

Tesselações: Ladrilhos de Penrose e sua construção com o GeoGebra

Astor Neto  Caio Loss  Matheus Silva  Sandra Maria  Alcebiades Dal Col 

Resumo

O objetivo deste trabalho sobre tesselações é discutir conceitos matemáticos, assim como padrões presentes nesta arte musiva. A diversidade de tesselações construídas ao longo do tempo começou a ser estudada pelos matemáticos para entender os seus padrões e com isso perceber a quantidade de seus elementos e como eles se repetem. Nós mostraremos esses padrões e como funcionam. Em seguida, será apresentada a história das tesselações aperiódicas juntamente com a conjectura de Wang, e será feito um estudo aprofundado sobre os ladrilhos de Penrose e suas propriedades únicas. Nos ladrilhos de Penrose, pode ser verificada a presença da razão áurea, de determinados ângulos e principalmente triângulos áureos, os quais tornam possível o preenchimento do espaço sem que haja hiatos ou sobreposição entre os polígonos. Finalmente, será apresentado um passo a passo para a construção de dois polígonos de Penrose por meio do *software* GeoGebra.

Palavras-chave: Tesselações; Ladrilhos de Penrose; Razão Áurea; GeoGebra.

Abstract

The objective of this work on tessellations is to discuss mathematical concepts, as well as patterns present in this musive art. The diversity of tessellations built over time began to be studied by mathematicians in order to understand their patterns and thereby perceive the quantity of their elements and how they are repeated. We'll show these patterns and how they work. Next, the history of aperiodic tessellations will be presented along with the Wang conjecture and an in-depth study of Penrose tiles and their unique properties will also be made. In the Penrose tiles, the presence of the golden ratio, of certain angles and mainly golden triangles, which make it possible to fill the space without gaps or overlapping between the polygons, can be verified. Finally, a step-by-step guide for the construction of two Penrose polygons using the GeoGebra *software* will be presented.

Keywords: Tessellations; Penrose Tiles; Golden Ratio; GeoGebra.

1. Introdução

Quando falamos em tesselação, imediatamente o que nos vem à mente é alguma forma de se expressar artisticamente, uma obra de arte em si. Com certeza isso sempre foi claro durante a história da humanidade, porém podemos ir além disso, encontrando padrões existentes ou significados importantes nesse tipo de arte.

Dependendo da época, podendo ser até uma forma de representar alguma ideia para um determinado povo, com significados práticos ou mensagens importantes com uma simples representação gráfica, e isso usando uma montagem apenas de pequenos pedaços de rocha, concha, azulejo ou vidro juntos.

A técnica da arte da tesselação consiste na colocação de tesselas (peças quadrangulares ou cúbicas usadas em revestimento), que são pequenos fragmentos de pedras, como mármore e granito, podendo também serem usadas pedras semipreciosas, pastilhas de vidro, seixos e outros materiais, sobre qualquer superfície [1, 2].

2. Tesselação

Uma tesselação, pode ser chamada de ladrilhamento, pavimentação ou mosaico, variando de básicas a incompreensíveis. As mais simples consistem no recobrimento de uma superfície bidimensional, isto é, um plano, utilizando polígonos congruentes ou não, sem deixar espaços entre elas ou sobreposições [3], formando uma espécie de mosaico ou padrão sobre a superfície; os padrões podem ser feitos transladando, refletindo ou girando as formas.

Existem as tesselações regulares, isto é, aquelas feitas a partir de repetições de polígonos regulares (ângulos e lados iguais), tendo três possíveis tesselações: com triângulos, quadrados e hexágonos (Figura 1).

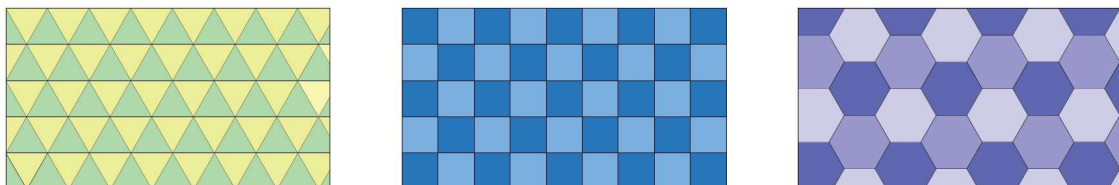


Figura 1: Tesselações regulares.

Cada tesselação tem um padrão, as com triângulos são chamadas de tesselações triangulares 3.3.3.3.3.3, as com o quadrado são chamadas de tesselações quadradas 4.4.4.4 e as com hexágonos, são chamadas de tesselações hexagonais 6.6.6. Para saber de onde vêm esses padrões, devemos escolher um vértice da tesselação e depois contamos quantos polígonos possuem aquele vértice em comum, e sua contagem sempre começa do menor polígono daquele vértice em comum e no sentido anti-horário (Figura 2).

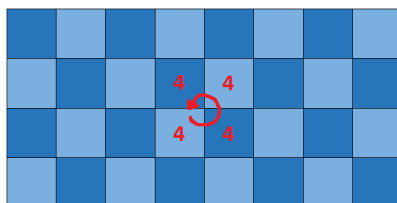


Figura 2: Tesselação com o padrão.

As tesselações semirregulares são feitas de dois ou mais polígonos regulares, e ao todo são oito tesselações possíveis:

- 3.3.3.4.4 - tesselação triangular alongada
- 3.3.4.3.4 - tesselação quadrada sem corte
- 3.4.6.4 - tesselação rombi-tri-hexagonal
- 3.6.3.6 - tesselação tri-hexagonal
- 3.12.12 - tesselação hexagonal truncada
- 4.6.12 - tesselação tri-hexagonal truncada
- 4.8.8 - tesselação quadrada truncada
- 3.3.3.3.6 - tesselação hexagonal cega

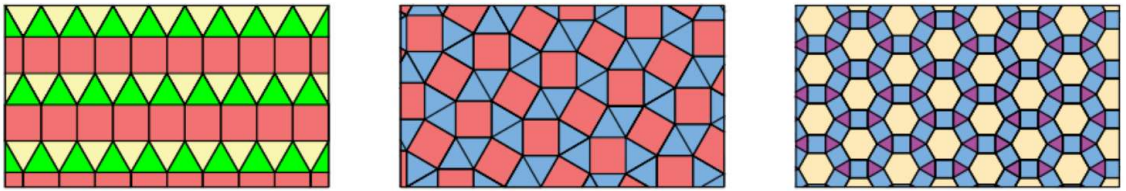


Figura 3: Tesselações 3.3.3.4.4, 3.3.4.3.4 e 3.4.6.4.

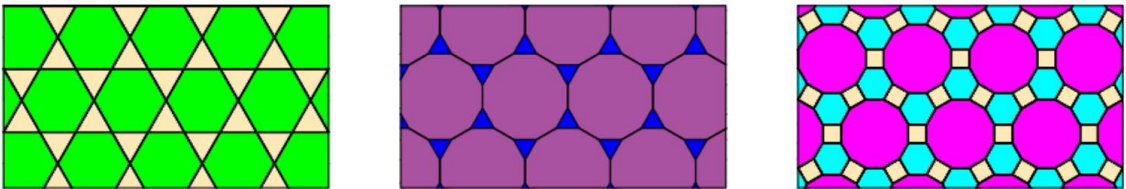


Figura 4: Tesselações 3.6.3.6, 3.12.12 e 4.6.12.

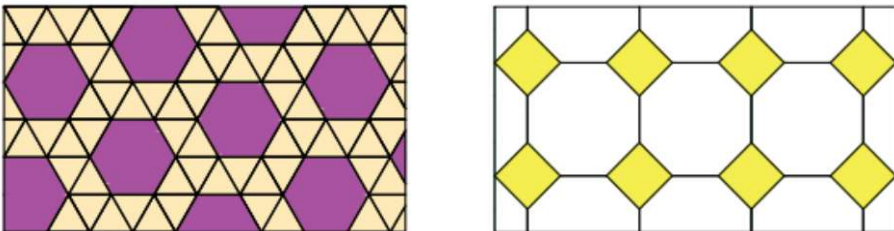


Figura 5: Tesselações 4.8.8 e 3.3.3.3.6.

E também, existem as tesselações demirregulares, feitas com dois ou mais polígonos regulares, mas o padrão em cada vértice pode não ser o mesmo para toda tesselação. Existem 14 possíveis tesselações demirregulares (Figura 6).

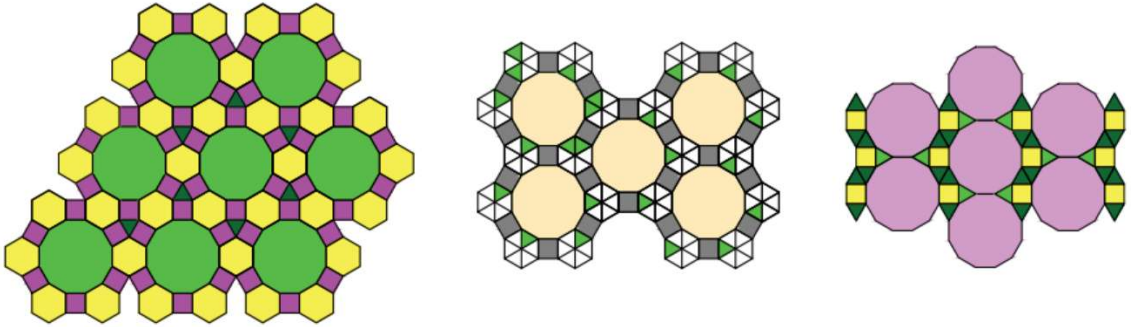


Figura 6: Algumas tesselações demirregulares.

Existem também as tesselações irregulares, feitas com dois ou mais polígonos, sendo eles regulares ou irregulares. Quando os polígonos são regulares, eles são transladados (Figura 7), fazendo com que o nó (vértice) dos polígonos não estejam em comum. Quando os polígonos são irregulares, a tesselação é irregular, visto que um polígono é irregular (Figura 8). Existem tesselações irregulares periódicas, quando existem padrões que se repetem e tesselações irregulares aperiódicas, quando não existe um padrão que se repete periodicamente.



Figura 7: Tesselações irregulares com polígonos regulares e irregulares.

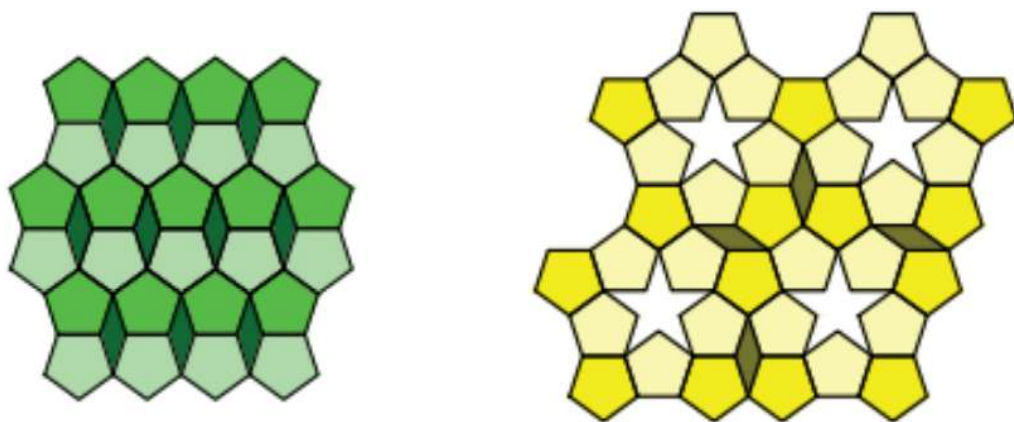


Figura 8: Tesselações irregulares periódicas.

3. Razão Áurea

As propriedades da razão áurea [4] podem ser percebidas na construção dos ladrilhos de Penrose. Roger Penrose utilizou algumas figuras planas em que há a presença dessas propriedades, como pentágonos regulares e triângulos áureos. Com essas figuras, construiu ladrilhos assimétricos cujos ângulos facilitam o encaixe.

Sabe-se que a razão áurea é uma constante real irracional obtida, como na Figura 9, pela divisão de uma reta em dois segmentos (x , $a - x$), e a razão do segmento todo (a), pela maior parte (x), tem como resultado o número de ouro representado por ϕ . Ou seja:

$$\phi = \frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

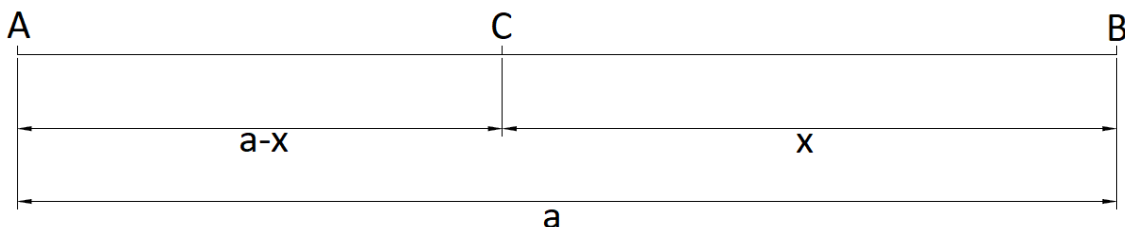


Figura 9: Segmento dividido na razão áurea.

Nos ladrilhos de Penrose, encontram-se triângulos áureos cujo ângulo oposto à base mede 36° e os dois ângulos da base medem 72° [5]. Um triângulo áureo, também chamado de triângulo de ouro, é um triângulo isósceles no qual a razão entre o comprimento do lado e o comprimento da base é o número de ouro. Ou seja, no triângulo áureo, ao dividir o comprimento do lado maior, pelo comprimento do lado menor, obtém-se o número de ouro.

Considerando um triângulo isósceles cujos ângulos da base medem 72° , temos que a bissetriz de qualquer um dos ângulos da base intersecta o lado oposto segundo a proporção áurea.

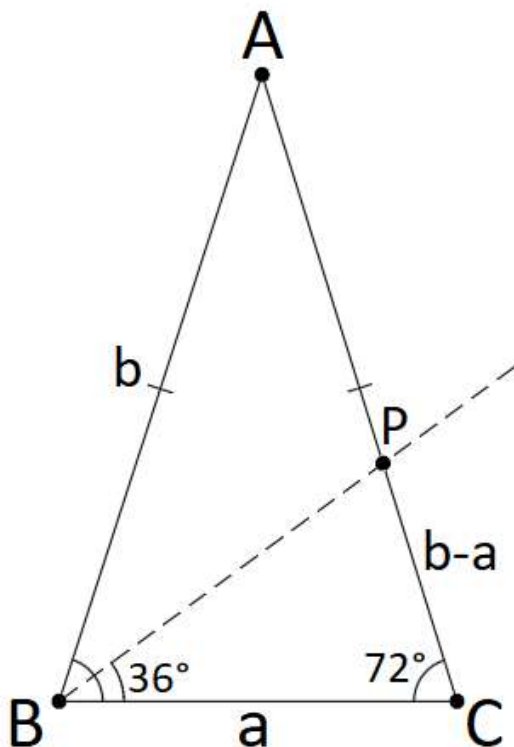


Figura 10: Triângulo áureo.

O mesmo fenômeno ocorre em triângulos isósceles com um ângulo oposto à base medindo 108° , e os da base 36° .

Para revestir uma superfície plana utilizando apenas um tipo de ladrilho com formato de polígono regular sem deixar lacunas ou hiatos, o mesmo deve possuir ângulos internos divisores exatos de 360° . Quando o ângulo do polígono regular for divisor exato de 360° , ao juntar uma determinada quantidade do mesmo polígono forma-se o ângulo de 360° e não existirá lacuna entre eles. [6]

Caso os ângulos internos dos polígonos não sejam divisores exatos de 360° , pode haver a presença de espaços vazios entre eles, como pode-se notar na imagem amarela da Figura 11.

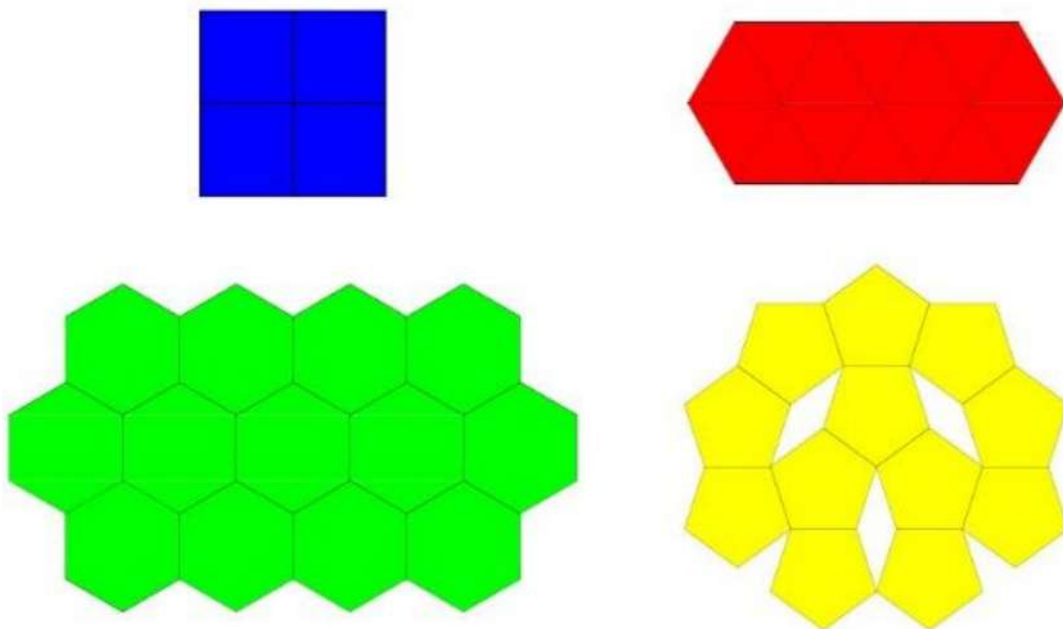


Figura 11: Ladrilhos com formato de polígonos regulares.

Os hiatos que se formam entre os pentágonos amarelos da Figura 11, revelam aspectos interessantes:

Se os ângulos internos de um pentágono regular são de 108° e ao unir três pentágonos, para formar um ângulo de 360° necessita-se de um ângulo de 36° , então o ângulo oposto à base do triângulo terá 36° e como o mesmo é isósceles os ângulos da base terão 72° . [6]

Assim, para preencher os espaços vazios no revestimento, serão necessários dois triângulos áureos como aquele apresentado na Figura 10.

Além da presença de triângulos áureos nos revestimentos de Penrose, ao traçar as diagonais de cada pentágono, dividem-se os ladrilhos em figuras elementares. Há diversas possibilidades de divisão. Na Figura 12, pode-se observar uma dessas possibilidades, que utiliza triângulos áureos e combinações dos mesmos.

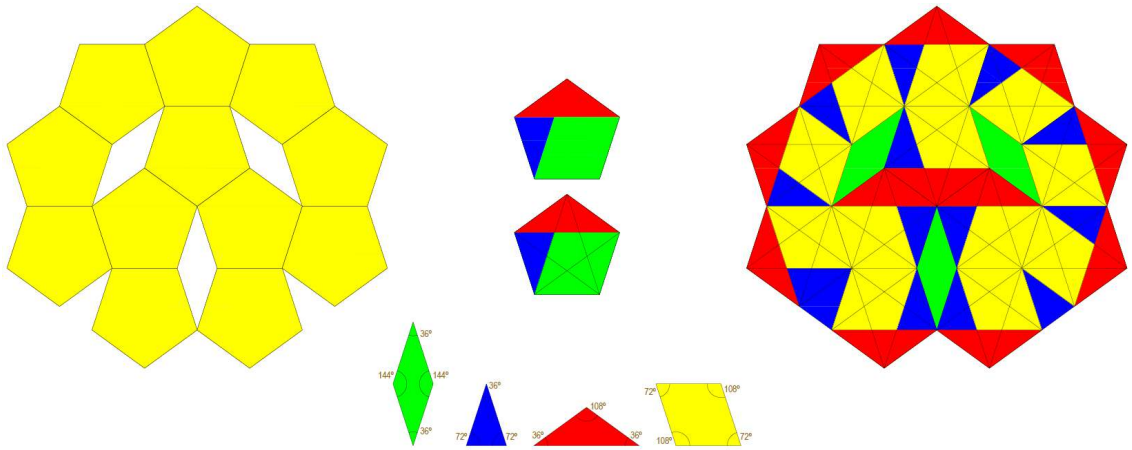


Figura 12: Decomposição dos pentágonos em triângulos áureos e combinações.

Pode-se notar que não existe qualquer tipo de simetria no objeto visto como um todo, embora algumas partes sejam simétricas, e que ao acrescentar polígonos elementares iguais aos já utilizados, o revestimento permanece sem lacunas.

A única propriedade especial que [os seus componentes] têm em comum é que todos eles são triângulos áureos ou combinações de triângulos áureos, ou seja, quase todas as suas linhas estão na razão áurea. [6]

4. Tesselações Aperiódicas

4.1. Conjectura de Wang

No ano de 1961, Hao Wang conjecturou que se um conjunto de polígonos consegue preencher todo o plano, então os polígonos sempre podem ser organizados de forma a serem periódicos. Contudo, em 1966, Robert Berger encontrou um conjunto com 20.426 polígonos diferentes que preenchiam todo o plano de forma aperiódica. Mais tarde, o próprio Berger encontrou um conjunto consideravelmente menor, com 104 polígonos, Donald Knuth reduziu o número para 92, e Raphael Robinson reduziu para apenas 6 polígonos. Já Roger Penrose conseguiu encontrar um conjunto de somente 2 polígonos que preenchem todo o plano de forma aperiódica.

4.2. Ladrilhos de Penrose

O conjunto descoberto consiste de 2 losangos diferentes (Figura 13), que quando colocados seguindo algumas regras específicas, podem preencher todo o plano aperiodicamente. Mais tarde, Penrose prova que não existe apenas um conjunto de ladrilhos com essa propriedade, mas sim incontáveis.

O conjunto mais conhecido que é capaz de preencher todo o plano aperiodicamente é sem dúvidas o que é nomeado *Darts and Kites*, que em português significa: “Dardos e Pipas”, que ao serem organizados de forma que as curvas de mesma cor, que estão desenhadas sobre os polígonos conforme a Figura 14, sejam contínuas.

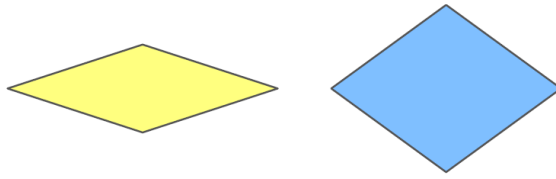


Figura 13: Primeiro conjunto de 2 polígonos encontrado por Penrose.

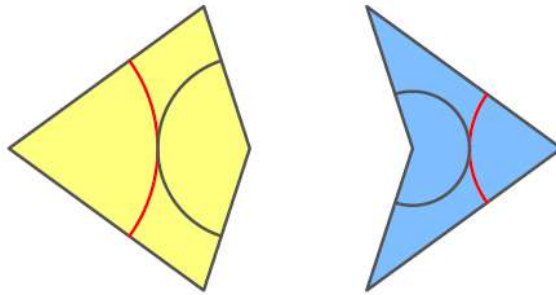


Figura 14: Dardo e Pipa.

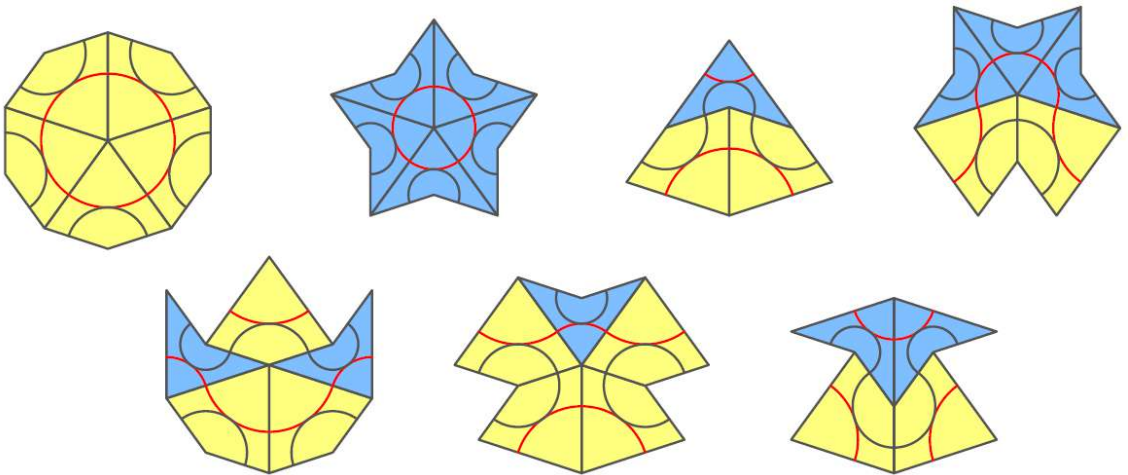


Figura 15: Os sete padrões possíveis.

Então, surgiu o questionamento se existe apenas um padrão singular geral para cada conjunto de polígonos ou se existem vários jeitos aperiódicos de se organizar os polígonos de modo a preencher o plano. Chegou-se à conclusão de que existem infinitos jeitos de preencher o plano aperiódicamente, e mesmo que esses planos preenchidos sejam infinitamente diferentes, não é possível distingui-los

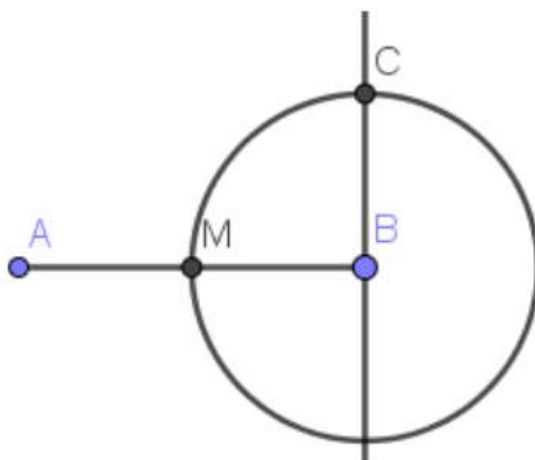
apenas observando uma parte finita de cada um. Ou seja, com apenas esses 2 polígonos (Dardo e Pipa) é possível preencher infinitos planos aperiódicamente de infinitos jeitos diferentes.

Utilizando o *software* GeoGebra, é possível fazer e visualizar algumas iterações do processo de construção dos ladrilhos de Penrose. A seguir mostraremos o passo a passo da construção. Para um bom entendimento dessa construção é necessário ter um conhecimento prévio acerca do uso do GeoGebra.

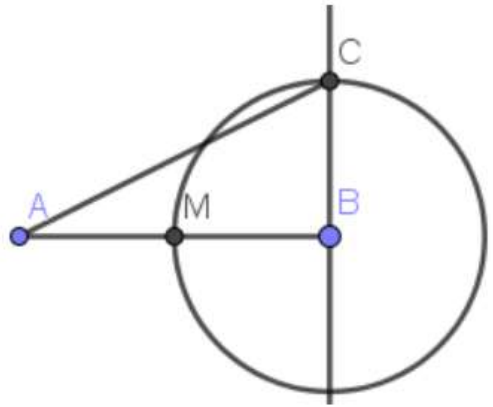
1. Trace um segmento AB e determine o seu ponto médio M.



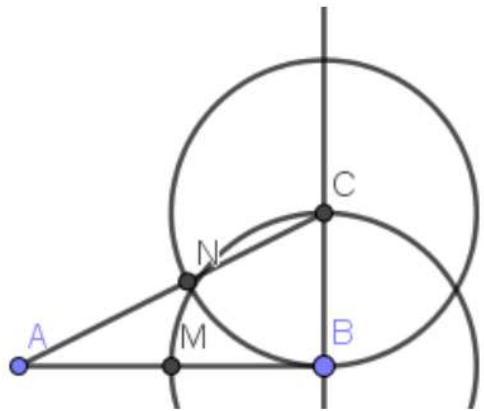
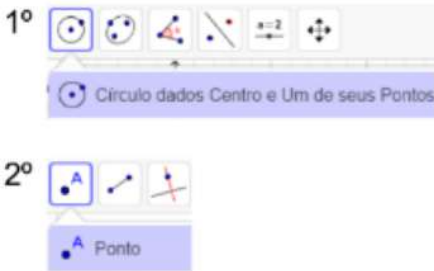
2. Trace BC perpendicular ao segmento AB, tal que o comprimento de BC é igual ao comprimento de BM. Construiu-se para tal uma circunferência de centro B que passa por M.



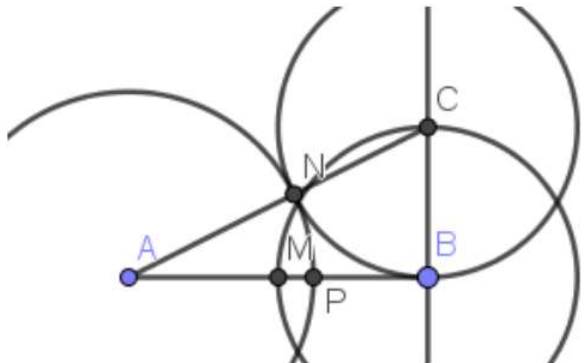
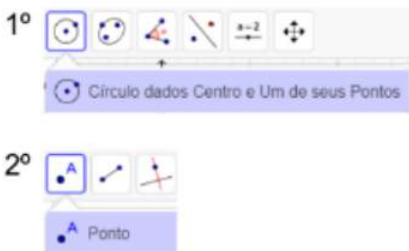
3. Ligue o ponto A ao ponto C com um segmento de reta, determinando o triângulo ABC retângulo em B.



4. Com centro em C, trace uma circunferência de raio igual ao comprimento de BC, determinando o ponto N em AC.



5. Em seguida, com centro em A, trace a circunferência de raio igual ao comprimento de AN, determinando o ponto P em AB.



6. Verificando que P divide AB na proporção áurea.

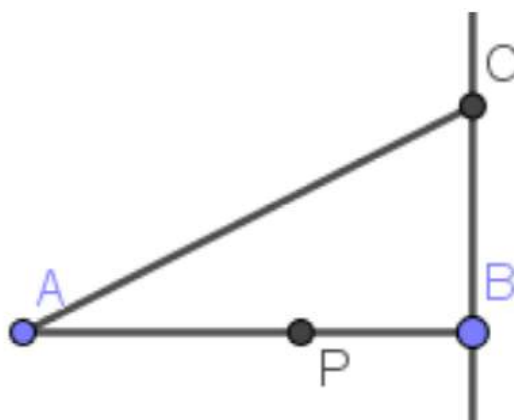
$$n = \text{Segmento}(A, P)$$

$$\rightarrow 2,47$$

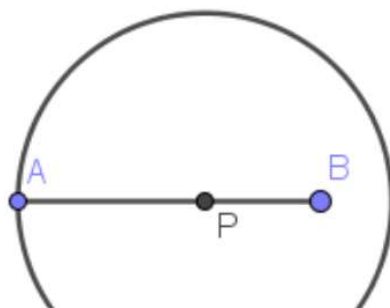
$$f = \text{Segmento}(A, B)$$

$$\rightarrow 4$$

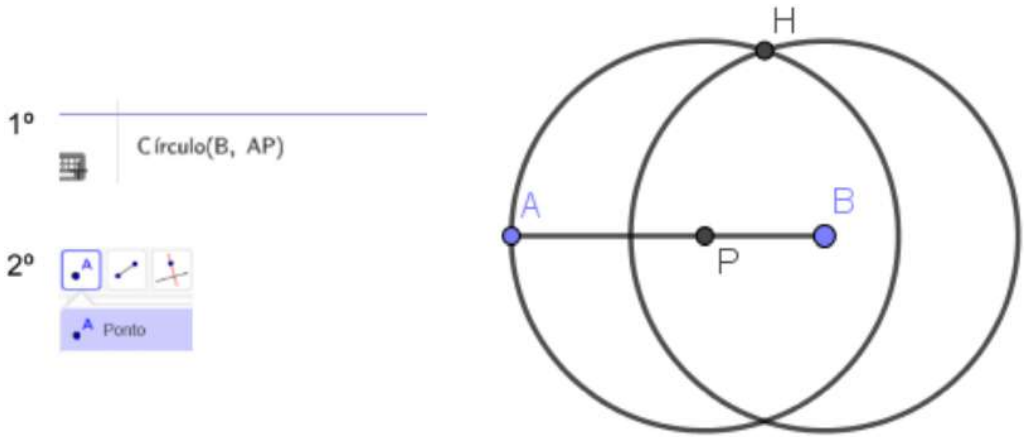
$$\Phi = \frac{AB}{AP} = \frac{f}{n} = \frac{4}{2,47} \approx 1,618 \dots$$



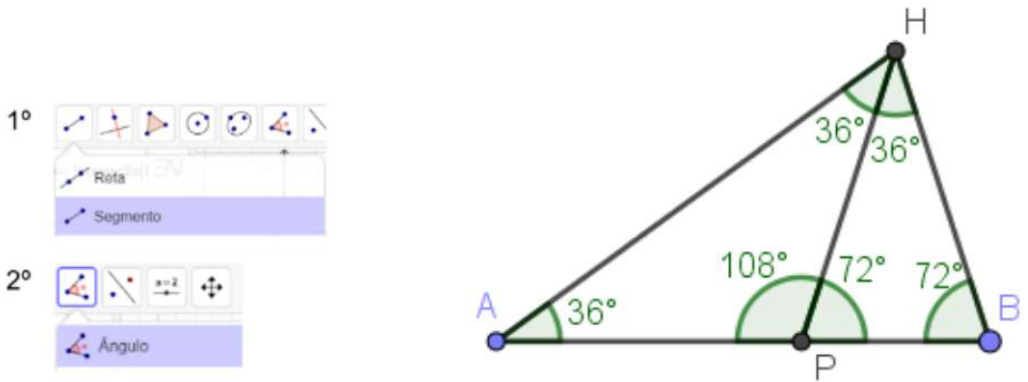
7. A partir do segmento áureo AP do segmento AB encontrado anteriormente, construa uma circunferência com centro P e raio igual ao comprimento de AP.



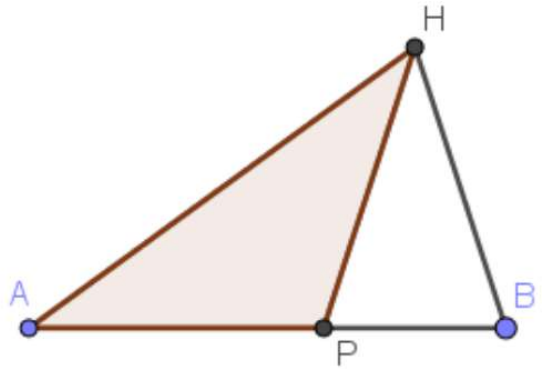
8. Construa uma circunferência com centro em B e raio igual ao comprimento de AP e marque o ponto H, onde os círculos interceptam-se.



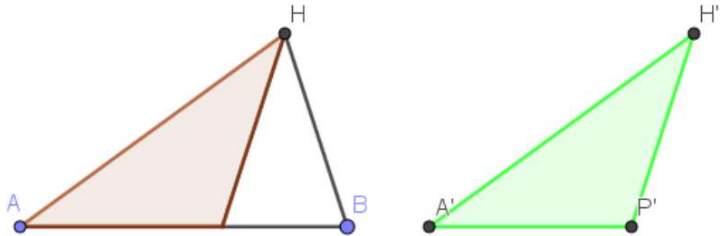
9. Ligue o ponto H até os pontos A, P e B, formando então triângulos áureos. Os ângulos internos dos mesmos medem 36° , 72° e 108° .



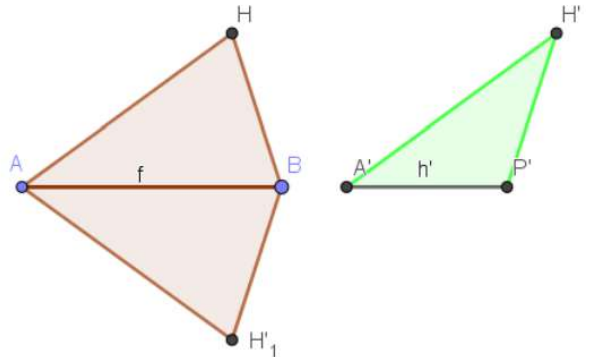
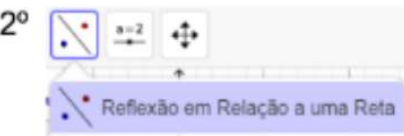
10. Podemos dividir o triângulo áureo ABH encontrado anteriormente em outros dois triângulos áureos APH e BPH. Após abrir a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, P, H e A novamente para fechar o polígono.



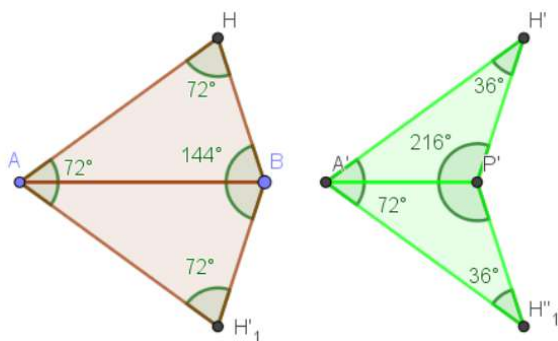
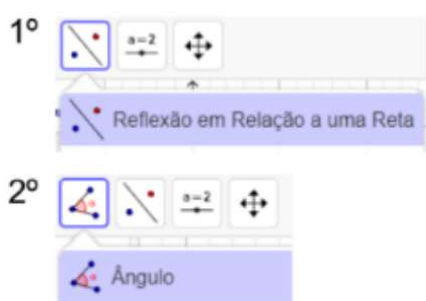
11. Translade o triângulo para direita para duplicarmos ele.



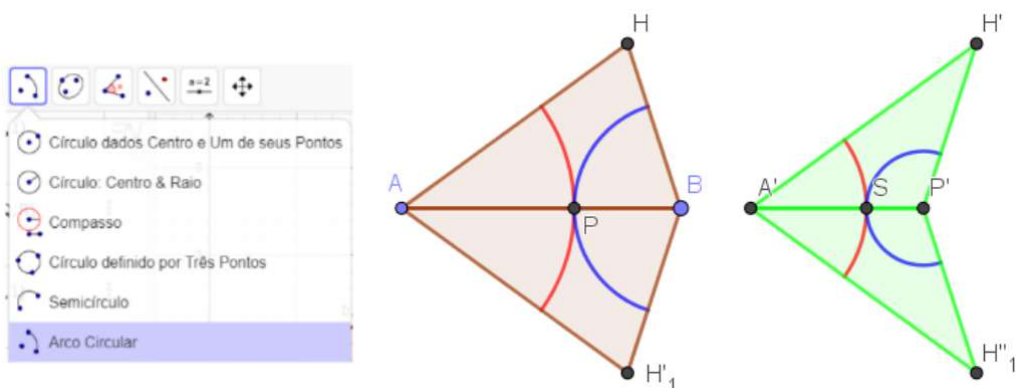
12. Após abrir a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, B, H e A novamente para fechar o triângulo ABH, em seguida faça a reflexão em relação ao segmento AB.



13. Agora faça a reflexão do triângulo A'H'P' em relação ao segmento A'P', em seguida use a ferramenta Ângulo no GeoGebra para explicitar os ângulos internos.



14. Como foi definido o segmento áureo anteriormente, finalize a pipa e o dardo com a ferramenta Arco Circular.



5. Conclusão

A história da tesselação tem sua importância para a sociedade e para o desenvolvimento do estudo da matemática acerca desse assunto, pois sem ela não teríamos achado os padrões que temos hoje. Após esse trabalho, a tesselação deixou de ser simplesmente um mosaico, entendemos matematicamente o que se passa por trás dele, de como as pessoas fizeram até chegar no que temos hoje em dia. Saber estimular a curiosidade e a busca pelas respostas às situações problemas abordadas é crucial no processo de aprendizagem do indivíduo.

Por fim, nota-se que a presença da razão áurea nos ladrilhos de Penrose facilita o preenchimento do espaço bidimensional sem que existam lacunas ou sobreposições. A utilização de triângulos áureos facilita o encaixe entre os polígonos. Além disso, apresentamos um passo a passo para a construção do conjunto mais conhecido de polígonos de Penrose (Dardo e Pipa) no *software* GeoGebra, os quais são capazes de preencher todo o plano aperiódicamente. Essa construção é apresentada com a finalidade de estimular o estudo de temas da atualidade que envolvem conceitos matemáticos importantes.

Referências

- [1] IMBROISI, Margaret; MARTINS, Simone. Mosaicos. História das Artes, 2016. Disponível em: <https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/mosaicos/>.
- [2] MENDES, Elaine. Mosaicos, Obra de arte feita com recortes sobrepostos para formar figuras, 2019. Disponível em: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/artes/mosaico>.
- [3] DE ANDRADE, Emerson Teixeira. PROFMAT. Universidade de Brasília, 2015. Construção de mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher. Disponível em: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/18971/1/2015_EmersonTeixeiradeAndrade.pdf.
- [4] AZEVEDO, Natália de Carvalho de. PROFMAT. O Número de Ouro e Construções Geométricas, Universidade Federal de Goiás, 2013. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/2948/5/Natalia.pdf>.
- [5] SMIGLY, D. A. Tesselações pentagonais e mosaicos de penrose, 2017. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~dsmigly/ensino/palestras/Tessela%C3%A7%C3%B5es%20pentagonais%20e%20mosaicos%20de%20Penrose.pdf>.
- [6] CAVALCANTI, Poliana M. A. A.; BELLEMAIN, Franck R. G.; SOUZA, Robson S. A razão áurea nos ladrilhos de Roger Penrose: a sua desmistificação. Paraná, 2007. Disponível em: http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/ARAZAOAUREA.pdf.

Astor Neto
Universidade Federal do Espírito Santo
<dilemastor@gmail.com>

Caio Loss
Universidade Federal do Espírito Santo
<caioloss@outlook.com>

Matheus Silva
Universidade Federal do Espírito Santo
<matheus.brisk@gmail.com>

Sandra Maria
Universidade Federal do Espírito Santo
<sms_barbosa@hotmail.com>

Alcebiades Dal Col
Universidade Federal do Espírito Santo
<alcebiades.col@ufes.br>

Recebido: 19/12/2022
Publicado: 10/04/2023