani (no plano e o espaço). Também enunciamos e demonstramos algumas relações provenientes do número de ouro e da sequência de Fibonacci. Conforme já salientamos, diferentemente do apresentado em outros trabalhos que apenas exibiram ilustrações, sem nenhum tipo de explicação, neste artigo concentramo-nos em exibir as provas no formato de uma animação. Além disso, em todos os resultados apresentamos uma demonstração e possíveis desmembramentos, na forma de observações. Esperamos que esse artigo possa servir de inspiração para aqueles que apreciam geometria e tecnologias.

**Agradecimentos**

Os autores agradecem a Humberto Bortolossi pelos comentários e observações.

## Referências

- [1] Alencar, H.; Cândido, L.; Farias, M. Resoluções Visuais de Alguns Problemas de Matemática da Educação Básica. *Professor de Matemática Online (PMO)* - Sociedade Brasileira de Matemática, v. 6, n. 1, 2019. DOI: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo71>
- [2] Atiyah, M. F. An interview with Michael Atiyah. *Math. Intelligencer*, vol. 6, pp 9–19, 1984.
- [3] Ávila, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, v. 6, 1985.
- [4] Cândido, L.; Farias, M. Uma demonstração visual. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, vol. 99, p. 31, 2019.
- [5] Chen, Z.; Liang, T. The converse of Viviani's theorem. *The College Mathematics Journal*. 37 (5): (2006) 390–391.
- [6] Descartes, R. *Oeuvres de Descartes*. Ch. Adam & P. Tannery, Paris: Vrin/CNRS, 1964.
- [7] De Villiers, M. 3D Generalisations of Viviani's theorem. *The Mathematical Gazette*. 97 (540) : (2013) 441–445.
- [8] Doyle T.; Kutler L.; Miller R.; Schueller A., “Proofs Without Words”, Convergence (2014)
- [9] Gasull, A. *55 proves sense paraules*. MATERIALS MATEMÀTICS MAT2 Volum 2022, treball no. 2, 61 pp. Disponível em: <<https://mat.uab.cat/web/matmat/wp-content/uploads/sites/23/2022/02/v2022n02.pdf>>. Acesso em: 28 fev. 2022.
- [10] Halmos, P. *I Want to Be a Mathematician: An Automathography*. Springer Verlag. 1985.
- [11] Larson, L. C. *Problem-Solving Through Problems*. Springer, New York, 1983.
- [12] Lemmermeyer, F. Leonardo da Vinci's Proof of the Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal*, vol. 47, n. 5 (November 2016), pp. 361–364.
- [13] Louvre exhibit acclaims Da Vinci, 500 years after his death. *China Daily*, Hong Kong, 22 out. 2019. Disponível em: <<https://www.chinadailyhk.com/articles/178/107/3/1571730700699.html>>. Acesso em: 03 mar. 2022.
- [14] Mathias, C. V.; Alencar, H.; Leivas, J. C. P. Provas sem Palavras, Visualização, Animação e GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, v. 8, n. 2, p. 62-77, 2019. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p062-077>
- [15] Miller, R. *On Proofs Without Words*. Whitman College, 2012. <<https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/Miller.pdf>>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- [16] Nelsen, R. B. *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 1993.
- [17] Nelsen, R. B. *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 2000.
- [18] Nelsen, R. B. *Proofs without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 2016.
- [19] O Número de Ouro e sua Aplicação em Design. *Velho Bit*, 20 jan. 2017. Disponível em: <<https://velhobit.com.br/design/o-numero-de-ouro-e-sua-aplicacao-em-design.html>>. Acesso em: 11 mar. 2022.

- [20] Ortega, R. C. S.; Sano, M. Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática, *Professor de Matemática Online (PMO)* - Sociedade Brasileira de Matemática, v. 8, n. 4, pp. 440–461, 2020. DOI: <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo832>
- [21] Polya, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Interciência, Rio de Janeiro, 1995.
- [22] Polya, G. *Mathematics and Plausible Reasoning: Patterns of Plausible Inference*. Princeton University Press, v. 2, Princeton, 1968.
- [23] Polya, G. *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press, v. 1, Princeton, 1990.
- [24] Polya, G. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press. (2004).
- [25] Samelson, H. Proof Without Words: Viviani's Theorem with Vectors. *Mathematics Magazine*, v. 76 (2003) 225.
- [26] Schoenfeld, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, New York, 1985.
- [27] Silveira, J. F. P. O que é um problema matemático? 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/portosil/resu1.htmlj>. Acesso em: 04 julho 2022.
- [28] Sipka, T. A. The law of cosines. *Mathematics Magazine*, v. 61, n. 4, p. 259, 1988.
- [29] Tao, T. What is good mathematics? *Bulletin of Amer. Math. Society.*, vol. 44, n. 4, out. 2007, pp. 623–634.
- [30] Thurston, W. On proof and progress in mathematics. *Bulletin of Amer. Math. Society.*, vol. 30, n. 2, abr. 1994, pp. 161–177.
- [31] Unal, H. Proof Without Words: Double Sum for Sine and Cosine *The College Mathematics Journal*, v. 41, n. 5, p. 392, 2010.

Hilário Alencar  
Universidade Federal de Alagoas  
<[hilario@mat.ufal.br](mailto:hilario@mat.ufal.br)>

Larissa Cândido  
EMEB Dr. Gustavo Paiva  
<[larikarollynne95@gmail.com](mailto:larikarollynne95@gmail.com)>

Ronaldo Garcia  
Universidade Federal de Goiás  
<[ragarcia@ufg.br](mailto:ragarcia@ufg.br)>

Carmen Mathias  
Universidade Federal de Santa Maria  
<[carmen@ufsm.br](mailto:carmen@ufsm.br)>

Recebido: 27/02/2022  
Publicado: 06/09/2022

# Um estudo sobre as equações do segundo grau e suas concepções no Exame Nacional do Ensino Médio

José Edmilson Melo da Silva 

Aldo Trajano Lourêdo <sup>1</sup> 

## Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar como a noção de equação do segundo grau é concebida na educação básica a partir de suas diferentes concepções. Assim, nosso trabalho justifica-se na importância investigarem-se os processos de ensino e aprendizagem desse ente matemático tão importante, a fim de encontrar subsídios para o aprimoramento da prática pedagógica. Para tanto, selecionamos as provas das últimas 10 edições do Exame Nacional do Ensino Médio e sondamos, dentro das questões da área de Matemática e suas tecnologias, apenas as que tratavam do nosso objeto de estudo. Assim, procedemos uma análise minuciosa de cada questão selecionada, classificando-as quanto a pertinência a essas concepções. Por fim, discutimos algumas considerações a respeito desses resultados e sua relevância no contexto do ensino de matemática na educação básica, relacionando-os com os resultados de outras pesquisas na área.

**Palavras-chave:** Concepções; Ensino; Equação.

## Abstract

The objective of this work is to investigate how the notion of high school equation is conceived in basic education from its different conceptions. Thus, our work is justified by the importance of investigating the teaching and learning processes of this very important mathematical entity, in order to find subsidies for the improvement of pedagogical practice. To do so, we selected the tests from the last 10 editions of the National High School Exam and probed, within the questions of the area of Mathematics and its technologies, only those that dealt with our object of study. Thus, we carried out a thorough analysis of each selected question, classifying them in terms of their relevance to these conceptions. Finally, we discuss some considerations about these results and their relevance in the context of teaching mathematics in basic education, relating them to the results of other research in the area.

**Keywords:** Conceptions; Teaching; Equation.

## 1. Introdução

Este artigo foi adaptado da dissertação de mestrado do Profmat/UEPB de Silva [17], na qual foi feita uma abordagem mais detalhada do tema aqui tratado.

<sup>1</sup>Apoiado pela Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (Fapesq), Termo de Outorga n° 3024/2021.

A matemática é, sem dúvidas, uma das mais importantes áreas do conhecimento científico, tendo aplicações em inúmeras ciências, no cotidiano e no desenvolvimento tecnológico. Apesar disso, é também considerada um dos componentes curriculares mais complicados, por parte dos estudantes. Nessa perspectiva, muitas pesquisas têm mostrado que grande parte dos problemas associados ao ensino e à aprendizagem da matemática emergem quando se introduzem conceitos algébricos, como equações e funções. Desse modo, nossa pesquisa surgiu com o propósito de buscar respostas para um questionamento muito pertinente à prática docente do professor de matemática, que envolve o desafio de compreender e poder intervir sobre os problemas e dificuldades de ensino e de aprendizagem do conceito de equação, em especial da equação do segundo grau. Dessa forma, nossa pesquisa tem o objetivo de investigar como a noção de equação do segundo grau é concebida na Educação Básica a partir de suas diferentes concepções. Para tanto, precisamos fragmentar nosso objetivo principal nos seguintes objetivos mais específicos:

- Compreender os aspectos epistemológicos das equações a partir da História da Matemática;
- Analisar a noção de equação do segundo grau sob a ótica da matemática através das principais técnicas de resolução adotadas no ensino básico, explorando sua relação com a função quadrática;
- Investigar as tendências no ensino das equações na perspectiva da Educação Matemática, promovendo um diálogo entre pesquisas já desenvolvidas;
- Caracterizar e discutir as diferentes concepções da noção de equação e sua pertinência para tal pesquisa;
- Sondar, identificar, categorizar e discutir as diferentes concepções da noção de equação na Educação Básica a partir de uma análise do Exame Nacional do Ensino Médio.

Desse modo, esta pesquisa justifica-se na iminente importância de tal ente matemático e de seus processos de ensino e aprendizagem, que devem se dar de modo a formar indivíduos autônomos e críticos, com habilidades para aplicar tais conhecimentos não só no campo teórico, mas também na prática de suas atividades cotidianas. Assim, a fim de melhor apresentar nosso trabalho, o organizamos em algumas seções, que vão desde os estudos preliminares, que fundamentaram teoricamente nossa pesquisa, até os resultados de uma investigação ancorada no Exame Nacional do Ensino Médio, à luz de um perfil conceitual de equação.

Assim, após apresentar os elementos introdutórios de nossa pesquisa nessa Seção 1, nosso artigo está organizado do seguinte modo: na Seção 2 deste material destacamos como as equações eram concebidas no decorrer da história da matemática, a partir do relato das principais contribuições dos babilônios, egípcios, gregos, hindus, árabes e europeus. Já num segundo momento, na Seção 3, tratamos dos principais métodos de resolução de equações do segundo grau a partir de uma pesquisa bibliográfica em livros didáticos.

Em seguida, discutimos brevemente, na Seção 4, como a noção de equação é compreendida na perspectiva da Educação Matemática, na qual apresentamos um perfil conceitual proposto por Ribeiro [13], composto por cinco diferentes concepções, e que utilizamos em nossa pesquisa com o Enem. Por fim, na Seção 5 deste trabalho, apresentamos e discutimos os resultados de uma pesquisa que investigou as concepções de equação do segundo grau nas últimas 10 edições do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e finalizamos, na Seção 6, com algumas considerações acerca dos resultados obtidos e suas implicações.

## **2. As Equações na História da Matemática**

Apesar de ser concebida atualmente em um campo algébrico bem desenvolvido, abstrato e rico em simbologia própria, não era assim que as equações eram compreendidas e estudadas nos primór-

dios da humanidade. Nesse contexto, vamos nos debruçar em uma breve passagem por algumas civilizações que foram marcantes no desenvolvimento desse ente matemático, e entender o passo a passo de como tal conceito surgiu e foi moldado até a forma como é estudado nos dias atuais.

Para começar, contemplamos um estudo sobre a civilização babilônica, que inclui um conjunto de povos que viveram entre 3500 a.C. até os primeiros séculos da era cristã na região da antiga Mesopotâmia. Seus registros escritos foram deixados em tábuas de argila, que contemplavam conceitos matemáticos relacionados com as suas atividades comerciais, econômicas e agrícolas. No que diz respeito às equações, eles as utilizavam principalmente em situações geométricas, muitas vezes como fórmulas aplicadas a seus problemas, o que os caracterizavam por uma geometria algébrica bem desenvolvida para a época.

Segundo Eves ([7], p. 61-62), na cultura babilônica “não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro)”. Além disso, resolviam seus problemas comumente enunciando o passo a passo de processos para a obtenção de alguma solução particular positiva, que solucionasse determinado problema.

Seguindo um pouco mais a diante na história, identificamos que os egípcios antigos, famosos por suas grandiosas pirâmides, também desenvolveram a matemática como ferramenta para suas atividades cotidianas, abordando-as em problemas envolvendo pão, cerveja, balanceamento de rações, armazenamento de alimentos e na engenharia de suas construções, como apontam Ribeiro e Cury ([12], p. 30) e Eves ([7], p. 73). De forma similar aos babilônios, os egípcios também não dispunham de uma álgebra abstrata e costumavam registrar a resolução de suas equações por extenso, enunciando o passo a passo para a obtenção de suas soluções.

Para resolver as equações, os egípcios utilizavam-se de artifícios aritméticos, como o método da “falsa posição”, por exemplo. De acordo com Eves ([7], p. 73), suas atividades algébricas envolviam a resolução de equações lineares e equações do segundo grau bem simples, embora, por outro lado, alguns de seus escritos apontem para o desenvolvimento de uma simbologia abstrata, uma vez que foram evidenciados, em alguns de seus papiros, símbolos para sinais matemáticos e para as incógnitas.

Com feitos marcantes para o desenvolvimento científico da matemática e sua perpetuação para as futuras gerações, os gregos antigos foram a fundo no estudo dessa ciência. Suas principais atividades matemáticas faziam-se presentes no campo da geometria, onde eles eram muito fortes. Essa geometria avançada, de caráter demonstrativo, surge com Tales de Mileto (por volta de 640 a.C. a 564 a.C.), homem rico e considerado “um dos sete sábios da Grécia antiga”. Na perspectiva dos gregos, a matemática intuitiva desenvolvida pelos babilônios e egípcios não era muito agradável e, por sua vez, eles estimularam a necessidade de demonstrações e justificativas lógicas na resolução de problemas matemáticos, inclusive quando tratavam de equações. (GARBI, [8], p. 21).

Nesse contexto, diversos trabalhos, com destaque para os *Elementos* de Euclides, passam a apresentar demonstrações, validando matematicamente várias propriedades e técnicas antes utilizadas sem uma devida validação. Os gregos desenvolveram estudos sobre diversos tipos de equações, assim como as civilizações discutidas anteriormente, trabalhando com equações lineares, quadráticas, dentre outras, porém, com um caráter mais abstrato.

Diofanto de Alexandria, que viveu por volta de 250 d.C., é considerado até hoje o maior algebrista grego. Para Ribeiro e Cury [12], ele contribuiu significativamente para o desenvolvimento da álgebra, uma vez que propiciou o aperfeiçoamento da simbologia e da linguagem escrita da matemática

algébrica, desenvolveu, em seu trabalho *Arithmética*, uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números e apresentou um significativo estudo de um tipo bem particular de equações, cujo nome é dado em sua homenagem, as equações diofantinas.

Por sua vez, os hindus destacaram-se na matemática como calculistas habilidosos, seus principais trabalhos datam do Século II d.C. Na resolução de equações comumente recorriam a métodos aritméticos, como a regra da “falsa posição” e o método da “inversão”. Seus trabalhos com equação do segundo grau são mais evidenciados em situações geométricas, utilizando-as, muitas vezes, como fórmulas.

De acordo com Silva ([16], p. 22), o matemático Bháskara (1114 – 1185) deu grandes contribuições para as pesquisas com equações, já que, em seu trabalho *Lilavati*, ele “abordava diversos conteúdos da matemática, entre as quais equações lineares e quadráticas”. A partir desse e de outros estudos, os hindus foram responsáveis por ampliar o estudo das soluções de uma equação do segundo grau, passando a considerar a solução negativa. Além disso, demonstraram não estar preocupados apenas em encontrar uma solução particular qualquer para a equação, na verdade, os hindus costumavam empenhar-se em encontrar todas as possíveis soluções da mesma, o que passou a representar um grande avanço no estudo das equações algébricas.

Esses conhecimentos hindus, assim como os que foram deixados pelos gregos antigos, foram adquiridos pelos árabes que, por sua vez, traduziram muitos desses trabalhos e foram cruciais na disseminação da matemática pela Europa. Além disso, como destaca Silva [15], os árabes também deram significativas contribuições a esses trabalhos, discutindo equações lineares, de segundo grau e cúbicas, principalmente através de artifícios aritméticos ou geométricos. Assim como os hindus, eles também tiveram a preocupação em explorar não apenas alguma solução particular de uma equação, já que, segundo Ribeiro e Cury ([12], p. 33), nos trabalhos de al-Khwarizmi, as equações poderiam ser reduzidas a seis tipos, “uma preocupação constante em buscar formas canônicas que possibilitassem resolver qualquer tipo de equação quadrática.”

Munidos do sistema de numeração hindu-arábico e de conhecimentos e técnicas desenvolvidas e disseminadas pelos demais povos que citamos, os europeus foram responsáveis por uma verdadeira revolução na matemática e, conseqüentemente, no campo de estudo das equações algébricas. Isso porque os estudos de equações deixavam de ser ancorados na resolução de problemas cotidianos e a álgebra ganhava cada vez mais simbologia e notação própria, tornando-se ainda mais abstrata. Nessa perspectiva, apesar de diversos estudos sobre as equações polinomiais, inclusive de graus 3, 4 e 5, as pesquisas que se desenvolvem passam a explorar as equações não apenas a partir de suas soluções, mas na busca por generalizações, métodos sofisticados, propriedades e estudo de suas estruturas.

A partir daí, foram desenvolvendo-se estudos sobre funções, estudando-se suas propriedades, representações, estudo de seus coeficientes. Segundo Garbi ([9], p. 69-70), “Fermat havia desenvolvido uma técnica de associar equações a linhas geométricas para estudá-las, como se faz modernamente em Geometria Analítica”. Assim, a álgebra propiciou o desenvolvimento de teorias bastante abstratas, envolvendo os variados campos da matemática, como a Teoria das Equações Algébricas, o Cálculo Diferencial e Integral, a Teoria dos Grupos, dentre outras. Essas, caracterizam de forma clara o interesse dos matemáticos da época pelo estudo das propriedades estruturais dos entes matemáticos, como destaca Silva [17].

### 3. A Equação do Segundo Grau no Livro Didático

Com o intuito de compreender mais a fundo como o conceito de equação do segundo grau vem sendo tratado, realizamos a seleção de duas coleções de livros didáticos, uma do Ensino Fundamental II e outra do Ensino Médio, para investigar como os mesmos abordavam tal conceito no que diz respeito aos principais métodos de resolução abordados.

Para a seleção das coleções foram estabelecidos os seguintes critérios:

Ter sido aprovada no PNLD 2017 (Ensino Fundamental II) e no PNLD 2018 (Ensino Médio); Ter sido adotada na rede pública municipal (Ensino Fundamental II) e na estadual (Ensino Médio) do município de São Joaquim do Monte - PE nos últimos três anos.

Durante a seleção dos livros do Ensino Fundamental II, verificamos que as coleções aprovadas no PNLD 2017 foram: *Praticando Matemática*, *Descobrimo e Aplicando a Matemática*, *Matemática do Cotidiano*, *Matemática - Compreensão e Prática*, *Projeto Teláris - Matemática*, *Projeto Araribá - Matemática*, *Matemática - Ideias e Desafios*, *Matemática - Bianchini*, *Matemática nos Dias de Hoje - Na Medida Certa*, *Convergências - Matemática e Vontade de Saber*. Após uma consulta a Secretaria Municipal de Educação, a coleção *Praticando Matemática* (ANDRINI; VASCONCELOS, [1]) foi identificada como sendo adotada unanimemente na rede municipal de São Joaquim do Monte e, assim, foi selecionada para a nossa pesquisa.

Com relação ao Ensino Médio, identificamos as coleções aprovadas no PNLD 2018: *Quadrante Matemática*, *Matemática: Interação e Tecnologia*, *Contato Matemática*, *Matemática - Paiva*, *Matemática: Ciência e Aplicações*, *Conexões com a Matemática*, *Matemática para Compreender o Mundo* e *Matemática: Contexto e Aplicações*. Para atender ao nosso segundo critério, realizamos uma consulta à Escola de Referência em Ensino Médio Frei Epifânio, responsável pelo Ensino Médio do município, constatando que a coleção adotada em sua sede e anexos era a *Quadrante Matemática* (CHAVANTE; PRESTES, [5]), a qual adotamos para nossa análise.

Assim, munidos dessas duas coleções, procedemos uma sondagem das mesmas a fim de identificar os principais métodos de resolução das equações polinomiais do segundo grau no ensino básico. A partir de nossa análise, identificamos tais métodos:

**Aplicação da fórmula de Bháskara:** Este método consiste em identificar os coeficientes reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  em uma equação do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$ , e descobrir os valores reais de  $x$  que satisfazem a mesma após aplicar tais coeficientes na fórmula tradicionalmente conhecida como “fórmula de Bháskara”, que é dada por

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}/2a$$

Por exemplo, para resolver a equação  $x^2 + 2x - 3 = 0$  note que  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $c = -3$ . Aplicando os valores dos respectivos coeficientes na fórmula acima, temos que:

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}/(2 \cdot 1) = (-2 \pm 4)/2.$$

Logo, podemos concluir que as soluções reais são  $x_1 = (-2 + 4)/2 = 1$  e  $x_2 = (-2 - 4)/2 = -3$ .

**O método de completar quadrados:** Esse método consiste em tomar uma equação do segundo grau e manipular a mesma a fim de tornar o seu primeiro membro igual a um trinômio quadrado perfeito e, posteriormente, isolar o valor de  $x$ , extraíndo a raiz quadrada em ambos os membros da equação e aplicando regras operatórias básicas. Por exemplo, para determinar as raízes reais da equação  $4x^2 + 5x + 1 = 0$  vamos tornar o primeiro membro dessa equação um trinômio quadrado perfeito:

$$4x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5/4x) + 1/4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5/4x + 25/64) + 1/4 - 25/64 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5/4x + 25/64) = 25/64 - 1/4 \Leftrightarrow (x + 5/8)^2 = 9/64.$$

Reorganizando a equação e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos que:

$$\sqrt{(x + 5/8)^2} = \pm\sqrt{(9/64)} \Leftrightarrow x + 5/8 = \pm 3/8 \Leftrightarrow x = -5/8 \pm 3/8.$$

Portanto, suas raízes reais são  $x_1 = -5/8 + 3/8 = -2/8 = -1/4$  e  $x_2 = -5/8 - 3/8 = -8/8 = -1$ .

**O método da soma e do produto:** Consiste em comparar uma equação do segundo grau com a equação dada por  $x^2 - Sx + P = 0$  e encontrar as soluções reais de uma equação, sabendo que sua soma é S e seu produto é P. Apesar de não ser muito trabalhado, esse método foi mais evidenciado no 9º ano, aplicado a situações triviais onde se objetivava que o educando resolvesse a equação “de cabeça”. Por exemplo, para determinar quais são as raízes reais da equação  $x^2 - x - 6 = 0$ , comparamos a equação do exemplo com  $x^2 - Sx + P = 0$ , observamos facilmente que  $S = 1$  e  $P = -6$ . Vamos procurar dois números reais tais que sua soma resulte em 1 e seu produto em  $-6$ . Os números procurados são  $-2$  e  $3$ , que são as duas raízes reais procuradas.

**Método da fatoração:** Também estimulado apenas nas situações iniciais da abordagem das equações, esse método consiste em fatorar a equação do segundo grau, com segundo membro nulo, tornando-a o produto de duas expressões do primeiro grau e encontrar os valores de x igualando ambas as expressões a zero. Por exemplo, para determinar as soluções reais da equação  $x^2 - 6x - 27 = 0$ , temos:

$$x^2 - 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow (x - 9)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 9 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0.$$

Portanto, as soluções da equação são  $x_1 = 9$  e  $x_2 = -3$ .

**Métodos para as equações incompletas:** Para resolver equações do segundo grau incompletas, ou seja, com  $b = 0$  e/ou  $c = 0$ , apesar de termos os métodos acima, podemos aplicar técnicas mais triviais e rápidas.

Para encontrar as raízes reais da equação  $2x^2 - 2 = 0$ , na qual nota-se que  $b=0$ , procedemos adicionando 2 unidades a ambos os membros e, posteriormente, multiplicando toda a equação por  $1/2$ , e obtemos:

$$2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Portanto, temos as soluções (raízes) reais:  $x_1 = 1$  e  $x_2 = -1$ . Já para resolver a equação  $-3x^2 + 5x = 0$ , na qual  $c = 0$ , vamos pôr x em evidência e concluir de forma similar ao método da fatoração:

$$-3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5/3.$$

Logo, as soluções (raízes) reais são:  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 5/3$ .

Para um melhor detalhamento, sugerimos a leitura do trabalho de Silva [17], no qual são apresentadas algumas demonstrações e exemplos complementares dos métodos aqui destacados.

#### 4. As Equações na Perspectiva da Educação Matemática

Alinhadas aos nossos objetivos, as discussões que seguem são frutos de pesquisas no campo da educação matemática, em especial para o trabalho pedagógico de conceitos algébricos, como é o caso das equações. Nesse caso, estamos nos referindo a álgebra abstrata e bem desenvolvida com linguagem e simbolismo próprio e que é introduzida nas escolas da educação básica muitas vezes de forma mecânica e descontextualizada. É exatamente a respeito disso que Ribeiro e Cury [12] destacam a importância de se pesquisar esse tema, já que:

*As pesquisas (...) parecem indicar que, mesmo ao final da escolaridade básica, após vivenciarem processos de aprendizagem de conceitos algébricos fundamentais, como é o caso do conceito de equação, os alunos não reconhecem as estruturas desse ente matemático, não são capazes de apresentar uma caracterização para esse conceito e somente evocam os procedimentos e técnicas de resolução. (RIBEIRO; CURY, [12], p. 18).*

Ainda, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do terceiro e quarto ciclos (BRASIL, [3]) explicam que um dos grandes problemas no trabalho com conteúdos algébricos está na insistência por se abordarem métodos de manipulação algébrica sem se desenvolver nos educandos as capacidades de abstração e generalização, que são fundamentais para uma aprendizagem sólida do conteúdo.

Com relação a isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, [4], p. 39) consideram que a aprendizagem algébrica deve ser muito mais ampla, possibilitando ao educando “modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar, representar problemas por meio de equações”, dentre outras habilidades. Destaca ainda que nos anos iniciais da escolarização deve-se desenvolver uma pré-álgebra, engajada em preparar o educando cognitivamente para o desenvolvimento de raciocínios e habilidades caracterizadores do que chamamos de “pensamento algébrico”, pois:

*Consideramos que a Álgebra, trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pode ser o fio condutor do currículo escolar, e o desenvolvimento do pensamento algébrico pode permitir que sejam realizadas abstrações e generalizações que estão na base dos processos de modelagem matemática da vida real. (RIBEIRO; CURY, [12], p 11).*

Para Ponte, Branco e Matos [11] e Silva [15], a capacidade de interpretar a álgebra dentro de situações, de lidar com sua resolução vão ser partes do que podemos chamar de pensamento algébrico, que envolve muito além de práticas apenas tecnicistas e mecânicas de manipulações algébricas. Desenvolver essas competências é fundamental para que o aluno compreenda a álgebra não apenas como um jogo de manipulações mecânicas de letras e operações, já que, quando trabalhamos com uma álgebra simbólica, é importante ter em mente que “as letras não representam sempre o mesmo papel, e o estudante precisa não apenas compreender esses diferentes papéis, mas também realizar ações variadas vinculadas a esses papéis no contexto das atividades que realiza na escola.” (GOMES, [10], p. 8).

Nesse sentido, precisamos compreender as concepções conceituais que se fazem presentes na noção de equação, as quais, por sua vez, determinam as finalidades do trabalho com tal noção matemática, isso porque “as finalidades da álgebra são determinadas por ou relacionam-se com – concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis.” (USISKIN, [18], p. 13, grifo do autor).

Para tanto, movido em identificar e compreender essas diferentes concepções, Ribeiro [14] desenvolveu, em sua tese de doutorado, uma série de estudos a respeito dessa noção. A princípio, ele fez um estudo histórico e, a partir de então, verificou algumas peculiaridades de cada povo no trato com as equações. Mais adiante, ele realizou um estudo didático a partir da análise de dicionários etimológicos, livros de fundamentos de matemática, artigos e livros didáticos, estabelecendo mais algumas categorias, e, assim, propôs uma classificação, conhecida como Teoria dos

Multisignificados de Equação, composta por seis significados prévios para a noção de equação. São eles: intuitivo-pragmático, dedutivo-geométrico, estrutural-generalista, estrutural-conjuntista, processual-tecnista e axiomático-postulacional.

A partir dessa categorização, algumas pesquisas foram desenvolvidas na investigação das equações no ensino básico. Dentre elas, destacamos o trabalho de Barbosa [2], que investigou, através de entrevistas semiestruturadas, os significados evocados por professores de matemática quando instigados por situações pertinentes a noção de equação. Além dele, Dorigo [6] também desenvolveu um relevante estudo, no qual se debruçou a analisar, através de uma sequência de atividades, quais significados propostos por Ribeiro [14] faziam-se presentes na concepção de um grupo de estudantes do ensino médio.

Os resultados obtidos e divulgados por eles contribuíram significativamente na Teoria dos Multisignificados de Equação. Barbosa [2] verificou que alguns significados não se fizeram presentes nas respostas dos professores pesquisados. São eles: o dedutivo-geométrico, o estrutural-conjuntista e o estrutural-generalista. Ele ainda completa destacando que os professores muitas vezes procuraram evocar procedimentos e fórmulas prontas de resolução quando submetidos a situações pertinentes a esses significados, o que demonstra um grande apego ao significado processual-tecnista. Após uma análise aprofundada, Barbosa [2] conclui que o significado axiomático-postulacional perpassa por todos os demais, não se apresentando como um significado isolado. Já os significados intuitivo-pragmático e, principalmente, o processual-tecnista foram bem evidenciados nas respostas analisadas.

Dorigo [6], por sua vez, verificou que os significados apresentados pelos estudantes analisados muitas vezes não eram coerentes com a atividade proposta, além de que comumente os mesmos nem sequer chegavam a perceber que tais atividades remetiam a ideia de equação. Em suma, os significados que foram frequentemente evocados pelos estudantes foram o processual-tecnista, como já era esperado, e o intuitivo-pragmático; isso porque os estudantes, muitas vezes sem identificar a ideia de equação, buscaram aplicar procedimentos aritméticos na resolução de suas atividades.

Assim, Ribeiro [13] faz algumas considerações importantes, acrescentando os resultados desses dois trabalhos em suas pesquisas, e apresenta uma reelaboração dos significados de equação no modelo de perfil conceitual, destacando uma categorização com cinco concepções baseadas nas anteriores, são elas:

- Pragmática: a equação é obtida e interpretada a partir de problemas práticos, podendo a mesma ser admitida como uma noção primitiva. Nesta concepção é comum o uso de raciocínios intuitivos e a busca por soluções aritméticas;
- Geométrica: a equação é deduzida e interpretada através de problemas de ordem geométrica e há uma busca por soluções que, mesmo expressas aritmética ou algebricamente, representem ou quantifiquem conceitos geométricos;
- Estrutural: a equação é concebida a partir de suas características estruturais. As soluções objetivadas em atividades com essa concepção são predominantemente algébricas, expressas, em geral, por meio de expressões algébricas, generalizações ou estudo de suas propriedades;
- Processual: a equação é interpretada através de seus processos e técnicas de resolução, normalmente exigindo apenas encontrar sua solução. As soluções obtidas nessa concepção são predominantemente expressas aritmética ou algebricamente;
- Aplicacional: nessa concepção, a equação é obtida e interpretada a partir de suas aplicações. Embora seja comum adentrar em conceitos geométricos, sua solução, em geral, é expressa aritmeticamente.

Essa categorização, apresentada na forma de perfil conceitual, categoriza as cinco concepções da noção de equação que iremos utilizar para analisar como as equações polinomiais do segundo grau fazem-se presentes no Exame Nacional do Ensino Médio.

## 5. As Equações do Segundo Grau no Exame Nacional do Ensino Médio

Com o intuito de compreender como as equações são concebidas no ensino básico a partir de suas concepções, resolvemos analisar como ela é tratada no Exame Nacional do Ensino Médio. Nossa justificativa parte da importância que o mesmo tem na cultura escolar brasileira, sendo a principal porta de entrada do estudante egresso do ensino básico para a universidade, seja ela pública ou até mesmo privada. Além disso, tal exame é tido por muitos professores como um norteador para o ensino, no qual suas questões servem como base para simulados e provas no ensino médio e em cursos pré-vestibulares.

### 5.1. Aspectos Preliminares e Metodologia

Diante da abordagem proposta, nosso estudo caracteriza-se como uma investigação quali-quantitativa, na qual pretendemos quantificar como as concepções de equação são contempladas no Exame Nacional do Ensino Médio e, ao mesmo tempo, analisar qualitativamente como esses resultados estão alinhados com outras pesquisas e quais suas implicações nos processos pedagógicos no ensino básico.

Para dar início a nossa investigação, selecionamos as provas do Enem dos últimos 10 anos, o que compreende as edições que vão de 2012 até 2021. Assim, realizamos o *download* das mesmas na versão digital (PDF) no *site* oficial do Inep, escolhendo, aleatoriamente e sem qualquer perda, a prova do tipo amarela em todas as edições a serem utilizadas. Feito isso, procedemos à coleta de dados, na qual nos concentramos apenas na investigação das questões da área de Matemática e Suas Tecnologias, realizando uma leitura, e, quando necessário, a resolução de cada questão, a fim de verificar se a mesma tratava do conceito de equação polinomial do segundo grau ou não. Desse modo, foram sondadas 450 questões do Exame Nacional do Ensino Médio, sendo 45 questões de cada uma das 10 edições.

Durante esse processo, recorreremos várias vezes a resoluções dispostas em canais abertos do YouTube, objetivando explorar variados tipos de resolução para verificar se o nosso objeto de estudo se fazia presente naquela determinada questão. Feito isso, selecionamos as questões que verificamos que trabalhavam com equações do segundo grau, para, assim, procedermos uma análise mais minuciosa, a fim de verificar qual(is) concepções de equação faziam-se presentes.

Então, montamos um quadro contemplando as questões selecionadas e detalhando sua pertinência ou não com a abordagem de cada uma das concepções investigadas. Por fim, fizemos uma breve análise estatística dos resultados e os apresentamos em um gráfico comparativo para apresentar melhor os resultados relativos de cada concepção.

### 5.2. Resultados e Discussões

Nossa sondagem apontou para um significativo número de questões envolvendo a noção de equação, principalmente equações do primeiro grau. Já no que diz respeito às equações do segundo grau, nosso objeto de estudo, encontramos, *a priori*, 25 questões, distribuídas dentre as 10 edições analisadas. Porém, após uma análise mais detalhada, percebemos que 6 delas faziam apenas uma

referência muito superficial a esse conceito, pois apresentavam uma equação explicitamente como um comentário à parte no enunciado, sem que houvesse necessidade de se manipular a mesma ou de ter qualquer conhecimento sobre ela para a resolução do problema, como uma possível distração para a sacada real do problema.

Por esse motivo, resolvemos excluir essas 6 questões de nossos dados coletados, considerando apenas as demais 19 questões que realmente articulavam um trabalho com equações do segundo grau. O resultado de nossa análise pode ser verificado no quadro a seguir:

### Distribuição das Concepções nas Questões Analisadas

Ano	Questão	Pragmática	Geométrica	Estrutural	Processual	Aplicacional
2013	136	Não	Sim	Não	Sim	Não
2013	142	Não	Não	Não	Sim	Não
2013	145	Não	Sim	Não	Não	Sim
2013	165	Sim	Não	Não	Sim	Não
2014	163	Sim	Sim	Não	Não	Sim
2014	164	Não	Não	Sim	Não	Não
2015	136	Sim	Não	Não	Sim	Não
2015	145	Sim	Sim	Não	Não	Não
2015	157	Sim	Não	Não	Não	Não
2015	163	Não	Sim	Não	Não	Sim
2015	171	Não	Sim	Não	Não	Não
2016	152	Não	Sim	Não	Sim	Não
2016	166	Não	Sim	Não	Não	Não
2017	163	Não	Sim	Não	Não	Sim
2017	168	Sim	Sim	Não	Não	Não
2017	180	Não	Sim	Não	Não	Sim
2019	171	Não	Sim	Não	Não	Sim
2020	179	Não	Sim	Não	Não	Sim
2021	162	Não	Não	Não	Sim	Não
Total	19	6	13	1	6	7

Fonte: Os autores

Diante da análise realizada, verificamos que a concepção pragmática foi evidenciada em 6 das 19 questões analisadas, o que representa 31,58% das atividades que estavam trabalhando o conceito de equação do 2º grau. A seguir, temos um exemplo de questão trabalhando tal concepção.

Figura 1: Questão 157 do Enem 2015

<p><b>QUESTÃO 157</b> ◆◆◆◆◆</p> <p>Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R\$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação</p> $q = 400 - 100p,$ <p>na qual <math>q</math> representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e <math>p</math>, o seu preço em reais.</p> <p>A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.</p>	<p>O preço <math>p</math>, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo</p> <p><b>A</b> R\$ <math>0,50 \leq p &lt; R\\$ 1,50</math> <b>B</b> R\$ <math>1,50 \leq p &lt; R\\$ 2,50</math> <b>C</b> R\$ <math>2,50 \leq p &lt; R\\$ 3,50</math> <b>D</b> R\$ <math>3,50 \leq p &lt; R\\$ 4,50</math> <b>E</b> R\$ <math>4,50 \leq p &lt; R\\$ 5,50</math></p>
---	---

Fonte: ENEM (2015).

Na grande maioria, essa concepção surgia em problemas de ordem prática e exigiam soluções aritméticas, como esperado. Durante a análise dessa e de algumas outras atividades, identificamos um enunciado com uma problemática cotidiana, em que a equação do grau grau é implícita, necessitando ser abstraída pelo leitor, normalmente de forma intuitiva e a solução procurada para o problema é totalmente aritmética, obtida a partir da resolução da equação formulada.

Com relação à concepção geométrica, identificamos sua presença em 13 das 19 atividades analisadas, representando 68,42% das mesmas. Ao compararmos os resultados obtidos com a pesquisa de Silva [15], que investigou as concepções de equação em uma coleção de livro didático de matemática do ensino fundamental II, verificamos que em ambas a concepção geométrica é a mais evidenciada, mostrando um grande apego ao trabalho com equações em contextos geométricos.

Esse trabalho é bastante rico, pois exige do educando relacionar conceitos e propriedades geométricas para, a partir daí, utilizar a noção de equação. Na grande maioria dos problemas, a equação do segundo grau era deduzida a partir de figuras, nas quais as soluções procuradas deviam ser expressas aritmeticamente e quantificavam medidas de segmentos, como é o caso do exemplo abaixo:

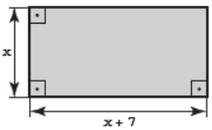
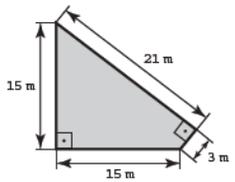
Figura 2: Questão 166 do ENEM 2016

**QUESTÃO 166**

Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

**A** 7,5 e 14,5.  
**B** 9,0 e 16,0.  
**C** 9,3 e 16,3.  
**D** 10,0 e 17,0.  
**E** 13,5 e 20,5.

Fonte: Enem (2016).

Quanto à concepção estrutural, percebemos que, das 19 questões analisadas, apenas 1 delas articulava elementos característicos dessa concepção, o que representa um percentual de, aproximadamente, 5,26% do total de questões que trabalham equação do segundo grau. Nessa questão, buscou-se uma expressão que generalize a situação estabelecendo uma relação algébrica entre variáveis, caracterizando um trabalho com a concepção estrutural da noção de equação. Observe tal atividade:

Figura 3: Questão 164 do Enem 2014

**QUESTÃO 164**

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial  $f$ , de grau menor que 3, para alterar as notas  $x$  da prova para notas  $y = f(x)$ , da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função  $y = f(x)$  a ser utilizada pelo professor é

**A**  $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$   
**B**  $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$   
**C**  $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$   
**D**  $y = \frac{4}{5}x + 2$   
**E**  $y = x$

Fonte: ENEM (2014).

A respeito desse tipo de questão, Ribeiro e Cury ([12], p. 88) destacam que uma atividade que “propõe que o aluno busque uma regra que defina  $y$  como função de  $x$ ” está contextualizada na própria matemática e auxilia os alunos “a desenvolverem significados mais abstratos”. Assim, o

autor conclui que este tipo de trabalho é análogo ao que foi definido na concepção estrutural.

Já a concepção processual foi contemplada, em nossa análise, em 6 atividades, o que representa 31,58% das atividades selecionadas. Observe o exemplo:

Figura 4: Questão 162 do Enem 2021

<p><b>Questão 162</b> <span style="float: right;">enem2021</span></p> <p>Para a comunicação entre dois navios é utilizado um sistema de codificação com base em valores numéricos. Para isso, são consideradas as operações triângulo <math>\Delta</math> e estrela <math>*</math>, definidas sobre o conjunto dos números reais por <math>x\Delta y = x^2 + xy - y^2</math> e <math>x * y = xy + x</math>.</p> <p>O navio que deseja enviar uma mensagem deve fornecer um valor de entrada <math>b</math>, que irá gerar um valor de saída, a ser enviado ao navio receptor, dado pela soma das duas maiores soluções da equação <math>(a\Delta b) * (b\Delta a) = 0</math>. Cada valor possível de entrada e saída representa uma mensagem diferente já conhecida pelos dois navios.</p>	<p>Um navio deseja enviar ao outro a mensagem "ATENÇÃO!". Para isso, deve utilizar o valor de entrada <math>b = 1</math>.</p> <p>Dessa forma, o valor recebido pelo navio receptor será</p> <p><b>A</b> <math>\sqrt{5}</math></p> <p><b>B</b> <math>\sqrt{3}</math></p> <p><b>C</b> <math>\sqrt{1}</math></p> <p><b>D</b> <math>\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}</math></p> <p><b>E</b> <math>\frac{3 + \sqrt{5}}{2}</math></p>
--	--

Fonte: ENEM (2021).

Nessas atividades era objetivada a obtenção de soluções aritméticas por meio do uso de técnicas e algoritmos mecânicos de resolução das equações. Além disso, uma característica desse tipo de concepção é que nas atividades nas quais a mesma se fez presente é que a equação já era apresentada de forma explícita. Os resultados que encontramos mostram um equilíbrio entre as concepções pragmática e processual, o que vai na mesma direção da investigação de Silva [15].

Nessa perspectiva, embora haja críticas ao trabalho mecânico na resolução das equações no ensino básico, compreendemos que o problema não reside nessa concepção, uma vez que é muito importante a aprendizagem dos algoritmos e técnicas de resolução. Na verdade, o problema ocorre quando as aulas e atividades apenas se concentram em trabalhar essa concepção exclusivamente, esquecendo as demais, o que vem a causar uma grande descontextualização da matemática e limitar as condições de desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

A concepção aplicacional, por sua vez, fez-se presente em 7 das 19 atividade analisadas, o que representa 36,84% das mesmas. Essa concepção foi identificada no trabalho com equações do segundo grau quando havia a necessidade de aplicação de fórmulas de volume, do teorema de Pitágoras e da lei dos cossenos, por exemplo, ou seja, quando a incógnita é um termo que se encontra elevado ao expoente 2 na respectiva fórmula utilizada.

Um exemplo: na grande maioria, as questões categorizadas por trabalharem a concepção aplicacional foram frutos de questões associadas a contextos geométricos, o que também foi percebido no trabalho de Silva [15], com relação as equações no livro didático. Essas questões além de trabalharem noções de geometria, ainda exigem que o educando aplique uma equação, normalmente como uma fórmula, ao problema para poder resolvê-lo.

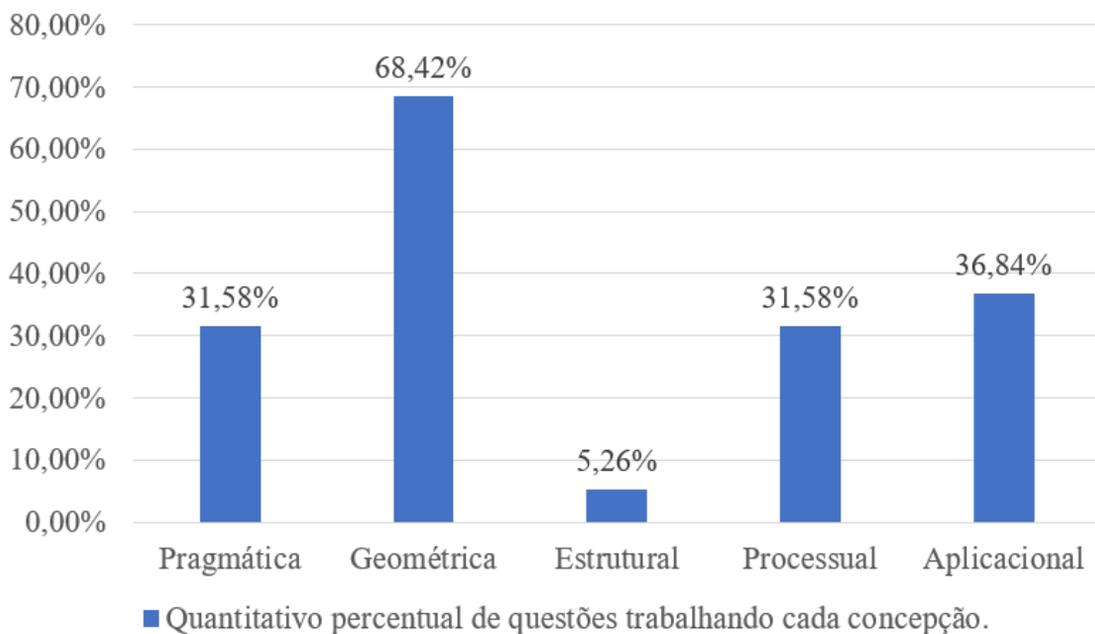
## 6. Considerações Finais

A partir dos estudos históricos desenvolvidos pudemos compreender os principais contextos nos quais as equações surgiam e como eram tratadas por variados povos. Compreendemos que ela nasceu da necessidade do homem em aperfeiçoar suas atividades práticas, originando-se em situações cotidianas. Com o aperfeiçoamento da álgebra, as equações passam a ser tratadas sob aspectos generalistas, sendo estudada num campo mais abstrato, no qual, muitas vezes, a equação passa a ser concebida como uma generalização ou uma fórmula, com aplicações além da matemática.

Os estudos sobre a equação do segundo grau no livro didático propiciaram-nos bagagem para conhecer e se aprofundar nos principais métodos de resolução de equações do segundo grau no ensino básico, podendo prever o que esperar da resolução dos educandos. Ao pesquisarmos no campo da educação matemática, foi possível entender um pouco dos desafios que permeiam o ensino de álgebra e a importância de se desenvolver no educando as capacidades características do pensamento algébrico desde cedo. Ainda, entendemos quais são as cinco concepções da noção de equação e como cada uma é concebida.

Subsidiados pelas pesquisas que desenvolvemos, pudemos realizar uma exploração no Exame Nacional do Ensino Médio, que mostrou como as cinco concepções de equações fizeram-se presentes nas atividades sobre equação do segundo grau nas últimas 10 edições do exame. Observe o gráfico:

Figura 5: Distribuição das concepções de equação nas questões analisadas



Fonte: O autor.

Notamos no gráfico acima que a soma dos percentuais evidenciados nas cinco concepções investigadas ultrapassa os 100%. Isso ocorre porque, como vimos no quadro 1 deste trabalho, há várias questões trabalhando paralelamente mais de uma concepção de equação.

Diante de nossa análise, no que diz respeito às questões práticas, caracterizadas pela concepção pragmática, que são contextualizadas em problemas mais cotidianos, as equações mais trabalhadas eram as de primeiro grau, sendo as do segundo grau verificadas com menor frequência, talvez porque não seja tão intuitivo abstrair uma equação desse tipo se comparada com uma equação do primeiro grau. Mesmo assim, as atividades propostas foram bem elaboradas, com enunciados ricos e que exigiam algumas abstrações não tão diretas, explorando o pensamento algébrico do leitor.

Percebemos ainda que essas equações aparecem comumente em contextos geométricos, sendo abstraídas a partir de deduções envolvendo conceitos como medidas de segmentos, áreas, volumes etc. A maioria das questões categorizadas por trabalhar a concepção geométrica eram dotadas de um enunciado problematizador, o que faz com que o educando seja instigado a mergulhar em outras concepções para compreender o problema e não apenas em ir direto para uma figura e deduzir uma relação geométrica como uma equação. Assim, muitas das questões que lidavam com a concepção geométrica também contemplavam outras concepções, em especial, a aplicacional.

O tratamento estrutural dado as equações foi o menos frequente, apontando que o mesmo não é o foco no ensino básico ou pelo menos no Enem. Embora seja muito importante na compreensão da equação enquanto ente matemático, a concepção estrutural é normalmente explorada em estudos de nível superior, quando são formalizadas definições mais rigorosas e se fazem necessárias demonstrações. Resultado similar também é apresentado na pesquisa de Silva [15], com livros didáticos, em que tal concepção aparece com a menor incidência entre as cinco concepções analisadas.

Já o trabalho mecânico, caracterizado na concepção processual, é verificado com uma razoável frequência e mesmo nos casos em que foi verificado não se tratava exclusivamente de atividades totalmente descontextualizadas. Isso evidencia uma importância dada a um trabalho mais significativo por parte do Enem. Além disso, mesmo apresentando explicitamente a equação, os problemas não se resumiam a enunciados como “resolva” ou “calcule”, mas sim apresentavam alguma problemática em seu contexto, o que é bastante enriquecedor.

No que diz respeito ao aspecto aplicacional, também identificamos um trabalho quantitativamente razoável, especialmente em situações geométricas. As principais aplicações verificadas eram de fórmulas de volume e, principalmente, do teorema de Pitágoras. Essas atividades eram contempladas em um enunciado bastante amplo, que não permitia, na maioria das vezes, uma aplicação imediata, sendo necessário articular a aplicação com raciocínios dedutivos e, por esse motivo, muitas das questões que foram categorizadas por contemplar a concepção aplicacional também trabalhavam a concepção geométrica das equações, o que caracteriza uma abordagem enriquecedora.

Em suma, consideramos que, a partir de tais estudos, conseguimos compreender os aspectos que permeiam a história, o trabalho pedagógico e matemático da noção de equação do ensino básico, bem como apresentar e discutir os resultados dessa pesquisa, ancorada no Exame Nacional do Ensino Médio, que deve contribuir para o debate sobre o ensino de equação e suas diferentes concepções na Educação Básica.

## Referências

- [1] ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Coleção Praticando Matemática**. 4<sup>a</sup> ed. renovada. Ensino Fundamental. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.
- [2] BARBOSA, Y. O. **Multisignificados de equação: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática**. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [3] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, (1998).
- [4] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática: ensino de primeira à quarta série**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, (1997).
- [5] CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Coleção Quadrante matemática**. 1<sup>a</sup> ed. Ensino Médio. São Paulo: Edições SM, 2016.
- [6] DORIGO, M. **Investigando as concepções de equações de um grupo de alunos do ensino médio**. 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.
- [7] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5<sup>a</sup> ed. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [8] GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 4<sup>a</sup> ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- [9] GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 4<sup>a</sup> ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- [10] GOMES, L. M. M. **Álgebra e funções na educação básica**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.
- [11] PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2009.
- [12] RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N.; **Álgebra para a formação do professor. Explorando os conceitos de equação e de função**. 1<sup>a</sup> ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.
- [13] RIBEIRO, A. J. **Elaborando um perfil conceitual de equações: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática**. Ciência e Educação, Bauru, v. 19, n<sup>o</sup> 1, p. 55-71, 2013.
- [14] RIBEIRO, A. J. **Equações e seus multissignificados no ensino de matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. 2007. 141 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- [15] SILVA, J. E. M. **Investigando a noção de equação no livro didático de matemática**. 2017. 127 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática-Licenciatura) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.
- [16] SILVA, J. E. M. **Investigando a noção de equação: perspectivas histórico-epistemológicas, pedagógicas e análise de livro didático**. 1<sup>a</sup> ed. Veranópolis: Diálogo Freiriano, 2020.
- [17] SILVA, J. E. M. **Perspectivas sobre a equação do segundo grau e suas concepções no ENEM**. 2022. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2022.

- [18] USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.** As ideias da álgebra. COXFORD, A; SHULTE, A. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo, 1995.

José Edmilson Melo da Silva  
Mestre pelo Profimat/UEPB  
Professor da Secretaria de Educação  
e Esportes de Pernambuco  
<[edmilsonmelo15152121@hotmail.com](mailto:edmilsonmelo15152121@hotmail.com)>

Aldo Trajano Lourêdo  
Universidade Estadual da Paraíba  
<[aldolouredo@gmail.com](mailto:aldolouredo@gmail.com)>

Recebido: 26/06/2022  
Publicado: 10/10/2022

# Uma aplicação dos teoremas de Fermat e Rolle

Antônio Carlos Bastos Sousa 

## Resumo

Este artigo contém uma aplicação dos teoremas de Fermat e Rolle à função da diferença entre a função  $f(x) = x^n$  e uma reta secante à referida função.

**Palavras-chave:** teorema de Fermat; teorema de Rolle; derivada; função; zero da função.

## Abstract

This article contains an application of the Fermat and Rolle's theorem to the difference function  $f(x) = x^n$  and a secant line to that function.

**Keywords:** Fermat's theorem; Rolle's theorem; derivative; function; zero of the function.

## 1. Introdução

Segundo Boyer<sup>1</sup>, Pierre de Fermat (1601-1665) fez uma importante descoberta que foi descrita em um tratado que não foi publicado durante sua vida, chamado Método para achar Máximos e Mínimos. Fermat estivera considerando lugares dados – em notação moderna – por equações da forma  $y = x^n$ ; por isso frequentemente chamadas "parábolas de Fermat" se  $n > 0$  ou "hipérbolas de Fermat" se  $n < 0$ . Para curvas polinomiais da forma  $y = f(x)$  ele notou um modo muito engenhoso para achar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo e comparou o valor de  $f(x)$  num ponto com o valor de  $f(x + E)$  num ponto vizinho. Evidentemente, Fermat não tinha o conceito de limite, embora o que ele estivesse fazendo equivalesse a achar

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x + E) - f(x)}{E} \quad (1)$$

Ou seja, nos valores da variável independente  $x$ , para os quais:

- a derivada da função é nula – isto é, o coeficiente angular da reta tangente é zero;
- a função muda seu comportamento – antes é decrescente e depois é crescente, ou antes é crescente e depois é decrescente; temos, respectivamente, um ponto de mínimo ou de máximo para a função.

<sup>1</sup>Texto adaptado da compilação disponível em [http://ecalculo.if.usp.br/derivadas/diz\\_derivada/diz\\_derivada.htm](http://ecalculo.if.usp.br/derivadas/diz_derivada/diz_derivada.htm) em [1].

## 2. Teoremas de Fermat e Rolle

Se uma função  $F$  possui um ponto de extremo (máximo ou mínimo) local em  $x = b$ , e a função  $F$  é derivável nesse ponto, então  $x = b$  é um ponto crítico; isto é,  $F'(b) = 0$ .

Pelo teorema, a derivada de  $F$  se anula e passa uma reta tangente horizontal à curva  $y = F(x)$  no ponto  $(b, F(b))$ , quando  $x = b$  é um ponto de extremo local para  $F$ .

**Teorema 1. (Fermat):** *Seja  $F : (a, c) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, e suponha que  $x_0 \in (a, c)$  seja um extremo local de  $F$ . Se  $F$  é diferenciável em  $x_0$  então  $F'(x_0) = 0$ .*

Além disso,

**Teorema 2. (Rolle):** *Se  $F$  tem um máximo local em  $a$  e  $F$  é diferenciável em  $a$  (existe a derivada à direita), então  $F'(a) \leq 0$ ; se  $F$  tem um mínimo local em  $a$ , então  $F'(a) \geq 0$ . Se  $F$  é diferenciável em  $c$  e tem um máximo local em  $c$ , então  $F'(c) \geq 0$  enquanto se tem um mínimo local em  $c$ , então  $F'(c) \leq 0$ .*

Com efeito, considere-se uma função  $F(x)$  atenda às condições do teorema de Fermat e, consequentemente, o teorema de Rolle cf. [[3], pp.269-270]:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(x - a) = f(x) - \left( \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(x - a) + f(a) \right)$$

ou

$$F(x) = f(x) - f(c) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(x - c) = f(x) - \left( \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(x - c) + f(c) \right)$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}$$

A função  $F$  é definida como a diferença entre a função  $f$  e a função (da equação) da reta secante a dois pontos  $A, C$  da função  $f$ , ou seja, a reta  $AC$  pode ser ilustrada graficamente como na [Figura 1] a seguir:

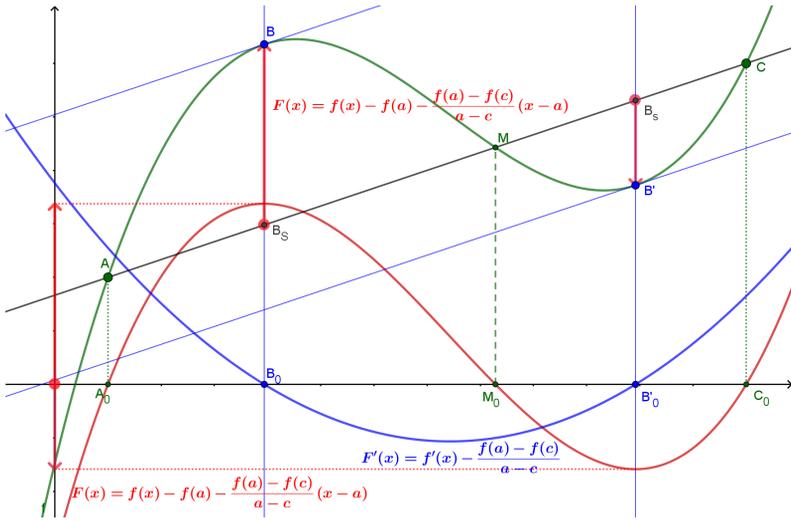


Figura 1: Função  $f(x)$  e reta secante  $AC$  e funções  $F(x)$  e  $F'(x)$  determinadas graficamente.

Portanto, os valores  $x = a$  e  $x = c$  são soluções quando  $F(x) = 0$ . Daí, segue que:

$$F'(b) = 0 \implies F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(b - a) = y_{B_0}$$

ou

$$F'(b) = 0 \implies F(b) = f(b) - f(c) - \frac{f(a) - f(c)}{a - c}(b - c) = y_{B'_0}$$

Consideremos para próxima seção a função  $f(x) = x^n$ .

### 3. A reta secante $AC$ à função $f(x) = x^n$

Geometricamente, se tomarmos a função real

$$f(x) = x^n$$

para  $n \geq 2$ , ela contém todas as potências reais de  $x$  de mesmo expoente  $n$ .

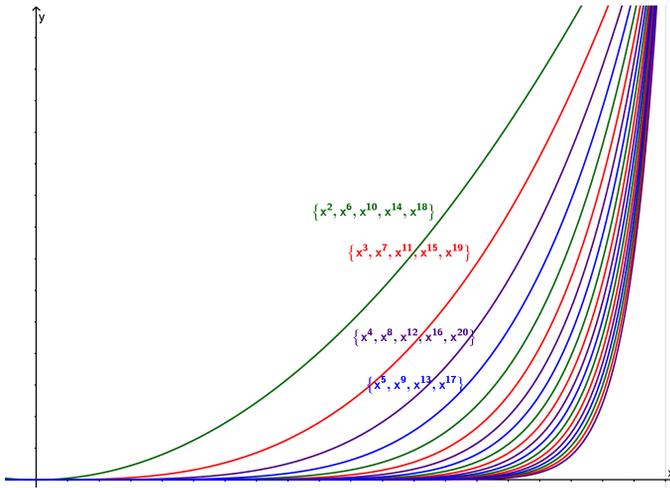


Figura 2:  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} | 2 \leq n \leq 20$ .

Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ; podemos posicionar os pontos  $A = (a, a^n), B = (b, b^n)$  e  $C = (c, c^n)$  sobre a curva para qualquer expoente  $n$ .

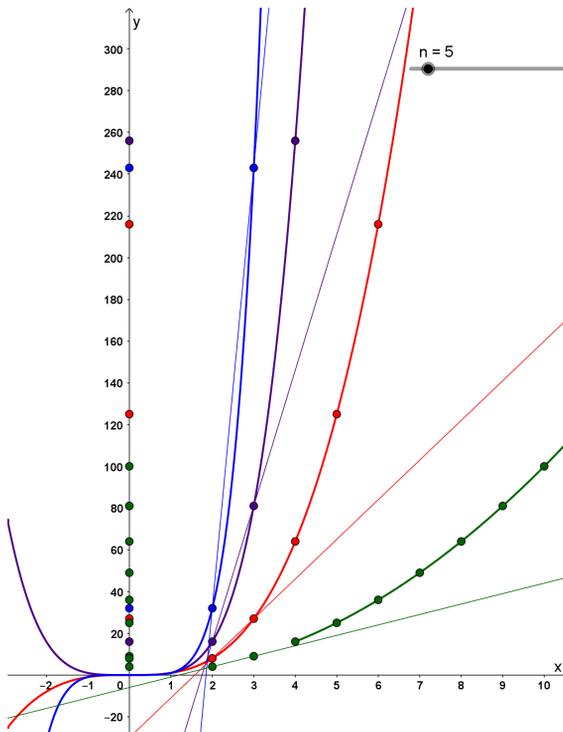


Figura 3:  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} | 2 \leq x \leq 10; 2 \leq n \leq 5$ .

Façamos agora as expressões envolvendo  $a, b, c, n \in \mathbb{N}$  de modo que, sem perda de generalidade, tenhamos  $a > b > c$ :

$$a^n - c^n = b^n \Rightarrow a^n = c^n + b^n$$

$$a^n - c^n = (a - c)(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) = b^n$$

⋮

$$n = 1 \Rightarrow (a - c) = b; n = 2 \Rightarrow a^2 - c^2 = (a - c)(a + c) = b^2; n = 3 \Rightarrow a^3 - c^3 = (a - c)(a^2 + ac + c^2) = b^3$$

$$\frac{a^n - c^n}{a - c} = (a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) = b^n$$

$$\frac{a^n - c^n}{a - c} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}c^k$$

Para  $n = 1$  o quociente  $\frac{a-c}{a-c} = 1$  Supondo ser válida para algum  $k \leq n \in \mathbb{N}$  a expressão

$$(a - c)(a^{k-1} + a^{k-2}c + \dots + ac^{k-2} + c^{k-1}) = a^k - c^k$$

, vamos demonstrar por indução que também é válida para  $n + 1$ ; isto é:

*Demonstração.* Da hipótese de indução:

$$(a^n - c^n) = (a - c)(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1})$$

multiplicando ambos os lados por  $a$ , vem:

$$a(a^n - c^n) = (a - c)(a^n + a^{n-1}c + \dots + ac^{n-2} + ac^{n-1})$$

; somando em ambos os lados  $c^n(a - c)$ , obtemos:

$$a(a^n - c^n) + c^n(a - c) = (a - c) \cdot (a^n + a^{n-1}c + \dots + ac^{n-2} + ac^{n-1} + c^n)$$

Realizando as operações e simplificando as parcelas:

$$a^{n+1} - ac^n + ac^n - c^{n+1} = (a - c) \cdot (a^n + a^{n-1}c + \dots + ac^{n-2} + ac^{n-1} + c^n)$$

, i.e.,

$$a^{n+1} - c^{n+1} = (a - c) \cdot (a^n + a^{n-1}c + \dots + ac^{n-2} + ac^{n-1} + c^n) = (a - c) \sum_{k=0}^n a^{n-k}c^k$$

. Então:

$$\frac{a^{n+1} - c^{n+1}}{a - c} = \sum_{k=0}^n a^{n-k}c^k \tag{2}$$

E, portanto, também é válida para  $n + 1$ . Logo

$$\frac{a^n - c^n}{a - c} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}c^k$$

é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

Outra prova encontra-se em (Proposição 6 p. 5) [2].

O gráfico a seguir mostra seis pontos distintos sobre a curva onde podemos posicionar os pontos A, B e C.

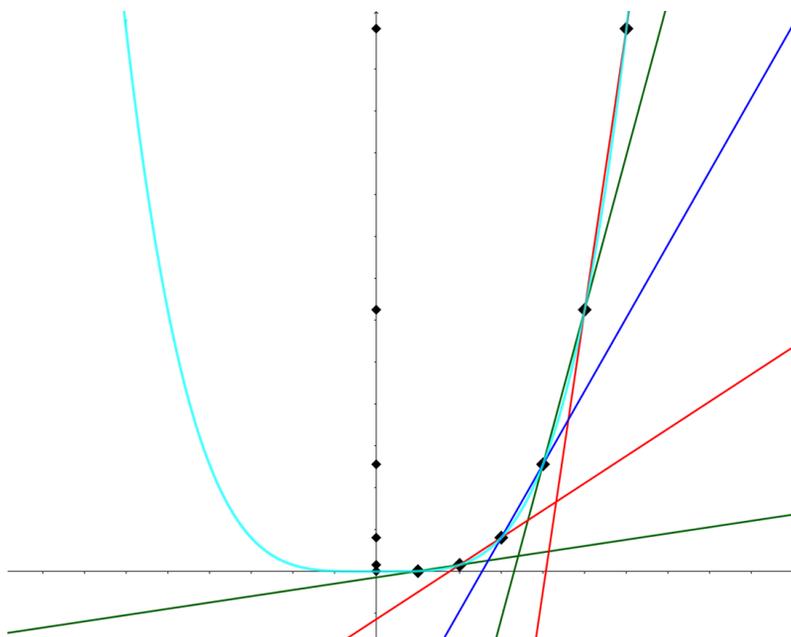


Figura 4: Retas secantes nas coordenadas inteiras de  $f(x) = x^n$ ,  $n$  par

A diferença entre dois pontos sucessivos sobre o eixo das ordenadas representa os valores  $(a - k)^n$  e  $(a - k - 1)^n$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 < k < a$ . As retas são secantes à função  $f(x)$  e corta a mesma nos valores de duas potências sucessivas. A equação dessas retas secantes é, portanto, da forma:

$$y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - a + k) + (a - k)^n$$

Cabe-nos repetir: “Utilizaremos o método de *monsieur* Fermat para estabelecer tangentes”<sup>2</sup>. Definiremos uma tangente à curva que tenha mesma inclinação da reta secante definida entre duas potências  $a^n$  e  $c^n$ . Os valores de  $a$  e  $c$  são conhecidos e podemos definir e representar a reta secante que corta a função  $f(x) = x^n$  nos pontos  $A = (a, a^n)$  e  $C = (c, c^n)$ .

$$\frac{a^n - c^n}{a - c} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} c^k$$

é o coeficiente angular da reta secante AC à curva  $x^n$ .

De modo geral, a equação de reta secante será:

$$y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - a) + a^n$$

<sup>2</sup>Afirmção atribuída a *Sir*. Isaac Newton.

ou

$$y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - c) + c^n$$

Existe um ponto  $B = (b, b^n)$  na curva/função  $f(x) = x^n$  entre as potências  $c^n$  e  $a^n$ , que pertence à reta paralela à reta secante  $y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - c) + c^n$  e tangente à referida função.

*Demonstração.* A reta tangente a uma função  $f(x)$  em um ponto  $(x, f(x))$  se tem como coeficiente angular a derivada da referida função, então para que:

$$y = nb^{n-1}(x - b) + b^n \quad (3)$$

e

$$y = \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - a) + a^n \quad (4)$$

sejam paralelas.

Isto é, para que a reta tangente à função  $f(x) = x^n$  em  $(b, b^n)$  seja paralela à reta secante AC dada, temos:

$$nb^{n-1} = \frac{a^n - c^n}{a - c} \Rightarrow b = \sqrt[n-1]{\frac{a^n - c^n}{n(a - c)}} \quad (5)$$

Dentre as curvas de grau  $n \geq 2$ , as curvas de grau 2 possuem pontos com coordenadas racionais e/ou de coordenadas inteiras sobre a curva. Esse resultado é imediato pelo teorema de Pitágoras:  $a^2 = b^2 + c^2$ ;  $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow 2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$  é um número (quadrado) natural cf. [5], p. 132.

Para  $n > 2$  temos:

$$\begin{aligned}
 b^n &= \frac{a^n - c^n}{n(a - c)} \sqrt[n-1]{\frac{a^n - c^n}{n(a - c)}} \\
 &= \left( \frac{a^n - c^n}{n(a - c)} \right)^{\frac{n}{n-1}} \\
 &= \left( \frac{a^n - c^n}{n(a - c)} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}
 \end{aligned} \quad (6)$$

□

Agora vamos demonstrar que o valor de  $b$  do ponto B não será inteiro para  $n > 2$ .

*Demonstração.* Sendo  $a$  e  $c$  inteiros, quando  $n > 2$ :

$$a^n - c^n = (a - c)(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1})$$

. Como resultado da demonstração por indução em  $n$  para  $a^{n+1} - c^{n+1} = a(a^n - c^n) + (a - c)c^n$ , note que ao somar e subtrair a parcela  $ac^n$  em  $a^{n+1} - c^{n+1}$ , então  $aa^n - ac^n + ac^n - cc^n = a(a^n - c^n) + (a - c)c^n$ . Verifica-se que esses termos obtidos, usando a hipótese de indução, são divisíveis por  $(a - c)$ . Então

expressando o número  $b$  na forma:  $b = \sqrt[n-1]{\frac{a^n - c^n}{n(a-c)}} = \sqrt[n-1]{\frac{a(a^{n-1} - c^{n-1}) + c^{n-1}(a-c)}{n(a-c)}} = \sqrt[n-1]{\frac{as + c^{n-1}}{n}}$ , onde  $s = \frac{a^{n-1} - c^{n-1}}{a-c} = a^{n-2} + a^{n-3}c + \dots + ac^{n-3} + c^{n-2}$ , o número  $s$  é inteiro e não possui parcelas contendo  $c^{n-1}$ . Logo o número  $c^{n-1}$  não divide o número  $as$ , uma vez que  $c < a$ , isto é, a soma do numerador é irredutível em  $n$  potências cujos expoentes sejam iguais a  $n-1$ . Portanto, a raiz  $(n-1)$ -ésima da fração  $\frac{as+c^{n-1}}{n}$  é não inteira. Conclusão: Para  $n > 2$ , o valor  $b = \sqrt[n-1]{\frac{a^n - c^n}{n(a-c)}}$  não é inteiro quando  $a$  e  $c$  são inteiros.  $\square$

Vejam alguns exemplos:

### 3.1. Exemplos para $f(x) = x^3$ e $f(x) = x^{1001}$

- Para  $n = 3$ ,  $a = 4$  e  $c = 2$  vem a reta secante à curva que corta os pontos  $(a, a^n)$ ,  $(c, c^n)$  tem como valores  $(4, 64)$  e  $(2, 8)$  e coeficiente angular da reta  $AC$  é  $\frac{64-8}{4-2} = 28$ , a sua equação da reta é da forma  $y = 28(x-2) + 8 = 28x - 48$

Segue que:

$$3b^2 = 28 \Rightarrow b = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

A Figura 5 possui a solução gráfica:

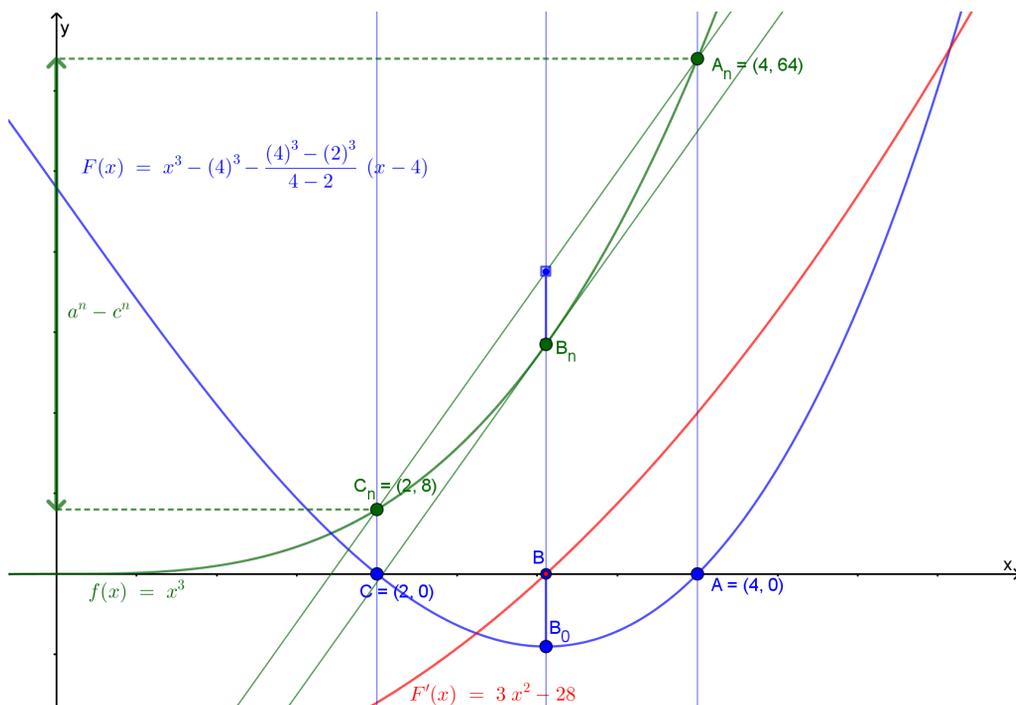


Figura 5: Pontos  $A=(2,8)$ ,  $C=(4,64)$  e funções  $f(x) = x^3$ ,  $F(x) = x^3 - 4^3 - \frac{4^3 - 2^3}{4-2}(x-4)$  e  $F'(x) = 3x^2 - 28$

- Para  $f(x) = x^{1001}$  com  $n = 1001$ ;  $a = 10$ ;  $c = 2$  então:

$$10^{1001} = 8008 \cdot b^{1000} + 2^{1001} \implies b = 2 \sqrt[1000]{\frac{5^{1001}-1}{4004}}$$

#### 4. Generalização para a equação $a^n = c^n + n(a-c)b^{n-1}$ em $a, c, b, n \in \mathbb{R}$ algébricos

Na seção anterior demonstramos que  $b$  não é inteiro para  $n > 2, n \in \mathbb{N}$ . A equação  $a^n = c^n + n(a-c)b^{n-1}$  é consequência dos teoremas de Fermat e Rolle, válida para os pontos  $(a, a^n)$ ,  $(b, b^n)$  e  $(c, c^n)$  com coordenadas reais algébricas. Se considerarmos todo o plano cartesiano  $xOy$ , a reta secante  $y : \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - a) + a^n$  à função  $f(x) = x^n$  pode ser posicionada sobre quaisquer dois pontos da referida função ou ainda transladada e/ou rotacionada em um desses pontos. Sendo  $b$  um número real, vamos então considerar nesta seção  $a, c, b, n \in \mathbb{R}$  e, para isso, vamos retomar:

Sejam  $a, c, b, n \in \mathbb{R}$ , a função real  $f(x) = x^n$  satisfaz às seguintes hipóteses (do teorema de Rolle):

- A função  $f(x)$  é contínua no intervalo  $[a, c]$ ;
- A função  $f(x)$  é derivável no intervalo  $(a, c)$ ;
- Existe um número  $b$  em  $(a, c)$  tal que:

$$f(a) - f(c) = f'(b)(a - c) \implies a^n - c^n = n(a - c)b^{n-1}$$

Para  $n = 0$  é trivial, então há dois casos a serem tratados:

- Caso 1: "Parábolas de Fermat" se  $n > 0$ : A figura 6 tem uma representação das coordenadas e valores.

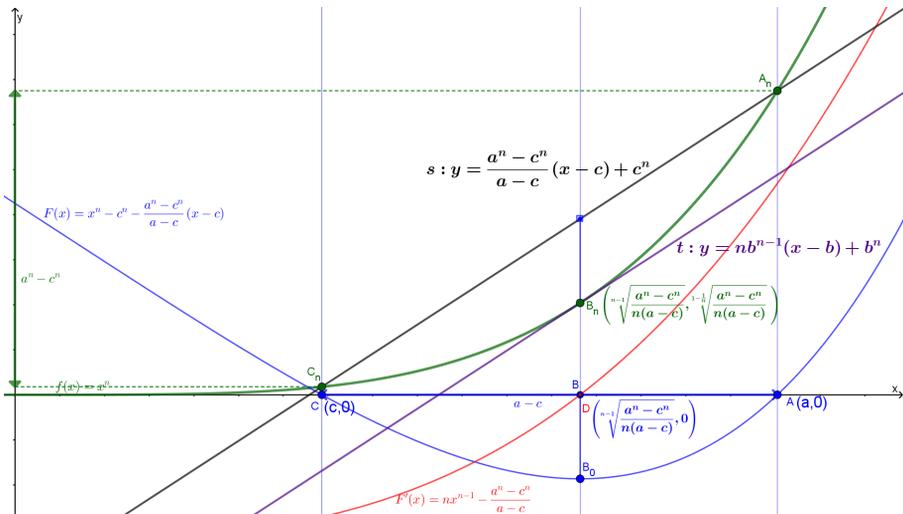


Figura 6:  $A_n = (a, a^n)$ ,  $C_n = (c, c^n)$  e  $B_n = \left( \sqrt[n]{\frac{a^n - c^n}{n(a-c)}}, 1 - \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{a^n - c^n}{n(a-c)}} \right)$  e  $f(x) = x^n$ ,  $F(x) = x^n - c^n - \frac{a^n - c^n}{a - c}(x - c)$  e  $F'(x) = nx^{n-1} - \frac{a^n - c^n}{a - c}$ ,  $n > 0$ .

- Caso 2: "Hipérboles de Fermat" se  $n < 0$ : A figura 7 tem uma representação da equação com  $n$  negativo em coordenadas e valores.

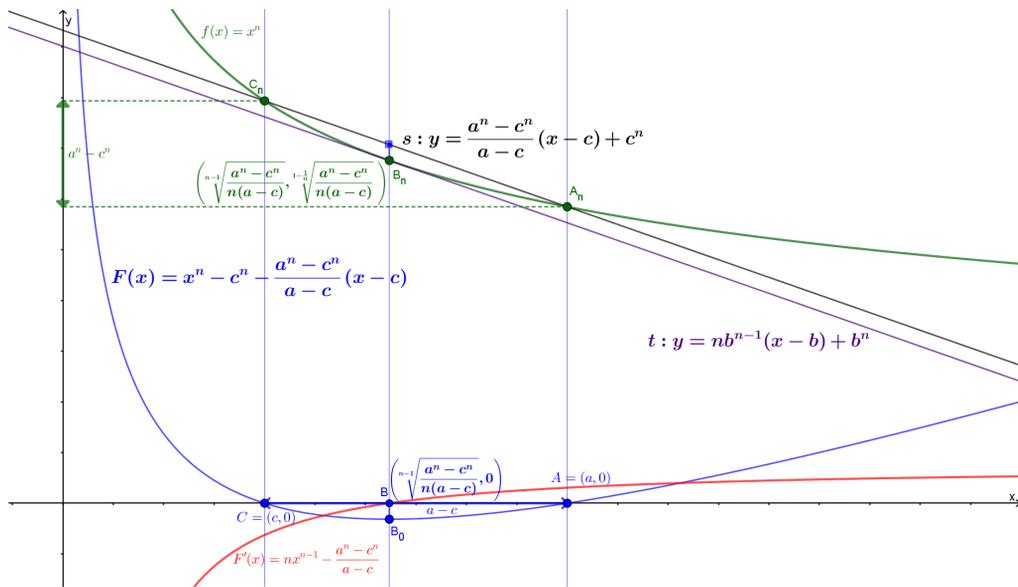


Figura 7:  $A_n = (a, a^n)$ ,  $C_n = (c, c^n)$  e  $B_n = \left( n^{-1} \sqrt[n]{\frac{a^n - c^n}{n(a-c)}}, 1 - \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{a^n - c^n}{n(a-c)}} \right)$  e  $f(x) = x^n$ ,  $F(x) = x^n - c^n - \frac{a^n - c^n}{a-c}(x-c)$  e  $F'(x) = nx^{n-1} - \frac{a^n - c^n}{a-c}$ ,  $n < 0$ .

Claramente podemos constatar em ambos os casos que a derivada da função  $F(x)$  corta o eixo  $x$  no ponto  $(b, 0)$  e permite-nos concluir que tal valor atende às condições dos teoremas de Fermat e Rolle.

### Agradecimentos

A Deus, por meio de seu filho Jesus Cristo, pela graça concedida.

À minha esposa Aryadna, aos meus filhos Carlos Augusto e Emanuele pelo amor, carinho e paciência.

Ao Geogebra Team.

### Referências

- [1] E-Cálculo. Cálculo diferencial e integral. Disponível em <http://ecalculo.if.usp.br/>. Acesso em 15/mar/2022.
- [2] Hefez, A. Aritmética. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] Lima, E. L. *Curso de Análise; v.1*, 13. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2011. ISBN 978524401183.
- [4] Lima, E. L. *Curso de Análise; v.2*, 11 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2011. ISBN 978524400490.

- [5] Martinez, F. B.. Moreira, C. G. Saldanha, N. Tengam, E. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Fábio Brochero Martinez; et al. 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013. ISBN 97852440312-5.

Antônio Carlos Bastos Sousa  
Secretaria da Educação da Bahia  
<[antoniocte@gmail.com](mailto:antoniocte@gmail.com)>

Recebido: 17/05/2022  
Publicado: 10/10/2022

# A Decomposição de números racionais positivos em frações egípcias: Os Teoremas de Fibonacci/Sylvester e Erdős/Stein e um correspondente Applet JavaScript

Humberto José Bortolossi 

Catharine de Oliveira Lobo Fernandes Martins 

## Resumo

Neste trabalho apresentamos os Teoremas de Fibonacci/Sylvester e Erdős/Stein, suas respectivas demonstrações e um *applet* JavaScript correspondente relacionados com a decomposição de números racionais positivos como soma de frações unitárias distintas.

**Palavras-chave:** Fração Unitária; Fração egípcia; Teorema de Fibonacci/Sylvester, Teorema de Erdős/Stein .

## Abstract

In this work, we present the Fibonacci/Sylvester and Erdős/Stein Theorems, their respective proofs, and a corresponding JavaScript applet related to the decomposition of positive rational numbers as the sum of distinct unit unity fractions.

**Keywords:** Unity Fraction, Egyptian Fraction, Fibonacci/Sylvester's Theorem, Erdős/Stein's Theorem.

## 1. Frações Unitárias

Uma **fração uniária** é uma fração cujo numerador é 1. Frações unitárias desempenham um papel importante na história da matemática do antigo Egito porque eram o tipo de fração com o qual os antigos egípcios operavam; frações não unitárias eram convertidas como soma de frações unitárias *distintas*. O famoso Papiro de Rhind exibe uma tabela para a conversão de números racionais da forma  $2/n$ , com  $n$  ímpar entre 3 e 101, como soma de *frações unitárias* (isto é, frações da forma  $1/n$ ) **distintas**. (aqui e no que segue, não consideraremos a fração  $\frac{1}{1}$  como unitária). **Uma pergunta que surge então é se toda fração positiva (número racional positivo) possui ou não uma tal decomposição.** Como provaremos a seguir, a resposta é afirmativa! De fato, mais do que justificar essa afirmação, a prova que estudaremos fornecerá um algoritmo para calcular explicitamente a decomposição de uma fração positiva arbitrária como soma de frações unitárias distintas. Dividiremos a demonstração em dois casos, conforme a fração é maior do que zero e menor do que 1 (fração própria) ou se ela é maior do que ou igual a 1 (fração imprópria). Para o caso de frações próprias, o argumento que daremos é devido a James Joseph Sylvester (1814-1897). Como apontam estudiosos da História da Matemática, de acordo com Dunton e Grimm (1966)

e o Capítulo 7 de Sigler (2002), Sylvester estabeleceu esse resultado em 1880 sem consciência de que Leonardo Bonacci (c. 1175-c. 1250) (também conhecido como Fibonacci) já tinha descrito o mesmo algoritmo de decomposição em seu livro *Liber Abaci*. Para o caso de frações impróprias, seguiremos a abordagem proposta por Erdős e Stein (1963).

## 2. Fibonacci e Sylvester

**(Fibonacci e Sylvester)** Toda fração  $\frac{a}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ) maior do que 0 e menor do que 1 pode ser escrita como soma de frações unitárias **distintas**.

*Demonstração.* Será feita pelo segundo princípio da indução no valor do numerador da fração. Mais precisamente, considere a sentença:

$P(n)$  : a fração  $\frac{n}{b}$  pode ser escrito como soma de frações unitárias distintas,  $\forall n > b$ .

(Passo Básico)  $P(1)$  é verdadeira, pois  $\frac{1}{b}$  é uma fração unitária,  $\forall b > 1$ .

(Passo Indutivo) Suponha que  $P(k)$  seja verdadeira para todo  $1 \leq k \leq a-1$  ( $a \geq 2$ ). Vamos provar que  $P(a)$  também é verdadeira, isto é, que a fração própria  $\frac{a}{b}$  pode ser escrita como uma soma de frações unitárias distintas,  $\forall a > b$ . Para isso, seja  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n > \frac{b}{a}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < \frac{a}{b}\}$ . Como o corpo dos números reais é arquimediano (Lima (2006, p. 17)), segue-se que  $X \neq \emptyset$ . Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação,  $X$  possui um menor elemento  $q$  (Lima (2006, p. 3)). Note que  $q \geq 2$ , pois  $q > \frac{b}{a} > 1$  e, desta maneira,  $q-1 \geq 1$ . Se  $\frac{a}{b} = \frac{1}{q-1}$ , então  $q > 2$  (pois, caso contrário, se  $q = 2$ , então  $\frac{a}{b}$  não seria uma fração própria) e isso terminaria a prova pois, nesta situação,  $\frac{a}{b}$  é por si só uma fração unitária. Suponha então que  $\frac{a}{b} \neq \frac{1}{q-1}$ . Afirmamos que

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}. \quad (1)$$

Com efeito, se  $q = 2$ , então  $\frac{a}{b} < 1 = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{q-1}$ , pois  $\frac{a}{b}$  é uma fração própria. Se  $q > 2$ , suponha por absurdo que  $\frac{a}{b} > \frac{1}{q-1}$  (o caso  $\frac{a}{b} = \frac{1}{q-1}$  já foi tratado anteriormente). Então  $q-1 > \frac{b}{a}$ , um absurdo pois, por construção,  $q$  é o menor elemento do conjunto  $X$ . Dado que  $q$  é um elemento de  $X$ , junto com (1), podemos escrever que

$$\frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}.$$

Segue-se daí que

$$0 < aq - b < a. \quad (2)$$

Agora,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \frac{a}{b} - \frac{1}{q} = \frac{aq-b}{bq},$$

com  $bq > b > a$  e  $0 < aq - b < a$ . Podemos então usar a hipótese de indução para a fração  $\frac{1}{q} + \frac{aq-b}{bq}$  e escrevê-la como soma de frações unitárias distintas  $\frac{aq-b}{bq} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s}$ , de modo que

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s}. \quad (3)$$

Cada fração unitária  $\frac{1}{n_i}$ , com  $1 \leq n_i \leq s$ , é diferente de  $\frac{1}{q}$ , uma vez que

$$\frac{1}{n_i} < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s} = \frac{aq - b}{bq} \stackrel{(\text{por (2)})}{<} \frac{a}{bq} \stackrel{(\text{pois } \frac{a}{b} < 1)}{<} \frac{1}{q}.$$

Como as frações  $\frac{1}{n_i}$  são distintas entre si, a decomposição para  $\frac{a}{b}$  em (3) é feita somente com frações unitárias distintas, o que encerra a demonstração.

**Observação.** Note que o procedimento sugerido por Fibonacci e Sylvester é um algoritmo do tipo *greedy* (guloso): em cada etapa, ele procura pela **maior** fração unitária que seja menor que a fração em questão, para então aplicar recursivamente o mesmo processo para a diferença entre a fração e a fração unitária recém-encontrada.

**Exemplo 1.** Vamos expressar  $\frac{3}{7}$  como soma de frações unitárias distintas usando o procedimento dado por Fibonacci e Sylvester. Como 3 é o menor natural maior do que  $\frac{7}{3}$ , escrevemos:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \left( \frac{3}{7} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}.$$

Agora, por sua vez, 11 é o menor natural maior do que  $\frac{21}{2}$ . Portanto,

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \left( \frac{2}{21} - \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

Dado que  $\frac{1}{231}$  é uma fração unitária, o procedimento encerra-se fornecendo-nos a seguinte decomposição:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}. \quad \blacksquare$$

**Exemplo 2.** Vamos expressar  $\frac{13}{14}$  como soma de frações unitárias distintas usando o procedimento dado por Fibonacci e Sylvester. Como 2 é o menor natural maior do que  $\frac{14}{13}$ , escrevemos:

$$\frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \left( \frac{13}{14} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{7}.$$

No exemplo anterior, vimos que o procedimento aplicado à fração  $\frac{3}{7}$  resulta que  $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$ . Assim, juntando tudo, obtemos que

$$\frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}. \quad \blacksquare$$

Ao se aplicar o procedimento de Fibonacci e Sylvester às frações  $\frac{2}{n}$  do Papiro de Rhind, observa-se que apenas as frações  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{2}{11}$  e  $\frac{2}{23}$  produzem o mesmo resultado.

Fração	Papiro de Rhind [15]	Fibonacci e Sylvester
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	
$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{45}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	
$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{91}$

Fração	Papiro de Rhind	Fibonacci e Sylvester
$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{120}$
$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{153}$
$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$	$\frac{1}{10} + \frac{1}{190}$
$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14} + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{11} + \frac{1}{231}$
$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{276}$	
$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{15} + \frac{1}{75}$	$\frac{1}{13} + \frac{1}{325}$
$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{18} + \frac{1}{54}$	$\frac{1}{14} + \frac{1}{378}$
$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$	$\frac{1}{15} + \frac{1}{435}$
$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$	$\frac{1}{16} + \frac{1}{496}$
$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{22} + \frac{1}{66}$	$\frac{1}{17} + \frac{1}{561}$
$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{18} + \frac{1}{630}$
$\frac{2}{37}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$	$\frac{1}{19} + \frac{1}{703}$
$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26} + \frac{1}{78}$	$\frac{1}{20} + \frac{1}{780}$
$\frac{2}{41}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$	$\frac{1}{21} + \frac{1}{861}$
$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$	$\frac{1}{22} + \frac{1}{946}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{90}$	$\frac{1}{23} + \frac{1}{1035}$
$\frac{2}{47}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{1128}$
$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{28} + \frac{1}{196}$	$\frac{1}{25} + \frac{1}{1225}$
$\frac{2}{51}$	$\frac{1}{34} + \frac{1}{102}$	$\frac{1}{26} + \frac{1}{1326}$
$\frac{2}{53}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$	$\frac{1}{27} + \frac{1}{1431}$
$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{330}$	$\frac{1}{28} + \frac{1}{1540}$

Fração	Papiro de Rhind	Fibonacci e Sylvester
$\frac{2}{57}$	$\frac{1}{38} + \frac{1}{114}$	$\frac{1}{29} + \frac{1}{1653}$
$\frac{2}{59}$	$\frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{1770}$
$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$	$\frac{1}{31} + \frac{1}{1891}$
$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{42} + \frac{1}{126}$	$\frac{1}{32} + \frac{1}{2016}$
$\frac{2}{65}$	$\frac{1}{39} + \frac{1}{195}$	$\frac{1}{33} + \frac{1}{2145}$
$\frac{2}{67}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$	$\frac{1}{34} + \frac{1}{2278}$
$\frac{2}{69}$	$\frac{1}{46} + \frac{1}{138}$	$\frac{1}{35} + \frac{1}{2415}$
$\frac{2}{71}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$	$\frac{1}{36} + \frac{1}{2556}$
$\frac{2}{73}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$	$\frac{1}{37} + \frac{1}{2701}$
$\frac{2}{75}$	$\frac{1}{50} + \frac{1}{150}$	$\frac{1}{38} + \frac{1}{2850}$
$\frac{2}{77}$	$\frac{1}{44} + \frac{1}{308}$	$\frac{1}{39} + \frac{1}{3003}$
$\frac{2}{79}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{3160}$
$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{54} + \frac{1}{162}$	$\frac{1}{41} + \frac{1}{3321}$
$\frac{2}{83}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$	$\frac{1}{42} + \frac{1}{3486}$
$\frac{2}{85}$	$\frac{1}{51} + \frac{1}{255}$	$\frac{1}{43} + \frac{1}{3655}$
$\frac{2}{87}$	$\frac{1}{58} + \frac{1}{174}$	$\frac{1}{44} + \frac{1}{3828}$
$\frac{2}{89}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$	$\frac{1}{45} + \frac{1}{4005}$
$\frac{2}{91}$	$\frac{1}{70} + \frac{1}{130}$	$\frac{1}{46} + \frac{1}{4186}$
$\frac{2}{93}$	$\frac{1}{62} + \frac{1}{186}$	$\frac{1}{47} + \frac{1}{4371}$
$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$	$\frac{1}{48} + \frac{1}{4560}$
$\frac{2}{97}$	$\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$	$\frac{1}{49} + \frac{1}{4753}$

Fração	Papiro de Rhind	Fibonacci e Sylvester
$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{66} + \frac{1}{198}$	$\frac{1}{50} + \frac{1}{4950}$
$\frac{2}{101}$	$\frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$	$\frac{1}{51} + \frac{1}{5151}$

### 3. Erdos e Stein

**(Erdős e Stein)** Toda fração  $\frac{a}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ) maior do que ou igual a 1 pode ser escrita como soma de frações unitárias **distintas**.

*Demonstração.* Seja  $r = \frac{a}{b}$  uma fração  $\geq 1$  (com  $a, b \in \mathbb{N}$ ). Considere o conjunto:

$$X = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid r < \sum_{k=2}^m \frac{1}{k} \right\}.$$

O conjunto  $X$  é diferente do vazio, pois a série  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$  é divergente (Lima (2006, p. 38)) e, sendo assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, ele possui um menor elemento  $m^*$ . Mais ainda,  $m^* > 3$  (pois  $r \geq 1$ ), de modo que  $m^* - 1 > 2$ . Pela minimalidade de  $m^*$ , segue-se que

$$\sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} \leq r.$$

Agora, se  $\sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} = r$ , o teorema está provado, pois escrevemos  $r = \frac{a}{b}$  como a soma de frações unitárias distintas. Suponha então que  $\sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} < r$ . Assim, temos que

$$\sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} < r < \sum_{k=2}^{m^*} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{m^*}.$$

Portanto,

$$0 < r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} < \frac{1}{m^*} < 1.$$

Dado que  $r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k}$  é uma fração maior do que 0 e menor do que 1, podemos usar o Teorema 2 que nos garante que  $r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k}$  pode ser escrito como uma soma de frações unitárias distintas  $r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s}$ , ou ainda,

$$r = \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s}.$$

Agora, para cada  $1 \leq i \leq s$ , vale que

$$\frac{1}{n_i} < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s} = r - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} < \frac{1}{m^*} < \frac{1}{m^*-1} < \dots < \frac{1}{2}.$$

Portanto, a decomposição  $r = \frac{a}{b} = \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s}$  é tal que todas as frações unitárias são distintas entre si, o que encerra a prova desse teorema.

**Exemplo 3.** Vamos expressar  $\frac{17}{10}$  como soma de frações unitárias distintas usando os procedimentos dados por Fibonacci, Sylvester, Erdős e Stein. Como a fração  $\frac{17}{10}$  é imprópria, precisamos, inicialmente, determinar o menor valor de  $m$  tal que  $\sum_{k=2}^m \frac{1}{k} > \frac{17}{10}$ . Por inspeção, obtemos que tal menor valor ocorre para  $m^* = 8$ . Assim,

$$\frac{17}{10} = \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} + \left( \frac{17}{10} - \sum_{k=2}^{m^*-1} \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^7 \frac{1}{k} + \left( \frac{17}{10} - \sum_{k=2}^7 \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{3}{28}.$$

Vamos agora aplicar o processo a fração própria  $\frac{3}{28}$ . Como 10 é o menor natural maior do que  $\frac{28}{3}$ , escrevemos:

$$\frac{3}{28} = \frac{1}{10} + \left( \frac{3}{28} - \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{140}.$$

Dado que  $\frac{1}{140}$  é uma fração unitária, o procedimento encerra-se fornecendo-nos a seguinte decomposição:

$$\frac{17}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{140}. \quad \blacksquare$$

No endereço <<https://goo.gl/9eOZxe>> há um aplicativo *on-line* (figura a seguir), de nossa concepção, que calcula a decomposição de uma fração positiva como uma soma de frações unitárias distintas usando os procedimentos propostos por Fibonacci, Sylvester, Erdős e Stein.

Botts (1967) apresenta uma outra prova para a existência de uma decomposição de uma fração como soma de frações unitárias distintas usando, para isso, as igualdades

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Além do procedimento *greedy* de Fibonacci, Sylvester, Erdős e Stein, outros algoritmos têm sido propostos para o cálculo da decomposição de uma fração em somas de frações unitárias distintas. Alguns desses algoritmos tentam minimizar o número de parcelas ou o tamanho dos denominadores na decomposição. Para o leitor interessado, recomendamos as referências Bleicher (1972), Beck, Bleicher e Crowe (2000), Yokota (1988), Bееckmans (1993) e Gong (1992).

#### 4. Considerações Finais

Apesar de antiga e utilizar matemática elementar, existem várias questões matemáticas associadas às frações egípcias que estão sem respostas até os dias de hoje. Este é um assunto vasto e de grande interesse atual de pesquisa. Vejamos um exemplo: sabe-se que as frações  $2/n$  (com  $n > 2$ ) podem ser escritas como soma de três frações unitárias distintas, a saber,

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Frações da forma  $3/n$  também podem ser escritas como soma de três frações unitárias distintas. De fato, Mays (1987) mostra que o procedimento de Fibonacci e Sylvester, quando aplicado a uma fração própria  $a/b$ , produz uma decomposição com no máximo  $a$  parcelas<sup>1</sup>. Esse resultado, quando

<sup>1</sup>Observe que na tabela na página 533, todas as decomposições obtidas pelo procedimento de Fibonacci-Sylvester têm duas parcelas.

aplicado às frações do tipo  $3/n$ , estabelece então que existe uma decomposição para  $3/n$  com no máximo 3 parcelas. Caso a decomposição tenha apenas uma ou duas parcelas, uma decomposição com três parcelas pode ser construída usando-se a identidade  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ . E frações da forma  $4/n$ ? Conhecida como Conjectura de Erdős-Straus, acredita-se que a resposta seja afirmativa, embora nenhuma demonstração tenha sido fornecida até a presente data (testes computacionais atestaram que  $4/n$  pode ser escrito como a soma de três frações unitárias distintas com valores até  $n = 10^{17}$ ). Motivado pela Conjectura de Erdős-Straus, Wacław Franciszek Sierpiński (1882-1969) propôs uma conjectura análoga para frações do tipo  $5/n$ , a saber, que para todo  $n > 5$  existe uma decomposição de  $5/n$  como soma de três frações unitárias distintas. Mais geralmente, Andrzej Bobola Maria Schinzel (1937–2021) conjecturou que qualquer fração  $k/n$  pode ser expressa como soma de três frações unitárias distintas para todo  $n$  a partir de um determinado número natural  $n_0$  que depende do numerador  $a$ . Outros problema: Será que as decomposições do Papiro de Rhind seguiram algum princípio ao serem elaboradas? Tal pergunta tem sido estudada por muitas pessoas (acadêmicos e amadores), que propuseram diferentes explicações, mas sem um consenso final. Nesse contexto, uma crítica comum é a de que as explicações sugeridas são anacrônicas: elas usam concepções modernas que não estavam disponíveis no Egito antigo. Ao leitor interessado, como ponto de partida, indicamos a referência Abdulaziz (2008).

Por que os egípcios usavam (à exceção da fração  $2/3$ ) apenas frações unitárias e decompunham as não unitárias como soma de frações unitárias *distintas*? Alguns estudiosos criticam esta maneira de conceber e operacionalizar frações como desajeitada e como uma das razões pelas quais a matemática egípcia antiga era inferior se comparada com a vizinha Mesopotâmia e que nunca conseguiu avançar além de um certo ponto (Imhausen, 2016). Ronald Graham (1935-) (que escreveu sua tese de doutorado sobre frações unitárias) perguntou a André Weil (1906-1998) o motivo, e Weil respondeu: “Eles tomaram o caminho errado.” Sethe (1916), na página 60 escreve: “Não conseguimos entender que, humanos, quando dividem 5 por 7 e, então, tendo obtido  $\frac{1}{7} \frac{1}{7} \frac{1}{7} \frac{1}{7} \frac{1}{7}$ , como os egípcios antigos, não prossigam somando esses 5 itens semelhantes para encontrar uma expressão muito mais simples  $\frac{5}{7}$ .”. Historiadores da Ciência, nos dias de hoje, consideram esses julgamentos anacrônicos, pois analisam o passado com recursos do presente, não disponíveis no passado.

Contudo, se seguirmos o desenvolvimento egípcio do conceito de uma fração e tentarmos entendê-lo não em comparação e nem por meio do olhos do nosso sistema moderno, é possível perceber as frações egípcias não como um fracasso final inibindo desenvolvimentos posteriores mas, sim, como uma evolução de um sistema matemático em um novo campo. É particularmente interessante ver como ferramentas foram concebidas para ajudar a superar dificuldades técnicas.

A partir das fontes disponíveis dos últimos períodos, podemos ver que os cálculos com frações eram considerados mais avançados do que a manipulação de inteiros mas, ainda assim, os escribas egípcios mais avançados conseguiam fazê-los de forma competente.

(Imhausen, 2016, p. 52, tradução nossa)

O uso das frações egípcias tem algumas vantagens. Imhausen (2016) observa, por exemplo, que o processo de se decompor cada fração em frações unitárias distintas e dispor as frações dessa decomposição em ordem decrescente permite uma comparação fácil entre as frações. Assim, enquanto que não é imediato saber qual fração é maior,  $5/8$  ou  $4/7$  (elas são um pouco maiores do que  $1/2$ ), suas representações como frações egípcias,  $5/8 = 1/2 + 1/8$  e  $4/7 = 1/2 + 1/14$  permitem concluir rapidamente que  $5/8 > 4/7$ .

Kosheleva e Kreinovich (2009) lembram que nos computadores modernos, o cálculo de  $x/y$  é realizado como o produto  $x \cdot (1/y)$ . Para valores básicos de  $y$ , os valores de  $1/y$  são pré-calculadas e armazenados. As razões  $1/y$  para outros valores de  $y$  são então calculados com base nos valores armazenados. Assim, os computadores atuais usam frações unitárias.

As frações egípcias (frações unitárias) costumam aparecer nos livros didáticos nacionais, principalmente como um quadro de informação histórica (com ênfase na notação hieroglífica, sem menções à escrita hierática). Seu uso escolar, contudo, pode ir muito além: é possível fazer toda a construção da teoria de frações na Escola Básica usando as frações unitárias como ponto de partida. Ao leitor interessado nesta abordagem, recomendamos o livro didático *Frações no Ensino Fundamental – Volume 1*, de Ripoll *et al.* (2016) do Projeto Um Livro Aberto do Impa e Obmep (disponível em: <[https://www.umlivroaberto.com/wp/?page\\_id=89](https://www.umlivroaberto.com/wp/?page_id=89)>).

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao projeto Livro Aberto <https://umlivroaberto.org/> com o qual este estudo se iniciou e ao *referee* anônimo pelas indicações de correções!

## Referências

- [1] Abdulaziz, Abdulrahman A. *On The Egyptian Method of Decomposing  $2/n$  into Unit Fractions*. *Historia Mathematica*, v. 35, p. 1-18, 2008.
- [2] Beck, Anatole; Bleicher, Michael N.; Crowe, Donald W. *Excursions into Mathematics: The Millennium Edition*. A K Peters, 2000.
- [3] Beeckmans, Laurent. *The Splitting Algorithm for Egyptian Fractions*. *Journal of Number Theory*, v. 43, p. 173-185, 1993.
- [4] Bleicher, Michael N. *A New Algorithm for The Expansion of Egyptian Fractions*. *Journal of Number Theory*, v. 4, p. 342-382, 1972.
- [5] Botts, Truman. *A Chain Reaction Process in Number Theory*. *Mathematics Magazine*, v. 40, n. 2, p. 55-65, 1967.
- [6] Cajori, Florian. *A History of Mathematical Notations: Volume I*. Cosimo Classics, 2007.
- [7] Chace, Arnold Buffum. *The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058*. Volume I. Free Translation and Commentary. Mathematical Association of America, 1927.
- [8] Chace, Arnold Buffum; Bull, Ludlow; Manning, Henry Parker. *The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058*. Volume II. Photographic Facsimile, Hieroglyphic Transcription, Transliteration, Literal Translation, Free Translation, Mathematical Commentary, and Bibliography. Mathematical Association of America, 1929.
- [9] Clagett, Marshall. *Ancient Egyptian Science: A Source Book*. Volume Three: Ancient Egyptian Mathematics. American Philosophical Society, 1999.
- [10] Dunton, M.; Grimm, R. E. *Fibonacci on Egyptian Fractions*. *The Fibonacci Quarterly*, v. 4, p. 339-354, 1966.
- [11] Erdős, Paul; Stein, Stein. *Sums of Distinct Unit Fractions*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 14, n. 1, p. 126-131, 1963.
- [12] Gillings, Richard J. *Mathematics in The Time of The Pharaohs*. Dover, 1972.

- [13] Gong, Kevin. *Egyptian Fractions*. UC Berkeley, 1992.
- [14] Guy, Richard K. *Unsolved Problems in Number Theory*. Springer-Verlag, 1994.
- [15] Imhausen, Annete. *Mathematics in Ancient Egypt: A Contextual History*. Princeton University Press, 2016.
- [16] Kosheleva, Olga; Kreinovich, Vladik. *Egyptian Fractions Revisited*. Informatics in Education, v. 8, n. 1, p. 35-48, 2009.
- [17] Lima, Elon Lages. *Análise Real Volume 1: Funções de Uma Variável*. Oitava edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.
- [18] Mays, Michael. *A Worst Case of The Fibonacci-Sylvester Expansion*. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, v. 1, p 141-148, 1987.
- [19] Neugebauer, Otto. *The Exact Sciences in Antiquity*. Second Edition. Dover Publications, Inc., 1969.
- [20] Ripoll, Cydara Cavedon et al. *Frações no Ensino Fundamental – Volume 1*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada & Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, 2016. Disponível em: <[https://www.umlivroaberto.com/wp/?page\\_id=89](https://www.umlivroaberto.com/wp/?page_id=89)>. Acesso em: 29 de dezembro de 2016.
- [21] Sethe, Kurt. *Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern*. Karl J. Trübner, 1916.
- [22] Sigler, Laurance. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer-Verlag, 2002.
- [23] Stuart, John. *Memoir of the Late Alexander Henry Rhind, of Sibster*. Edinburgh: Neill and Company, 1864.
- [24] Sylvester, James Joseph. *On A Point in the Theory of Vulgar Fractions*. American Journal of Mathematics, v. 3, n. 4, p. 332-335, 1880.
- [25] Yokota, Hisashi. *Length and Denominators of Egyptian Fractions II*. Journal of Number Theory, v. 28, p. 272-282, 1988.

Humberto José Bortolossi  
Universidade Federal Fluminense  
<[humbertobortolossi@id.uff.br](mailto:humbertobortolossi@id.uff.br)>

Catharine de Oliveira Lobo Fernandes Martins  
Ciep 259 professora Maria do Amparo Rangel de Souza  
<[catharinelobo@gmail.com](mailto:catharinelobo@gmail.com)>

Recebido: 20/07/2022  
Publicado: 25/10/2022

# Discalculia como transtorno de aprendizagem da matemática: discussão necessária na formação docente

Alana Cavalcanti Alves 

Vinícius Martins Varella 

## Resumo

Este trabalho, classificado como pesquisa aplicada de cunho qualitativo, tem como objetivo geral analisar como o transtorno discalculia é percebido por especialistas e professores de matemática da educação básica. Nessa direção, traçamos como objetivos específicos, identificar: i) o que especialistas dizem sobre o transtorno discalculia e como iniciaram seus estudos sobre o tema; e ii) a experiência de alguns docentes de Matemática com o transtorno discalculia. Através das nossas análises, consideramos urgente a formação continuada que dê conta de apresentar aos professores da educação básica estratégias didático-pedagógicas para ensinar alunos com discalculia.

**Palavras-chave:** Discalculia; Matemática; Transtorno de aprendizagem.

## Abstract

This project, classified as applied research of a qualitative nature, has the general objective of analyzing how dyscalculia is perceived by specialists and mathematics teachers in basic education. In this direction, we set out as specific objectives to identify: i) what experts say about dyscalculia and how they started their studies on the subject and ii) the experience of some mathematics teachers with dyscalculia. Through our analyses, we consider urgent continuing education that can provide basic education teachers with didactic-pedagogical strategies to teach students with dyscalculia.

**Keywords:** Dyscalculia; Mathematics; Learning disorder.

## 1. Introdução

Podemos considerar que esta pesquisa começou a ser pensada por volta do ano de 2018 dentro de uma pequena sala de aula. Na época, uma escola de reforço. Em meio a uma atividade de Matemática, enquanto ajudava uma aluna, que na época tinha por volta dos nove anos e fazia o terceiro ano do ensino fundamental I, algo me chamou atenção em uma de suas respostas. Ao ser questionado por mim o resultado de uma adição, sua resposta foi “aquele número que é o cinco e o dois juntos” no lugar de dizer ‘cinquenta e dois’. Naquele momento surgia uma inquietação em mim sobre a situação que acabou por me trazer ao tema desta pesquisa. Se você, assim como eu naquele momento, se questionou o porquê da resposta desta aluna, convido-o à leitura desta pesquisa, que busca entender do que se trata a discalculia sob uma ótica diferente: não apenas conceituando-a, mas buscando entender o papel do professor em sala de aula com relação à discalculia. Foi

exatamente nossa preocupação em buscar respostas que nos levou ao tema discalculia e seus sinais, que podem ser confundidos de várias maneiras. A Matemática, por diversas vezes, é estigmatizada dentro da sociedade como um obstáculo muito difícil de ser enfrentado. A não materialidade dos objetos de conhecimento da Matemática pode causar, de certo modo, uma reação negativa entre crianças e se manter até a fase adulta, motivo esse que faz com que poucas pessoas busquem entender se suas dificuldades, de fato, são as esperadas para a idade ou negligenciem sinais que podem apontar um transtorno de aprendizagem na Matemática. Frases como “sempre fui mal em Matemática, por isso meu filho também é assim” ou “é assim mesmo, ele não tira notas boas, pois não estuda suficiente” já foram ditas por pais em relação aos seus filhos, sem de fato entender o que estava por trás dessas dificuldades. Quando falamos da discalculia, muitos podem ser os sinais, mas pouco se discute sobre o tema no Brasil. Isso nos leva a uma série de reflexões que veremos nos capítulos seguintes.

O fato de a discalculia ser pouco discutida também nos traz outra dificuldade: a escassez de pesquisas sobre o tema, de modo específico em Língua Portuguesa. A área de transtorno de aprendizagem é, ainda, pouco debatida quando se trata da Matemática.

A Discalculia, na área educacional, tem sido abordada nos periódicos, dissertações e teses brasileiras de forma um tanto quanto modesta e são poucos os estudos que apresentam propostas de intervenção para indivíduos com esse tipo de transtorno e de capacitação para os professores que atuam com essas crianças, mostrando a necessidade de ampliação das pesquisas, em nível educacional, que possam colaborar com os processos formativos iniciais e continuados dos profissionais da educação e com o desenvolvimento de estratégias de intervenção e ensino para as crianças com dificuldades ou transtornos de aprendizagem da Matemática. (GUEDES, BLANCO E COELHO NETO, p. 18, 2019)

Muito se fala do comprometimento que o professor precisa ter com a educação no que diz respeito à didática dentro de sala de aula, principalmente em disciplinas das grades curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática, porém, pouco (ou nada) é falado sobre transtornos de aprendizagem e como o professor deve se portar mediante essa situação. Todo o conhecimento que aprendi em sala de aula durante a graduação não é suficiente para mediar o ensino de Matemática com alunos discalculícos. Na prática docente, não sabemos como explicar certos erros e dificuldades, devido à formação inicial deficiente. Embora a discalculia seja um transtorno de aprendizagem considerado raro em relação a outros, como, por exemplo, a dislexia<sup>1</sup>, é algo real e que pode atrapalhar bastante a vida de quem tem, principalmente se não há o diagnóstico e conhecimento do assunto. Desta feita, é fundamental que tenhamos consciência da importância de discutirmos sobre a discalculia e o comprometimento do professor em manter uma educação inclusiva, para que discalculícos sintam-se seguros em sala de aula e confiantes de que podem ser ouvidos e não julgados. Para tanto, apresentamos como objetivo geral dessa pesquisa analisar como o transtorno discalculia é percebido por especialistas e professores de Matemática da educação básica. Nessa mesma direção, traçamos como objetivos específicos identificar: i) o que especialistas dizem sobre o transtorno discalculia e como iniciaram seus estudos sobre o tema; ii) a experiência de alguns docentes de Matemática com o transtorno discalculia. Como procedimentos metodológicos de coleta de dados, fizemos entrevista semiestruturada com duas especialistas em discalculia, quando foram questionadas desde

<sup>1</sup>Dislexia consiste num distúrbio ou transtorno de aprendizagem na área da leitura, escrita e soletração, estabelecendo maior incidência nas salas de aula. (TELES, 2004, p. 715)

sua formação na Licenciatura em Matemática até tornarem-se especialistas no assunto. Além disso, aplicamos questionário para dois professores de Matemática da educação básica, ambos com experiência atual em escola da rede pública e privada. As análises e os resultados foram organizados em dois tópicos, na tentativa de responder aos objetivos traçados no início da pesquisa.

## 2. Discalculia: dificuldade ou transtorno de aprendizagem?

Para entendermos melhor o que de fato é a discalculia, precisamos, primeiramente, diferenciar o conceito de dificuldade de aprendizagem e transtorno de aprendizagem. A diferença entre essas definições é fundamental para entendermos os sintomas e características que os indivíduos podem apresentar no seu processo de aprendizagem durante a vida. A confusão entre as nomenclaturas, tais como “dificuldade, transtornos, distúrbios, problemas, déficit”, é observada frequentemente nas literaturas, e faz-se necessário entendermos a distinção das definições.

Os termos utilizados, tais como ‘distúrbios’, ‘dificuldades’, ‘problemas’, ‘discapacidades’, ‘transtornos’, são encontrados na literatura, e muitas vezes são empregados de forma inadequada [...] Na tentativa de permitir uma melhor comunicação entre os profissionais que atuam na área de aprendizagem, é importante que exista uma terminologia uniforme. Dessa forma, é importante estabelecer diferenças. (OHLWEILWER, 2016, p. 107)

A dificuldade de aprendizagem está relacionada a fatores externos que interferem diretamente no processo de aprendizagem do indivíduo, que podem ter diferentes origens, como *bullying*, problemas familiares, ansiedade, má alimentação, baixa autoestima. Para esses tipos de casos, apoio de profissionais adequados como psicólogos, pedagogos, professores particulares pode ajudar nas dificuldades do aluno. A dificuldade de aprendizagem pode manifestar-se de maneira mais formal no ensino,

(...) principalmente no ambiente escolar e se refletem, em geral, na diminuição do desempenho acadêmico, principalmente na área da linguagem escrita e do cálculo, podendo levar até mesmo ao completo fracasso escolar. Embora a resultante possa ser a mesma, ou seja, a criança não está aprendendo de acordo com o que se espera, muitas podem ser as razões que podem provocar esta situação. (ZORZI, 2004, p.

O transtorno de aprendizagem trata-se de uma disfunção na região frontal do cérebro, que não necessariamente surge por meio de danos cerebrais, mas que podem estar presente desde o nascimento do indivíduo, apresentando sintomas aparentes durante a vida, como hiperatividade e impulsividade. Diversas vezes o transtorno de aprendizagem é visto de forma indiscriminada, onde o sujeito que possui algum tipo de transtorno é julgado como “preguiçoso” ou que a falta de estudos é o principal motivo para suas dificuldades encontradas durante o processo de aprendizagem.

O transtorno de aprendizagem, diferente do distúrbio, é resultado de uma disfunção na região frontal do cérebro, que causa transtorno no indivíduo. Compromete a

atenção seletiva e gera impulsividade, hiperatividade e dificuldade visomotora. O indivíduo com transtorno apresenta comprometimento comportamental aparente. (VILLAR, 2017, p. 32).

Dito isso, a discalculia encaixa-se na classificação de transtorno, uma vez que há manifestações de comportamentos relativos à área da Matemática. Trata-se de uma falta de habilidade com a Matemática devido a uma disfunção na região frontal do cérebro, que difere dos distúrbios que afetam a região parietal do cérebro, logo não se trata de motivações externas por parte do aluno. A discalculia é classificada em seis tipos que são definidos por Kosci (1974, *apud*, GARCIA, 1998) estudioso que aprofundou o estudo da discalculia pela primeira vez em 1974. Os seis tipos são: verbal, practognóstica, léxica, gráfica, operacional e ideognóstica. Na discalculia verbal o sujeito tem dificuldades em conceitos matemáticos que são ditos verbalmente. Nesse caso o indivíduo pode conseguir ler e escrever os números, mas não terá uma boa compreensão se for dito a ele oralmente. Um discalcúlico, nessas condições, terá dificuldades de nomear os números, os símbolos, e até mesmo as quantidades. A discalculia practognóstica é a dificuldade de relacionar o abstrato ao real, de enumerar e manipular equações matemáticas. Uma pessoa que apresenta esse tipo de discalculia pode entender definições matemáticas, mas terá dificuldades em comparar números, quantidades, equações e associar imagens à Matemática. Na discalculia léxica o indivíduo apresenta problemas para interpretar símbolos matemáticos. Em tal caso, o discalcúlico pode ter dificuldades em identificar símbolos como os sinais das operações. Então, o aluno, por exemplo, pode confundir o sinal da adição com o da subtração e fazer a operação errada, subtraindo ao invés de somar. Já a discalculia gráfica é a dificuldade de escrever os símbolos matemáticos, onde o sujeito pode entender, mas terá dificuldade na escrita. Uma criança com discalculia gráfica, por exemplo, pode escrever os números de forma espelhada, ou inverter a ordem dos números, como 52 e 25, achando que é a mesma coisa.

A discalculia operacional é a dificuldade na execução de operações e cálculos numéricos. Pode entender os símbolos e conceitos, mas terá dificuldades na manipulação das operações matemáticas em si, apresentando dificuldades em somar, subtrair, dividir, multiplicar etc. Por fim, a discalculia ideognóstica é a dificuldade nas operações mentais e no entendimento de conceitos matemáticos, onde o discalcúlico apresenta dificuldades para lembrar conceitos e fazer cálculos mentais. A discalculia também pode ser classificada em graus: leve, médio e limite, pois essa condição afeta o indivíduo com intensidades diferentes (SILVA, 2008). Na discalculia leve, o discalcúlico apresenta retorno favorável ao tratamento, enquanto no médio, que representa a maior porcentagem dos indivíduos com discalculia, apresenta um retorno moderado à intervenção pedagógica. Por fim, a discalculia de grau limite ocorre quando o sujeito tem uma lesão neurológica que leva ao transtorno de aprendizagem. Embora a discalculia não tenha cura, existem tratamentos que ajudam no processo de aprendizagem do discalcúlico. O diagnóstico, assim como em outros transtornos, quanto mais cedo acontecer, mais propiciará condições de tratamento e obtenção de bons resultados. Ainda não se sabe a causa e se, de fato, é genética, mas pode-se observar desde os anos iniciais da criança alguns sintomas. Dentre os principais sintomas, Campos (2020) destaca:

Dificuldade no desenvolvimento de cálculos matemáticos, podendo apresentar alteração nas habilidades viso-motoras, dificuldade de associar números com quantidade e operações de conservação, espaço temporal prejudicado e dificuldades de distinguir formas, tamanhos, quantidades e espessuras. (CAMPOS, 2020, p. 26)

Os sintomas são identificados, geralmente, por professores nos primeiros anos da educação infantil

do indivíduo, mas o diagnóstico e tratamento devem ser feitos, de fato, por uma equipe multidisciplinar. Psicólogos, psiquiatras, fonoaudiólogos, professores de Matemática podem auxiliar com testes específicos que testam habilidades matemáticas, como conceitos numéricos, consciência numérica, espaço, volume e quantidades. Em relação ao diagnóstico, Villar (2017) diz que:

Na definição de Discalculia pela OMS (1993), ela cita que para ser caracterizado um indivíduo discalculico tem que haver baixo desempenho em aritmética de acordo com o esperado para a idade escolar, mas com inteligência normal, e deve ser submetido a testes padronizados e especializados para a matemática, como a Zareki-R. (VILLAR, 2017, p. 60)

Para a identificação do transtorno discalculia no aluno, alguns testes podem ser elaborados. Vieira (2014, p.109-119) destaca pontos importantes para que seja feito o diagnóstico.

- Dificuldades em identificar números: o aluno pode trocar os algarismos 6 e 9, 2 e 5, falar o número 2, quando o algarismo é, na verdade, o 4. Escrever 20011 ao ouvir 211.
- Incapacidade para estabelecer uma correspondência recíproca: dizer o número a uma velocidade e expressar, oralmente, em outra.
- Escassa habilidade para contar compreensivamente: decorar rotina dos números, ter déficit de memória, nomear de forma incorreta os números relativos ao último dia da semana, estações do ano, férias.
- Dificuldade na compreensão dos conjuntos: compreender de maneira errada o significado de um grupo de coleção de objetos.
- Dificuldades na conservação: não conseguir identificar que os valores 6 e  $4+2$  ou  $5+1$  se correspondem; para eles somente significam mais objetos.
- Dificuldades no cálculo: o déficit de memória dificulta essa aprendizagem. Confusão na direcionalidade ou na apresentação das operações a realizar.
- Dificuldade na compreensão do conceito de medida: não conseguir fazer estimativas acertadas sobre algo quando necessitar dispor das medidas em unidades precisas.
- Dificuldade para aprender a dizer as horas: aprender as horas requer a compreensão dos minutos e segundos e o aluno com discalculia quase sempre apresenta problemas na área.
- Dificuldade na compreensão do valor das moedas: dificuldade na aquisição da conservação da quantidade, relacionada a moedas, por exemplo: 1 moeda de 25 = 5 moedas de 5.
- Dificuldade na compreensão da linguagem matemática e dos símbolos: adição (+), subtração (-), multiplicação (x) e divisão (:).

- Dificuldade em resolver problemas orais: o déficit de decodificação e compreensão do processo leitor impedirá a interpretação correta dos problemas orais.

Em síntese, o termo correto para classificação da discalculia é transtorno de aprendizagem, podendo estar presente desde o nascimento. Assim, a discalculia pode ser diagnosticada, clinicamente reconhecível e tratada.

### 3. Procedimentos metodológicos

Essa pesquisa teve como objetivo discutir sobre a discalculia a partir do ponto de vista de especialistas na área, além de apontar a carência de conhecimento dos professores de Matemática sobre o tema. Tratando-se da natureza da nossa pesquisa, segundo Prodanov e Freitas (2013), pode ser classificada como pesquisa aplicada, que objetiva proporcionar informações para aplicação prática, dirigidos à solução dos problemas abordados. Trata-se, também, de uma pesquisa de caráter exploratório. Em relação à abordagem do problema, a pesquisa é considerada qualitativa, que, conforme Prodanov e Freitas (2013), se trata de uma pesquisa que considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. Entende-se que o tema discalculia, embora raro, é um transtorno que afeta indivíduos na sociedade, de modo que se faz necessário estudar não só o indivíduo em si, mas o meio onde ele está inserido, visto que suas dificuldades são para além da sala de aula, onde:

a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados. O pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo. Nesse caso, as questões são estudadas no ambiente em que elas se apresentam sem qualquer manipulação intencional do pesquisador. (PRODANOV e FREITAS, 2013, p. 70).

Esta pesquisa, em relação à coleta de dados, está dividida em dois momentos de acordo com os sujeitos pesquisados, sendo: 1º Momento – Entrevistas com especialistas na área; 2º Momento – Questionário para professores da educação básica de João Pessoa. Para entender a discalculia, é necessário, inicialmente, que haja as considerações de especialistas da área e suas percepções sobre o tema em relação à sala de aula. Dessa forma, pelo caráter dessa pesquisa, contamos com entrevistas semiestruturadas, feitas oralmente através da plataforma Google Meet. As entrevistas foram feitas com duas especialistas em discalculia e ansiedade matemática, sendo a primeira a professora Sara Mattos do Rio de Janeiro, graduada em Matemática pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ) e pós-graduanda em Neuropsicopedagogia. Também contamos com a psicopedagoga Ana Maria Antunes de São Paulo, graduada em Matemática, mestre em Educação pela Unifesp e doutoranda em Educação Matemática pela PUC-SP, além de autora de diversos livros, sendo um deles o *e-book* “Adaptando currículo para crianças com discalculia”, que serviu para fundamentar teoricamente esta pesquisa. Por meio das entrevistas, abordamos o conceito da discalculia pela concepção das profissionais a respeito do tema, que concordaram em contribuir com este trabalho, contando com suas opiniões e experiências com a discalculia, discutidas nos capítulos seguintes. Com vista aos nossos objetivos e, compreendendo a escassez da discussão sobre discalculia por parte dos professores da educação básica, aplicamos um questionário com perguntas abertas com dois professores do ensino básico de João Pessoa, sendo um de escola

pública e outro de uma escola privada da cidade. Tais perguntas tiveram como finalidade investigar o nível de conhecimento sobre a discalculia e o seus interesses em se aprofundarem no tema. O motivo da escolha de um questionário aberto, que se trata de um questionário escrito, onde o entrevistado responde com suas próprias palavras, também de forma escrita, é dar mais liberdade para que as respostas sejam mais explicativas. Assim, podemos compreender com mais clareza quais são os pensamentos e opiniões dos professores que foram entrevistados. Quanto ao método utilizado, utilizamos o método monográfico, que tem como princípio de que o estudo de um caso em profundidade pode ser considerado representativo de muitos outros ou mesmo de todos os casos semelhantes (GIL, 2008). Além de que, nessa situação, o processo de pesquisa visa a examinar o tema selecionado de modo a observar todos os fatores que o influenciam, analisando-o em todos os seus aspectos (PRODANOV E FREITAS, 2013). Desta feita, optamos por organizar as análises e resultados dos dados coletados em dois tópicos distintos, mas que se complementam: 4.1. O que dizem as especialistas sobre a discalculia; 4.2. A discalculia na escola: a experiência docente sobre o transtorno.

#### 4. Análises e resultados

Neste capítulo, apresentaremos análises e resultados importantes para esta pesquisa, onde trazemos uma abordagem sobre a discalculia sob a perspectiva de especialistas da área, professores do ensino básico e de alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba (UFPB).

##### 4.1. O que dizem as especialistas sobre a discalculia?

Como foi dito anteriormente, foram realizadas entrevistas com duas professoras que possuem experiência e formação na área da discalculia. Vejamos a seguir cada uma das entrevistas e nossas considerações acerca de seus apontamentos. A primeira entrevista foi realizada com a professora de Matemática Sara Mattos, do Rio de Janeiro, graduada em Matemática pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (Uerj) e pós-graduanda em Neuropsicopedagogia, no dia 10 de julho de 2021 por meio da plataforma Google Meet.

Ressaltamos que o primeiro contato da entrevistada com a discalculia não foi na faculdade, mas se deu por meio de um projeto, em parceria com a Uerj, na sala de recursos da escola estadual em que trabalhava, chamado “Discalculia em foco: colorir para aprender”, em 2012. A coordenadora do projeto, ao ter conhecimento de que a Sara Mattos estudava na Uerj da unidade de Caxias, convidou-a para ter maior engajamento no projeto. Embora o foco fosse discalculia, o projeto também englobava outros alunos com outras necessidades especiais. Sobre o projeto, Sara Mattos afirmou que:

A ideia do projeto era fazer atividades com os alunos onde pudessem eles mesmos confeccionar; eles faziam parte dos recortes, coloriam, montavam; se fosse um jogo eles participavam desde o início, (...) quanto mais eles estivessem envolvidos, mais eles teriam oportunidade e capacidade para aprender.

Segundo Sara Mattos, durante sua graduação em Matemática, entre os alunos, quase ninguém tinha conhecimento sobre a discalculia, até mesmo sua coordenadora do Curso não tinha ideia do

que se tratava. Sobre isso, afirmou “pra mim é inadmissível um professor de Matemática não saber o que é discalculia, por isso o tema tem que ser abordado na graduação”. Diante dessa afirmação, fica clara a importância e a necessidade de se abordar mais sobre temas correspondentes à área da educação. A falta de informações a respeito de processos de ensino e aprendizagem durante a graduação de licenciatura em Matemática produz uma geração de professores carentes de recursos e didáticas apropriados para diversas situações em sala de aula. Sobre esse mesmo assunto Villar (2017) diz:

(...) É imprescindível que professores comprometidos com a educação tenham subsídio e informação acerca dessa problemática, pesquisem, abandonem a sua zona de conforto, para realizar seu trabalho com competência e segurança necessárias para conquistar a qualidade da educação, colaborando para a construção da cidadania desses brasileiros. Assim, possibilitando a inclusão desses estudantes discalculicos que sofrem discriminação por apresentarem comportamentos e organização do pensamento diferentes da maioria. (VILLAR, 2017, p. 19)

Para a especialista Sara Mattos, a maior dificuldade encontrada ao estudar sobre discalculia era a falta de materiais sobre o assunto, e os poucos encontrados tinham uma linguagem muito difícil, além de definições sobre transtornos que não eram claras. Sobre isso, Sara Mattos apontou que: “depois de ler muito sobre transtornos psiquiátricos, finalmente entendi que se tratava de uma falha na comunicação neural”.

Não podemos afirmar, atualmente, que temos o ideal acerca de disponibilidade de materiais para pesquisa sobre o tema, mas diante dos avanços tecnológicos, conseguimos encontrar uma quantidade um pouco maior de pesquisas sobre o tema na internet. Um dos obstáculos encontrados é a falta de conhecimento das pessoas, de maneira geral, sobre o assunto e a escassez de buscas a respeito da discalculia, o que torna esse ideal mais distante da realidade. Além das dificuldades em encontrar materiais, Sara Mattos aponta também a falha que se tem nos cursos de graduação de Matemática em relação à educação, de modo específico na licenciatura.

Nas Universidades públicas ainda se vê um pouco sobre educação, mas nas faculdades particulares eles enxugam o máximo possível para que se tenha mais disciplinas específicas e quase nada de educação. Na minha Universidade ainda estudei sobre práticas docentes, mas em nenhum momento ouvi falar sobre discalculia ou outros transtornos (...) no meu tempo, tudo o que foi falado sobre discalculia foi eu quem falei.

De igual modo, o que pudemos observar nas disciplinas de educação oferecidas durante a graduação, pouco se fala sobre ensino específico da Matemática, onde as ementas são voltadas para educação de forma geral. Nada foi falado sobre discalculia ou qualquer outro tipo de transtorno desde o meu primeiro dia de aula. Tal fato torna a indignação de Sara Mattos exposta anteriormente ainda mais coerente. Desde que a especialista em discalculia, Sara Mattos, terminou seu curso de graduação em Matemática no ano de 2018, apresentou grande interesse pela área da neurociência e passou a estudar ainda mais sobre transtornos e principalmente sobre a discalculia. Então, surgiu a ideia de criar um perfil no Instagram para falar só sobre o assunto. Sara Mattos relatou que tem



Tanto um fonoaudiólogo como um neurologista podem dar. É muito importante que o aluno tenha esse laudo, pois com ele a criança terá direito a uma prova adaptada, diminuir o ritmo de exercícios da matemática em sala de aula e o uso de calculadora garantido por lei.

O uso da calculadora, além de ser um direito do aluno discalculico, ou que tenha outro tipo de transtorno, deve ser manuseada de modo que o aluno compreenda que este instrumento serve como apoio para ele, não sendo inteiramente dependente do mesmo. Além de facilitar no raciocínio e cálculos, a calculadora pode auxiliar o estudante trazendo uma maior segurança e diminuindo a ansiedade matemática durante atividades. Podemos observar, pelos relatos, a vasta experiência da Sara Mattos com a discalculia e sua visão bastante humana sobre o assunto, trazendo o sujeito em si como protagonista do processo de aprendizagem. De nada adianta conhecimento sobre o assunto sem empatia e interesse em ajudar o indivíduo de acordo com suas necessidades. A segunda entrevista foi realizada com a especialista Ana Maria Antunes de São Paulo, graduada em Matemática, mestre em Educação pela Unifesp e doutoranda em Educação Matemática pela PUC-SP. O primeiro contato da Ana Maria Antunes com a discalculia aconteceu quando ela ainda trabalhava em sua loja de brinquedos educativos, e uma professora foi em sua loja procurar por brinquedos que a ajudassem com crianças com transtornos de aprendizagem. Em uma conversa entre as duas, essa professora aconselhou a Ana Maria Antunes a pesquisar sobre a discalculia. Sobre isso, afirmou no início da entrevista:

Ao estudar sobre o assunto, fiquei com uma inquietação que me fez questionar na época como eu, recém-formada, vou ser professora de matemática e nunca ouvi falar sobre a discalculia?

Tal questionamento trouxe-nos a mesma inquietação, motivo pelo qual esta pesquisa foi feita, na esperança de que mais professores de Matemática possam se questionar e saírem de suas zonas de conforto e, desse modo, ajudar seus alunos no aprendizado da Matemática. Assim como Sara Mattos, Ana Maria Antunes também contou que uma das suas dificuldades na época foi a carência de materiais disponíveis sobre o assunto, quando relatou que:

Em 2013, os estudos eram bem menores do que se tem hoje, e os poucos que tinham... a maioria eram em outros idiomas. Foi quando decidi estudar mais sobre a discalculia... assim adentrei no caminho.

Além dessa carência citada, Ana Maria Antunes destacou também a falta de conhecimento das pessoas sobre o assunto:

Ministrei recentemente uma palestra para estudantes de uma Universidade Federal e todos ficaram sem saber o que era discalculia, que para mim é um assunto que já está posto, só vamos discutir sobre o assunto. (...) Ainda temos essa questão; e se essas pessoas que estão na área da educação e na área da saúde desconhecem sobre esse tema, imagina os pais?

Muitos pais e responsáveis, por ignorância sobre o tema, não procuram ajuda para seus filhos por acharem que são dificuldades consideradas normais para crianças ou os consideram indisciplinados com estudos e apenas ignoram suas reais necessidades. Mais uma vez fica evidente a necessidade de profissionais da educação se atentarem para os diferentes transtornos que possam encontrar em sua caminhada. Na sequência, Ana Maria Antunes relatou que já foi procurada por um senhor de 68 anos pedindo ajuda, pois se identificou com uma de suas palestras sobre a discalculia e não sabia até então que poderia ter esse transtorno, o que prova o quanto falta ser discutido sobre o assunto, pois a discalculia é sempre deixada em segundo plano. Também questionamos, no momento da entrevista sobre os sinais da discalculia, como identificar que há a possibilidade de uma pessoa ter o transtorno. Sobre isso, Ana Maria Antunes disse que:

O que tenho observado nesses tempos... uma criança que tem discalculia, ela ainda não conceituou esse nome, então, por exemplo, quando você toma o modelo do Triplo Código de Dehaene que ele fala ‘você tem que pensar no número 53, verbalizar o número 53 e tem que redigir o número 53’, é exatamente aí onde a criança tem esse comprometimento.

Vale ressaltar que o modelo de Dahaene surgiu em 1992 em uma tentativa de esclarecer como o cérebro funciona no processo de cálculos matemáticos. Assim como questionamos a especialista Sara Mattos sobre o papel do professor de Matemática no diagnóstico, também o fizemos com a especialista Ana Maria Antunes, uma vez que essa é uma dúvida recorrente para nós professores de Matemática. Dessa forma, Ana Maria Antunes respondeu que:

O diagnóstico eu não posso fazer sozinha, então eu sempre aconselho procurar um médico, um psiquiatra ou um neuro, para que seja dado o diagnóstico correto, mas eu sempre relato que a criança tem fortes características do transtorno, (...) então o professor ao receber o laudo do médico pode contribuir adaptando suas atividades para o ritmo da criança, e tem papel fundamental nesse processo de intervenção, nesse suporte no contexto educacional.

Assim como Sara Mattos apontou anteriormente, Ana Maria também ressalta a necessidade de uma equipe multidisciplinar no diagnóstico do indivíduo. Esse processo é fundamental para descartar todas as outras possibilidades e garantir que a intervenção pedagógica seja realizada da melhor maneira possível para o aluno. Cada aluno terá suas próprias necessidades, o que só pode ser garantido pela atuação de vários profissionais em conjunto trabalhando de acordo com suas especialidades.

Outra questão importante é sobre processo de avaliação no ensino de Matemática. Podemos afirmar que essa é uma preocupação independente de o aluno ter ou não transtorno. Contudo, tomando o objeto desta pesquisa, nos questionamos como seriam as avaliações/provas para alunos com laudo de discalculia. Seria a mesma prova? Devemos fazer adaptações? Como e quais? Sobre isso, Ana Maria Antunes afirmou, durante a entrevista que: “adaptar prova é pegar um enunciado e trazer da forma mais clara possível, e não dar fórmulas e regras de operação, pois isso é cola.” Vale ressaltar a necessidade de se trabalhar com esses alunos apresentando uma linguagem acessível e direta, com enunciados claros, dinâmicos e desafios e problemas matemáticos de possível resolução. Sobre as

atividades que podem ser usadas com crianças que apresentam quadro de discalculia, Ana Maria Antunes ressalta a importância de atividades lúdicas. Destacamos que atualmente temos diversas plataformas na internet e jogos que podem ser usados para aprender Matemática brincando e de forma prática. Sobre isso, destacamos a fala da especialista quando a mesma, durante a entrevista afirmou: “o sentido e a percepção precisam ser trabalhados com a criança, ela pode não saber a fórmula, mas ela vai entender o que está sendo dado”. Quando se trata de adultos, os jogos podem ser substituídos por revistas, com valores de produtos, ou na culinária com quantidades e medidas. Sempre adaptando para a dificuldade que o indivíduo necessita. Atentamos à visão crítica e profissional da Ana Maria Antunes a respeito da discalculia, que mostrou tanto a perspectiva da ciência como da educação, principalmente no tocante ao processo de intervenção pedagógica do discalcúlico. Podemos perceber que nas duas entrevistas ambas as especialistas apresentaram dificuldades parecidas, onde podemos destacar como a carência de conhecimento e informações sobre discalculia pode afetar as pessoas. No que diz respeito à formação dos professores, é crucial que tenha na grade curricular dos cursos de graduação em Matemática, tanto em universidades públicas como particulares, disciplinas que ofereçam discussões específicas sobre a discalculia, ou ter pelo menos uma geral que tratasse de dificuldades e transtornos de ansiedade, além de ementas mais específicas sobre o ensino da Matemática. Prova-se a necessidade de falarmos mais sobre o assunto não só nas escolas, mas em universidades. Professores de Matemática podem e devem estudar sobre esse transtorno para que participem diretamente no processo de aprendizagem e intervenção de alunos com discalculia.

#### 4.2. A discalculia na escola: a experiência docente sobre o transtorno

Como um dos objetivos desta pesquisa foi analisar o nível de conhecimento dos professores da educação básica sobre a discalculia e como as escolas, públicas e privadas, atuam lidando com tal situação, aplicamos um questionário aberto a dois professores, ambos da rede privada e pública.

Ressaltamos que, por questões éticas, os nomes dos professores e os nomes das escolas que trabalham não serão divulgados. Ambos são residentes da cidade de João Pessoa – PB, atuando como professores de Matemática. Vejamos as características dos professores:

Indicação	Gênero	Idade	Atuação em escola	Tempo de magistério
Professor 1	Masculino	Entre 45 e 55	Pública/Privada	24 anos
Professor 2	Masculino	Entre 35 e 45	Pública/Privada	24 anos

Tabela 1: Caracterização dos professores pesquisados

Inicialmente, os questionamos sobre suas experiências com alunos discalcúlicos e se eles já haviam ouvido falar sobre a discalculia. Vejamos suas respostas.

Professor 1: Já ouvi fala sobre discalculia e tive que estudar um pouco, pois tive uma aluna que foi diagnosticada com discalculia. A princípio uma aluna com deficiência em Matemática, mas com o passar do tempo fui percebendo algumas dificuldades que até então os outros alunos que apresentam dificuldades com a Matemática não apresentavam. Como não conseguia guardar os conceitos, não conseguia fazer contas de aritmética básica simples. E foi aí que pedi uma reunião com os pais e expliquei

a situação. *A priori* o pai disse que era preguiça, não tinha força de vontade e outras coisas que os pais falam quando não aceitam que os filhos têm problemas de aprendizagem. Levaram ela para uma psicopedagoga, uma psicóloga, psiquiatra e chegaram à conclusão que ela tinha discalculia. A solução apresentada foi provas adaptadas e uso de calculadora.

Professor 2: Sim. Tive, ele foi meu aluno do 9<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental II até o 3<sup>o</sup> ano do Ensino Médio na rede privada (na rede pública não tive nenhum com laudo, apenas suspeitava). Na verdade, até o presente momento esse foi o único aluno diagnosticado, através de laudo, que lecionei. No início, a coordenadora chamou os pais e eles informaram que havia uma psicopedagoga que o acompanhava nas atividades de casa, depois disso fizemos contato com essa profissional que passou a executar com ele atividades direcionadas na parte de aritmética para que ele reduzisse a grande defasagem que havia acumulado durante sua vida estudantil. Infelizmente, ao terminar o 3<sup>o</sup> ano, ele ainda apresentava dificuldades para resolver equações de 1<sup>o</sup> grau, mas sua evolução durante os 2 últimos anos, dos 4 que acompanhei, foi bem maior que nos 2 primeiros anos.

Notemos que nas respostas, o Professor 1 traz uma situação em que os pais da aluna a julgavam como preguiçosa e sem interesse para os estudos, enquanto o Professor 2 relata um caso em que o aluno já recebia ajuda de uma psicopedagoga que atuava trabalhando diretamente com suas necessidades específicas. Vejamos que à especialista que o ajudava nas atividades de Matemática, o professor apenas identificou suas dificuldades, não participava diretamente do acompanhamento das atividades. Em relação ao Professor 1, provavelmente se ele não tivesse notado as dificuldades fora do esperado da estudante, a mesma terminaria sua formação escolar sem receber um diagnóstico e ajuda necessária para seu desenvolvimento na Matemática, visto que seus pais não compreendiam sua situação, ressaltando a necessidade e a importância do diagnóstico nesse processo (SILVA, 2008). Ressaltamos que ambos os professores tiveram seu primeiro contato com a discalculia enquanto professores já formados e na prática da sala de aula, e não durante a graduação, do mesmo modo que as especialistas entrevistadas nessa pesquisa também afirmaram. Relembrando a fala de Sara Mattos, ratificamos a importância e necessidade de abordar a discalculia na grade do curso de Licenciatura em Matemática das Universidades. Na sequência, perguntamos se nas escolas em que trabalham há uma equipe pedagógica que acompanha alunos com algum tipo de transtorno e se, na opinião deles, há eficiência por parte dessa equipe. Além disso, indagamos se eles recebem algum *feedback* sobre o aluno que está sendo atendido. Analisemos suas respostas.

Professor 1: Sim, na escola que trabalho (rede privada) tem uma equipe que acompanha esses alunos. Acredito e confio no trabalho realizado por eles, pois vejo na prática que funciona. E recebemos os retornos das informações sempre que há atendimento com a família e profissionais que trabalham com o aluno. Isso feito pelo serviço de psicologia da escola.

Professor 2: Sim, no que diz respeito à tentativa de buscar soluções, apresentar sugestões e fazer o acompanhamento. Durante o processo recebemos todo *feedback* necessário sobre como está sendo conduzido esse trabalho.

Identificamos que os dois professores recebem *feedback* sobre o processo em que seus alunos diagnosticados com a discalculia se encontram, o que facilita no planejamento de atividades e ações

pedagógicas por parte dos docentes. Assim, reforçamos a ideia de que o acompanhamento da escola em relação ao aluno com discalculia é fundamental e indispensável no processo de intervenção e mediação do docente. O caminho do processo do diagnóstico inicia-se na escola, identificando o problema e encaminhando para os especialistas corretos, como foi enfatizado pelas especialistas Ana Maria Antunes e Sara Mattos. Após o diagnóstico, cabe ao professor e à escola de maneira conjunta encontrar métodos eficientes para ajudar o aluno. Continuamos o questionário perguntando aos professores se foi oferecido a eles programas que os ajudassem em suas aulas em relação a metodologias e didática para atender alunos com algum tipo de transtorno de aprendizagem, e obtivemos respostas que nos levam a outra reflexão, vejamos.

Professor 1: Sempre nas reuniões de início do ano letivo o setor de psicologia passa alguns procedimentos para atender os alunos com necessidades especiais.

Professor 2: Não.

Podemos observar que o Professor 1 recebe orientações uma vez ao ano, no início do período letivo, enquanto o professor 2 afirmou não receber nenhum tipo de treinamento/orientação. Esse fato leva-nos à seguinte reflexão: o professor de Matemática é visto como um profissional essencial na equipe pedagógica que atua no processo de intervenção de alunos com algum transtorno? Se na sala de aula existe algum aluno com laudo de discalculia, o professor não deveria receber orientações e apoio constantes em conjunto com outros profissionais para ajudar o aluno no desenvolvimento de sua aprendizagem? Devemos lembrar que para qualquer que seja o transtorno de aprendizagem ou dificuldade que um aluno possa apresentar, é um processo individual. Cada pessoa apresentará suas dificuldades, vivendo contextos diferentes, requerendo uma intervenção adequada a cada situação. Não existe uma solução universal que se adeque a todos. O professor, nesse contexto, precisa receber treinamentos adequados para essas situações não só durante a graduação, mas durante sua trajetória profissional. Sobre isso, Campos (2020) diz que:

Todos aprendem com a metodologia adequada às nossas singularidades. Com isso chamamos a pedagogia à responsabilidade destes acertos. Cabe dentro dos programas de formação desses profissionais um respaldo na grade de seus cursos. Com o objetivo de prepará-lo não só o conteúdo, mas como esse processo ocorre e o que fazer quando não acontece ou demora a acontecer. Precisamos capacitar os profissionais nas formações, conscientizando-os sobre as diferenças de alunos e de forma de aprender. Das possibilidades e caminhos do como fazer e a quem recorrer quando necessário. (CAMPOS, 2020, p17)

Ao serem questionados sobre qual o papel do professor em sala de aula em relação a alunos com necessidades específicas de aprendizagem, obtivemos as seguintes respostas:

Professor 1: Estudar sobre necessidades específicas de aprendizagem, estar sempre em contato com o serviço de psicologia, e com a família observar a evolução ou não do aluno, buscando sempre o melhor caminho.

Professor 2: Diante da formação acadêmica que recebi, posso dizer que o meu papel seria de identificar a dificuldade e encaminhar às pessoas responsáveis, coordenação/supervisão. Depois disso, mesmo com nenhuma formação específica, mas com toda boa vontade, disponibilizar ao aluno o máximo de atividades extras, lúdicas ou não, que a gente possa, para ajudá-los nessa tentativa de aprender.

Ambos os professores reconhecem a necessidade de aprofundar-se no conhecimento sobre necessidades específicas de aprendizagem. Tendo o professor um papel importante nesse processo de intervenção, é fundamental oferecer uma formação continuada que possam ajudar o professor a lidar com cada situação específica em relação à discalculia.

Como foi dito nos capítulos anteriores por Sara Mattos, o aluno que tem discalculia tem direito a usar calculadora, além de provas adaptadas na escola. Se o professor não tiver conhecimento do assunto nem uma formação necessária para perceber a necessidade de recomendação de intervenção de especialistas, não saberá adaptar essa prova da maneira adequada e específica do aluno, nem mesmo conseguirá mediar o desenvolvimento da aprendizagem desse. E por último perguntamos qual era o interesse deles em saber mais sobre a discalculia em uma escala de 1 a 10, onde 1 representa nenhum interesse, enquanto 10 representa interesse total, obtivemos as seguintes respostas:

Professor 1: Por ser professor de matemática e me preocupar com a aprendizagem dos meus alunos, 10. Professor 2: 10.

Quando um problema é apontado, como nesse caso que é a falta de estudos sobre a discalculia, fica evidente a necessidade de nos aprofundarmos no tema. Ressaltamos, então, o objetivo dessa pesquisa de enfatizar a importância do papel do professor no processo de ensino e aprendizagem de um aluno com discalculia.

## 5. Considerações finais

A presente pesquisa apresentou a discalculia como um transtorno de aprendizagem, trazendo uma perspectiva a partir da opinião de teóricos e estudiosos da área, assim como propôs reflexão a respeito das experiências de professores de Matemática da educação básica com a discalculia. A partir das entrevistas semiestruturadas realizadas com duas especialistas da área, obtivemos uma análise a respeito da discalculia, desde a definição e sinais, às distinções com outros tipos de transtornos e dificuldades em relação à Matemática. Entende-se, portanto, que a discalculia embora apresente uma menor quantidade de estudos e pesquisas sobre este transtorno, pode ser caracterizada e definida, sendo um problema real para muitas pessoas que, muitas vezes, sequer reconhecem que são discalcúlicas.

Na intenção de trazer essa discussão, foi necessário abordar a discalculia sob a visão da educação, e como ela influencia no campo social de um discalcúlico. Tratando-se de um transtorno, compreende-se a necessidade de distinguir a discalculia de outros distúrbios, principalmente da ansiedade matemática e a dificuldade de aprendizagem, de modo que venha a ajudar docentes na identificação de sinais da discalculia em alunos dentro de sala de aula e, assim, poder encaminhar aos especialistas para que não haja maiores prejuízos em sua aprendizagem. Em conformidade as respostas dadas pelas especialistas no tópico 4.1, podemos observar a relevância de um professor de Matemática

conhecer os passos a serem dados nesse momento, para que o processo de intervenção ocorra da maneira correta. No que diz respeito aos professores da educação básica, ficou evidente o despreparo que se tem atualmente por parte dos docentes. Pelo fato de ser pouco discutida e considerada rara, a discalculia pode ser ignorada, negligenciando as necessidades de alunos discalculicos que não obtiveram diagnóstico. Tal fato pode ocorrer por falta de informação tanto por parte da escola e professores, como por parte dos responsáveis desses alunos. Tendo em vista que a discalculia é um transtorno de aprendizagem, essa tem caráter biológico, sendo necessário um diagnóstico feito por especialistas. Assim, em relação às necessidades educacionais especiais do discalculico, é fundamental que o professor de Matemática, em conjunto com outros especialistas, busquem meios que facilitem o processo de aprendizagem do aluno, cooperando com um bom desempenho do mesmo em relação à disciplina e na melhoria da autoestima por parte do estudante. Como foi visto anteriormente, há diversos meios que podemos introduzir a Matemática ao discalculico sem lhe causar ansiedade e bloqueios. É imprescindível buscar estratégias por meio de atividades que envolvam o cotidiano, jogos, entre outros meios, que estimulem o aluno a se envolver com a Matemática de acordo com as suas necessidades individuais. Assim, o professor deve buscar entender seu papel no processo de desenvolvimento de aprendizagem do aluno discalculico, estando atento aos sinais que possam eventualmente surgir em sala de aula, distinguindo as dificuldades devido a fatores externos e a fatores neurológicos. Desta feita, podemos concluir que os estudos e pesquisas sobre discalculia em língua portuguesa ainda são limitados e insuficientes, visto que se trata de um tema recente para a neurociência.

E Devido aos escassos estudos, são inconclusivos os resultados quanto à raridade da discalculia. Sendo um tema pouco debatido é necessário considerar a possibilidade de termos poucos diagnósticos em virtude da falta de conhecimento. Quantas pessoas apresentam dificuldades fora do esperado na Matemática, mas não sabem a razão para tal fato? É tal questionamento um grande ponto para esta pesquisa e para outras sobre o mesmo tema. Diante das considerações expostas, esta pesquisa teve base nas inquietações dos autores apontados inicialmente, podendo afirmar que este estudo deu-se sob a perspectiva da educação matemática em relação à discalculia. Entende-se que para promover maior inclusão e atender as necessidades educativas dos alunos discalculicos é fundamental a participação do professor no processo de desenvolvimento desse aluno. Fica evidente que esta pesquisa encerra-se com um olhar educacional para a discalculia, levantando uma série de questionamentos e reflexões a respeito da educação matemática e como ela tem sido apresentada em sala de aula, tanto na educação básica, como no ensino superior. Assim como ficamos com o desejo de, posteriormente, darmos seguimento aos estudos levando em consideração a análise da mediação do docente de Matemática com alunos que apresentem o diagnóstico da discalculia na educação básica.

## Referências

- [1] CAMPOS, A. M. A. de. Adaptando currículo para crianças com discalculia (livro eletrônico). 1ª Edição. Guarulhos – São Paulo. 2020
- [2] CAMPOS, A. M. A. de. (Re)Conhecendo a Ansiedade Matemática, a Discalculia e a Acalculia [recurso eletrônico] / Ana Maria Antunes de Campos - São Paulo, SP: Soul, 2020.
- [3] GARCIA. J. N. Manual de dificuldades de aprendizagens: linguagens, leitura, escrita e matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.
- [4] GUEDES, Danieli Ferreira; BLANCO, Marília Bazan; COELHO NETO, Joao. Discalculia: uma revisão sistemática de literatura nas produções brasileiras. Revista Educação Especial,

Santa Maria, p. e25/ 1-16, mar. 2019. ISSN 1984-686X. Disponível em: Acesso em: 15 nov. 2019. doi:<http://dx.doi.org/10.5902/1984686X29947>.

- [5] OHLWEILER, L. Transtornos da aprendizagem: abordagem neurobiológica e multidisciplinar. Porto Alegre: Artmed, 2016, p. 107- 111.
- [6] PRODANOV, Cleber C.; FREITAS, Ernani C. de. Metodologia do trabalho científico: Métodos e técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico. 2ª Edição. Universidade Feevale. Novo Hamburgo – Rio Grande do Sul – Brasil. 2013.
- [7] SILVA, Marcelo Carlos da; Dificuldades de aprendizagem em matemática: A manifestação da discalculia. São Paulo. 2008.
- [8] VIEIRA, E. Transtornos na aprendizagem de matemática: número e a discalculia. Revista Ciências e Letras, n. 35, p. 109-119, Porto Alegre. 2004.
- [9] VILLAR, J. M. G. Discalculia na sala de aula de matemática: um estudo de caso com dois estudantes. Dissertação de Mestrado –Pós-Graduação em Educação Matemática - UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA. Juiz de Fora – MG, 2017.
- [10] ZORZI, J. L. Os distúrbios de Aprendizagem e os distúrbios Específicos de Leitura e da Escrita. In: Britto ATBO (org). Livro de fonoaudiologia. São José dos Campos: Pulso Editorial; 2005. p. 217-30

Alana Cavalcanti Alves  
Universidade Federal da Paraíba  
<[alanaalves1@gmail.com](mailto:alanaalves1@gmail.com)>

Vinícius Martins Varella  
Universidade Federal da Paraíba  
<[varellavinicius@gmail.com](mailto:varellavinicius@gmail.com)>

Recebido: 02/06/2022  
Publicado: 27/10/2022

# A Intuição Matemática e o estudo da Lineabilidade

Gustavo Araújo<sup>1</sup> Eudes Marinho<sup>2</sup>

## Resumo

A Intuição Matemática consiste em um dos principais recursos na investigação, pois serve de guia da razão humana. Entretanto, a Intuição Matemática por si só não basta e deve ser vista como complemento ou contrapeso da Lógica. Em verdade, tanto a lógica como a intuição têm seu legítimo papel na criação da Matemática e são necessárias ao progresso da ciência. Neste trabalho, iremos relacionar esse tema a uma área relativamente nova da Matemática, chamada *Lineabilidade*, que busca a existência de grandes estruturas matemáticas compostas de objetos com certas propriedades “patológicas”. Iremos apresentar interessantes resultados de lineabilidade em espaços de funções e de sequências.

**Palavras-chave:** Intuição Matemática; Lógica Matemática; Lineabilidade.

## Abstract

Mathematical Intuition is one of the main resources in research, as it serves as a guide for human reason. However, Mathematical Intuition alone is not enough and must be seen as a complement or counterweight to Logic. In fact, both logic and intuition have their legitimate role in the creation of mathematics and are necessary for the progress of science. In this work, we will relate this topic to a relatively new area of Mathematics, called *Lineability*, which seeks the existence of large mathematical structures composed of objects with certain “pathological” properties. We will present interesting results of lineability in spaces of functions and sequences.

**Keywords:** Mathematical Intuition; Mathematical Logic; Lineability.

## 1. Introdução

Intuição Matemática é o ato de perceber, discernir ou pressentir coisas, objetivando chegar a uma conclusão sobre algo, independentemente de raciocínio ou de análise. Para quem começa a estudar Matemática, um questionamento, aparentemente muito difícil de se responder, é suscitado: Como fazer para saber demonstrar qual é a próxima verdade que está ao meu alcance? Nessa perspectiva, a intuição matemática consiste em um dos principais recursos na investigação, pois serve de guia

<sup>1</sup>Parcialmente apoiado pela Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (Fapesq), Termo de Outorga nº 3024/2021

<sup>2</sup>Egresso do Profmat/UEPB

da razão humana. Por exemplo, Euclides recorria a figuras para se inspirar em suas descobertas geométricas, bem como para guiar suas demonstrações.

Para Poincaré, “a intuição deve ter um lugar preponderante no ensino da Matemática. Sem ela, os espíritos ainda jovens não teriam meios de ascender ao entendimento da Matemática; não aprenderiam a gostar dela e vê-la-iam apenas como uma vã logomaquia. Além disso, sem a intuição nunca poderiam ser capazes de aplicar a Matemática”.

Entretanto, é necessário tomar muito cuidado quando estamos diante de um determinado problema, e queremos chegar a alguma conclusão baseada no que nossa intuição diz. Poincaré já afirmava que não é possível obter rigor, nem mesmo certeza, com a intuição. Cada vez mais, percebemos que o rigor não poderia ser introduzido nos raciocínios sem que, em primeiro lugar, entrasse nas definições. Ora, durante muito tempo os objetos estudados pelos matemáticos estavam, em sua maior parte, mal definidos. Pensávamos conhecê-los, porque conseguíamos representá-los com o auxílio dos sentidos e da imaginação. No entanto, a imagem extraída desses objetos era grosseira, não havia uma ideia precisa sobre a qual o raciocínio pudesse incidir.

*Before the mathematician demonstrates he must invent. But nobody has ever invented anything by pure deduction. Pure logic cannot create anything; there is only one way to discovery, namely induction; for the mathematicians as well for the physicists. (Henri Poincaré)*

Assim, a Lógica Matemática por si só não basta. A Intuição Matemática deve andar ao lado da lógica, quando estamos diante de algum problema; a intuição tem que conceder o seu papel de complemento, contrapeso ou antídoto da lógica.

Tanto a lógica como a intuição são necessárias ao progresso da ciência, ambas têm seu legítimo papel na criação matemática. Muitas conjecturas que posteriormente viraram teoremas importantes surgiram devido às intuições. Lógicos e intuitivos realizaram e realizam feitos na Matemática que, talvez, outros não teriam alcançado êxito. Quem conseguiria mensurar o prejuízo científico matemático causado, caso Weierstrass<sup>3</sup> nada tivesse escrito, ou se Riemann<sup>4</sup> não tivesse existido?

Tendo em vista que a intuição, muitas vezes, tem um importante papel de guia para a verdade, considera-se a Intuição Matemática a primeira base de estratégia para resolver uma situação, aparentemente semelhante a outra já vista. Assim, é natural que algumas de nossas intuições sejam enganosas. Isso ocorre devido ao primeiro juízo dado sobre uma ideia, com base no que é conhecido e naquilo que já se tem experiência. Inclusive, a intuição levou P. Fermat<sup>5</sup> a achar que todo número de Fermat<sup>6</sup> era primo, mas Euler mostrou que não era verdade.

Com aporte nesses embasamentos, apresentamos a seguir alguns exemplos simples que podem ilustrar tais colocações.

(1) Considere a soma de infinitas parcelas

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

<sup>3</sup>Matemático Lógico Analítico que viveu entre 1815 e 1897.

<sup>4</sup>Matemático Intuitivo que viveu entre 1826 e 1866.

<sup>5</sup>Pierre de Fermat (17 de agosto de 1601 – 12 de janeiro de 1665) foi um magistrado, matemático e cientista francês.

<sup>6</sup>Número de Fermat é um número inteiro positivo da forma  $2^{2^n} + 1$  sendo  $n$  um número natural.

Já é conhecido o processo de acréscimo e, portanto, é natural esperar que a soma  $S_1$  cresça infinitamente. Nesse caso, é exatamente isso o que ocorre.

Considere agora a soma

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

Intuitivamente, espera-se o mesmo comportamento da soma  $S_1$  para a soma  $S_2$ . No entanto, a soma  $S_2$  resulta 1 (série geométrica). Isso pode ser verificado em parte, com o auxílio de uma calculadora, aumentando, suficientemente, o número de parcelas.

(2) Um outro exemplo é o seguinte: uma lenda conta que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa pela invenção. E o inventor respondeu:

*“1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira, 8 pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa.”*

Como o tabuleiro do xadrez tem 64 casas, o inventor pediu a soma dos primeiros termos da progressão geométrica (PG) 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., de razão  $q = 2$ . Da expressão que nos dá a soma dos primeiros termos de uma PG, isto é,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

obtemos

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$$

Fazendo esses cálculos, encontraremos o gigantesco número de vinte algarismos:

18.446.744.073.709.551.615 grãos de trigo.

Para efeitos demonstrativos do que essa quantidade representa, considerando que a densidade ótima de semeadura de trigo é, no máximo, 350 grãos/m<sup>2</sup>, para cultivar essa quantidade de sementes, seria necessária uma área de 52.704.983.067, 74 km<sup>2</sup>. Sabendo que a superfície do globo terrestre tem a área aproximada de 510.000.000 km<sup>2</sup> e que 3/4 da superfície do globo são cobertos por água, para a realização de tal feito seriam necessários 413,37 planetas iguais à Terra.

(3) Suponha que uma pessoa está participando de um programa de televisão e lhe é fornecida a possibilidade de escolher uma entre 3 portas. Atrás de uma das portas existe um carro e atrás das demais não existe prêmio algum. O participante escolhe uma porta, digamos a Porta 1, e o apresentador abre outra porta, digamos a Porta 3, revelando que não há nada atrás dela e, então, oferece ao participante a oportunidade de trocar de porta. O que é mais vantajoso? *Trocar ou não a porta escolhida?*

Será que devemos confiar em nosso palpite inicial e permanecer na porta que escolhemos inicialmente? Além disso, como uma das portas foi aberta, então a possibilidade da escolha ter sido a certa é maior. Será que tanto faz trocar ou não? Será que é mais vantajoso não trocar?

Vamos analisar duas estratégias:

- O participante seleciona uma porta e, após aberta uma outra porta sem prêmio, se lhe é fornecida a oportunidade de trocar de porta, ele recusa.
- O participante seleciona uma porta e, após aberta uma outra porta sem prêmio, se lhe é fornecida a oportunidade de trocar de porta, o participante realiza a troca.

Utilizando a primeira estratégia, o participante ganhará o carro com probabilidade  $1/3$ , já que a chance dele ter escolhido a porta premiada é de uma em três. Já utilizando a segunda estratégia, o participante ganhará o carro se, a princípio, tiver escolhido uma porta que não contém o carro como prêmio, o que representa uma probabilidade de  $2/3$ , tendo em vista que duas das três portas não possuem prêmio algum.

Ou seja, a probabilidade de ganhar com a estratégia 2 é  $2/3$  e, portanto, duas vezes maior do que utilizando a estratégia 1. Por maior que seja a sua vontade de permanecer na porta escolhida inicialmente, para aumentar (dobrar) sua chance de vitória, o participante deve adotar segunda estratégia.

*Observação 1.* O problema descrito acima é conhecido como o problema de Monty Hall. Ele surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos chamado “Let’s Make a Deal”, exibido na década de 1970.

Como visto acima, a Intuição Matemática pode ser estimulada, em um primeiro estágio, por experiências, atividades e manipulações de objetos, assim como por traços no papel e abstrações, em um segundo. Entretanto, deve-se sempre reforçar que a intuição é um instrumento da “invenção”, e que somente a Lógica Matemática é que nos fornece a certeza. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é relacionar um tema relativamente novo na Matemática, chamado *Lineabilidade*, ao que foi discutido acima. Esse tema tem atraído, ultimamente, a atenção de muitos autores. Grossoiramente falando, chamamos de Lineabilidade a existência de grandes estruturas matemáticas, compostas de objetos com certas propriedades “especiais” (algumas vezes chamadas de propriedades “patológicas”), isto é, objetos vistos, *a priori*, como raros ou não intuitivos, mas que, na verdade, são bem mais comuns do que imaginamos. Nossa intuição falha em achar que são poucos os exemplos que ilustraremos mais adiante, mas a Lógica Matemática, através da Lineabilidade, irá nos mostrar o contrário.

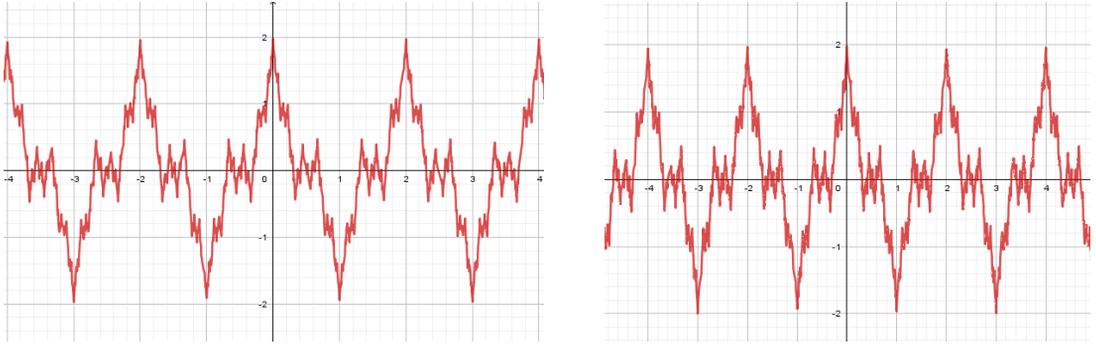
Os famosos *monstros de Weierstrass* são exemplos clássicos dessa teoria, isto é, *sempre* que imaginamos uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, muito provavelmente, pensamos em alguma função que, não somente seja contínua, mas também que possa ser diferenciável em muitos pontos de  $\mathbb{R}$ .

Entretanto, em 1872, K. Weierstrass construiu uma função contínua que é não diferenciável em todo ponto do seu domínio: sejam  $a \in (0, 1)$  e  $b$  um inteiro positivo ímpar tal que  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ; a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \cos(b^i \pi x)$$

goza desta propriedade, isto é, é contínua e não diferenciável em todo ponto de  $\mathbb{R}$  (ver Figura 1). De fato, apesar de nunca ser diferenciável, a função  $f$  é contínua: como, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , os termos da série que a define são limitados por  $\pm a^i$  e, para  $0 < a < 1$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} a^i < \infty$ , a convergência uniforme de  $\sum_{i=0}^{\infty} a^i \cos(b^i \pi x)$  é garantida pelo Teste M de Weierstrass. Como cada soma parcial é uniformemente contínua, segue que  $f$  é uniformemente contínua.

Figura 1: As figuras abaixo representam gráficos de somas parciais da série acima. À esquerda temos  $n = 10$  e  $f(x) \approx \frac{\cos(3^0 \pi x)}{2^0} + \dots + \frac{\cos(3^{10} \pi x)}{2^{10}}$ ; à direita temos  $n = 20$  e  $f(x) \approx \frac{\cos(3^0 \pi x)}{2^0} + \dots + \frac{\cos(3^{20} \pi x)}{2^{20}}$ .



Fonte: Produção própria

Funções desse tipo, atualmente, são conhecidas como monstros de Weierstrass<sup>7</sup>. O aparente choque da comunidade matemática, quando Weierstrass exibiu tal função, ocorreu pelo pensamento geral compartilhado pela maioria dos matemáticos da época: “Uma função contínua deve ser diferenciável em um conjunto significativo de pontos” (até mesmo A. Ampère compartilhava desse pensamento e tentou dar uma justificativa teórica para isso).

Pode-se pensar que, uma vez que um objeto dessa natureza tenha sido encontrado, não há a possibilidade de existir muitos outros. De imediato nos vem a seguinte pergunta: Quantos monstros de Weierstrass existem? Na verdade, ao contrário do que diz nossa intuição, existem *muitos*<sup>8</sup> objetos dessa natureza.

Seguindo essa linha, Vladimir Gurariy provou em 1966 que a família de funções contínuas em  $[0, 1]$  que são não diferenciáveis em todo ponto contém, com exceção da função nula, um espaço vetorial de dimensão infinita. Esse foi um resultado bastante surpreendente, porque, de fato, fornecer explicitamente uma dessas funções não é uma tarefa fácil, como aquela construída por Karl Weierstrass em 1872. O resultado de V. Gurariy principiou o surgimento de um conceito relativamente novo da Matemática, chamado *Lineabilidade*, o qual faz uma interessante conexão entre duas áreas de pesquisa, a Análise e a Álgebra, e, *grosso modo*, busca a existência de grandes estruturas matemáticas lineares compostas de objetos com certas propriedades “patológicas”.

Este artigo foi adaptado do artigo [1] e da dissertação de mestrado [8], além de trazer correções de algumas imprecisões dessa última. É importante destacar que a dissertação [8] faz uma transposição do tema, apresentado, por exemplo, em [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], para um contexto de menor complexidade, apresentando a teoria de forma mais simplificada e com mais exemplos ilustrativos, possibilitando, dessa forma, uma menor quantidade de conhecimento preliminar para sua leitura

<sup>7</sup>Apesar de serem conhecidos como monstros de Weierstrass, B. Bolzano ( $\approx 1830$ ), M. Cellérier ( $\approx 1830$ ), B. Riemann (1861) e H. Hankel (1870) já haviam encontrado funções desse tipo.

<sup>8</sup>Como uma boa aplicação do Teorema da Categoria de Baire, S. Banach provou em 1931 que *quase todas* as funções contínuas são não diferenciáveis em todo ponto. Mais precisamente, o conjunto das funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  contínuas que são não diferenciáveis em todo ponto é residual em  $C(\mathbb{R})$ , o conjunto das funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  contínuas, quando dotado da convergência uniforme nas partes compactas (ou, simplesmente, topologia da convergência compacta).

e compreensão.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na Introdução, buscamos inicialmente expor algumas questões matemáticas básicas que nos fazem refletir sobre a relação entre intuição e lógica. Em seguida, motivados por tal reflexão, apresentamos, informalmente, o conceito de lineabilidade, através do primeiro exemplo que impulsionou o surgimento desta teoria, além de explanarmos sobre sua conexão com o que já fora discutido. Na Seção 2, apresentamos e definimos formalmente os conceitos relacionados a lineabilidade. Em sequência, na Seção 3, discutimos resultados clássicos dessa teoria no contexto das funções reais de uma variável real; aqui, abordamos, sem demonstrações, resultados sobre a lineabilidade do conjunto das funções sobrejetivas em todo lugar e do conjunto das funções de Sierpiński e Zygmund. Na última seção, exibimos e apresentamos uma prova simples de um resultado recente de lineabilidade no espaço das seqüências que geram séries para as quais os Testes da Razão e da Raiz falham; grosso modo, esse resultado mostra que os Testes da Razão e da Raiz estão longe de serem ótimos.

## 2. Lineabilidade: O básico

Nesta seção, apresentaremos os conceitos básicos sobre Lineabilidade para, em seguida, apresentarmos alguns exemplos recentes dessa nova abordagem.

**Definição 1** (2004). Sejam  $X$  um espaço vetorial,  $A$  um subconjunto de  $X$  e  $\mu$  um número cardinal. Diremos que  $A$  é:

- *lineável* se existe um espaço vetorial  $M$  de dimensão infinita tal que  $M \setminus \{0\} \subset A$ ;
- $\mu$ -*lineável* se existe um espaço vetorial  $M$  com  $\dim(M) = \mu$  e  $M \setminus \{0\} \subset A$  (portanto, lineabilidade significa  $\aleph_0$ -lineabilidade, onde  $\aleph_0 := \text{card}(\mathbb{N})$ , a cardinalidade de  $\mathbb{N}$ );
- *maximal lineável* em  $X$  se  $A$  é  $\dim(X)$ -lineável.

Com essa nova terminologia, podemos reescrever o resultado de V. Gurariy como:

**Teorema 1** (V. Gurariy, 1966). *O conjunto das funções reais em  $[0, 1]$  contínuas que são não diferenciáveis em todo ponto é lineável.*

O termo lineabilidade foi usado primeiramente por R. Aron, V. Gurariy, J. Seoane-Sepulveda em Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2004) 795-803. Desde aquela época, vários autores mostraram interesse sobre o tópico e, além do conceito apresentado acima, uma série de outros conceitos foram criados para descrever o tamanho algébrico de um determinado conjunto (a título de curiosidade, apresentaremos abaixo diversas definições relacionadas a essa teoria; veja [2] para uma abordagem mais profunda das propriedades de lineabilidade de subconjuntos específicos de espaços vetoriais).

Se, além disso,  $X$  é um espaço vetorial topológico, então  $A$  é dito:

- *denso-lineável* em  $X$  se existir um subespaço vetorial denso  $M$  de  $X$  satisfazendo  $M \setminus \{0\} \subset A$  (portanto, denso-lineabilidade implica lineabilidade quando  $\dim(X) = \infty$ ), e
- *maximal denso-lineável* em  $X$  se existir um espaço vetorial denso  $M$  de  $X$  satisfazendo  $M \setminus \{0\} \subset A$  e  $\dim(M) = \dim(X)$ .

Além disso, de acordo com [3, 4], quando  $X$  é um espaço vetorial topológico contido em alguma álgebra (linear), então  $A$  é chamado:

- *álgebrável* se existe uma álgebra  $M$  tal que  $M \setminus \{0\} \subset A$  e a cardinalidade de qualquer sistema de geradores de  $M$  é infinita.
- *densamente álgebrável* em  $X$  se, ademais,  $M$  é denso in  $X$ .
- *$\alpha$ -álgebrável* se existe uma álgebra  $M$  tal que  $M \setminus \{0\} \subset A$  e a cardinalidade de qualquer sistema de geradores de  $M$  é  $\alpha$ .
- *fortemente  $\alpha$ -álgebrável* se além de ser  $\alpha$ -álgebrável, a álgebra  $M$  é *livre* (para  $\alpha = \aleph_0$ , é usual dizermos, simplesmente, *fortemente álgebrável*).
- *densamente fortemente  $\alpha$ -álgebrável* se, além disso, a álgebra livre  $M$  é densa em  $X$ .

Observe que  $\alpha$ -álgebrabilidade forte  $\implies \alpha$ -álgebrabilidade  $\implies \alpha$ -lineabilidade, e nenhuma dessas implicações podem ser revertidas (veja [5, p. 74]). Os conceitos acima foram apresentados apenas por uma questão de completude do trabalho e como uma forma de introduzir conceitos mais técnicos da teoria a leitores interessados em aprofundar seus conhecimentos no toma. Para isso, recomendamos fortemente a leitura do livro [2].

Nas seções seguintes, apresentaremos exemplos que nos mostram o quanto a Intuição Matemática deve sempre andar ao lado da Lógica Matemática, quando estamos diante de algum problema, e que ambas são complementares e essenciais ao progresso da ciência.

### 3. Lineabilidade em espaços de funções

#### 3.1. As Funções Sobrejetivas em todo lugar

Daremos a seguir a definição de um tipo de função que o leitor pode até duvidar se essa é, de fato, uma boa definição, isto é, será que o conjunto das funções que definiremos a seguir é não vazio?

**Definição 2.** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é sobrejetiva em todo lugar se  $f(I) = \mathbb{R}$  para todo intervalo não degenerado  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Lebesgue ([7], 1904) foi provavelmente o primeiro a mostrar um exemplo de uma função real sobre os reais satisfazendo a surpreendente propriedade de que ela assume cada valor real em qualquer conjunto aberto não vazio. É claro que tais funções são não contínuas em todo ponto de  $\mathbb{R}$ .

O exemplo abaixo mostra que o conjunto das funções sobrejetivas em todo lugar é não vazio.

**Exemplo 1** (Ver Figura 2). A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

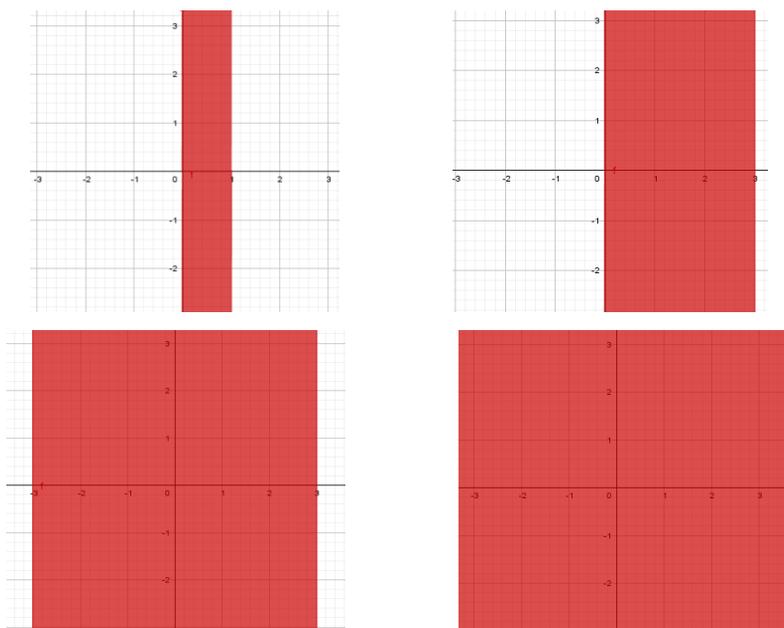
$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(n! \pi x), & \text{se o limite existe,} \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

verifica as seguintes propriedades:

1. Se  $x \in \mathbb{R}$  e  $q \in \mathbb{Q}$  então  $f(x + q) = f(x)$ .

2.  $f$  é sobrejetiva: para todo  $y \in \mathbb{R}$  existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$ .
3.  $f$  é sobrejetiva em todos os intervalos abertos não degenerados, isto é, se  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ , então  $\{f(x) : a < x < b\} = \mathbb{R}$ .

Figura 2: Na primeira linha, temos o gráfico das restrições  $f|_{[0,1]}$  e  $f|_{[0,3]}$ , respectivamente. Na segunda linha, os gráficos de  $f|_{[-3,3]}$  e  $f$ , respectivamente.



Fonte: Produção própria

A seguinte observação será útil na demonstração das propriedades acima.

*Observação 2.* Se  $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} = r,$$

para cada  $r \in \mathbb{R}$ . De fato,  $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Se definirmos nas desigualdades anteriores  $x = r(n+1)$  para  $r \in \mathbb{R}$  arbitrário e  $n \in \mathbb{N}$ , então  $r(n+1) - 1 \leq \lfloor r(n+1) \rfloor \leq r(n+1)$ . Dividindo por  $n+1$  implicará

$$r - \frac{1}{n+1} = \frac{r(n+1) - 1}{n+1} \leq \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} \leq \frac{r(n+1)}{(n+1)} = r.$$

Dessa última desigualdade e do Teorema do Sanduíche, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} = r.$$

Provemos agora as propriedades (1), (2) e (3) acima:

(1). Dado  $q \in \mathbb{Q}$ , existem  $r, s \in \mathbb{Z}$  com  $s \neq 0$  tais que  $q = r/s$ . Se  $n \geq s$ , então  $n!q$  é um inteiro e, portanto, para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n!\pi x$  e  $n!\pi(x + q)$  são múltiplos de  $\pi$ . Segue que  $\tan(n!\pi(x + q)) = \tan(n!\pi x)$  para todo  $n \geq s$ . Assim,  $f(x + q) = f(x)$ .

(2). Dado  $y \in \mathbb{R}$ , escolha  $r \in [0, 1)$  tal que  $\tan(\pi r) = y$ . Defina  $x \in \mathbb{R}$  como

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lfloor ri \rfloor}{i!}.$$

Mostraremos que  $f(x) = y$ . Sejam  $x_n$  a  $n$ -ésima soma parcial de  $x$  e  $\varepsilon_n$  o termo remanescente. Assim,

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{\lfloor kn \rfloor}{k!} \quad \text{e} \quad \varepsilon_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lfloor kn \rfloor}{k!} = x - x_n.$$

Note que  $n!x_n \in \mathbb{Z}$  para todo  $n$  e, portanto, pelo item anterior,  $\tan(n!\pi x) = \tan(n!\pi \varepsilon_n)$  para todo  $n$ . Consequentemente,

$$n!\varepsilon_n = \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} + n! \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\lfloor rk \rfloor}{k!}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} = r \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n! \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\lfloor rk \rfloor}{k!} = 0,$$

concluimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n!\varepsilon_n = r$ , de onde segue que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(n!\pi x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(n!\pi \varepsilon_n) = \tan(\pi r) = y.$$

(3). Sejam  $a, b, y \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ . Pela propriedade (2), existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(c) = y$ , e pela propriedade (1),  $f(c) = f(c + q) = y$  para todo  $q \in \mathbb{Q}$ . Como entre dois números reais distintos, quaisquer que sejam, sempre existe um número racional, existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $a < c + q < b$ . Se  $x = c + q$ , então  $a < x < b$  e

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(n!\pi(c + q)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(n!\pi c) + \tan(n!\pi q)}{1 - \tan(n!\pi c) \tan(n!\pi q)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(n!\pi c) \\ &= f(c) = y. \end{aligned}$$

Observe que  $\tan(n!\pi q) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Desde que  $y$  é um número real arbitrário, segue-se que  $\{f(x) : a < x < b\} = \mathbb{R}$ , como queríamos demonstrar.

O exemplo acima, assim como o exemplo dado por Lebesgue em 1904, parecem ser raros ou, pelo menos, pode-se dizer que são não intuitivos (ou será que alguém quando pensa numa função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  imagina uma função cujo gráfico é denso em  $\mathbb{R}^2$ ?) Apesar de ser uma definição, aparentemente, “inimaginável”, foi provado em 2005 por R. Aron, V. Gurariy e J. Seoane-Sepúlveda que o conjunto das funções sobrejetivas em todo lugar é, na verdade, um conjunto (algebricamente) *grande* (no teorema abaixo e em todo o restante do texto, iremos denotar  $\mathfrak{c} := \text{card}(\mathbb{R})$ ).

**Teorema 2** (Aron, Gurariy, Seoane, 2005). *O conjunto das funções  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que são sobrejetivas em todo lugar é maximal lineável (isto é,  $2^{\mathfrak{c}}$ -lineável).*

A demonstração da Teorema acima pode ser verificada em [2].

### 3.2. As Funções de Sierpiński e Zygmund

Daremos nesta seção mais um exemplo *surpreendente* de lineabilidade. Como motivação, iremos indagar algo que, à primeira vista, parece não ser algo tão natural:

*Dada uma função arbitrária  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos encontrar um subconjunto “grande”  $S \subset \mathbb{R}$  tal que a restrição  $f|_S$  é contínua?*

Em 1922, Blumberg deu uma surpreendente resposta afirmativa para a questão acima:

**Teorema 3** (Blumberg, 1922). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função arbitrária. Então, existe um subconjunto denso  $S \subset \mathbb{R}$  tal que a função  $f|_S$  é contínua.*

Uma leitura cuidadosa na prova deste resultado mostra que o conjunto  $S$  acima é enumerável, isto é,  $\text{card}(S) = \aleph_0$ . Naturalmente, poderíamos nos perguntar se seria possível escolher o conjunto  $S$  no Teorema de Blumberg como sendo não enumerável. Relativo a esse questionamento, uma excelente resposta na negativa, apesar de parcial em certo sentido, foi dada por Sierpiński e Zygmund:

**Teorema 4** (Sierpiński, Zygmund, 1923). *Existe uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para qualquer conjunto  $Z \subset \mathbb{R}$  de cardinalidade do continuum ( $\text{card}(Z) = \mathfrak{c}$ ), a restrição  $f|_Z$  não é uma função contínua.*

Este teorema responde de forma parcial a questão acima, pois exige que a cardinalidade de  $Z$  seja  $\mathfrak{c}$ . Uma função como a do Teorema 4 será chamada de função de Sierpiński e Zygmund. Iremos considerar, portanto,

$$\mathcal{SZ} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é uma função de Sierpiński e Zygmund}\}.$$

*Observação 3.* Se a Hipótese do Continuum<sup>9</sup> (HC) é assumida, então a restrição de uma função de  $\mathcal{SZ}$  a qualquer conjunto não enumerável não pode ser contínua. Na verdade, a HC é necessária nesse contexto; de fato, em 1973, Shinoda provou que, sob algumas hipóteses axiomáticas (incluindo a negação da HC), para qualquer  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existe um conjunto não enumerável  $Z \subset \mathbb{R}$  tal que a restrição  $f|_Z$  é contínua.

Além de todas essas discussões acerca das funções de Sierpiński e Zygmund, uma indagação que neste momento parece natural é a seguinte: o que dizer sobre a lineabilidade do conjunto das funções de Sierpiński-Zygmund? Será que existem muitas funções como a do Teorema 4?

Quem deu uma primeira resposta para essa pergunta foi J. Gámez-Merino, G. Muñoz-Fernandez, V. Sánchez e J. Seoane-Sepúlveda, em 2010 (veja [6]).

<sup>9</sup>A Hipótese do Continuum é uma hipótese sobre os possíveis *tamanhos* de conjuntos infinitos. Ela afirma que não há conjunto cuja cardinalidade esteja estritamente entre a cardinalidade dos números inteiros e a dos números reais, isto é, não existe um conjunto  $S$  para o qual  $\aleph_0 < \text{card}(S) < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ . Assumindo o Axioma da Escolha (AE), existe um menor número cardinal  $\aleph_1$  maior que  $\aleph_0$ , e a Hipótese do Continuum é, por sua vez, equivalente à igualdade  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ .

**Teorema 5** (Gámez-Merino, Muñoz-Fernandez, Seoane-Sepúlveda, 2010). *O conjunto das funções de Sierpiński-Zygmund é  $\mathfrak{c}^+$ -lineável.*

No resultado acima,  $\mathfrak{c}^+$  representa o cardinal sucessor de  $\mathfrak{c}$ . Como consequência, assumindo que  $\mathfrak{c}^+ = 2^{\mathfrak{c}}$  (o que ocorre, por exemplo, se assumirmos a Hipótese Generalizada do Continuum<sup>10</sup>), concluímos que  $\mathcal{SZ}$  é  $2^{\mathfrak{c}}$ -lineável (lineabilidade máxima, neste caso).

#### 4. Um resultado de lineabilidade onde Testes da Razão e da Raiz falham

Em Matemática, o Teste da Razão (ou Critério d'Alembert) e o Teste da Raiz são testes para saber sobre a convergência ou não de uma série de números reais. Mais precisamente, temos os seguintes critérios:

**Teorema 6** (Teste da Razão). *Dada uma sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  de números reais, considere*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Então,

(i) se  $L < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge;

(ii) se  $L > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge;

(iii) se  $L = 1$  ou o limite não existe, nada podemos dizer sobre a convergência ou divergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Teorema 7** (Teste da Raiz). *Dada uma sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  de números reais, considere*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Então,

1. se  $L < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge;

2. se  $L > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge;

3. se  $L = 1$  ou o limite não existe, nada podemos dizer sobre a convergência ou divergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

<sup>10</sup>A Hipótese Generalizada do Continuum (HGC) afirma que para qualquer cardinal infinito  $\lambda$  não existe nenhum cardinal  $\kappa$  tal que  $\lambda < \kappa < 2^\lambda$ . Assumindo o AE, a HGC é equivalente a  $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$  para todo número ordinal  $\alpha$ .

Os terceiros itens de ambos os teoremas acima são necessários pois existem tanto séries convergentes como séries divergentes que verificam a condição  $L = 1$  ou o limite não existe. Em outras palavras, os itens (i) e (ii) de ambos os critérios não são suficientes. Por exemplo,

$$a_n = \frac{1}{n} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge, mas } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

e

$$a_n = \frac{1}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge, mas } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

*Outros exemplos:* (1) Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1.$$

Fazendo  $a_n = 2^{-n+(-1)^n}$ , observe que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{2(-1)^{n+1}-1} = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{1}{8} & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

e, portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  não existe.

(2) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+(-1)^n}$  diverge e

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2^{2(-1)^{n+1}+1} = \begin{cases} 8 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

(3) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  converge, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  diverge e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = 1$  para ambas.

Na verdade, alunos de Cálculo Diferencial e Integral ou de Séries e Equações Diferenciais, não muito raramente, deparam-se com listas de exercícios em que muitas das questões que solicitam a análise sobre a convergência ou divergência de séries acabam tendo que ser resolvidas por outros critérios que não os mencionados acima, pois ambos fornecem  $L = 1$  ou a não existência do limite. O que muitos alunos não imaginam (talvez até muitos professores dessas disciplinas também não estejam cientes disso) é que o fato de muitos exemplos resultarem em  $L = 1$  ou na não existência do limite, tanto no Teste da Razão como no Teste da Raiz, não é uma raridade, apesar de nosso sentimento/desejo inicial ao tentar aplicar tais testes é que ocorra exatamente o oposto (isto é, que os critérios forneçam alguma informação sobre a convergência/divergência).

De fato, em [1] foi provado que os Testes da Razão e da Raiz estão longe de serem ótimos, isto é, para ambos os critérios, o resultado a seguir (veja [1, Theorem 6.2]) mostra que existem espaços vetoriais de dimensão infinita formados por seqüências que geram séries absolutamente convergentes ou seqüências que geram séries divergentes para os quais os referidos testes falham, ou seja, não dão nenhuma informação sobre a convergência ou divergência das séries.

O teorema a seguir é um caso particular de [1, Theorem 6.2]. Por uma questão de completude e para exemplificar como proceder numa demonstração de um resultado de lineabilidade, apresentaremos sua prova.

**Teorema 8.** (a) O conjunto das seqüências que geram séries absolutamente convergentes para as quais o teste da razão falha é maximal ( $\mathfrak{c}$ -) lineável.

(b) O conjunto das seqüências que geram séries absolutamente convergentes para as quais o teste da raiz falha é maximal ( $\mathfrak{c}$ -) lineável.

(c) O conjunto das seqüências que geram séries divergentes para as quais o teste da razão falha é maximal ( $\mathfrak{c}$ -) lineável.

(d) O conjunto das seqüências que geram séries divergentes para as quais o teste da raiz falha é maximal ( $\mathfrak{c}$ -) lineável.

*Demonstração.* Vamos mostrar apenas o primeiro item. Nosso objetivo é provar que o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ (a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge e } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ não existe} \right\}$$

é maximal lineável. Os itens restantes podem ser feitos de forma semelhante e suas demonstrações serão deixadas para o leitor (dica: em vez da coleção de seqüências  $\{((ns)^{-n+(-1)^n})_{n \geq 1} : s > 1\}$  usada para (a), pode-se usar  $\{(n^{-s})_{n \geq 1} : s > 1\}$ ,  $\{((ns)^{n+(-1)^n})_{n \geq 1} : s > 1\}$  e  $\{(n^s)_{n \geq 1} : s > 1\}$ , respectivamente, para provar (b), (c) e (d)).

Vamos provar (a). Para qualquer número real  $s > 1$ , considere a seqüência  $(a_{n,s})_{n \geq 1}$ , com  $a_{n,s} = (ns)^{-n+(-1)^n}$ . Como  $a_{n,s} \leq n^{-2}$  para todo  $n \geq 3$ , o Teste da Comparação assegura-nos que  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,s}|$  converge, para todo  $s > 1$ . A seguir, considere

$$E = [\{(a_{n,s})_{n \geq 1} : s > 1\}],$$

o espaço gerado por  $\{(a_{n,s})_{n \geq 1} : s > 1\}$ , que é um subespaço vetorial do espaço das seqüências que geram séries absolutamente convergentes. Mostremos agora que  $\dim(E) = \mathfrak{c}$ . De fato, suponha que uma combinação linear do tipo

$$x = \sum_{j=1}^k \alpha_j (a_{n,s_j})_n$$

é identicamente 0. Observe que

$$x = (x_n)_{n \geq 1} \quad \text{com} \quad x_n = \sum_{j=1}^k \alpha_j a_{n,s_j} \quad (n \geq 1). \tag{1}$$

Então, supondo sem perda de generalidade que  $k \geq 2$  e  $s_1 > s_2 > \dots > s_k$ , e dividindo a expressão anterior por  $(ns_k)^{-n+(-1)^n}$ , obtemos

$$0 = \alpha_1 \left( \frac{s_1}{s_k} \right)^{-n+(-1)^n} + \dots + \alpha_{k-1} \left( \frac{s_{k-1}}{s_k} \right)^{-n+(-1)^n} + \alpha_k.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , concluímos que  $\alpha_k = 0$ . Indutivamente, podemos obter que todos os  $\alpha_j$ s são 0. Portanto, o conjunto de seqüências  $\{(a_{n,s})_{n \geq 1}, s > 1\}$  é linearmente independente, o que mostra que  $\dim(E) = \mathfrak{c}$ .

Agora vamos mostrar que, dada uma seqüência  $x = (x_n)_{n \geq 1} \in E \setminus \{0\}$  como em (1) (com  $\alpha_k \neq 0$  e  $s_1 > \dots > s_k$ ), o Teste da Razão não fornece nenhuma informação sobre a convergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ . Dividindo numeradores e denominadores por  $\alpha_k (ns_k)^{-n+(-1)^n}$ , concluímos que

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{\alpha_1 ((n+1)s_1)^{-n-1+(-1)^{n+1}} + \dots + \alpha_k ((n+1)s_k)^{-n-1+(-1)^{n+1}}}{\alpha_1 (ns_1)^{-n+(-1)^n} + \dots + \alpha_k (ns_k)^{-n+(-1)^n}} \right|$$

$$= \left| \frac{\beta_{1,n} + \dots + \beta_{k,n}}{\gamma_n + 1} \right|,$$

onde  $\gamma_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ),

$$\beta_{j,n} = \begin{cases} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \frac{s_j^{-2} s_k^{-1}}{n(n+1)} \left( \frac{s_k}{s_j} \right)^n & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n ns_k \left( \frac{s_k}{s_j} \right)^n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

( $j = 1, \dots, k$ ). Note que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ par}}} \beta_{j,n} = 0 \text{ para todo } j \in \{1, \dots, k\},$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ ímpar}}} \beta_{j,n} = 0 \text{ para todo } j \in \{1, \dots, k-1\},$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ ímpar}}} |\beta_{k,n}| = \infty.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

não existe e, portanto,  $x \in \mathcal{A}$ , como queríamos provar. Isso mostra que  $\mathcal{A}$  é maximal lineável.  $\square$

## Referências

- [1] Araújo, G.; Bernal-González, L.; Muñoz-Fernández, G.A.; Prado-Bassas, J.A.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *Lineability in sequence and function spaces*. Studia Math., v. 237, n. 2, p. 119-136, 2017.
- [2] Aron, R.M.; Bernal-González, L.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J.B. *Lineability: The search for linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2016.
- [3] Aron, R.M.; Pérez-García, D.; Seoane-Sepúlveda, J.B. *Algebrability of the set of nonconvergent Fourier series*, Studia Math., v. 175, n. 1, p. 83-90, 2006.
- [4] Bartoszewicz, A.; Głab, S. *Strong algebrability of sets of sequences of functions*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 141, p. 827-835, 2013.
- [5] Bernal-González, L.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J.B. *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), v. 51, n. 1, p. 71-130, 2014.
- [6] Gámez-Merino, J.L.; Muñoz-Fernández, G.A.; Sánchez, V.M.; Seoane-Sepúlveda, J.B. *Sierpiński-Zygmund functions and other problems on lineability*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 138, n. 11, p. 3863-3876, 2010.

- [7] Lebesgue, H. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, 1904.
- [8] Marinho, E. E. S. *Intuição matemática*, Dissertação de Mestrado, UEPB, 2019.

Gustavo Araújo  
Departamento de Matemática  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Universidade Estadual da Paraíba  
Rua Baraúnas 351  
Campina Grande-PB, 58.429-500 (Brasil).  
<[gdsaraujo@gmail.com](mailto:gdsaraujo@gmail.com); [gustavoaraujo@servidor.uepb.edu.br](mailto:gustavoaraujo@servidor.uepb.edu.br)>

Eudes Marinho  
EEEFM Professora Dione Diniz Oliveira Dias  
Núcleo Habitacional 2  
Sousa-PB, 58.814-500 (Brasil).  
<[eudes520@hotmail.com](mailto:eudes520@hotmail.com)>

Recebido: 17/05/2022  
Publicado: 31/10/2022

# O Método de Lill e uma aplicação de origamis às equações de 3<sup>o</sup> grau.

Anita Boaventura Carneiro 

Nilton Moura Barroso Neto 

## Resumo

Neste trabalho apresentaremos o Método de Lill para solução de equações polinomiais de grau arbitrário e faremos uma aplicação desse método para determinar as raízes reais de uma equação cúbica qualquer com auxílio de origami.

**Palavras-chave:** Lill, funções polinomiais, cúbicas, origami.

## Abstract

In this work we present Lill's Method for solving polynomial equations of arbitrary degree and we make an application of this method to determine the real roots of an arbitrary cubic equation with the aid of origami.

**Keywords:** Lill, polynomial functions, cubics, origami.

## 1. Introdução

Função é certamente um dos conceitos mais fundamentais da matemática moderna. Nosso primeiro contato com esse assunto dá-se na educação básica com os exemplos mais simples:

$$p(x) = ax + b, \quad p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Via de regra, as funções acima, chamadas polinomiais lineares e quadráticas ou de 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> graus, respectivamente, são exaustivamente estudadas e analisadas: sua forma geral, seu gráfico e em seguida métodos algébricos para a determinação de suas raízes, soluções de  $p(x) = 0$ , são fornecidos. Da sua parte, as cúbicas ou de 3<sup>o</sup> grau, próximas espécimens na hierarquia das funções polinomiais, são quase completamente ignoradas no currículo escolar vigente. Isso ocorre especialmente porque os métodos algébricos para determinar as raízes de uma equação polinomial de 3<sup>o</sup> grau são, em geral, mais complicados e requerem conhecimento de números complexos mesmo no caso em que todas as raízes são reais. É possível mostrar ainda que a solução de equações quárticas reduz-se à solução de cúbicas e que as equações polinomiais de grau maior ou igual a 5 não podem, em geral, ser resolvidas com métodos algébricos elementares.

Portanto, com o conhecimento médio de um aluno da educação básica, estaremos no mais das vezes limitados às soluções algébricas das equações 2<sup>o</sup> grau, apenas. Em certo sentido, o método de Lill

vem ao nosso resgate como um antídoto para tal fato. Em 1867 o engenheiro austríaco Eduard Lill (1830–1900) publicou um trabalho [8] em que descreve um método geométrico para determinar as raízes reais de equações algébricas de grau  $n$  com coeficientes reais, ou seja, na forma

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

em que  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são números reais e  $a_n \neq 0$ . Apesar da sua simplicidade, o desenvolvimento de sofisticados meios algébricos para a solução de equações e o crescente desinteresse da matemática pelos valores numéricos das suas raízes relegou o método de Lill ao *status* de mera curiosidade ou divertimento matemático. Em 1936, entretanto, reacendeu-se o interesse pelo método quando a matemática italiana Margharita Beloch (1879-1976) descobriu como efetivamente construir com origami as soluções de uma equação cúbica com seu auxílio.

Esse trabalho tem como objetivo mostrar como o Método de Lill, o Quadrado de Beloch e o tão popular origami (método oriental tradicional de dobradura de papel) permitem determinar as raízes reais de uma equação algébrica de grau 3, ou seja, da forma

$$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

em que  $a_3 \neq 0$ . Lembramos ao leitor que o teorema fundamental da álgebra garante que uma equação da forma (1) tem exatamente  $n$  raízes no conjunto dos números complexos e que raízes complexas sempre vêm em pares de números conjugados entre si.

## 2. O Método de Lill

Gostaríamos de determinar as soluções reais de uma equação algébrica de grau  $n$  da forma (1) e para isso realizamos a seguinte construção geométrica: primeiramente escolhemos um ponto no plano como origem e o denotamos por  $O$ ; daí caminhamos para a direita ao longo do eixo horizontal uma distância igual ao coeficiente  $a_n$ . Em seguida, giramos  $90^\circ$  no sentido anti-horário e caminhamos uma distância igual a  $a_{n-1}$ ; giramos novamente  $90^\circ$  e seguimos assim até andarmos a distância  $a_0$ , e chegarmos no ponto final que denotaremos por  $F$ . É preciso cuidar também do sinal do coeficiente: se for positivo, caminhamos para frente, mas se for negativo damos marcha à ré; no caso de um coeficiente nulo ainda giramos, mas não caminhamos.

Vamos supor agora que temos um canhão *laser* que possui uma propriedade especial: toda vez que o seu raio atinge uma das linhas que traçamos ou o prolongamento delas, ricocheteia formando um ângulo de  $90^\circ$  com o raio incidente. Nessa situação, o método de Lill afirma que, se partindo de  $O$ , o *laser* ricocheteia em todas as paredes do caminho traçado e atinge o ponto  $F$ , então  $z = -\tan(\theta)$  é uma raiz real de (1), em que  $\theta$  é o ângulo de disparo do *laser*. Veja a figura 1

A trajetória do *laser* está representada pela linha tracejada. Note que há uma ambiguidade no ricochete: algumas vezes o *laser* será refletido, outras vezes será refratado, mas sempre por um ângulo de  $90^\circ$ .

A figura 1 deixa claro que o caminho do *laser* é formado pelas hipotenusas de uma série de triângulos semelhantes. Denotaremos por  $y_k$  o lado oposto ao ângulo  $\theta$  no triângulo que tem o outro cateto como parte do lado  $a_k$  do caminho. Por exemplo, o triângulo retângulo de vértice  $O$  tem como cateto oposto  $y_5$ , cateto adjacente  $a_5$  enquanto o próximo triângulo tem cateto oposto

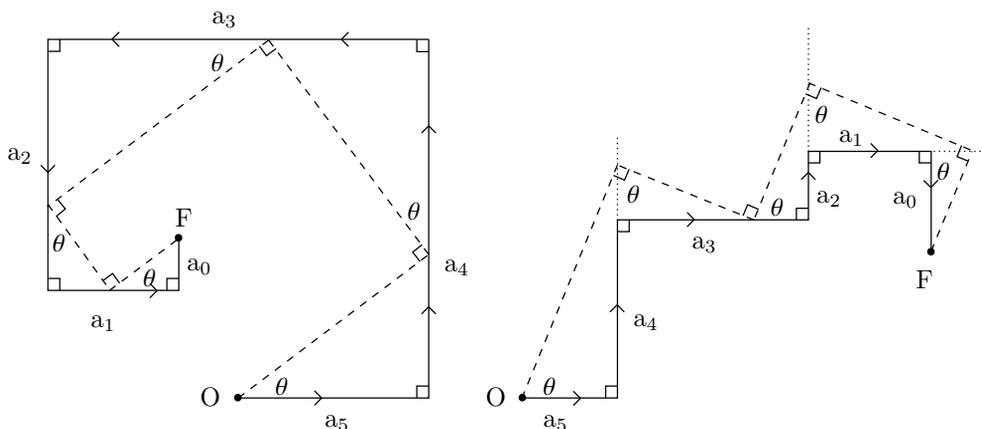


Figura 1: O método de Lill para equações de grau 5: à direita com todos os coeficientes positivos e à esquerda com  $a_3, a_2, a_0 < 0$  e  $a_5, a_4, a_1 > 0$ .

igual a  $y_4$  e cateto adjacente  $a_4 - y_5$ , e assim por diante. Temos daí que

$$\begin{aligned} y_n &= [\tan(\theta)] a_n = -z a_n \\ y_{n-1} &= [\tan(\theta)] (a_{n-1} - y_n) = -z (a_{n-1} + z a_n) \\ y_{n-2} &= [\tan(\theta)] (a_{n-2} - y_{n-1}) = -z (a_{n-2} + z (a_{n-1} + z a_n)) \\ &\vdots \\ y_1 &= -z (a_1 + z (a_2 + \dots + z (a_{n-2} + z (a_{n-1} + z a_n)) \dots)) \end{aligned}$$

Por fim, como  $y_1 = a_0$ , após eliminar os parêntesis chegamos a  $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ , que demonstra o afirmado. As figuras 2, 3 e 4 ilustram a aplicação do método de Lill para algumas equações e nesse ponto aconselhamos vigorosamente ao leitor que gaste algum tempo analisando-as para compreender perfeitamente o funcionamento do método. O leitor interessado em testar o método de Lill para o caso de uma equação do 3º grau pode acessar o site [https://www.qedcat.com/misc/lill\\_method/](https://www.qedcat.com/misc/lill_method/) onde é possível inserir os coeficientes da equação e observar uma simulação do método em tempo real.

Uma extensão do método de Lill para determinar as raízes complexas de uma equação polinomial pode ser encontrada em [2]. Nesse caso ainda temos uma sequência de triângulos semelhantes, mas o *laser* não é mais refletido ou refratado por ângulos retos, e os vértices desses triângulos não estão todos sobre o caminho poligonal definido pelos coeficientes da equação.

Considere, sem perda de generalidade, o caso da equação

$$x^4 - 6x^3 + 14,25x^2 - 15,75x + 6,5 = 0,$$

que possui duas raízes reais  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e duas raízes complexas (necessariamente conjugadas entre si)  $x_3 = 1,5 + i$  e  $x_4 = 1,5 - i$ . A figura 5 mostra em azul e vermelho as trajetórias do *laser* que determinam as duas raízes reais acima citadas, respectivamente. As linhas tracejadas em verde e laranja mostram as trajetórias do *laser* que determinam  $x_3$  e  $x_4$ , correspondentemente. No caso

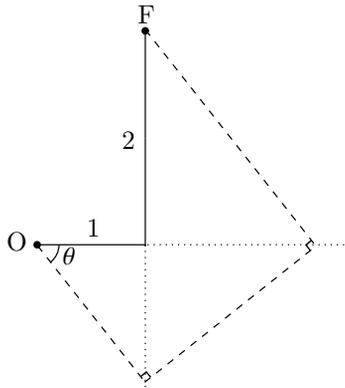


Figura 2: A solução de  $x^3 - 2 = 0$  pelo método de Lill.

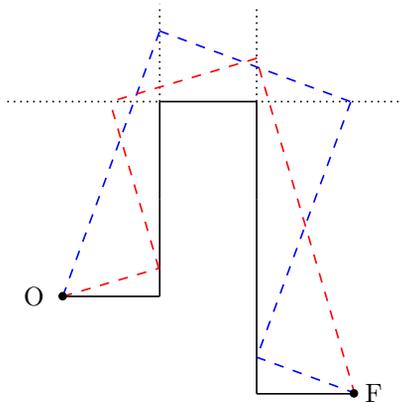


Figura 3: As duas soluções reais de  $x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$ .

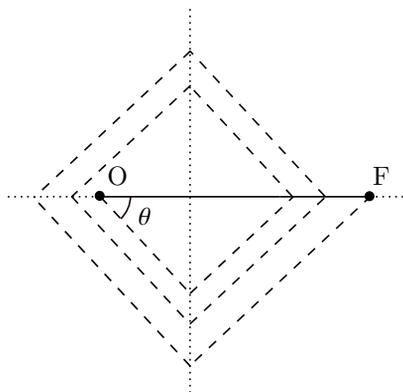


Figura 4: A solução  $\sqrt[10]{2}$  da equação  $x^{10} - 2 = 0$ . Refletindo-se a trajetória do *laser* em relação ao eixo horizontal encontramos a solução  $-\sqrt[10]{2}$ .

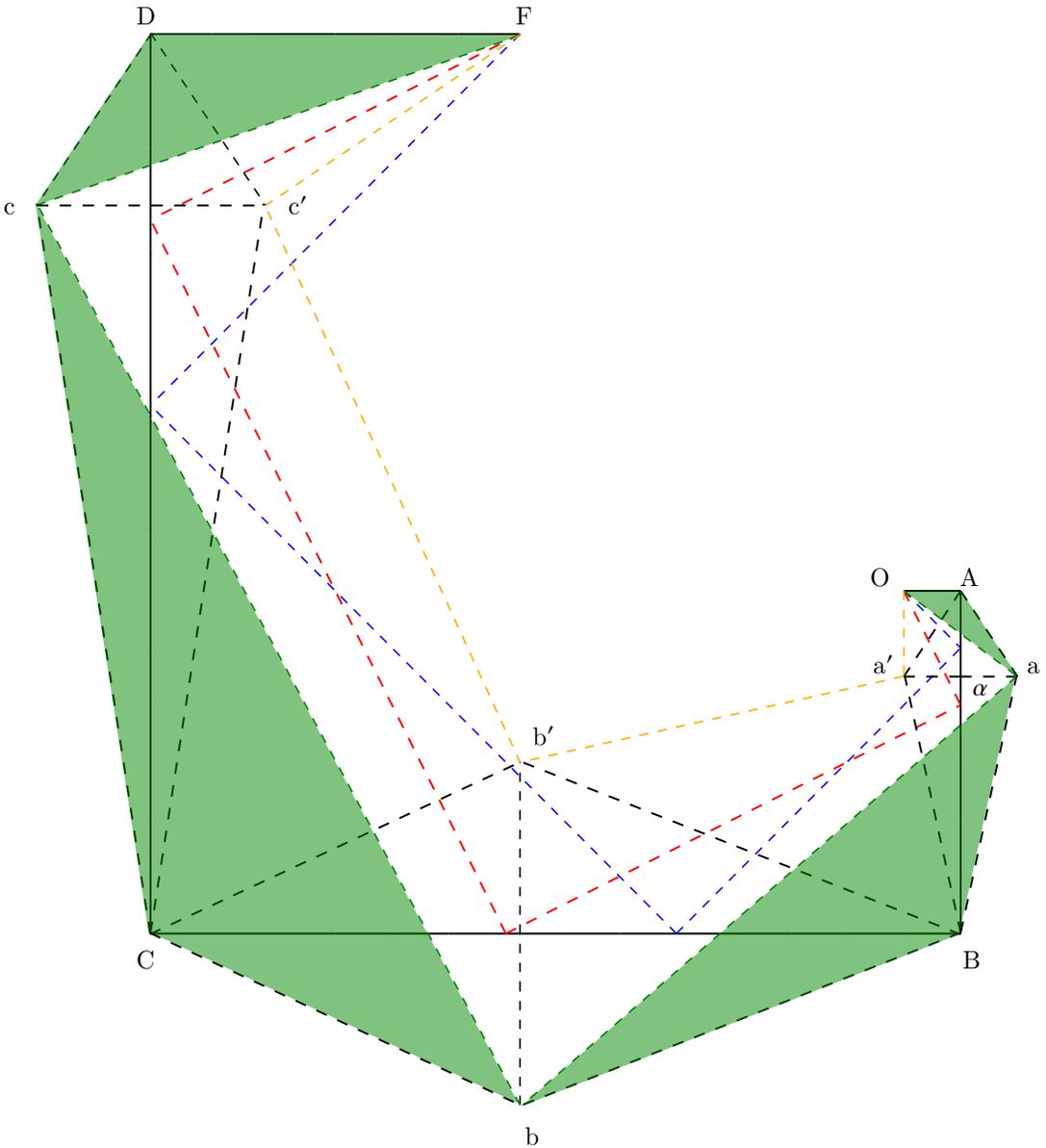


Figura 5: O método de Lill no caso de raízes complexas.

de  $x_3$ , por exemplo, temos a trajetória  $OabcF$  em que os triângulos  $OaA$ ,  $aBb$ ,  $bCc$  e  $cDF$  são semelhantes entre si; além disso, se  $\alpha$  é o pé da perpendicular ao segmento  $12$  passando por  $a$ , então os segmentos  $\frac{a\alpha}{a_4} = a\alpha$  e  $\frac{A\alpha}{a_4} = A\alpha$  são respectivamente as partes imaginária e real da raiz (sem perda de generalidade, podemos sempre escolher  $a_n = 1$  dividindo os dois lados da equação). Para encontrar a trajetória que determina  $x_4$  basta tomar os pontos  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$ , reflexões de  $a$ ,  $b$  e  $c$  em relação aos segmentos  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ , correspondentemente.

Como ilustração do que acabamos de descrever, faremos a demonstração no caso de uma equação quadrática  $x^2 + bx + c = 0$  que, pela fórmula bem conhecida, tem raízes

$$x_1 = -\frac{-b + i\sqrt{-b^2 + 4c}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{-b - i\sqrt{-b^2 + 4c}}{2}. \quad (2)$$

Para isso, começamos assumindo a existência dos triângulos semelhantes  $OaA$  e  $aBF$  ilustrados na figura 6. Usando o teorema das paralelas, temos a disposição de ângulos exibida na figura. Particularmente, os triângulos  $A\alpha a$  e  $B\alpha a$  são congruentes, logo  $A\alpha = \frac{b}{2}$ , que dá a parte real das raízes da equação. Agora, se denotamos  $A\alpha = w = Ba$  (pelas relações de semelhança nos triângulos destacados em verde) temos que

$$\frac{w}{c} = \frac{1}{w},$$

ou seja,  $w = \sqrt{c}$ , e, daí, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo  $A\alpha a$ , encontramos facilmente que  $\alpha a = \sqrt{-b^2 + 4c}/2$ , que é a parte imaginária de uma das raízes. Raciocínio semelhante aplica-se na situação ilustrada ao lado direito na figura 6.

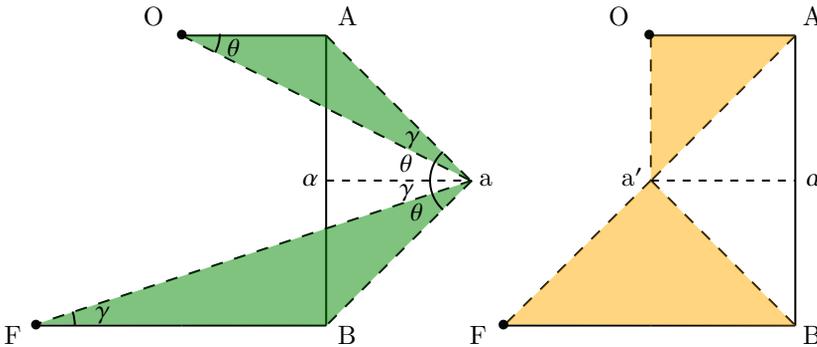


Figura 6: O cálculo geométrico das duas raízes complexas de  $x^2 + bx + c = 0$ .

Mencionamos um último fato interessante sobre o método de Lill: a trajetória do raio *laser* associado ao polinômio  $p(x)$  é geometricamente semelhante, ou seja, igual a menos de rotações e translações ao caminho percorrido, se usamos como parâmetro a equação obtida pela fatoração de  $p(x)$  por  $(x - z)$ , i.e.,  $\frac{p(x)}{x-z}$ . Em [9] Riaz demonstra esse fato e dá o exemplo da equação  $p(x) = x^3 - 7x - 6$  que possui três raízes reais, cada uma delas correspondendo a um ângulo de tiro diferente. Se tomamos uma delas, digamos  $x = 3$ , então a trajetória do *laser* será semelhante ao caminho traçado por  $\frac{x^3 - 7x - 6}{x - 3} = x^2 + 3x + 2$ .

### 3. Origami

A palavra *origami* refere-se à arte milenar de dobraduras em papel; de raiz japonesa, a palavra origami significa literalmente “dobrar papel”: *oru*=dobrar e *kami*=papel. O origami popularizou-se no ocidente após a segunda guerra mundial, quando a cultura japonesa abriu-se para o ocidente (foi nessa época que o judô também chegou por aqui, por exemplo). Um dos maiores responsáveis pela difusão do origami foi o artista japonês Akira Yoshizawa (1911-2005). Estudos mais detalhados sobre a matemática subjacente ao processo de dobra do papel são bastante recentes, e os avanços mais significativos nessa área devem-se a Thomas Hull, Robert Lang e Erick Demaine, entre outros. Aqui discutiremos apenas o essencial para a compreensão do assunto tratado, e o leitor interessado

em maiores informações pode procurar sobre esses personagens na internet. Um boa referência em português é o recente trabalho PROFMAT [3].

Tradicionalmente o origami é feito em uma única folha de papel quadrada e não é permitido esticá-la, furá-la ou rasgá-la. Em 1985, Humiaki Huzita (1924-2005) elaborou um conjunto de seis operações elementares ou *axiomas*<sup>1</sup> para os origamis que tratam essencialmente sobre todas as formas de alinhar retas e pontos no papel. A propósito, as retas são dadas pelas dobras ou bordas do papel e um ponto é definido pela intersecção de duas retas. Vamos aos axiomas:

- 0.1** Dados dois pontos, podemos dobrar uma reta que passa por eles;
- 0.2** Dados dois pontos, podemos dobrar o papel de forma que um desses pontos vá sobre o outro [a reta construída nesse caso é a perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento determinado pelos dois pontos];
- 0.3** Dadas duas retas, podemos dobrar o papel de maneira a sobrepô-las [a reta construída dessa forma é a bissetriz do ângulo formado pelas retas ou uma reta paralela às retas dadas];
- 0.4** Dados um ponto e uma reta, podemos criar uma dobra passando pelo ponto perpendicular à reta dada;
- 0.5** Dados dois pontos e uma reta, podemos dobrar o papel de modo que um desse pontos vá sobre a reta e que a dobra passe sobre o outro ponto;
- 0.6** Dados dois pontos e duas retas é possível dobrar o papel de maneira que um ponto vá sobre uma das retas dadas e o outro ponto vá sobre a outra reta.

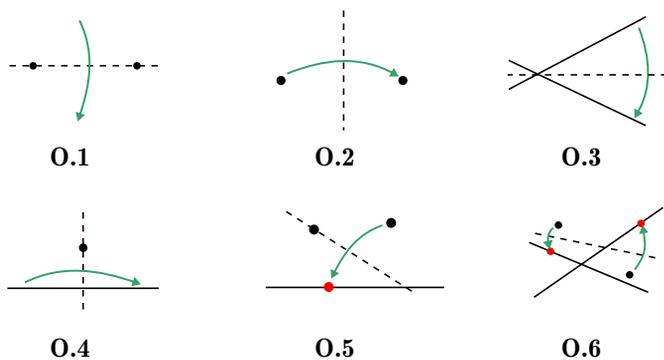


Figura 7: As operações ou axiomas dos origamis.

É possível mostrar que a dobra definida pelo axioma **0.5** dá a tangente à parábola que tem o ponto dado como foco e a reta dada como diretriz. Não demonstraremos esse fato aqui, mas ele pode ser verificado empiricamente da seguinte forma: em uma folha de papel (não necessariamente quadrada) marque um ponto arbitrário (mas sugerimos um pouco ao centro do papel) e dobre seguidamente a borda inferior do papel até o ponto em questão. O leitor não terá dificuldades em notar que estamos repetidamente aplicando o axioma **0.5** e que emergirá uma parábola como *envelope* do conjunto de dobras marcadas no papel.

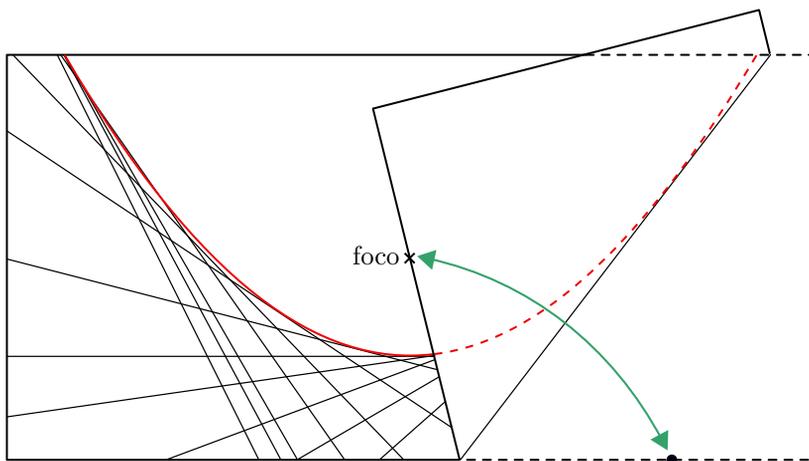


Figura 8: Construção de uma parábola com origami: basta dobrar os pontos da reta na borda inferior do papel sobre o ponto destacado (foco).

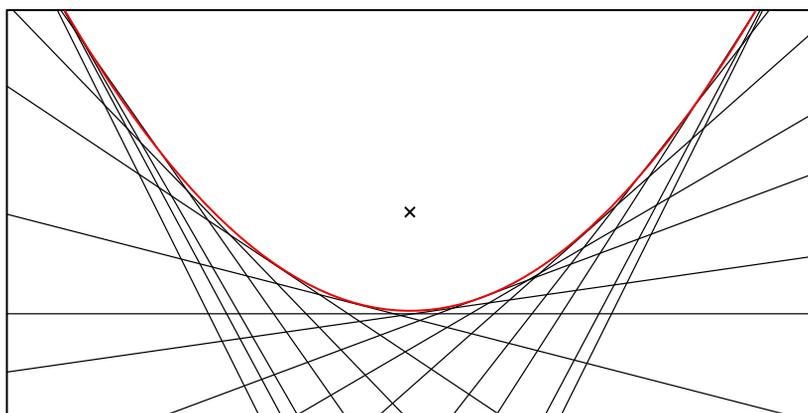


Figura 9: Parábola dual após algumas dobras.

Constatado esse fato, é imediato que o axioma 6 permite construir a tangente comum de duas parábolas e para isso, em geral, precisamos resolver uma equação cúbica. A demonstração mais elementar que conhecemos desse fato pode ser encontrada em [3]. Concluímos, portanto, que pelo menos teoricamente é possível resolver equações cúbicas com origami.

#### 4. O Quadrado de Beloch

O método de Lill não é construtivo, no sentido que não explica como obter a trajetória do *laser* a partir da linha poligonal formada pelos coeficientes da equação (o caso de equações com coeficientes inteiros e raízes inteiras pode ser resolvido com régua, compasso e papel quadriculado).

<sup>1</sup>Do ponto de vista matemático, não seria correto chamá-los de axiomas, porque algumas dobras em questão podem não existir a depender da posição relativa de pontos e retas em questão ou pode haver mais de uma dobra com as características dadas. Entretanto, o termo consagrou-se pelo uso.

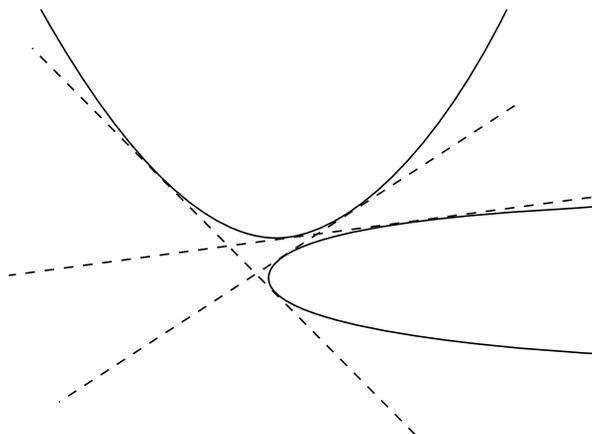


Figura 10: Duas parábolas podem ter até três tangentes comuns e para determiná-las é necessário resolver uma equação polinomial de grau 3.

Experimente!). Apesar disso, não é difícil descobrir como usá-lo para determinar as raízes de uma equação do 2º grau qualquer, bastando utilizar o velho teorema atribuído a Tales de Mileto: *os ângulos subtendidos por um diâmetro são retos*. Como exemplo, no caso da equação  $x^2 + 3x + 2 = 0$ , que possui raízes  $x_1 = -1$  e  $x_2 = -2$ , podemos determinar a trajetória do *laser* traçando um semicírculo de diâmetro OF e observando os pontos P e Q onde ele intercepta o caminho formado pelos coeficientes da equação. O teorema de Tales garante que OPF e OQF são as trajetórias do *laser*.

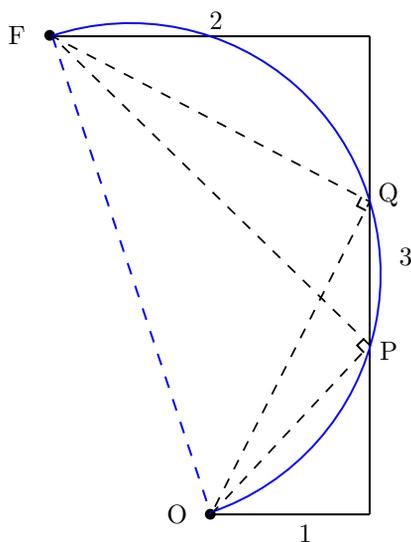


Figura 11: Soluções da equação  $x^2 + 3x + 2 = 0$  usando o método de Lill e o teorema de Tales.

No caso em que as raízes são complexas, o círculo descrito acima não toca o caminho poligonal formado pelos coeficientes da equação. Mesmo assim, ainda é possível utilizar o método de Lill para encontrar as raízes a partir de métodos geométricos elementares. Considere mais uma vez a

equação  $x^2 + bx + c = 0$  que tem como soluções os números complexos (2). Começamos traçando um círculo de diâmetro  $c + 1$ , destacado em azul na figura 12; como é bem sabido, temos que  $BP^2 = c$ , ou ainda

$$\frac{BP}{c} = \frac{1}{BP}.$$

Agora traçamos um círculo de raio  $BP$  centrado em  $B$  e observamos as intersecções  $a$  e  $a'$  desse círculo (destacado em vermelho) com a reta horizontal  $y = \frac{b}{2}$ . Dado que os triângulos  $\alpha Aa$  e  $\alpha Ba$  são congruentes por lado-ângulo-lado, temos que  $BP = Ba = Aa$ , e a equação acima se reescreve como

$$\frac{Ba}{FB} = \frac{OA}{Aa}.$$

Por fim, como  $\angle OAa = 90^\circ + \angle \alpha Aa = 90^\circ + \angle \alpha BA = \angle FBa$ , concluímos que os triângulos  $OAa$  e  $aBO$  são semelhantes, de onde segue que  $x_1 = A\alpha + i\alpha a$  e  $x_2 = A\alpha + i\alpha a' = A\alpha - i\alpha a$  são as raízes complexas do polinômio.

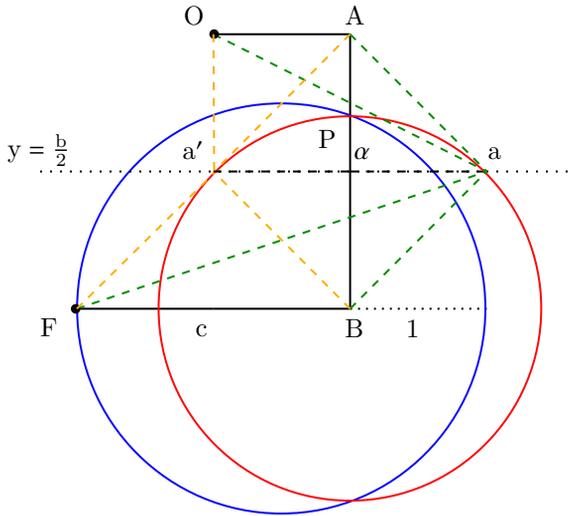


Figura 12: Cálculo geométrico das raízes complexas de uma equação quadrática.

No caso das equações de 3º grau não é imediato haver algo equivalente, entretanto, em 1936, a matemática italiana Margharita Beloch descobriu uma forma de determinar o ângulo  $\theta$  utilizando origamis, traduzindo assim o problema algébrico do cálculo das raízes de uma equação cúbica em um problema de dobradura de papel. Na realidade, Beloch foi a primeira pessoa a descobrir toda a potencialidade do origami como ferramenta para construções geométricas, fato que permaneceu ignorado por um longo tempo<sup>2</sup>.

Para descobrir a angulação do laser, usamos o seguinte resultado provado por Beloch:

**Teorema 1.** *Dados os pontos  $A, B$  e as retas  $r, s$ , existe um quadrado  $WXYZ$  com vértices adjacentes  $X$  e  $Y$  sobre  $r$  e  $s$ , respectivamente, e cujos lados  $XW$  e  $YZ$ , ou suas extensões, passam por  $A$  e  $B$ . Veja figura 13.*

<sup>2</sup>Como reparação histórica é necessário mencionar que Justin (1989), Geretschläger (1995) e Alperin (2000) provaram, independentemente, que toda equação cúbica com coeficientes construíveis pode ser resolvida com origami. Era ignorado por esses autores que em 1936 tal resultado já tivesse sido estabelecido por Beloch.

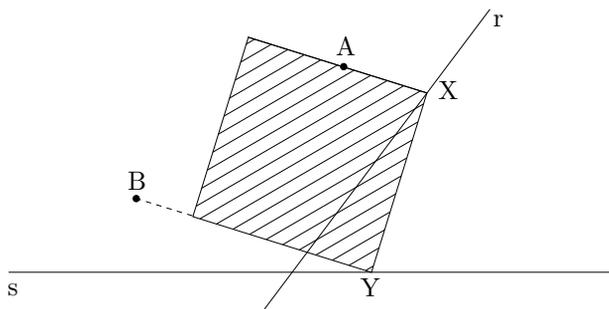


Figura 13: O quadrado de Beloch.

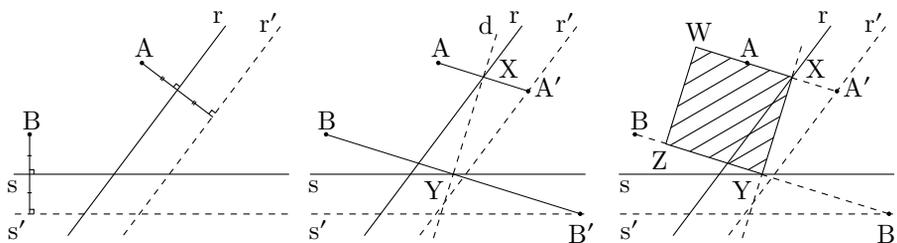


Figura 14: A construção do quadrado de Beloch com origami.

*Demonstração.* Para obter o quadrado de Beloch, inicialmente construímos a reta  $r'$ , paralela a  $r$ , tal que a distância de  $A$  até  $r$  e de  $r$  até  $r'$  são iguais; o mesmo para a construção da reta  $s'$ , paralela a  $s$ . Veja a figura 14. Agora usaremos o axioma **O.6** dos origamis para dobrar o papel, de forma que  $A$  fique sobre  $r'$  e  $B$  sobre  $s'$ . Chamaremos essa dobra de  $d$ . Se  $A'$  e  $B'$  são os pontos que correspondem a  $A$  e  $B$  sobre as retas  $r'$  e  $s'$ , respectivamente, marcamos  $X$ , ponto médio de  $AA'$  e  $Y$ , ponto médio de  $BB'$ . Esses pontos estão sobre a dobra  $d$  e também estarão sobre as retas  $r$  e  $s$ , respectivamente, pela forma como foram construídas  $r'$  e  $s'$ . Temos então que o segmento  $XY$  é um lado do quadrado, e, como  $XA$  e  $YB$  são perpendiculares a  $XY$ , concluímos a construção.  $\square$

Temos agora todas as ferramentas em mãos para resolver na prática as equações de  $3^\circ$  grau com origami. Para isso, primeiramente desenhemos nosso caminho seguindo o Método de Lill. Na figura 15 vemos um tal caminho para uma equação da forma  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ . Nesse caso, a trajetória do *laser* será determinada pelas arestas do quadrado de Beloch em que os elementos  $A$ ,  $B$ ,  $r$  e  $s$  são substituídos por  $O$ ,  $F$ ,  $a_2$  e  $a_1$ , respectivamente.

## 5. Conclusão

No ano de 1837 o matemático francês Pierre Laurent Wantzel provou em [10] que não é possível resolver o problema da duplicação do cubo com régua e compasso, dando solução definitiva a um problema que aturdiu os matemáticos pelo menos desde a Grécia Antiga. Para isso provou o teorema que afirma que se um polinômio cúbico com coeficientes racionais não possui uma raiz racional, então nenhuma de suas raízes é um número construível por meio de ferramentas euclidianas. Para mais detalhes sobre o teorema de Wantzel e sobre números construíveis o leitor pode consultar [4].

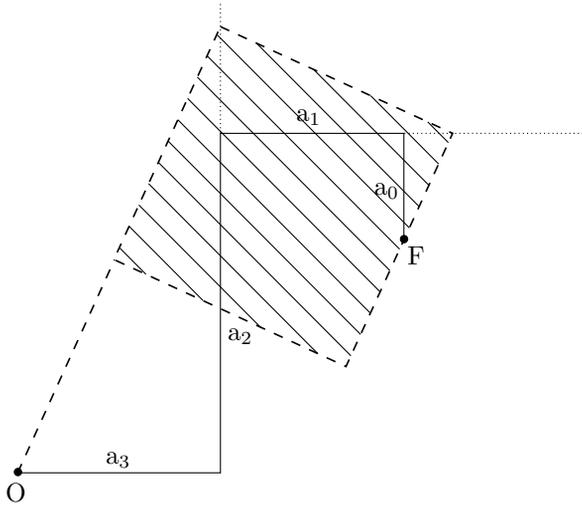


Figura 15: No caso cúbico, a trajetória do *laser* no método de Lill é determinada pela construção do quadrado de Beloch.

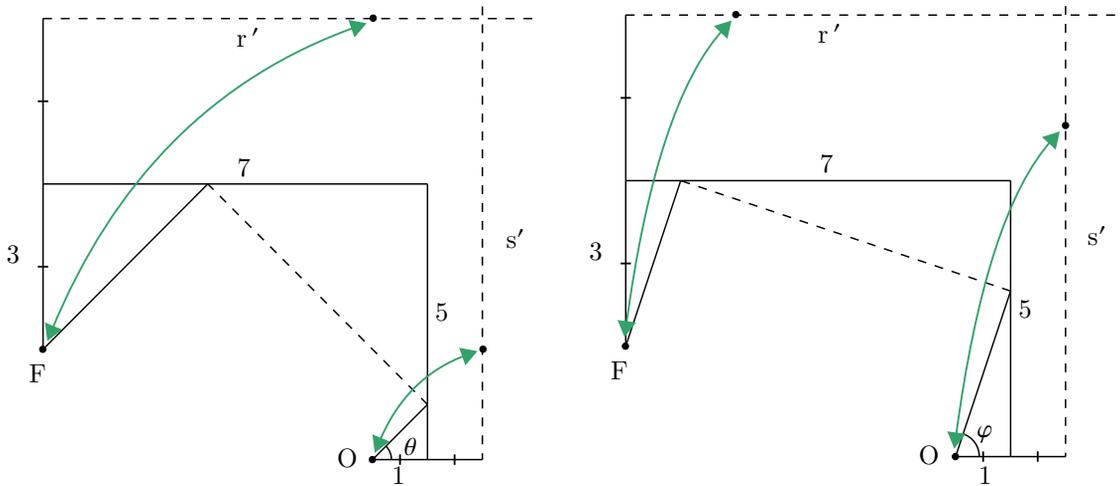


Figura 16: Descobrimo as duas raízes  $x_1 = -1$  (dupla) e  $x_2 = -3$  de  $p(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$  com o auxílio do origami.

Assim, como a equação

$$x^3 = 2$$

não possui solução racional, o que pode ser demonstrado por contradição com relativa simplicidade, conclui-se imediatamente que a duplicação do cubo não pode ser realizada com régua e compasso euclidianos.

Contudo, como mostra a figura 2, a duplicação do cubo é perfeitamente factível com origamis. Além da duplicação do cubo, também podemos aplicar os métodos do origami para resolver outros

problemas geométricos clássicos como a trissecção do ângulo e a construção de polígonos regulares; na lista que segue encontram-se todos os primeiros 20 polígonos regulares que não podem ser construídos com ferramentas euclidianas, enquanto aqueles que não podem ser construídos com origami são marcados em negrito: 7, 9, **11**, 13, 14, 18, 19, 21, **22**, **23**, **25**, 26, 27, 28, **29**, **31**, **33**, 35, 36 e 37. O leitor curioso pode encontrar uma explicação sobre a trissecção do ângulo e a construção do heptágono regular com origami em [3].

Desde a descoberta de Beloch, muito avanço tem sido feito no estudo do origami. Em [6] Robert Lang mostrou que o axioma **O.6** é o movimento mais complexo que produz uma dobra simples com origami. Isso significa que não podemos ir além da solução de cúbicas, e portanto quárticas, com origami. Este é o limite para o origami clássico – uma dobra a cada passo – entretanto, recentemente muito avanço tem sido feito no estudo de “origamis” de multidobras e dobras curvas.

As dobras curvas, embora difíceis, levam o jogo para um outro nível, permitindo até mesmo a construção de  $\pi$  e, conseqüentemente, a quadratura do círculo [5], o que é impossível com o origami clássico. Já no caso de multidobras, Lang demonstrou em [7] que se permitimos dobras duplas – i.e. a execução de movimentos que produzem duas dobras simultaneamente – podemos realizar a divisão de um ângulo em 5 partes iguais. Por fim, utilizando o método de Lill, Lang e Roger Alperin demonstraram que se permitimos dobras triplas então é possível resolver equações arbitrárias de grau 5 [1].

Os avanços observados nos últimos anos tornam evidente o enorme potencial dos origamis como ferramenta para a solução de problemas matemáticos e, conseqüentemente, para o ensino da matemática nos níveis médio, fundamental e superior.

Este trabalho é apenas um pequeno passo em direção à popularização dessa poderosa ferramenta. Acreditamos que muitos dos resultados aqui apresentados são absolutamente desconhecidos pela maioria dos professores de matemática Brasil afora e esperamos com isso preencher minimamente essa lacuna. Mais pela frente!

## Referências

- [1] ALPERIN, R. C. & LANG, R. J. *One-, two-, and Multi-fold Origami Axioms*, Origami<sup>4</sup>. International Meeting of Origami in Science, Mathematics and Education, R. J. , pp. 371–393, 2009.
- [2] ANÔNIMO. *Résolution graphique des équations algébriques qui ont des racines imaginaires; d'après M. Lill*. Nouvelles Annales de Mathématiques, **2**, vol. 7, pp. 363–367, 1868.
- [3] CESARE, A. G. G. *Entre as Dobras: A Geometria do Origami*, Dissertação PROFMAT, 2021.
- [4] FABRÍCIO, J. L. G. *Construções Geométricas. Teoria e Aplicações*, Dissertação PROFMAT, 2017.
- [5] HULL, T. *Constructing  $\pi$  via origami*, 2007, disponível em <http://origametry.net/papers/constpi.pdf>.
- [6] LANG, R. J. *Angle Quintisection*, 2004, disponível em <https://langorigami.com/article/angle-quintisection/>.
- [7] LANG, R. J. *Origami and Geometric Constructions*, 2003, disponível em [https://www.langorigami.com/wp-content/uploads/2017/09/origami\\_constructions.pdf](https://www.langorigami.com/wp-content/uploads/2017/09/origami_constructions.pdf).

- [8] LILL, E. *Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but*, Nouvelles Annales de Mathématiques 2<sup>a</sup> série, **6**, (1867), pp. 359-36.
- [9] RIAZ, M. *Geometric Solutions of Algebraic Equations*. Amer. Math. Monthly **69**, pp. 654-658, 1962.
- [10] WANTZEL, L. *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **2**, 366-372, 1837.

Anita Boaventura Carneiro  
Universidade de Brasília  
Campus Universitário Darcy Ribeiro,  
Asa Norte, Brasília-DF  
<[anita.carneiro@aluno.unb.br](mailto:anita.carneiro@aluno.unb.br)>

Nilton Moura Barroso Neto  
Universidade de Brasília  
<[niltonmoura@unb.br](mailto:niltonmoura@unb.br)>

Recebido: 08/08/2022  
Publicado: 16/11/2022

# O Teorema de Van Aubel com triângulos: nova prova e uma razão encontradas

Rogério César dos Santos 

## Resumo

O clássico e conhecido Teorema de Van Aubel afirma que, se quadrados são construídos sobre os lados de um quadrilátero qualquer, então os centros desses quadrados formam um quadrilátero cujas diagonais são congruentes e perpendiculares. A ideia deste artigo é apresentar resultados similares a esse, quando, em vez de quadrados, triângulos são construídos sobre os lados do quadrilátero.

**Palavras-chave:** Teorema de Van Aubel; Geometria Plana; Números Complexos.

## Abstract

The classic and well-known Van Aubels Theorem states that, if squares are constructed on the sides of any quadrilateral, then the centers of these squares form an quadrilateral whose diagonals are congruent and perpendicular. The idea of this article is to present results similar to this one, when, instead of squares, triangles are constructed on the sides of the quadrilateral.

**Keywords:** Van Aubels Theorem; Plane Geometry; Complex numbers.

## 1. Introdução

O Teorema de Van Aubel ([3] e [2]) afirma que, se quadrados são construídos sobre os lados de um quadrilátero ABCD qualquer, então os centros  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  dos mesmos formam um quadrilátero cujas diagonais  $B_1B_3$  e  $B_2B_4$  são congruentes e perpendiculares, conforme ilustra a figura 1.

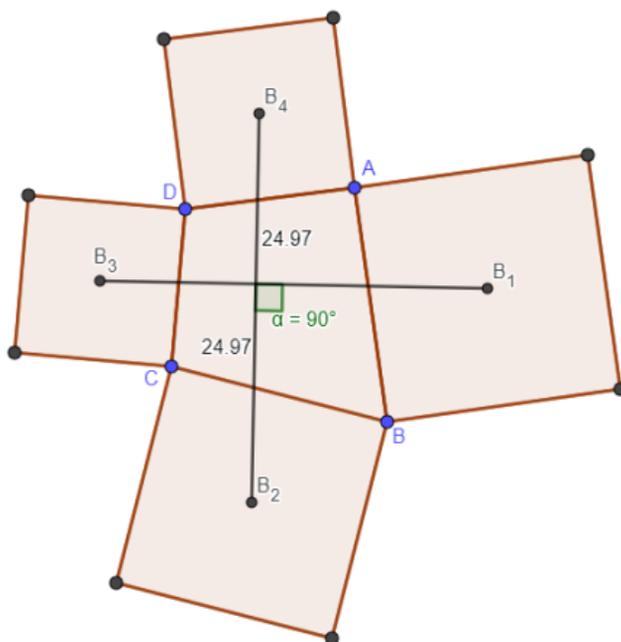


Figura 1: O Teorema de Van Aubel:  $\overline{B_1B_3} = \overline{B_2B_4}$  e  $B_1B_3 \perp B_2B_4$ .

Trocando os quadrados por triângulos, será que vale o mesmo resultado? A resposta é não. Porém, vale uma outra propriedade, como mostrou, por meio de trigonometria, Krishna [1]. Ele provou que segmentos que unem os centros opostos dos triângulos são perpendiculares aos segmentos que unem os vértices externos opostos dos triângulos. O propósito deste artigo é fornecer outra demonstração deste resultado de Krishna, a qual será feita aqui por meio de números complexos. A prova por números complexos permitirá ainda descobrir a razão entre os comprimentos desses segmentos:  $\sqrt{3}$ . É o que veremos na seção seguinte.

## 2. O Teorema de Van Aubel com triângulos.

**Proposição 1.** *O Teorema de Van Aubel com triângulos. Considere um quadrilátero ABCD e triângulos equiláteros  $AV_1B$ ,  $BV_2C$ ,  $CV_3D$  e  $DV_4A$  construídos externamente sobre os lados de ABCD, como mostra a figura 2. Sejam  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  os baricentros (centros) dos triângulos. Então,  $V_1V_3$  é perpendicular a  $B_2B_4$  e  $V_2V_4$  é perpendicular a  $B_1B_3$ . Além disto,  $\overline{V_1V_3} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_2B_4}$  e  $\overline{V_2V_4} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_3B_5}$ .*

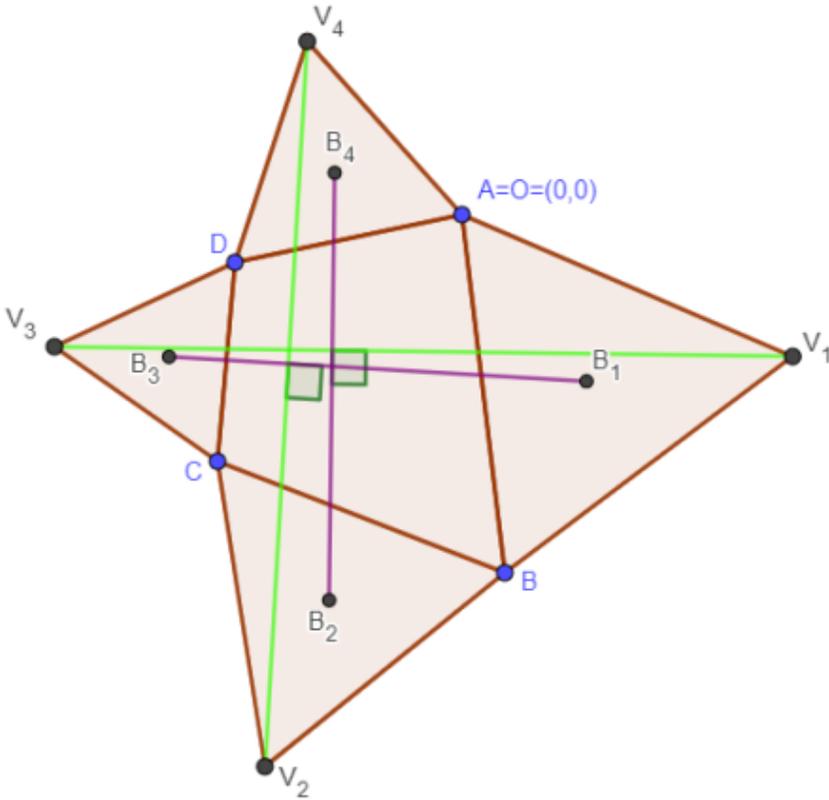


Figura 2: O Teorema de Van Aubel com triângulos.

*Demonstração.* Coloquemos  $A$  na origem  $(0,0)$  do plano cartesiano. Chame de "a" o número complexo nulo, afixo de  $A = (0,0)$ . Também, denote por "b" o afixo complexo de  $B$ , "c" o afixo complexo de  $C$  e "d" o afixo complexo de  $D$ . Consideremos o vetor  $\overline{AB} = \overline{OB}$ , onde  $O = A = (0,0)$  é a origem do plano cartesiano. Considere  $x_1$  o número complexo afixo de  $B - A = B - (0,0) = B$ . Assim,  $x_1$  é o número complexo representante do vetor  $\overline{AB} = \overline{OB}$ , e  $|x_1| = |\overline{AB}| = |\overline{OB}|$  é a medida do lado do triângulo  $AV_1B$ . Analogamente, definamos  $x_2, x_3$  e  $x_4$  os números complexos afijos dos pontos  $C - B, D - C$  e  $A - D$ , representantes dos vetores  $\overline{BC}, \overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ , respectivamente, como mostra a figura 3.

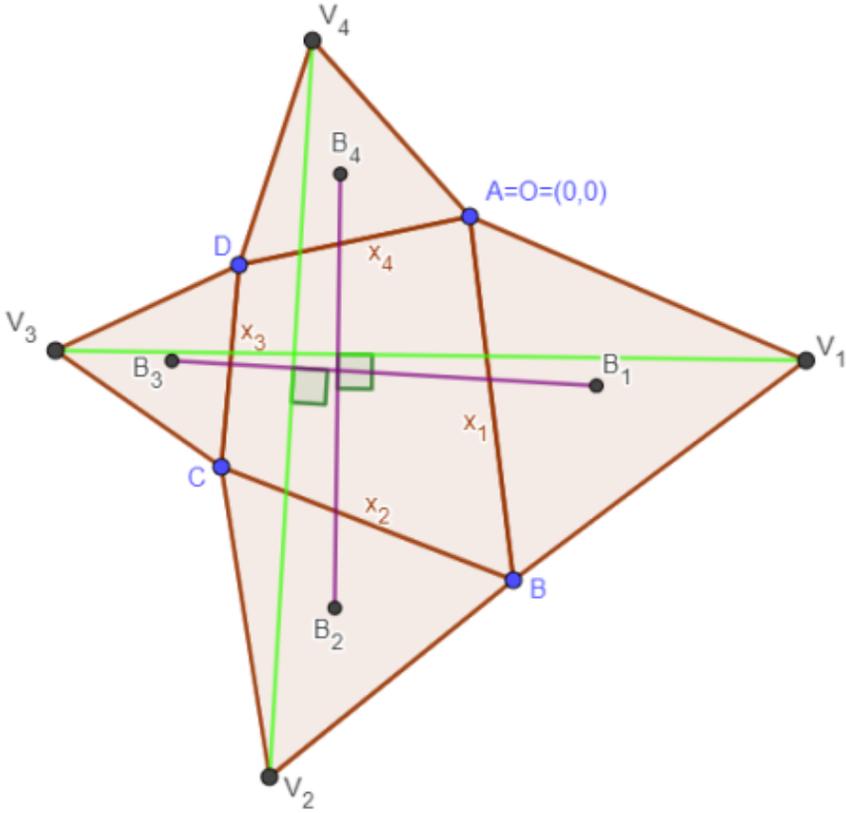


Figura 3: Números complexos  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , representantes dos lados do quadrilátero ABCD.

Dessa forma, os números complexos  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  são assim expressos:

$$x_1 = b - a = b - 0 = b, \quad x_2 = c - b, \quad x_3 = d - c \quad \text{e} \quad x_4 = a - d = 0 - d = -d.$$

Logo,  $|x_2| = |\overline{BC}|$ ,  $|x_3| = |\overline{CD}|$  e  $|x_4| = |\overline{DA}|$  são as medidas dos lados dos triângulos  $BV_2C$ ,  $CV_3D$  e  $DV_4A$ , respectivamente e, também,  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ , o número complexo nulo. Tal identidade será usada mais adiante. Considere, agora,  $b_1$  o número complexo afixo do baricentro  $B_1$  do triângulo equilátero  $AV_1B$ ,  $v_1$  o afixo do vértice  $V_1$  e  $h_1$  o afixo do pé  $H_1$  da altura do triângulo  $AV_1B$  relativa à base  $AB$ , conforme ilustra a figura 4.

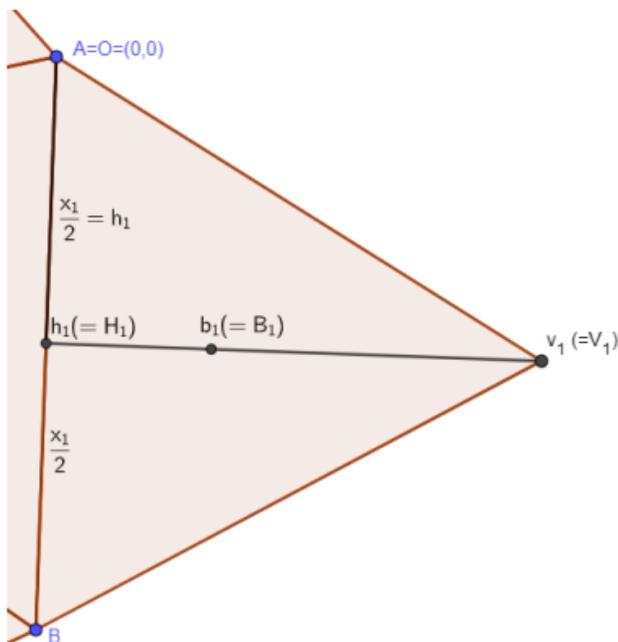


Figura 4: Os números complexos  $v_1$ ,  $b_1$  e  $h_1$  afixos dos pontos  $V_1$ ,  $B_1$  e  $H_1$ , respectivamente.

É importante salientar neste momento que os números complexos  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  são afixos das diferenças  $B - A$ ,  $C - B$ ,  $D - C$  e  $A - D$ , respectivamente, isto é, são representantes dos vetores respectivos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ , enquanto que  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $h_j$ ,  $b_j$  e  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , são afixos e representantes dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $H_j$ ,  $B_j$  e  $V_j$ , respectivamente.

Como  $x_1$  é o número complexo representante do vetor  $\overline{AB} = \overline{OB}$ , que parte da origem, então:  $h_1 = \frac{x_1}{2}$ .

A altura  $H_1V_1$  do triângulo equilátero  $AV_1B$  mede:  $\overline{H_1V_1} = \sqrt{|x_1|^2 - \left(\frac{|x_1|}{2}\right)^2} = \frac{|x_1|\sqrt{3}}{2}$ . O vetor  $\overline{AH_1} = \overline{OH_1}$  é representado pelo seu afixo complexo  $h_1 = \frac{x_1}{2}$ . Então, para rotacionar  $\overline{AH_1}$  em  $90^\circ$  no sentido anti-horário em torno da origem  $A = O$ , basta multiplicar  $h_1$  pela unidade imaginária complexa  $i = \sqrt{-1}$ , obtendo assim  $s = h_1 i$ . O número complexo unitário (de norma 1) correspondente  $s_u$  será, portanto,

$$s_u = \frac{s}{|s|} = \frac{h_1 i}{|h_1 i|} = \frac{h_1 i}{|h_1|},$$

que é paralelo a  $H_1V_1$ , como mostra a figura 5. Logo, o número complexo que representa  $\overline{H_1V_1}$ , ou seja, afixo de  $V_1 - H_1$ , será

$$\begin{aligned}
 v_1 - h_1 &= s_u \cdot \overrightarrow{H_1V_1} = \\
 \frac{h_1 i}{|h_1|} \cdot \frac{|x_1|\sqrt{3}}{2} &= \frac{\frac{x_1}{2}i}{|x_1/2|} \cdot \frac{|x_1|\sqrt{3}}{2} = \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$v_1 - h_1 = \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}$$

Ou seja,  $v_1 = h_1 + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}$  e, portanto,

$$v_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2},$$

como ilustra a figura 5.

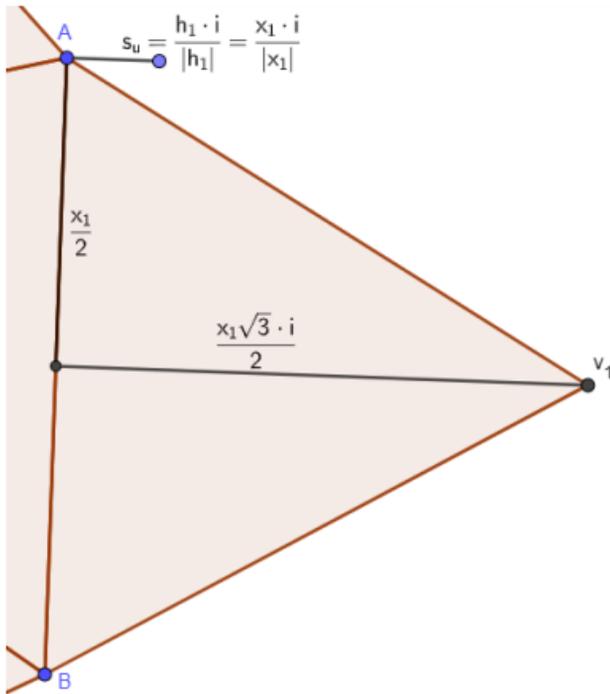


Figura 5: O afixo complexo  $v_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}$  em termos de  $x_1$ .

Também, sabemos que o comprimento de  $H_1B_1$  é igual a um terço da altura de  $H_1V_1$  (veja novamente a figura 4). Logo, procedendo de modo análogo ao anterior, concluímos que o número

complexo  $b_1 - h_1$  afixo de  $B_1 - H_1$  e representante do vetor  $\overrightarrow{H_1B_1}$  será:  $b_1 - h_1 = \frac{1}{3} \cdot (v_1 - h_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2}$ . Portanto,  $b_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{6}$ , veja figura 6, que mostra a soma poligonal dos vetores e seus respectivos números complexos em destaque verde a partir da origem  $A = O = (0, 0)$ .

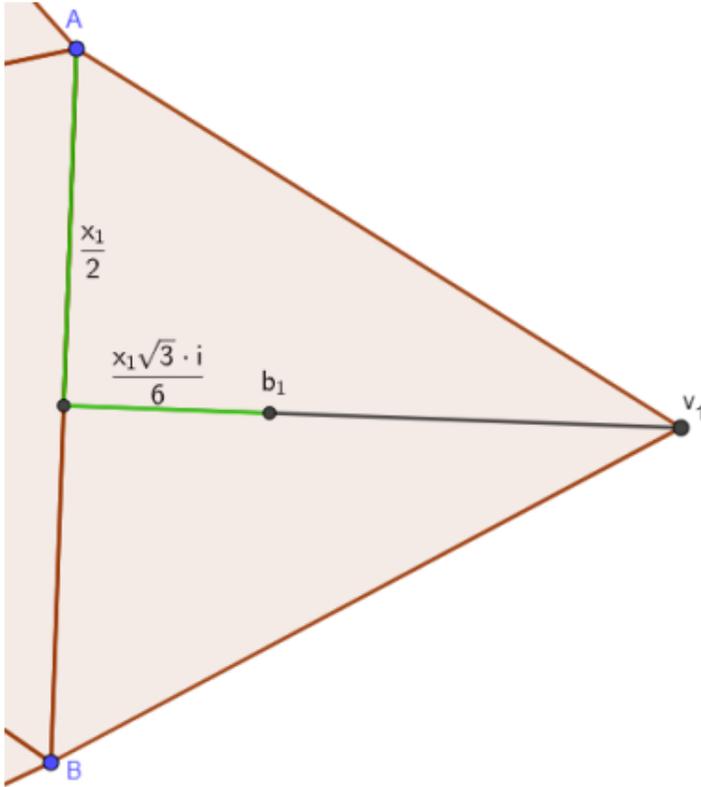


Figura 6: O afixo complexo  $b_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{6}$ , do baricentro  $B_1$ , em termos de  $x_1$ .

Analogamente, lembrando que  $x_2 = c - b$  é o número complexo afixo de  $C - B$ , então, se  $h_2$  é o número complexo afixo de  $H_2$ , o pé da altura do triângulo  $BV_2C$  relativa à base  $BC$ , podemos novamente girar o vetor  $\overrightarrow{BH_2}$ , noventa graus no sentido anti-horário em torno de  $B$ , obtendo assim o complexo resultante  $\frac{x_2 i}{2}$ , e depois tomar seu unitário correspondente  $\frac{\frac{x_2 i}{2}}{\left| \frac{x_2 i}{2} \right|} = \frac{x_2 i}{|x_2|}$ , e concluir que o afixo de  $V_2 - H_2$  é

$$v_2 - h_2 = \frac{x_2 i}{|x_2|} \cdot \left| \overrightarrow{H_2V_2} \right| = \frac{x_2 i}{|x_2|} \cdot \frac{|x_2| \sqrt{3}}{2} = \frac{x_2 \sqrt{3} \cdot i}{2}$$

Portanto,  $v_2 = h_2 + \frac{x_2\sqrt{3} \cdot i}{2}$ . A questão agora é como escrever  $h_2$  em termos de  $x_2$  e de  $x_1$ . Ora,  $b = x_1$  e  $x_2 = c - b$ , então:

$$c = x_2 + b = x_1 + x_2.$$

Logo,

$$h_2 = \frac{b+c}{2} = \frac{x_1+x_1+x_2}{2} = x_1 + \frac{x_2}{2}.$$

Enfim:  $v_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3} \cdot i}{2}$ . Veja a figura 7 que mostra a soma poligonal dos vetores e seus números complexos respectivos em destaque verde:

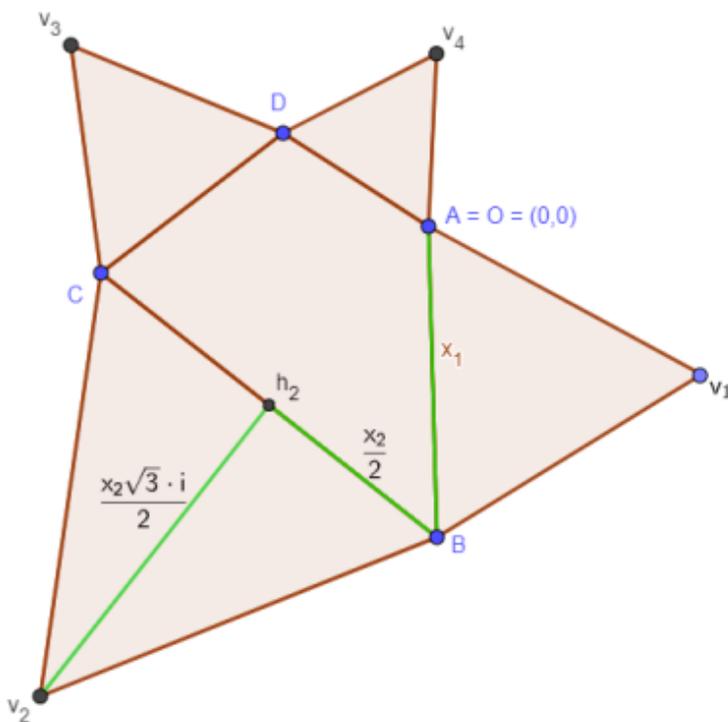


Figura 7: O afixo complexo  $v_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3} \cdot i}{2}$  em termos de  $x_1$  e de  $x_2$ .

A partir daqui, podemos proceder de maneira similar, por meio da soma poligonal de vetores e seus respectivos complexos, para encontrarmos os afixos dos demais baricentros e vértices dos triângulos. Os vértices dos triângulos  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , são:

$$v_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} \cdot i}{2},$$

$$v_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3}\cdot i}{2}, v_3 = x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_3\sqrt{3}\cdot i}{2} \text{ e } v_4 = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_4\sqrt{3}\cdot i}{2}.$$

Os baricentos  $b_j, j = 1, \dots, 4$ , são:

$$b_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3}\cdot i}{6},$$

$$b_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3}\cdot i}{6}, b_3 = x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_3\sqrt{3}\cdot i}{6} \text{ e } b_4 = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_4\sqrt{3}\cdot i}{6}.$$

Agora sim, podemos provar que  $V_1V_3$  é perpendicular a  $B_2B_4$ ,  $V_2V_4$  é perpendicular a  $B_1B_3$  e, além disso, que  $\overline{V_1V_3} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_2B_4}$  e  $\overline{V_2V_4} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_1B_3}$ . Bem, para provarmos que  $V_1V_3$  é perpendicular a  $B_2B_4$ , basta mostrarmos que existe um  $k$  real tal que

$$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2),$$

em que  $i = \sqrt{-1}$ ,  $v_1, v_3, b_2$  e  $b_4$  são os números complexos afijos dos vértices e baricentros  $V_1, V_3, B_2$  e  $B_4$ , respectivamente. Isto é, precisamos mostrar que a rotação do vetor  $\overline{B_2B_4}$ , noventa graus no sentido anti-horário, seguida da multiplicação do mesmo por um escalar real  $k$ , resulta no vetor  $\overline{V_1V_3}$ . Vamos provar a existência desse  $k$  real, desenvolvendo a identidade

$$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2) \text{ se e somente se } x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_3\sqrt{3}\cdot i}{2} - \left( \frac{x_1}{2} + \frac{x_1\sqrt{3}\cdot i}{2} \right) = k \cdot i \cdot \left[ x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_4\sqrt{3}\cdot i}{6} - \left( x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2\sqrt{3}\cdot i}{6} \right) \right].$$

Eliminando os colchetes e parênteses, cancelando  $x_1$  no segundo membro e lembrando que  $i^2 = -1$ , temos:

$$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2) \text{ se e somente se } x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_3\sqrt{3}\cdot i}{2} - \frac{x_1}{2} - \frac{x_1\sqrt{3}\cdot i}{2} = k \cdot i \cdot x_2 + k \cdot i \cdot x_3 + k \cdot i \cdot \frac{x_4}{2} - k \cdot \frac{x_4\sqrt{3}}{6} - k \cdot i \cdot \frac{x_2}{2} + k \cdot \frac{x_2\sqrt{3}}{6}.$$

Agora, transportando para o primeiro membro os termos em que a unidade imaginária  $i$  não aparece explicitamente e para o segundo os termos em que  $i$  aparece explicitamente, temos:

$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2)$  se, e somente se,

$$x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} - \frac{x_1}{2} + k \cdot \frac{x_4\sqrt{3}}{6} - k \cdot \frac{x_2\sqrt{3}}{6} = \frac{x_2}{2} + x_3 \cdot \left( \frac{k}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) + \frac{k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x_4}{2}.$$

Neste momento, é suficiente exibirmos um  $k$  real que torne o primeiro e o segundo membros iguais ao número complexo nulo, pois, dessa forma, verificar-se-á a igualdade. E para isso é importante lembrarmos que, por ser o quadrilátero  $ABCD$  uma figura fechada, então  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  (o número complexo nulo). O valor real  $k$  que torna os dois membros nulos é  $k = \sqrt{3}$ . Verifiquemos: substituindo no primeiro membro, temos:

$$\frac{x_1}{2} + x_2 \left( 1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \right) + \frac{x_3}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{x_4\sqrt{3}}{6} = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0.$$

Já fazendo  $k = \sqrt{3}$  no segundo membro, temos:

$$i \cdot \sqrt{3} \cdot \left[ \frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x_2}{2} + x_3 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x_4}{2} \right] = i \cdot \sqrt{3} \cdot 0.5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0.$$

Logo, mostramos que para  $k = \sqrt{3}$ ,

$$v_3 - v_1 = k \cdot i \cdot (b_4 - b_2) \text{ se e somente se } 0 = 0.$$

Ou seja, a igualdade  $v_3 - v_1 = \sqrt{3} \cdot i \cdot (b_4 - b_2)$  é verdadeira. Tal identidade revela, assim, que os segmentos  $V_1V_3$  e  $B_2B_4$  são perpendiculares, e revela também que  $\overline{V_1V_3} = \sqrt{3} \cdot \overline{B_2B_4}$ , que é o que queríamos demonstrar.

O resultado correspondente para  $V_2V_4$  e  $B_1B_3$  prova-se de maneira inteiramente análoga.  $\square$

### 3. Conclusão

Enfim, provamos de outro modo o resultado de Krishna [1], utilizando números complexos. Além disso, descobrimos que a razão entre os segmentos perpendiculares  $V_jV_{j+2}$  e  $B_{3-j}B_{5-j}$ ,  $j = 1, 2$ , é sempre igual a  $\sqrt{3}$ , para qualquer quadrilátero ABCD, seja ele convexo ou não. Além disso, é possível mostrar que, tomando os quatro triângulos internamente sobre os lados do quadrilátero, em vez de externamente, a razão continua sendo  $\sqrt{3}$ . Basta, para verificar isso, realizar as rotações dos vetores  $\overline{AH_1}$ ,  $\overline{BH_2}$ ,  $\overline{CH_3}$  e  $\overline{DH_4}$  no sentido horário, para obtenção dos afixos dos vértices e dos baricentros dos triângulos. Ou seja, a multiplicação é por  $-i$ , em vez de por  $i$ . As demais contas são análogas (figura 8).

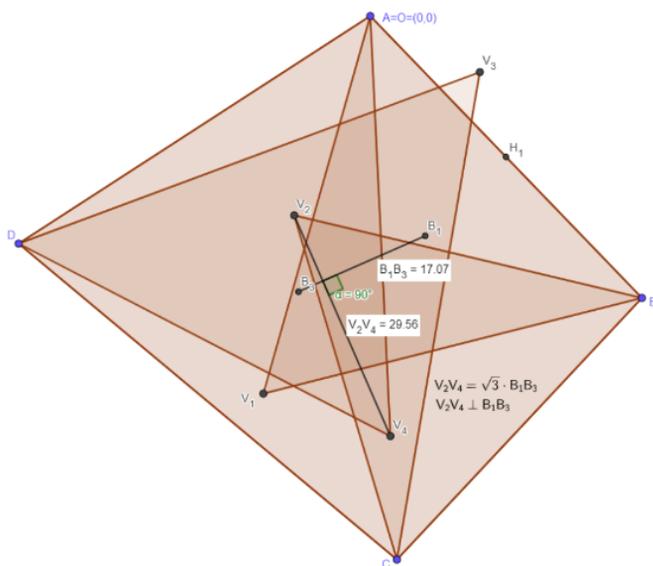


Figura 8: O teorema também vale com os triângulos sendo construídos internamente aos lados dos quadrilátero.

### Referências

- [1] Krishna, D. N. V. *A note on special cases of Van Aubel's theorem*. International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics. 2018; 5(4): 30–51.
- [2] Nishiyama, Y. *The beautiful geometric theorem of Van Aubel*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, v. 66, n. 1, p. 71–80, 2011.
- [3] Van Aubel, M. H. *Note concerning the Centers of Carr is Constructs sur les cottes dun polygon quelconque*, Nouv, Corresp Math, 4 (1878), 40-44 (in French) 10.

Rogério César dos Santos  
 FUP / Universidade de Brasília  
[rogerc@unb.br](mailto:rogerc@unb.br)

Recebido: 17/06/2022  
 Publicado: 17/11/2022