


O modelo logístico de Verhulst sujeito a incertezas na condição inicial

Everson Luiz Ricordi 

Fabio Antonio Dorini 

Resumo

Este trabalho, oriundo do Trabalho de Conclusão de Curso [10], analisa a equação logística sujeita a incertezas na condição inicial. As funções de densidade de probabilidade da densidade populacional e do seu ponto de inflexão são calculadas utilizando a função de distribuição da população inicial, considerada/modelada neste trabalho como uma variável aleatória. Funções de densidade de probabilidade, momentos estatísticos e intervalos de confiança da densidade populacional e do seu ponto de inflexão são obtidos analiticamente para o caso em que a população inicial é uniformemente distribuída. Por fim, são realizados testes computacionais para ilustrar os principais resultados.

Palavras-chave: Equação logística; função de densidade de probabilidade; variável aleatória.

Abstract

This work, derived from [10], analyzes the logistic equation subject to uncertainties in the initial condition. The probability density functions of the population density and its inflection point are calculated by using the distribution function of the initial population, considered/modeled in this work as a random variable. Probability density functions, statistical moments and confidence intervals of the population density and its inflection point are obtained analytically for the case where the initial population is uniformly distributed. Finally, computational tests are performed to illustrate the main results.

Keywords: logistic equation; probability density function; random variable.

1. Introdução

O modelo logístico de Verhulst foi introduzido para descrever o crescimento populacional, de espécies ou indivíduos, em um dado sistema, considerando um termo de autolimitação (associado a restrição de recursos) que corrige o crescimento ilimitado do modelo malthusiano [6]. A equação logística clássica (ou de Verhulst) é dada pelo problema de valor inicial (PVI) não linear seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= a N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad t > 0, \\ N(0) &= N_0, \end{aligned} \tag{1}$$

em que $N(t)$ é a quantidade de indivíduos (densidade populacional) no instante t , a representa a taxa de crescimento intrínseca (taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador); $N_0 > 0$ é a densidade populacional em $t = 0$; e $K > 0$ é a capacidade suporte do meio, ou seja, a quantidade máxima de indivíduos que o ambiente suporta devido às limitações do *habitat*.

A solução do PVI (1) visa fornecer uma previsão da quantidade de indivíduos num determinado instante de tempo. Como pode-se observar, essa previsão depende de informações sobre a densidade populacional inicial, N_0 . Tais informações são, de modo geral, imprecisas, obtidas muitas vezes por processos empíricos, e devido a isso é importante considerá-las como incertos [1, 3, 5].

Visando levar em consideração esta característica incerta de N_0 , esse é modelado, neste trabalho, como uma variável aleatória. Em vista disso, busca-se compreender os diversos efeitos gerados por esta hipótese sobre $N(t)$, $t > 0$. O objetivo principal é obter e analisar a distribuição de probabilidade da população $N(t)$, $t > 0$ fixo, e de seu ponto de inflexão, t^* , considerando-se N_0 uma variável aleatória real e absolutamente contínua, e supondo conhecida a sua função de densidade de probabilidade (FDP). Para tal, $N(t)$ e t^* são consideradas funções da variável aleatória N_0 .

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: na Seção 2 é apresentado, baseando-se em [2], um breve histórico do modelo logístico de Verhulst. Nas Seções 3 e 4, as FDP's de $N(t)$, $t > 0$ fixo, e t^* são obtidas a partir da fdp da densidade populacional inicial, N_0 . Na Seção 5, são apresentadas, analiticamente, a pdf, os principais momentos estatísticos, e intervalos de confiança de $N(t)$, $t > 0$ fixo, e t^* , para o caso em que N_0 é uniformemente distribuída. Por fim, na Seção 6 são apresentadas simulações e ilustrações computacionais, desenvolvidas no programa MATLAB (MathWorks, Inc.), comparando os resultados analíticos deste trabalho com aqueles obtidos utilizando-se do método de Monte Carlo [4].

2. O modelo logístico de Verhulst

Malthus (1798) afirma em seu livro “*An Essay on the Principle of Population*” [7] que a população cresce segundo uma progressão geométrica enquanto a produção de alimentos cresce segundo uma progressão aritmética. O problema proposto por Malthus sugere que considerando a população como uma função do tempo, a taxa de crescimento da população num determinado instante t é proporcional à quantidade de indivíduos neste mesmo instante, o que torna a equação diferencial seguinte razoável:

$$\frac{d}{dt}N(t) = a N(t), \quad (2)$$

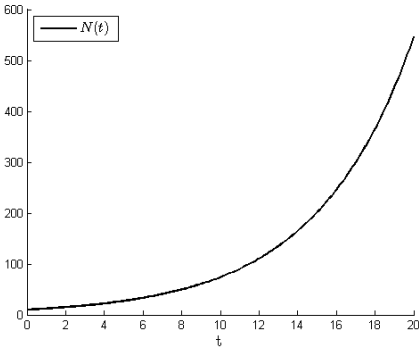
em que $N(t)$ denota a quantidade de indivíduos no tempo t e $a > 0$ denota a constante de proporcionalidade. Pode-se verificar facilmente que a solução geral de (2) é dada por

$$N(t) = c e^{at},$$

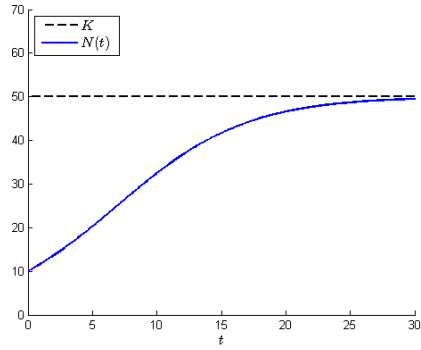
em que c é uma constante. Supondo a população inicial $N(0) = N_0 > 0$ conhecida, obtém-se

$$N(t) = N_0 e^{at}. \quad (3)$$

O modelo dado em (3), conhecido como modelo malthusiano ou exponencial, forneceria, então, a população de uma determinada espécie em qualquer tempo. A Figura 1(a) ilustra a solução (3) para $N_0 = 10$ e $a = 0.2$.



(a) $N_0 = 10, a = 0.2$



(b) $N_0 = 10, a = 0.2, K = 50$

Figura 1: Ilustração das soluções (3), $t \in [0, 20]$, e (4), $t \in [0, 30]$.

Entretanto, o astrônomo e estatístico belga Alphonse Quetelet estava convencido de que o crescimento indefinido do modelo malthusiano conduziria a valores impossíveis e experimentou vários ajustes no modelo passando o problema à Pierre Verhulst [2].

Em 1838, levando em consideração as possíveis limitações em que a população está inserida, como, por exemplo, disponibilidade de espaço e alimentos, ele propôs em seu modelo um fator que corrige o crescimento indefinido de (3), resultando, assim, no modelo descrito pelo PVI (1).

A solução do PVI (1) é dada por (ver [6], por exemplo):

$$N(t) = \frac{KN_0}{Ke^{-at} + N_0(1 - e^{-at})}. \quad (4)$$

Verhulst referia-se à esta solução como crescimento logístico e, devido a esse fato, (4) passou a ser chamada de *função ou equação logística*. A Figura 1(b) ilustra a solução (4) para $N_0 = 10, a = 0.2$ e $K = 50$.

A função logística tem sido empregada para modelar vários tipos de problemas nas mais diversas áreas como, por exemplo, Biologia [1], Economia [9] e Medicina [13].

3. Cálculo da FDP da densidade populacional $N(t)$

Nesta seção, a FDP de $N(t)$, para $t > 0$ fixo, é calculada considerando-se conhecida a FDP da densidade populacional inicial, f_{N_0} , e supondo-se positivos os parâmetros a e K .

Para iniciar, considere a função $N(t; N_0)$ dada em (4), solução do PVI (1), como função da variável $N_0 \in [0, +\infty)$. As afirmações seguintes sobre $N(t; N_0)$, para $t > 0$ fixo,

$$\begin{aligned}
 N(t; 0) &= 0, & \lim_{N_0 \rightarrow +\infty} N(t; N_0) &= \frac{K}{1 - e^{-at}}, & \frac{\partial}{\partial N_0} N(t; N_0) &= \frac{K^2 e^{-at}}{[Ke^{-at} + N_0(1 - e^{-at})]^2} > 0, & e \\
 \frac{\partial^2}{\partial N_0^2} N(t; N_0) &= \frac{-2K^2 e^{-at} (1 - e^{-at})}{[Ke^{-at} + N_0(1 - e^{-at})]^3} < 0
 \end{aligned}$$

são ilustradas na Figura 2. A função $N(t; N_0)$ é, desse modo, contínua, estritamente crescente, côncava para baixo e limitada na variável N_0 .

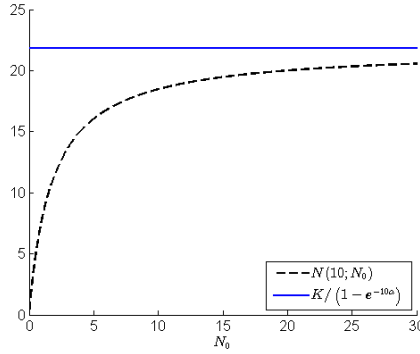


Figura 2: Ilustração de $N(10; N_0)$; $a = 0.25$, $K = 20$ e $t = 10$.

Pode-se, assim, definir a bijeção

$$G : [0, +\infty) \rightarrow \left[0, \frac{K}{1 - e^{-at}}\right) \quad (5)$$

$$N_0 \mapsto G(N_0) = N(t; N_0),$$

cujas inversa também é contínua e crescente, dada por

$$G^{-1}(q) = \frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})}, \quad q \in \left[0, \frac{K}{1 - e^{-at}}\right). \quad (6)$$

Considere, agora, N_0 uma variável aleatória real absolutamente contínua no espaço de probabilidade $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P})$, em que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a σ -álgebra de Borel sobre a reta real, e \mathcal{P} é uma medida de probabilidade [8]. Considere, também, que N_0 é não negativa com probabilidade 1, isto é, $\mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; N_0(\omega) \geq 0\}) = \mathcal{P}(N_0 \geq 0) = 1$.

Segue de (5)–(6) que, para cada realização $N_0(\omega)$ de N_0 e para $q \in [0, K/(1 - e^{-at}))$,

$$N(t; N_0(\omega)) = G(N_0(\omega)) \leq q \text{ se, e somente se, } N_0(\omega) \leq G^{-1}(q).$$

Assim, a função de distribuição cumulativa de $N(t)$, $t > 0$ fixo, é dada por

$$\begin{aligned} F_N(q; t) &= \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; N(t; N_0(\omega)) \leq q\}) = \mathcal{P}\left(\left\{\omega \in \Omega; \frac{KN_0(\omega)}{Ke^{-at} + N_0(\omega)(1 - e^{-at})} \leq q\right\}\right) \\ &= \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; G(N_0(\omega)) \leq q\}) = \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; N_0(\omega) \leq G^{-1}(q)\}) = F_{N_0}(G^{-1}(q)), \end{aligned}$$

em que $q \in [0, K/(1 - e^{-at}))$ e F_{N_0} é a função de distribuição cumulativa de N_0 .

Portanto,

$$F_N(q; t) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq K/(1 - e^{-at}), \\ F_{N_0} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right), & \text{se } 0 < q < K/(1 - e^{-at}), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (7)$$

A derivada de (7) com relação a q fornece a FDP de $N(t)$ para $t > 0$ fixo,

$$f_N(q; t) = f_{N_0} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right) \frac{K^2 e^{-at}}{[K - q(1 - e^{-at})]^2} \mathbf{1}_{(0, \beta)}(q),$$

em que $\beta = K/(1 - e^{-at})$, e a função $\mathbf{1}_{(c, d)}$ é definida como: $\mathbf{1}_{(c, d)}(x) = 1$, se $x \in (c, d)$ e $\mathbf{1}_{(c, d)}(x) = 0$, se $x \notin (c, d)$.

Por outro lado, sendo N_0 uma variável aleatória real absolutamente contínua e não negativa, pode-se escrever $D_{N_0} = \{N_0(\omega); \omega \in \Omega\} = (N_1, N_2)$ com $0 \leq N_1 < N_2$, $N_2 = +\infty$, possivelmente. O conjunto D_{N_0} , chamado suporte da variável aleatória N_0 , é o conjunto de todos os possíveis valores que podem ser assumidos pela variável aleatória N_0 com probabilidade não nula, e $\mathcal{P}(D_{N_0}) = \mathcal{P}(N_0(\omega) \in D_{N_0}) = 1$. Assim, a função de distribuição cumulativa de $N(t)$, t fixo, é dada por

$$F_N(q; t) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq N(t, \omega; N_2), \\ F_{N_0} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right), & \text{se } N(t, \omega; N_1) \leq q < N(t, \omega; N_2), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8)$$

A derivada de F_N em (8) com relação a q conduz ao seguinte resultado:

Proposição 1. *Seja N_0 uma variável aleatória real absolutamente contínua e não negativa, e $D_{N_0} = (N_1, N_2)$, $0 \leq N_1 < N_2$. Então, a FDP de $N(t)$, $t > 0$ fixo, dada em (4), é dada por*

$$f_N(q; t) = f_{N_0} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right) \frac{K^2 e^{-at}}{[K - q(1 - e^{-at})]^2} \mathbf{1}_{(\beta_1, \beta_2)}(q), \quad (9)$$

em que $\beta_1 = N(t; N_1)$ e $\beta_2 = N(t; N_2)$.

Observação 1. Já que

(i) $N(t; N_1) \neq N(t; N_2)$ (para todo $t \geq 0$) sempre que $N_1 \neq N_2$;

(ii) as funções $N(t; N_1)$ e $N(t; N_2)$ são tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t; N_1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t; N_2) = K,$$

isto é, o suporte da função $\mathbf{1}_{(\beta_1, \beta_2)}(q)$ e, portanto, $f_N(q; t)$, tende a zero; e

(iii) a função $f_N(q; t)$ em (9) é tal que

$$\int_{N(t; N_1)}^{N(t; N_2)} f_N(q; t) dq = 1 \quad (\text{para todo } t > 0);$$

segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_N(q; t) = \delta(q - K),$$

em que $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac.

Com base no resultado da Proposição 1, os exemplos seguintes ilustram a FDP de $N(t)$, $t > 0$ fixo, para algumas distribuições de N_0 com suporte positivo.

Exemplo 1. Gamma: $N_0 \sim \Gamma(\rho, \theta)$; $f_{N_0}(N_0) = \frac{N_0^{\rho-1} e^{-N_0/\theta}}{\theta^\rho \Gamma(\rho)}$;

$$f_N(q; t) = \frac{1}{\theta^\rho \Gamma(\rho)} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q[1 - e^{-at}]} \right)^{\rho-1} \exp\left(\frac{-Kq e^{-at}}{\theta(K - q[1 - e^{-at}])} \right) \frac{K^2 e^{-at}}{(K - q[1 - e^{-at}])^2}. \quad (10)$$

Exemplo 2. Exponencial: $N_0 \sim \exp(\lambda)$; $f_{N_0}(N_0) = \lambda e^{-\lambda N_0}$;

$$f_N(q; t) = \lambda \exp\left(\frac{-\lambda Kq e^{-at}}{K - q[1 - e^{-at}]} \right) \frac{K^2 e^{-at}}{(K - q[1 - e^{-at}])^2}. \quad (11)$$

Exemplo 3. Weibull: $N_0 \sim \text{Wei}(\rho, \lambda)$; $f_{N_0}(N_0) = \frac{\rho}{\lambda} \left(\frac{N_0}{\lambda} \right)^{\rho-1} e^{-(N_0/\lambda)^\rho}$;

$$f_N(q; t) = \frac{\rho}{\lambda} \left(\frac{Kq e^{-at}}{\lambda(K - q(1 - e^{-at}))} \right)^{\rho-1} \exp\left(\left[\frac{-Kq e^{-at}}{\lambda(K - q(1 - e^{-at}))} \right]^\rho \right) \frac{K^2 e^{-at}}{(K - q[1 - e^{-at}])^2}. \quad (12)$$

Exemplo 4. Lognormal: $N_0 \sim \text{Logn}(\mu, \sigma^2)$; $f_{N_0}(N_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma} N_0} \exp\left(\frac{-(\ln(N_0) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)$;

$$f_N(q; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right)^{-1} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2} \left[\ln\left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right) - \mu \right]^2 \right) \frac{K^2 e^{-at}}{(K - q[1 - e^{-at}])^2}. \quad (13)$$

4. Cálculo da FDP do ponto de inflexão t^*

Nesta seção, a FDP da população inicial, f_{N_0} , será utilizada no cálculo da FDP do ponto de inflexão de $N(t)$, $t^* > 0$, dado por

$$t^* = t^*(N_0) = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{K}{N_0} - 1 \right), \quad N_0 < K/2. \quad (14)$$

O ponto de inflexão é uma importante propriedade que determina o tempo, $t^* > 0$, e a densidade populacional, $N(t^*)$, para o qual a taxa de crescimento é máxima. Ele é obtido impondo-se a condição $d^2N(t)/dt^2 = 0$ na solução do PVI (1). Manter uma população em seu ponto de inflexão é muitas vezes crucial em um experimento [6].

As afirmações seguintes sobre $t^*(N_0)$ em (14), ilustradas na Figura 3 para um caso particular,

$$\lim_{N_0 \rightarrow 0^+} t^*(N_0) = +\infty, \quad \lim_{N_0 \rightarrow (K/2)^-} t^*(N_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial N_0} t^*(N_0) = -\frac{K}{aN_0[K - N_0]} < 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial N_0^2} t^*(N_0) = \frac{K[K - 2N_0]}{a[N_0(K - N_0)]^2} > 0,$$

permitem concluir que $t^*(N_0)$ é uma função contínua, estritamente decrescente, côncava para cima e ilimitada superiormente na variável N_0 .

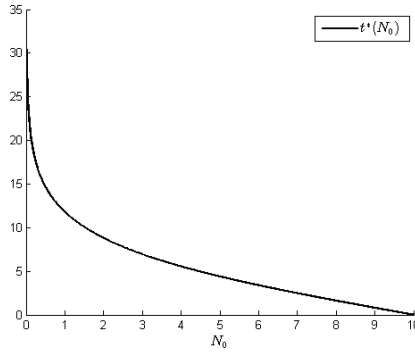


Figura 3: Ilustração de $t^*(N_0)$; $a = 0.25$ e $K = 20$.

Pode-se, então, definir a bijeção

$$\begin{aligned}
 G^* : (0, K/2) &\rightarrow (0, +\infty), \\
 N_0 &\mapsto G^*(N_0) = t^*(N_0),
 \end{aligned} \tag{15}$$

cuja inversa também é contínua e decrescente, dada por

$$(G^*)^{-1}(q) = \frac{K}{1 + e^{aq}}, \quad q \in (0, +\infty). \tag{16}$$

Considere, agora, o caso em que N_0 é uma variável aleatória absolutamente contínua no intervalo $(0, K/2)$, ou seja, $\mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; 0 < N_0(\omega) < K/2\}) = \mathcal{P}(0 < N_0 < K/2) = 1$. Segue de (15)–(16) que, para cada realização de $N_0(\omega)$ de N_0 e $q > 0$,

$$t^*(N_0(\omega)) = G^*(N_0(\omega)) \leq q \text{ se, e somente se, } (G^*)^{-1}(q) \geq N_0(\omega).$$

Portanto, a função de distribuição cumulativa de t^* em (14) é dada por

$$\begin{aligned}
 F_{t^*}(q) &= \mathcal{P}(0 < t^* \leq q) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{a} \ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \leq q\right) = \mathcal{P}(G^*(N_0) \leq q) = \mathcal{P}(N_0 \geq (G^*)^{-1}(q)) = \\
 &= 1 - \mathcal{P}(N_0 \leq (G^*)^{-1}(q)) = 1 - F_{N_0}\left(\frac{K}{1 + e^{aq}}\right), \quad q \in (0, +\infty).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Tomando a derivada de F_{t^*} em (17) com relação a q obtém-se a FDP de t^* ,

$$f_{t^*}(q) = \frac{dF_{t^*}}{dq}(q) = \frac{aKe^{aq}}{(1 + e^{aq})^2} f_{N_0}\left(\frac{K}{1 + e^{aq}}\right).$$

Entretanto, se $D_{N_0} = (N_1, N_2)$, com $0 \leq N_1 < N_2 \leq K/2$, então a função de distribuição cumulativa de t^* é dada por

$$F_{t^*}(q) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq t^*(N_1), \\ 1 - F_{N_0} \left(\frac{K}{1 + e^{aq}} \right), & \text{se } t^*(N_2) \leq q < t^*(N_1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (18)$$

Assim, a derivada de F_{t^*} em (18) com relação a q conduz ao seguinte resultado:

Proposição 2. *Seja N_0 uma variável aleatória absolutamente contínua e não negativa, e $D_{N_0} = (N_1, N_2)$, $0 \leq N_1 < N_2 \leq K/2$. A FDP de t^* em (14), f_{t^*} , é dada por*

$$f_{t^*}(q) = \frac{aK e^{aq}}{(1 + e^{aq})^2} f_{N_0} \left(\frac{K}{1 + e^{aq}} \right) \mathbf{1}_{(\alpha_1, \alpha_2)}(q), \quad (19)$$

em que $\alpha_1 = t^*(N_2)$ e $\alpha_2 = t^*(N_1)$.

O resultado da Proposição 2 pode ser estendido da seguinte maneira: suponha que deseja-se saber a fdp do tempo $t_T > 0$ para o qual $N(t_T) = T$, $0 < T < K$, T fixo, considerando N_0 uma variável aleatória absolutamente contínua no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < K$. Então, analogamente ao que foi feito anteriormente, tem-se $t_T = t_T(N_0)$ dado por

$$t_T(N_0) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{T(K - N_0)}{N_0(K - T)} \right), \quad (20)$$

obtido igualando-se a solução dada em (4) a T , cujas propriedades, ilustradas na Figura 4 para um caso particular, são:

$$\lim_{N_0 \rightarrow K^-} t_T(N_0) = -\infty, \quad \lim_{N_0 \rightarrow 0^+} t_T(N_0) = +\infty, \quad \frac{d}{dN_0} t_T(N_0) = -\frac{K}{aN_0(K - N_0)} < 0.$$

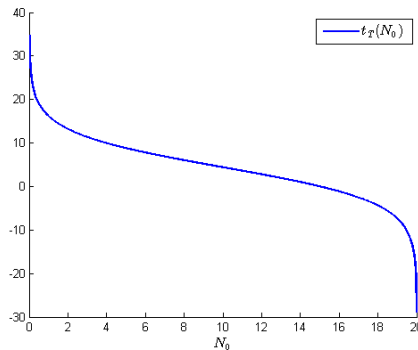


Figura 4: Ilustração de t_T ; $a = 0.25$, $K = 20$ e $T = 15$.

Observa-se, assim, que a função $t_T(N_0)$ é decrescente e contínua na variável $N_0 \in (0, K)$. Logo, a função de distribuição cumulativa de t_T é dada por

$$F_{t_T}(q) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq t_T(N_1), \\ 1 - F_{N_0} \left(\frac{TK}{T + (K - T)e^{aq}} \right), & \text{se } t_T(N_2) \leq q < t_T(N_1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (21)$$

Portanto, a derivada de F_{t_T} em (21) com relação a q conduz ao seguinte resultado:

Proposição 3. *Seja N_0 uma variável aleatória absolutamente contínua não negativa e $D_{N_0} = [N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < K$. Então, a FDP de t_T em (20), f_{t_T} , é dada por*

$$f_{t_T}(q) = \frac{TKa(K - T)e^{aq}}{[T + (K - T)e^{aq}]^2} f_{N_0} \left(\frac{TK}{T + (K - T)e^{aq}} \right) \mathbf{1}_{(\gamma_1, \gamma_2)}(q), \quad (22)$$

em que $\gamma_1 = t_T(N_2)$ e $\gamma_2 = t_T(N_1)$.

Observação 2. No caso particular em que $0 < N_1 < N_2 < K/2$ e $T = K/2$, algumas contas básicas em (22) permitem concluir que $f_{t_T} = f_{t^*}$, f_{t^*} dado em (19).

5. Caso N_0 uniformemente distribuída

Nesta seção são apresentadas as FDPs exatas de $N(t)$, t^* e t_T , descritas, respectivamente, nas Proposições 1, 2 e 3 e seus principais momentos estatísticos e intervalos de confiança, para o caso em que N_0 é uma variável aleatória real absolutamente contínua e uniformemente distribuída em $[N_1, N_2]$, $N_0 \sim U[N_1, N_2]$.

A esperança matemática, ou média, de uma variável aleatória contínua X , com FDP f_X , é definida como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} qf_X(q)dq,$$

desde que essa integral exista. O momento de ordem m , $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, é definido como

$$E[X^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} q^m f_X(q)dq.$$

Caso a média de X exista e seja finita, isto é, $E[X] = \mu_X \in \mathbb{R}$, define-se o momento central de ordem m como $E[(X - \mu_X)^m]$. A variância de X , uma medida de dispersão de X em torno de sua média, é definida como sendo o momento central de ordem 2, ou seja,

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Se Y é uma função da variável aleatória X , $Y = h(X)$, então a média de Y é dada por

$$E[Y] = E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(q)f_X(q)dq.$$

A média resume os possíveis resultados de uma variável aleatória a um valor. Diferentemente, um intervalo de confiança fornece um intervalo de possível ocorrência dos resultados [11].

A um intervalo de confiança é associado um nível de confiança, geralmente denotado pela letra grega α , que representa a probabilidade $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, de que o intervalo contenha os resultados da variável aleatória em questão, isto é, $1 - \alpha = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in [x_1, x_2]\}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (veja [1], por exemplo). Desse modo, conhecida a FDP de X , f_X , pode-se obter os extremos x_1 e x_2 do intervalo, com nível de confiança $1 - \alpha$, da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{x_1} f_X(q) dq = \frac{\alpha}{2} = \int_{x_2}^{+\infty} f_X(q) dq,$$

ou, equivalentemente, pelas equações

$$F_X(x_1) = \alpha/2 \quad \text{e} \quad F_X(x_2) = 1 - \alpha/2,$$

em que F_X denota a função de distribuição cumulativa da variável aleatória X .

5.1. FDP, momentos estatísticos e intervalo de confiança de $N(t)$

Seja $N_0 \sim U[N_1, N_2]$ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < +\infty$. Então, segue da Proposição 1 que a FDP de $N(t)$, $t > 0$ fixo, é dada por

$$f_N(q; t) = \frac{1}{N_2 - N_1} \frac{K^2 e^{-at}}{[K - q(1 - e^{-at})]^2} \mathbf{1}_{(\beta_1, \beta_2)}(q), \quad (23)$$

em que $\beta_1 = N(t; N_1)$ e $\beta_2 = N(t; N_2)$.

O momento de ordem m de $N(t)$, $t > 0$ fixo, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ é dado por

$$\begin{aligned} E[(N(t))^m] &= \int_{N_1}^{N_2} [N(t; q)]^m f_{N_0}(q) dq = \int_{N_1}^{N_2} \left(\frac{Kq}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right)^m \frac{1}{N_2 - N_1} dq = \\ &= \frac{K^m}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^m} \int_{N_1}^{N_2} \left(1 - \frac{Ke^{-at}}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right)^m dq, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} E[(N(t))^m] &= \frac{K^m}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^m} \\ &\int_{N_1}^{N_2} \left\{ 1 - \frac{1}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} + \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \left(\frac{-Ke^{-at}}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right)^i \right\} dq, \end{aligned}$$

em que $\binom{m}{i}$ é o número, ou coeficiente, binomial.

Tem-se, então,

$$\begin{aligned} E[(N(t))^m] &= \frac{K^m}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^m} \\ &\int_{N_1}^{N_2} \left\{ 1 - \frac{1}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right\} dq + \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \int_{N_1}^{N_2} \left(\frac{-Ke^{-at}}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right)^i dq. \quad (24) \end{aligned}$$

Uma mudança de variáveis simples nas integrais em (24) conduz ao seguinte resultado:

Proposição 4. Seja $N_0 \sim U[N_1, N_2]$ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < +\infty$. Então, o momento de ordem m de $N(t)$, $t > 0$ fixo é dado por

$$E[(N(t))^m] = \frac{K^m}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^{m+1}} \left\{ (N_2 - N_1)(1 - e^{-at}) - Ke^{-at} \ln \left(\frac{Ke^{-at} + N_2(1 - e^{-at})}{Ke^{-at} + N_1(1 - e^{-at})} \right) \right\} + \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \frac{(-Ke^{-at})^i}{i-1} \left[(Ke^{-at} + N_1(1 - e^{-at}))^{1-i} - (Ke^{-at} + N_2(1 - e^{-at}))^{1-i} \right]. \quad (25)$$

Observação 3. A média de $N(t)$, $t > 0$ fixo, obtida considerando-se $m = 1$ em (25) é dada por

$$E[N(t)] = \frac{K}{1 - e^{-at}} - \frac{K^2 e^{-at}}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^2} \ln \left(\frac{Ke^{-at} + N_2(1 - e^{-at})}{Ke^{-at} + N_1(1 - e^{-at})} \right). \quad (26)$$

Observação 4. Tomando $m = 2$ em (25) e considerando (26), segue que a variância de $N(t)$, $t > 0$ fixo, é dada por

$$\text{Var}[N(t)] = \frac{(K^2 e^{-at})^2}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^3} \left[\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})} \left[\ln \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \right]^2 \right], \quad (27)$$

em que $\eta_1 = Ke^{-at} + N_1(1 - e^{-at})$ e $\eta_2 = Ke^{-at} + N_2(1 - e^{-at})$.

Agora, seja $\beta \in (0, 1)$ e considere a seguinte igualdade

$$\int_{-\infty}^x f_N(q; t) dq = \beta,$$

ou, equivalentemente,

$$F_N(x; t) = F_{N_0} \left(\frac{Kx e^{-at}}{K - x(1 - e^{-at})} \right) = \beta,$$

em que F_N e F_{N_0} são as funções de distribuição cumulativa de $N(t)$, $t > 0$ fixo, e N_0 , respectivamente.

Obtém-se, então, a seguinte equação na variável x

$$\frac{1}{N_2 - N_1} \left\{ \frac{Kx e^{-at}}{K - x(1 - e^{-at})} - N_1 \right\} = \beta,$$

cuja solução é dada por

$$x = \frac{K [\beta(N_2 - N_1) + N_1]}{Ke^{-at} + [\beta(N_2 - N_1) + N_1] (1 - e^{-at})}.$$

Assim, o intervalo de confiança $[q_1, q_2]$ de $N(t)$, para $t > 0$ fixo, a um nível de $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança, é dado por

$$\left[\frac{K [(\alpha/2)(N_2 - N_1) + N_1]}{Ke^{-at} + [(\alpha/2)(N_2 - N_1) + N_1] (1 - e^{-at})}, \frac{K [(1 - \alpha/2)(N_2 - N_1) + N_1]}{Ke^{-at} + [(1 - \alpha/2)(N_2 - N_1) + N_1] (1 - e^{-at})} \right]. \quad (28)$$

5.2. FDP, média e intervalo de confiança de t^*

Seja $N_0 \sim U[N_1, N_2]$ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < K/2$. Segue da Proposição 2 que a FDP de t^* em (14) é dada por

$$f_{t^*}(q) = \frac{1}{N_2 - N_1} \frac{aKe^{aq}}{(1 + e^{aq})^2} \mathbf{1}_{(\alpha_1, \alpha_2)}(q), \quad (29)$$

em que $\alpha_1 = t^*(N_2)$ e $\alpha_2 = t^*(N_1)$.

Por outro lado, a média de t^* é dada por

$$E[t^*] = \int_{N_1}^{N_2} t^*(q) f_{N_0}(q) dq = \int_{N_1}^{N_2} \frac{1}{a} \ln\left(\frac{K}{q} - 1\right) \frac{1}{N_2 - N_1} dq = \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \int_{N_1}^{N_2} \ln\left(\frac{K}{q} - 1\right) dq.$$

Utilizando o método de integração por partes com $u = \ln(K/q - 1)$ e $dv = dq$, segue que média de t^* em (14) é dada por

$$E[t^*] = \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \left[N_2 \ln\left(\frac{K}{N_2} - 1\right) - N_1 \ln\left(\frac{K}{N_1} - 1\right) - K \ln\left(\frac{K - N_2}{K - N_1}\right) \right]. \quad (30)$$

Agora, seja $\beta \in (0, 1)$ e considere a seguinte igualdade

$$\int_{-\infty}^x f_{t^*}(q) dq = \beta.$$

Tem-se, então,

$$F_{t^*}(x) = 1 - F_{N_0}\left(\frac{K}{1 + e^{ax}}\right) = \beta,$$

e, conseqüentemente,

$$1 - \frac{\frac{K}{1 + e^{ax}} - N_1}{N_2 - N_1} = \beta,$$

cujas solução é dada por

$$x = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{K}{(1 - \beta)(N_2 - N_1) + N_1} - 1\right).$$

Portanto, segue que o intervalo $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança $[t_1, t_2]$ de t^* em (14) é dado por

$$\left[\frac{1}{a} \ln\left(\frac{K}{(1 - \alpha/2)(N_2 - N_1) + N_1} - 1\right), \frac{1}{a} \ln\left(\frac{K}{(\alpha/2)(N_2 - N_1) + N_1} - 1\right) \right]. \quad (31)$$

5.3. FDP exata, média e intervalo de confiança de t_T

Novamente, seja $N_0 \sim U[N_1, N_2]$ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < K$. Segue da Proposição 3 que a FDP de t_T em (20) é dada por

$$f_{t_T}(q) = \frac{1}{N_2 - N_1} \frac{TKa(K-T)e^{aq}}{[T + (K-T)e^{aq}]^2} \mathbf{1}_{(\gamma_1, \gamma_2)}(q), \quad (32)$$

em que $\gamma_1 = t_T(N_2)$ e $\gamma_2 = t_T(N_1)$.

Também, a média de t_T é dada por

$$\begin{aligned} E[t_T] &= \int_{N_1}^{N_2} t_T(q) f_{N_0}(q) dq = \int_{N_1}^{N_2} \frac{1}{a} \ln \left(\frac{T(K-q)}{q(K-T)} \right) \frac{1}{N_2 - N_1} dq \\ &= \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \int_{N_1}^{N_2} \ln \left(\frac{T(K-q)}{q(K-T)} \right) dq. \end{aligned}$$

O método de integração por partes com $u = \ln(T(K-q)/q(K-T))$ e $dv = dq$ conduz a

$$\begin{aligned} E[t_T] &= \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \left[q \ln \left(\frac{T(K-q)}{q(K-T)} \right) \Big|_{N_1}^{N_2} + K \int_{N_1}^{N_2} \frac{1}{K-q} dq \right] \\ &= \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \left[N_2 \ln \left(\frac{T(K-N_2)}{N_2(K-T)} \right) - N_1 \ln \left(\frac{T(K-N_1)}{N_1(K-T)} \right) + K \ln \left(\frac{K-N_1}{K-N_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Agora, considerando novamente $\beta \in (0, 1)$ e fazendo

$$\int_{-\infty}^x f_{t_T}(q) dq = \beta,$$

tem-se

$$F_{t_T}(x) = 1 - F_{N_0} \left(\frac{TK}{T + (K-T)e^{ax}} \right) = \beta.$$

Obtém-se, assim, a equação

$$1 - \frac{\frac{TK}{T + (K-T)e^{ax}} - N_1}{N_2 - N_1} = \beta,$$

cuja solução é

$$x = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{K-T} \left(\frac{TK}{[(1-\beta)(N_2 - N_1) + N_1]} - T \right) \right).$$

Desse modo, o intervalo $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança, $[t_{T1}, t_{T2}]$, de t_T em (20) é dado por

$$\left[\frac{1}{a} \ln \left(\frac{T}{K-T} \left(\frac{K}{[(1-\alpha/2)(N_2 - N_1) + N_1]} - 1 \right) \right), \frac{1}{a} \ln \left(\frac{K}{K-T} \left(\frac{K}{[(\alpha/2)(N_2 - N_1) + N_1]} - 1 \right) \right) \right]. \quad (34)$$

6. Experimentos computacionais

Nesta seção são apresentados testes computacionais a fim de validar e/ou ilustrar os principais resultados teóricos deste trabalho e, também, evidenciar as incertezas da condição inicial propagando-se em $N(t)$, t^* e t_T .

Para tanto, foram realizadas várias simulações computacionais utilizando-se o *software* MATLAB (MathWorks, Inc.). Em alguns casos, os resultados teóricos principais foram confrontados com aproximações numéricas obtidas aplicando-se o método de Monte Carlo, que consiste, basicamente, na aproximação numérica de resultados de problemas estocásticos utilizando a geração de variáveis aleatórias [4].

Inicialmente, a título de ilustração, o resultado analítico da FDP de $N(t)$ obtido na Proposição 1 foi comparado com aproximações utilizando-se o método Monte Carlo com 1 000 000 de realizações. As figuras 5 e 7 ilustram, respectivamente, as FDPs de $N(t)$ para diferentes valores de t considerando $N_0 \sim \exp(1/10)$, exponencialmente distribuída, conforme Exemplo 1, e N_0 com uma distribuição normal truncada com suporte $[0, K]$. Em ambos os casos considerou-se $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$. No caso N_0 normal truncada tomou-se $\delta_{N_0} = 0.2$ (*coeficiente de variação de Pearson* de N_0 , ou seja, $\delta_{N_0} = E[N_0]/\sqrt{\text{Var}[N_0]}$, que é uma medida de dispersão que descreve a quantidade de variabilidade relativa à média).

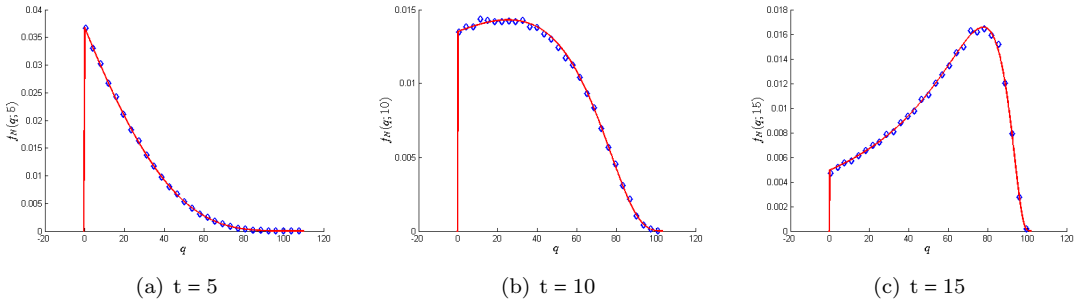


Figura 5: Ilustração da FDP de $N(t)$ com $N_0 \sim \exp(1/10)$, exponencialmente distribuída, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$: $f_N(q; t)$ dada em (11) (linha sólida vermelha) e aproximada pelo método de Monte Carlo (losangos azuis).

Na Figura 6(a) está ilustrada a média de $N(t)$ para o caso N_0 exponencialmente distribuída anterior. Neste caso foi utilizado o resultado da Proposição 1 para a obtenção de $E[N(t)]$ via integração numérica (regra de quadratura dos trapézios). Em comparação estão a média obtida usando simulações de Monte Carlo, com 50 000 de realizações de N_0 , e a solução determinística do PVI (1) tomando como condição inicial a média de N_0 , $E[N_0]$. Tal solução determinística, $N(t; E[N_0])$, é referida neste trabalho como *solução simplificada*. Faz-se, então, uma observação relevante: a acentuada discrepância entre o resultado da solução simplificada e o modelado por uma variável aleatória (exponencialmente distribuída, neste caso). A Figura 6(b) ilustra a comparação da variância de $N(t)$, $\text{Var}[N(t)]$, obtida via integração numérica (regra dos trapézios), com a variância obtida usando o método de Monte Carlo. Percebe-se, também, que os resultados teóricos concordam com as simulações de Monte Carlo.

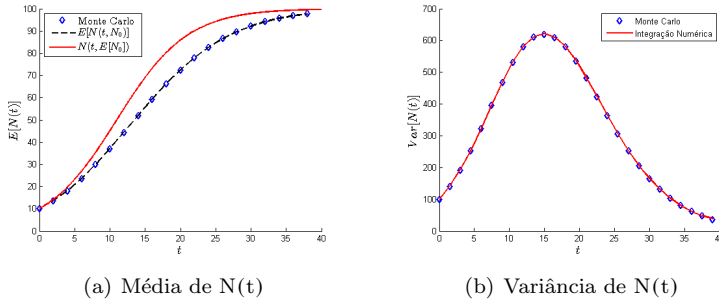


Figura 6: Ilustrações da média e variância de $N(t)$ com $N_0 \sim \exp(1/10)$, exponencialmente distribuída, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$: (a) $E[N(t; N_0)]$ (linha tracejada preta), $E[N(t; N_0)]$ aproximada por Monte Carlo (losangos azuis), e solução simplificada, $N(t; E[N_0])$ (linha sólida vermelha); (b) $\text{Var}[N(t)]$ (linha sólida vermelha) e aproximada pelo método de Monte Carlo (losangos azuis).

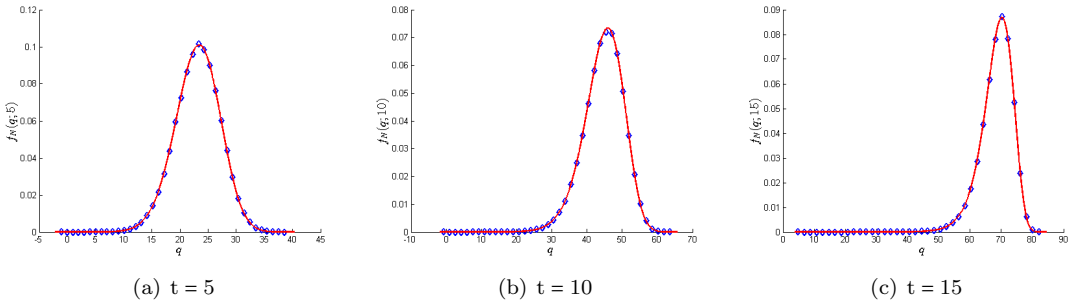


Figura 7: Ilustração da FDP de $N(t)$ com N_0 normal truncada no intervalo $[0, K]$, $E[N_0] = 10$, $\delta_{N_0} = 0.2$, $a = 0.2$ e $K = 100$: $f_N(q; t)$ dada em (9) (linha sólida vermelha) e aproximada pelo método de Monte Carlo (losangos azuis).

As Figuras 8, 9, 10 e 11 também ilustram a comparação da média da solução do PVI (1), $E[N(t; N_0)]$, com a solução simplificada para $N_0 \sim U[N_1, N_2]$, uniformemente distribuída, e para as distribuições apresentadas nos Exemplos 1, 3 e 4, Gamma, Weibull e Lognormal, respectivamente, todas com $E[N_0] = 10$ e coeficiente de variação $\delta_{N_0} = 0.4$. Nas mesmas figuras são ilustradas as respectivas variâncias e FDPs de $N(t)$, para alguns valores de t .

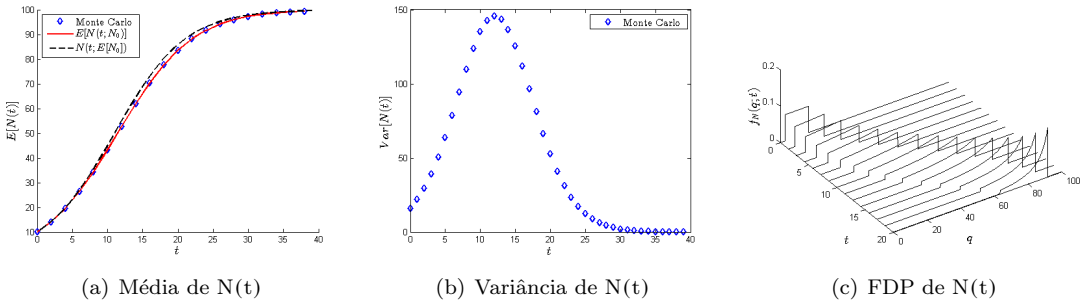


Figura 8: Ilustrações de $E[N(t)]$, $Var[N(t)]$ e $f_N(q; t)$; N_0 uniformemente distribuída, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$.

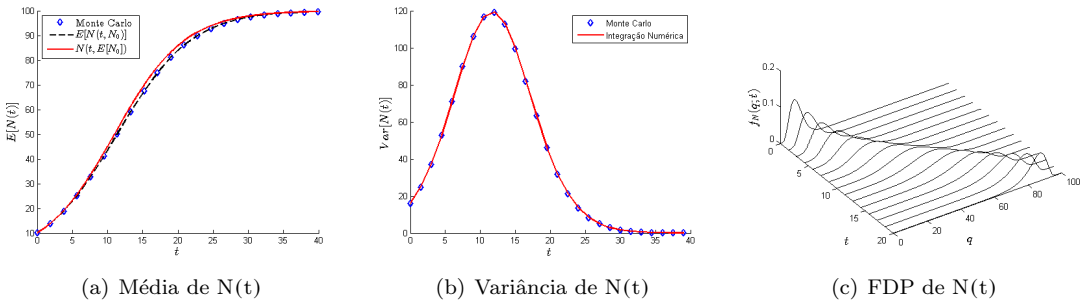


Figura 9: Ilustrações de $E[N(t)]$, $Var[N(t)]$ e $f_N(q; t)$; N_0 com distribuição Gamma, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$.

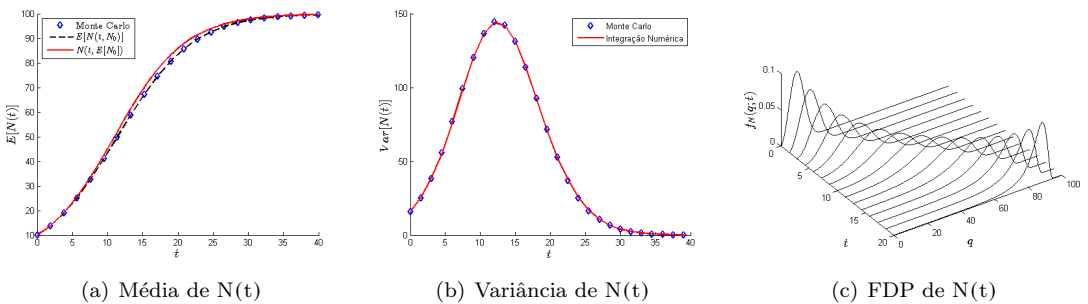


Figura 10: Ilustrações de $E[N(t)]$, $Var[N(t)]$ e $f_N(q; t)$; N_0 com distribuição Weibull, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$.

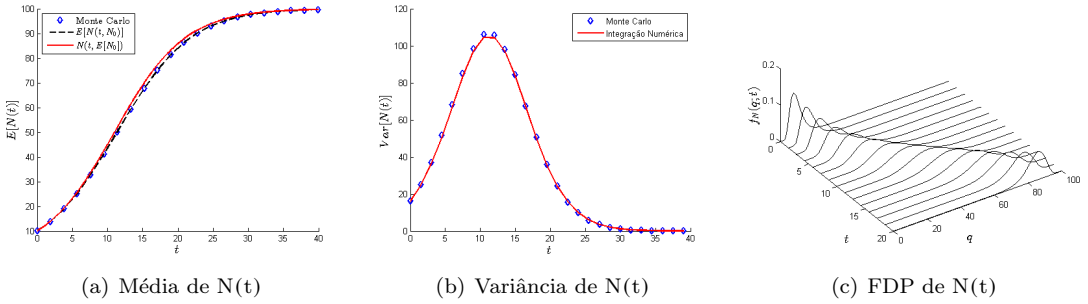


Figura 11: Ilustrações de $E[N(t)]$, $\text{Var}[N(t)]$ e $f_N(q; t)$; N_0 com distribuição Lognormal, $N_0 \sim \text{Logn}(\mu, \sigma^2)$, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$.

Os resultados teóricos obtidos na Seção 5, FDP, média e intervalo de confiança de $N(t)$, t^* e t_T , para o caso em que $N_0 \sim U[N_1, N_2]$, uniformemente distribuída, estão ilustrados nas Figuras 12, 13 e 14, respectivamente. Neste caso, considerou-se $a = 0.2$, $K = 100$, $T = K/4$, $E[N_0] = 10$ e $\delta_{N_0} = 0.4$. Para isso, os extremos do intervalo, N_1 e N_2 , foram calibrados de modo a atender tais condições. Observa-se, ainda, que a variância de $N(t)$ e as FDPs de t^* e t_T estão de acordo com as simulações de Monte Carlo. A média de t^* , $E[t^*]$, calculada utilizando a expressão (30), é aproximadamente 11.457. O ponto de inflexão na versão simplificada é 10.986, tomando-se como condição inicial a média de N_0 . A média de t_T , $E[t_T]$, é 5.964, cujo valor foi obtido utilizando-se (33). O tempo t_T para o qual $N(t_T) = K/4$, na versão simplificada é 5.493.

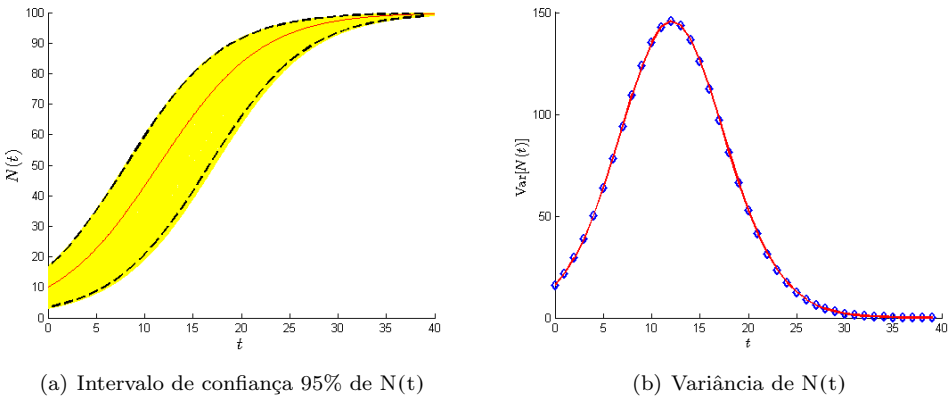


Figura 12: Ilustração do intervalo de confiança e variância de $N(t)$, N_0 uniformemente distribuída, $N_0 \sim U[3.072, 16.928]$; $a = 0.2$ e $K = 100$: (a) Intervalo de confiança 95% de $N(t)$ (linhas tracejadas pretas); realizações de Monte Carlo (faixa amarela); $E[N(t; N_0)]$ (linha vermelha); (b) $\text{Var}[N(t)]$ (linha vermelha); e aproximação de $\text{Var}[N(t)]$ por Monte Carlo (losangos azuis).

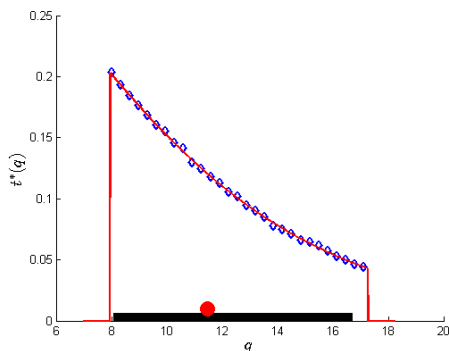


Figura 13: Ilustração da FDP de t^* (linha sólida vermelha) em comparação com simulações de Monte Carlo (losangos azuis); intervalo de confiança 95% (linha espessa preta); e $E[t^*]$ (círculo vermelho); $a = 0.2$, $K = 100$; $N_0 \sim U[3.072, 16.928]$.

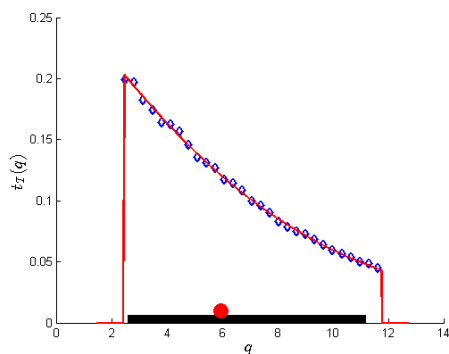


Figura 14: Ilustração da FDP de t_T (linha sólida vermelha) em comparação com simulações de Monte Carlo (losangos azuis); intervalo de confiança 95% (linha espessa preta); e $E[t_T]$ (círculo vermelho); $a = 0.2$, $K = 100$ e $T = K/4$; $N_0 \sim U[3.072, 16.928]$.

Na Figura 15 estão as comparações das FDPs de $N(t)$ para N_0 com distribuições uniforme, Gamma, Weibull e Lognormal, com suporte no intervalo $(0, +\infty)$, $a = 0.2$, $K = 100$, $t = 10$, $E[N_0] = 10$ e $\delta_{N_0} = 0.4$. Observa-se que, apesar de as curvas das FDP's de $N(t; N_0)$ relativas às distribuições Weibull, Lognormal e Gamma estarem relativamente próximas, há uma diferença significativa entre elas. Desse modo, percebe-se que a natureza da variável aleatória N_0 , ou melhor, sua distribuição, afeta significativamente a densidade populacional.

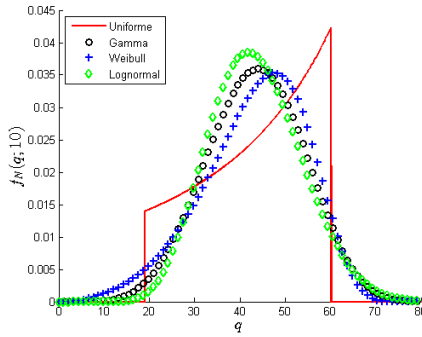


Figura 15: Ilustrações das FDPs de $N(t)$ para distribuições de N_0 com suporte em $(0, +\infty)$, Uniforme, Gamma, Weibull e Lognormal, e $\delta_{N_0} = 0.4$; $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$, $K = 100$ e $t = 10$.

Apenas para fins de ilustração, na Figura 16 estão comparadas as fdp's de $N(t)$ para N_0 com distribuições truncadas Uniforme, Normal, Weibull e Lognormal, com suporte no intervalo $[0, K/2]$, $K = 100$, $a = 0.2$, $t = 10$, $E[N_0] = 10$ e com o coeficiente de variação $\delta_{N_0} = 0.4$.

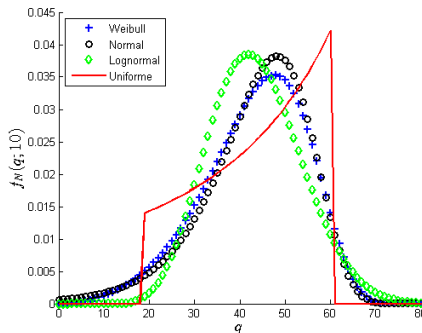


Figura 16: Ilustrações das FDPs de $N(t)$ para N_0 com distribuições truncadas em $[0, K/2]$ e $\delta_{N_0} = 0.4$; $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$, $K = 100$ e $t = 10$.

7. Considerações finais

Este trabalho discutiu o modelo logístico de Verhulst sujeito a incertezas na condição inicial, modelando essa como uma variável aleatória. Pôde-se perceber, através dos resultados teóricos e das várias ilustrações computacionais, como tal hipótese sobre a condição inicial propaga-se sobre a densidade populacional e seu ponto de inflexão, obtendo-se assim modelos probabilísticos e momentos estatísticos para os mesmos.

Os exemplos computacionais evidenciam que a substituição de N_0 por sua média conduz a previsões qualitativamente errôneas da média de $N(t)$ e de t^* . Também, a obtenção da FDP de $N(t)$ e t^* levou não apenas ao cálculo de médias da solução consistentes com o método de Monte Carlo, como também garantiu informações estatísticas completas sobre essas.

Referências

- [1] Cortes, J. C.; Casaban, M. C.; Romero, J. V. e Rosello, M. D. “Probabilistic Solution of Random SI-type Epidemiological Models Using the Random Variable Transformation Technique”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 24, p. 86-97, 2015.
- [2] Cramer, J. S. “The Origins of Logistic Regression.” *Tibergen Institute Working Paper*, v. 119, n°. 4, p. 1-16, 2002.
- [3] Dorini, F. A.; Dorini, L. B. e Ceconello, M. S. “On the logistic equation subject to uncertainties in the environmental carrying capacity and initial population density”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 33, p. 160-173, 2016.
- [4] Fishman, G. S. *Monte Carlo: concepts, algorithms and applications*. New York, US: Springer-Verlag, 1996.
- [5] Kegan, B. e West, R.W. “Modeling the simple epidemic with deterministic differential equations and random initial conditions”. *Mathematical Biosciences*, v. 195, p. 179-193, 2005.
- [6] Kot, M. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.
- [7] Malthus, T. R. *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson, 1798.
- [8] Papoulis, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Ed. 2. New York, US: McGraw-Hill, Inc., 1984.
- [9] Ramos, R. A. “Logistic function as a forecasting model: it’s application to business and economics”. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, v. 2, n°. 3, p. 29-36, 2013.
- [10] Ricordi, E. L. e Dorini, F. A. *O Modelo logístico de Verhulst sujeito a incertezas na condição inicial*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.
- [11] Triola, M. F. *Elementary Statistics*. Boston, US: Pearson, 2010.
- [12] Udawadia, F. E. “Some results on maximum entropy distributions for parameters known to lie in finite intervals”. *Siam Review*, v. 31, n°. 1, p. 103-109, 1989.
- [13] Zhou, X.; Liu, K.; e Wong, S. T. C. “Cancer classification and prediction using logistic regression with Bayesian gene selection”. *Journal of Biomedical Informatics*, v. 37, n°. 4, p. 249-259, 2004.

Everson Luiz Ricordi
Departamento de Engenharia de Manutenção, CNH Industrial - Curitiba
<eversonricordi@gmail.com>

Fabio Antonio Dorini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Curitiba
<fabio.dorini@gmail.com>

Recebido: 06/10/2022
Publicado: 10/02/2023