PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.1, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1102

Falando sobre o infinito no ensino médio

Iago de Andrade Dantas[1]   Fagner Lemos de Santana

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar algumas ideias para abordar a noção de infinito em uma aula para o ensino médio, focando, principalmente, no conceito de cardinalidade e trabalhando de maneira interessante questões envolvendo conjuntos numéricos e funções.

Palavras-chave: Infinito; cardinalidade; bijeção; ensino

Abstract

The purpose of this article is to present some ideas to address the notion of infinity in a high school class, focusing mainly on the concept of cardinality and approaching in a interesting way questions about numerical sets and functions.

Keywords: Infinity; cardinality; bijection; teaching

1. Introdução

No ensino superior, a ideia de infinito aparece no conceito fundamental de limite, o qual é o ponto de partida para vários outros conceitos vitais para a matemática pura e diversas aplicações. No ensino médio, provavelmente, a melhor maneira de introduzir e trabalhar a ideia de infinito seja falando sobre cardinalidade de conjuntos. Os primeiros resultados impactantes sobre o tema apareceram na segunda metade do século XIX nos trabalhos do matemático alemão Georg Cantor ([3]). Tais resultados (alguns dos quais serão mencionados aqui) foram recebidos com enorme surpresa e, até mesmo, desconfiança pela comunidade matemática da época, já que muitos desses resultados pareciam contra-intuitivos. Ouvir pela primeira vez que existem "infinitos diferentes" sempre gera curiosidade (ou estranheza mesmo!). Explorar essa curiosidade para chamar a atenção dos alunos e trabalhar exemplos que ilustrem esses resultados usando conteúdos já vistos por eles é a ideia central deste artigo. Por exemplo, fazer construções geométricas simples para obtermos bijeções entre dois intervalos da reta de tamanhos (comprimentos) ou tipos (limitados, ilimitados, abertos etc.) diferentes provando que eles possuem a mesma cardinalidade pode despertar um enorme interesse nos alunos.

O artigo está dividido da seguinte forma: na seção 2 estão os conceitos e resultados básicos sobre conjuntos infinitos que serão usados do decorrer do texto. Na seção 3 apresentamos o conceito de cardinalidade maior do que a outra, e, na seção 4, fazemos as construções geométricas que mostram que quaisquer dois intervalos da reta possuem a mesma cardinalidade.

[1]Parcialmente financiado pela Capes, como bolsista de mestrado do programa PROFMAT-UFRN

Esse artigo é um recorte da dissertação de mestrado [1] do programa de mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, a qual foi apresentada em 2021.

2. Conjuntos finitos e infinitos

Para falar de conjuntos infinitos é importante que o leitor tenha familiaridade com conjuntos finitos. O conceito formal de conjunto finito é o seguinte:

Definição 2.1. Um conjunto A é dito ser finito se é vazio ou se existem $n \in \mathbb{N}$ e uma função bijetora $f : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow A$. Nesse caso, dizemos que n é o número de elementos de A. Notação $\#A = n$.

A função f mencionada na definição acima pode ser vista como uma contagem dos elementos de A (pense em como você "conta" objetos que estão a sua frente, atribuindo um número natural para cada um deles).

Exemplo 2.2. O conjunto $C = \{\otimes, \ominus, \odot\}$ é finito e $\#C = 3$. A função $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow C$ dada por $f(1) = \otimes$, $f(2) = \ominus$ e $f(3) = \odot$ é uma contagem dos elementos de C.

Abaixo, apresentamos algumas propriedades básicas dos conjuntos finitos (para maiores detalhes, veja [9]). Sejam A e B conjuntos tais que $\#A = m$ e $\#B = n$:

1. Existe função injetora $f : A \longrightarrow B$ se, e somente se, $m \leq n$;

2. Existe função sobrejetora $f : A \longrightarrow B$ se, e somente se, $m \geq n$

3. Existe função bijetora $f : A \longrightarrow B$ se, e somente se, $m = n$

4. Não existe função bijetora $f : A \longrightarrow C$, quando $C \subseteq A$ e $C \neq A$.

Esses 4 fatos são bastante intuitivos. Pense nos elementos de A como objetos e nos de B como gavetas. É bem natural pensar que se vou guardar uma quantidade m de objetos em n gavetas e $m > n$, então pelo menos uma gaveta receberá mais do que um objeto. Isso ilustra o fato de que se $m > n$, então não existe função injetora $f : A \longrightarrow B$. Essa ideia de objetos e gavetas pode ser utilizada nos itens 2 e 3. O item 4 parece ainda mais intuitivo do que os primeiros.

Um conjunto A é dito infinito quando não é finito. Isso significa que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ não existe função bijetora $f : \{1, ..., n\} \longrightarrow A$. Para ser mais específico, dado $n \in \mathbb{N}$, não existe função sobrejetora $f : \{1, ..., n\} \longrightarrow A$. Em outras palavras, nunca "terminamos de contar" os elementos de A.

O exemplo fundamental de conjunto infinito é o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ dos números naturais (aqui vamos considerar que $0 \notin \mathbb{N}$).

Na propriedade 3 acima sobre conjuntos finitos, vemos que dois conjuntos finitos A e B possuem a mesma quantidade de elementos quando existe uma bijeção $f : A \longrightarrow B$. No caso de conjuntos infinitos, substituímos a expressão "mesma quantidade de elementos" por "mesma cardinalidade" e dizemos que dois conjuntos infinitos A e B possuem a mesma cardinalidade quando existe uma bijeção entre eles. Dessa forma, podemos falar de conjuntos com a mesma cardinalidade de forma geral, sabendo que no caso de conjuntos finitos isso significa ter o mesmo número de elementos[2]

[2] Cardinalidade é uma relação de equivalência em qualquer classe de conjuntos (conjuntos cujos elementos são conjuntos). Para mais detalhes [7].

Olhando agora para a propriedade 4. acima, ela diz que um conjunto finito não pode ter a mesma cardinalidade de um subconjunto próprio seu. Aqui está uma diferença fundamental entre conjuntos finitos e infinitos.

Exemplo 2.3. Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{N}_1 = \{2, 3, 4, ...\} = \mathbb{N} - \{1\}$. A função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_1$ definida por $f(n) = n + 1$ é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e seu subconjunto próprio $\mathbb{N}_1$. Dessa forma, podemos concluir que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_1$ possuem a mesma cardinalidade e com isso concluir que $\mathbb{N}$ é infinito.[3]

Ao pensar em cardinalidade de conjuntos infinitos fazendo ligação com a ideia de quantidade de elementos, mesmo algo tão simples como o exemplo acima pode soar estranho: como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_1$ podem ter a mesma cardinalidade se $\mathbb{N}$ possui todos os elementos de $\mathbb{N}_1$ mais um? Você pode por a culpa disso na abstração dos conceitos envolvidos. De fato. é difícil (pra não dizer impossível) tratar deles com exemplos concretos. Mesmo assim, o matemático Ian Stewart (1945–), grande divulgador da Matemática e escritor de vários livros, propôs uma forma "concreta" de tratar da questão de conjuntos infinitos poderem ter a mesma cardinalidade de um subconjunto próprio seu. Ele chamou de hiperdicionário (Hyperwebster, [5] e [4]). A ideia é a seguinte: considere o nosso alfabeto $a, b, c, ..., z$. Aqui, a maneira de formar palavras é simplesmente fazer listas ordenadas (e finitas) de letras do alfabeto. Por exemplo, a, ab, caa, caza, são palavras desse dicionário (sim, ele aceita a palavra caza com z!!!). O hiperdicionário, que denotaremos por H, é o conjunto de todas as palavras formadas dessa forma. Não deve ser difícil perceber que H é um conjunto infinito (mesmo que cada palavra seja uma lista finita). Agora, considere o conjunto H_1 formado apenas pelas palavras que começam com a letra a e possuem pelo menos duas letras ($aa, aba, aaaaa, axacdzvdf \in H_1$, por exemplo). É imediato que temos aí um subconjunto próprio de H. Agora, faça o seguinte: retire a primeira letra de cada palavra de H_1. Com isso, vc obtém um novo subconjunto H_2 de H com a mesma cardinalidade de H_1. Que conjunto é esse? Perceba que esse novo subconjunto é o próprio hiperdicionário H. De fato, para qualquer palavra α em H, temos que $a\alpha$ está em H_1 e, pela construção descrita, α está em H_2.

3. Comparando Cardinalidades Infinitas

Quando falamos de conjuntos finitos não há dúvidas sobre o que significa um conjunto ter mais ou menos elementos do que o outro. Já com conjuntos infinitos, o que podemos é falar sobre um conjunto ter maior ou menor cardinalidade do que o outro, de acordo com a definição abaixo.

Definição 3.1. Sejam A e B conjuntos infinitos. Dizemos que a cardinalidade de B é maior ou igual a de A quando existe uma função injetora $f : A \longrightarrow B$ ou, equivalentemente, quando existe uma função sobrejetora $g : B \longrightarrow A$. Se existir função injetora mas não sobrejetora de A em B ou, equivalentemente, se existir função sobrejetora mas não injetora de B em A, dizemos que B tem cardinalidade (estritamente) maior do que A. Usamos as notações $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ e $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$.

Olhando para as 4 propriedades dos conjuntos finitos da seção anterior, não é difícil ver que a definição acima serve também para conjuntos finitos.

[3]Esse exemplo formaliza a ideia do gerente do famoso hotel de Hilbert para alojar o hóspede que chegou quando todos os quartos estavam ocupados. Esse hotel hipotético possui infinitos quartos, numerados com os números naturais. Uma noite quando todos os quartos estavam ocupados chegou uma pessoa querendo se hospedar. O gerente, então, solicitou que para cada $n \in \mathbb{N}$, o hóspede no quarto n mudasse para o quarto $n + 1$. Dessa forma, o quarto 1 ficaria vago para ser oferecido ao novo hóspede. Existem outras questões interessantes sobre o hotel de Hilbert: o que fazer com a chegada de um ônibus com infnitas pessoas; e com a chegada de infinitos ônibus cada um com uma quantidade infinita de pessoas? Veja [2] e [5].

Exemplo 3.2 (Teorema de Cantor[7]). Seja A um conjunto não vazio e P(A) o conjunto das partes de A, ou seja, o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A. Vamos mostrar que não existe função sobrejetora de A em P(A). Seja $f : A \longrightarrow P(A)$ uma função qualquer. Defina $B = \{x \in A;\ x \notin f(x)\}$. Temos que $B \in P(A)$. Suponha que exista $b \in A$ tal que $f(b) = B$. Cabe a pergunta $b \in B$?

- Se $b \in B$, então $b \notin f(B)$, por definição. Mas $f(b) = B$, logo $b \notin B$. Contradição.

- Se $b \notin B$, então $b \in f(B)$, por definição. Mas $f(b) = B$, logo $b \in B$. Contradição.

Assim, a existência de $b \in A$ tal que $f(b) = B$ nos levou a uma contradição, portanto não existe $b \in A$ tal que $f(b) = B$, logo f não é sobrejetora. Como f foi qualquer, podemos concluir que não existe função sobrejetora de A em P(A) e que $card(A) < card(P(A))$, já que $f(x) = \{x\}$ define uma função injetora de A em P(A).

Segue desse último exemplo que $card(\mathbb{N}) < card(P(\mathbb{N}))$, mesmo que ambos os conjuntos sejam infinitos. Esse fato nos faz pensar que existem “infinitos diferentes”. Num certo sentido, é isso mesmo que ocorre. Na verdade, temos mais:

$$card(\mathbb{N}) < card(P(\mathbb{N})) < card(P(P(\mathbb{N}))) < \dots$$

Uma questão interessante que surge é se existe um conjunto com cardinalidade estritamente entre a de $\mathbb{N}$ e $P(\mathbb{N})$. Essa é a chamada hipótese do contínuo, a qual tem um desfecho surpreendente. [4]

4. Todos os intervalos da reta possuem a mesma cardinalidade

Um fato que costuma surpreender os alunos é que, por exemplo, o intervalo $(0, 1)$ tem a mesma cardinalidade do intervalo $(0, +\infty)$, ou mesmo do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais (intervalo $(-\infty, +\infty)$). Lembrando que ter a mesma cardinalidade significa a existência de uma bijeção entre os conjuntos e que os alunos já devem ter visto diagramas de seta representando funções entre conjuntos finitos, a surpresa dos alunos é compreensível.

Nosso objetivo aqui é definir bijeções entre os intervalos da reta, partindo de contruções geométricas simples. Faremos algo como “diagramas de seta contínuos”. Aqui, o aluno precisa apenas de conhecimentos básicos de geometria analítica e semelhança de triângulos.

(i) $(0, 1)$ e $(0, +\infty)$

Para construir uma bijeção entre esses intervalos, começamos com o ponto P de coordenadas $(-1; 1)$ do plano[5], usamos o segmento de reta I_1 ligando os pontos $(0; 0)$ e $(0; 1)$ para representar o intervalo $(0, 1)$ e o semieixo positivo das abscissas I_2 para representar $(0, +\infty)$. Dado o ponto $(0; x)$ de I_1 (temos $x \in (0, 1)$), considere a reta r passando por P e $(0; x)$.

[4] No sistema axiomático ZFC para a teoria dos conjuntos, não é possível provar que a hipótese do contínuo é verdadeira nem falsa. Para mais detalhes, veja [7] e [8]

[5] (a, b) vai representar o intervalo de extremos a e b e $(a; b)$ o ponto do plano com coordenadas a e b.

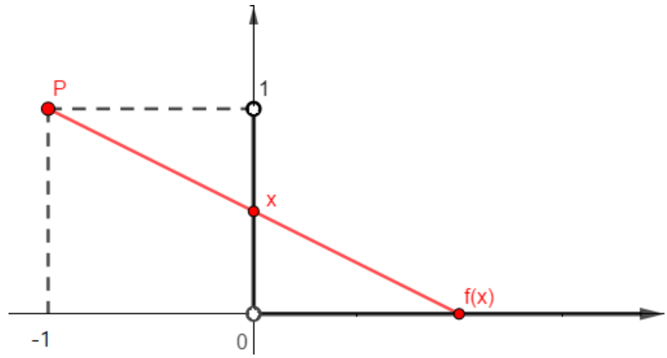

Figura 1: Construção geométrica da função $f : (0, 1) \longrightarrow (0, +\infty)$.

A reta r intersecta I_2 em um ponto $(f(x); 0)$, o qual depende de x. Usando um *software* de geometria dinâmica como o geogebra, não deve ser difícil convencer os alunos de que para qualquer ponto de I_2, a reta que o liga ao ponto P cruza I_1. Além disso, também usando o *software*, o professor pode mover o ponto $(0; x)$ sobre I_1 e ver o que ocorre com o ponto de interseção $(f(x); 0)$. Deverá ficar claro para os alunos que esse ponto de interseção vai percorrer todo o I_2.

Agora, vamos encontrar o valor de $f(x)$ em função de x de acordo com a construção descrita.

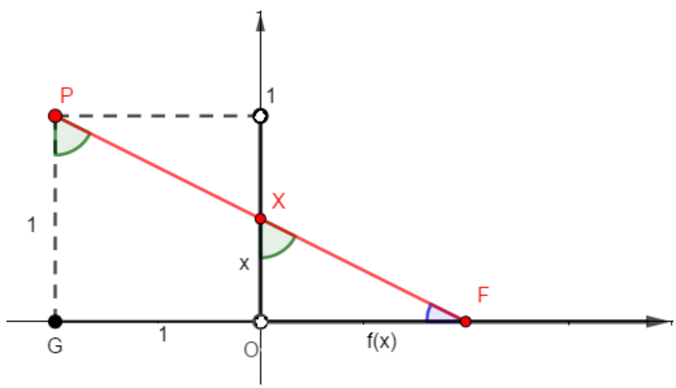

Figura 2: Semelhança dos triângulos PFG e XFO.

Note que os triângulos PFG e XFO são semelhantes, assim $\dfrac{1}{x} = \dfrac{f(x) + 1}{f(x)}$, logo $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$. Sendo assim, definimos a função $f : (0, 1) \longrightarrow (0, +\infty)$ pondo $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$. A construção sugere-nos que essa função é uma bijeção. Caso ela não tenha sido suficiente para convencer que a função f é bijetiva, não é difícil provar isso; inclusive, ver que $g(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ é a sua inversa é suficiente. Essa prova também pode ser feita de forma direta. Primeiro vamos provar a sobrejetividade.

Para todo $y \in (0, \infty)$, tome $x = \dfrac{y}{1+y} \in (0,1)$. Temos

$$f(x) = \frac{\dfrac{y}{1+y}}{1-(\dfrac{y}{1+y})} = \frac{\dfrac{y}{1+y}}{\dfrac{1}{1+y}} = \frac{y}{1+y}(1+y) = y.$$

Logo, f é sobrejetiva. Para mostrar que f também é injetiva, tome dois pontos quaisquer x_1 e x_2 em $(0,1)$, com $f(x_1) = f(x_2)$. Assim:

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Logo, f é injetiva e, portanto, bijetiva.

(ii) $(0,1)$ e $\mathbb{R}$

Antes de construirmos uma bijeção $h : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, vamos construir duas bijeções: $g : (0, \frac{1}{2}) \longrightarrow (-\infty, 0)$ e $f : (\frac{1}{2}, 1) \longrightarrow (0, +\infty)$. Para g, considere a semireta $s : y = \frac{1}{2}$, com $x < 0$ para representar $(-\infty, 0)$, o segmento I ligando $(0;0)$ e $(0;\frac{1}{2})$ para representar $(0, \frac{1}{2})$ e o ponto $P = (1;0)$. Para cada ponto $(0;x)$ de I, trace a reta que passa por ele e pelo ponto P. Essa reta intersecta a semireta s no ponto $(g(x); \frac{1}{2})$, sendo $g(x) < 0$.

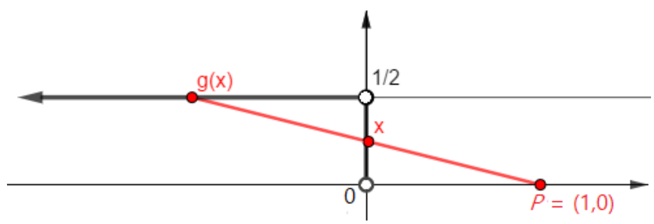

Figura 3: Construção geométrica da função $g : (0, \frac{1}{2}) \to (-\infty, 0)$.

Novamente, podemos utilizar as propriedades de semelhança, agora entre os triângulos GPH e XPO destacados na figura abaixo:

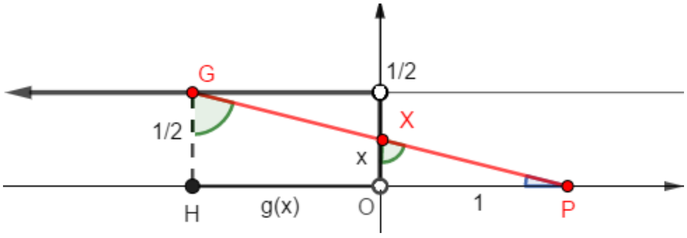

Figura 4: Semelhança entre os triângulos GPH e XPO.

Portanto, temos $\dfrac{1/2}{x} = \dfrac{1-g(x)}{1}$ (note que $g(x) < 0$, por isso aparece $-g(x)$ aqui) e, com isso,

$$g(x) = \frac{2x-1}{2x}.$$

Fica definida a função $g : (0, \frac{1}{2}) \longrightarrow (-\infty, 0)$ por $g(x) = \dfrac{2x-1}{2x}$. A demonstração de que g é uma bijeção é bem semelhante àquela feita no item (i).

Para f, considere a semireta de equação $y = \dfrac{1}{2}$, com $x > 0$ para representar $(0, +\infty)$, o segmento ligando $(0; \frac{1}{2})$ e $(0; 1)$ para representar $(\frac{1}{2}, 1)$ e o ponto $Q = (-1; 1)$.

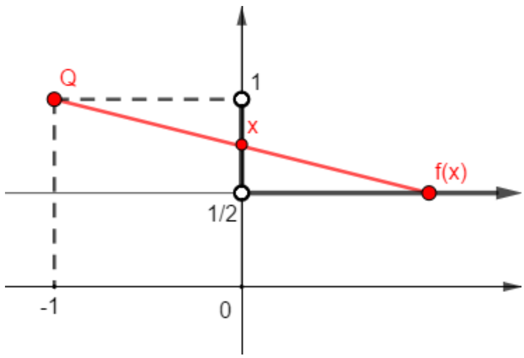

Figura 5: Representação geométrica da função $f : \left(\frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow (0, \infty)$.

É possivel ver na figura abaixo que os triângulos QFR e XFS são semelhantes.

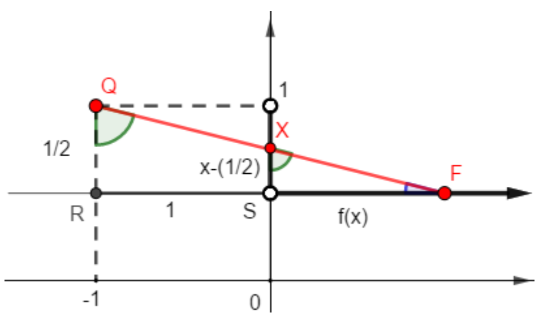

Figura 6: Semelhança entre os triângulos QFR e XFS.

Dessa forma, temos:

$$\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = \frac{f(x)+1}{f(x)}$$

e, portanto

$$f(x) = \frac{2x-1}{2-2x}.$$

Fica definida a função $f : (\frac{1}{2}, 1) \longrightarrow (-\infty, 0)$ por $f(x) = \frac{2x-1}{2-2x}$, a qual é uma bijeção. Finalmente, defina $h : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{se } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 0 & , \text{se } x = 0 \\ f(x) & , \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

O fato de g e f serem bijeções e terem domínios disjuntos, assim como os contradomínios, garante que a função h é uma bijeção.

(iii) $(0,1)$ e (a,b), com $a < b$

Aqui, basta tomar a bijeção $f : (0,1) \longrightarrow (a,b)$ definida por $f(x) = (b-a)x + a$.

Observação 4.1. Usando $f(x) = (b-a)x + a$ e mudando domínios e contradomínios, vemos que $\text{card}(0,1] = \text{card}(a,b]$, $\text{card}[0,1) = \text{card}[a,b)$ e $\text{card}[0,1] = \text{card}[a,b]$.

Até aqui, vimos a igualdade entre cardinalidades de intervalos do mesmo tipo, ou seja, abertos, semiabertos e fechados. Agora, vamos tratar da cardinalidade entre intervalos de tipos diferentes. Aqui, a construção das bijeções não tem mais o apelo geométrico dos casos anteriores.

(iv) $[0,1)$ e $(0,1)$

Aqui, vamos usar uma ideia semelhante à do gerente do hotel de Hilbert de deslocar o hóspede do quarto n para o $n+1$, porém com seus inversos. Defina $f : [0,1) \longrightarrow (0,1)$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & , \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ x & , \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Para provar que essa função é uma bijeção basta fazer uma análise de casos.

(v) $(0,1]$ e $(0,1)$

Temos a bijeção $f : (0,1] \longrightarrow (0,1)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ x & , \text{se } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

(vi) $[0,1]$ e $(0,1)$

Aqui usamos a bijeção $f : [0,1] \longrightarrow (0,1)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & , \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ x & , \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Como a composição de funções bijetoras também é bijetora ([2]), temos que a igualdade de cardinalidades é uma relação transitiva, ou seja se card(A) = card(B) e card(B) = card(C), então card(A) = card(C). Assim, do que vimos acima, segue que todos os intervalos não degenerados da reta possuem a mesma cardinalidade, inclusive o intervalo $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Referências

[1] Dantas, I. A. *Cardinalidade dos conjuntos infinitos: uma abordagem para o ensino básico.* Dissertação (Mestrado) - Profmat, UFRN, Natal, 2021.

[2] Bargas, C. L. D. *Uma perspectiva sobre o Ensino de Funções Bijetivas e Cardinalidade no Ensino Médio*, 2020. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, São Paulo, 2020.

[3] Belna, J-P. *Cantor*; tradução Guilherme João Ferreira, São Paulo: Estação Liberdade, 2011.

[4] Bhide, R. *Hyperwebster - an uncountable dictionary.* Blogger, Califórnia-EUA, 2 jul. 2011. Disponível em: http://ravi-bhide.blogspot.com/2011/07/hyperwebster-uncountable-dictionary.html?m=1. Acesso: 13 fev. 2021.

[5] Cook, M. *Sleight of Mind: 75 Ingenious Paradoxes in Mathematics, Physics, and Philosophy*, MIT Press, 2021.

[6] Gonçalvez, M. B.; Gonçalvez, D. *Elementos da Análise.* 2ª ed. Florianópoles: Ufsc, 2012.

[7] Halmos, P. *Números e funções reais*, Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[8] Leão, A. M. C. *Noções básicas de infinito e números cardinais*, 2014. 57 f. Dissertação (Mestrado) - Profmat, UFPB, João Pessoa, 2014.

[9] Lima, E. L. *Um curso de análise*, Rio de Janeiro: SBM, 1987.

Iago de Andrade Dantas
Escola Estadual Santos Dumont, Parnamirim-RN
<professoriago92@gmail.com>

Fagner Lemos de Santana
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN
<fagner.santana@ufrn.br>

Recebido: 24/09/2022
Publicado: 07/02/2023