

# Girando sólidos platônicos ou como visualizar grupos finitos

Guilherme da Costa Cruz 

## Resumo

Este texto apresenta cinco exemplos de grupos finitos através das simetrias de polígonos ou poliedros regulares. Assim, é evidenciado o caráter geométrico desses objetos algébricos, o que pode ser apresentado de forma precisa no Ensino Superior, mas que também pode motivar exposições mais informais e focadas, por exemplo, na divulgação científica. Além disso, esta apresentação pode servir como base para o professor do Ensino Básico que busca tratar do tema de simetrias em sala de aula. Para que haja um melhor entendimento das rotações dos poliedros, também apresentamos um panorama da classificação dos sólidos platônicos.

**Palavras-chave:** Sólidos Platônicos; Grupos de Simetria; Álgebra em Geometria.

## Abstract

This text presents five examples of finite groups through the symmetries of regular polygons or polyhedra, thus obtaining geometric visualizations of these algebraic objects. It can be precisely presented for undergraduate students, but also motivate more informal expositions of the theory and focused, for example, on scientific communication. Furthermore, this presentation may be used as a foundation for school teachers intending to approach the topic of symmetries in classroom. For a better understanding of the polyhedra rotations, it is also presented an overview of the classification of platonic solids.

**Keywords:** Platonic Solids; Symmetry Groups; Algebra in Geometry.

## 1. Introdução

A palavra “álgebra” é definida no Dicionário Michaelis [1] do seguinte modo: “Parte da Matemática que ensina a calcular, generalizando e simplificando as questões aritméticas, por meio de letras do alfabeto.” Essa visão é bastante presente no ensino escolar, no qual a Álgebra é vista como a parte abstrata da Matemática e é colocada em oposição à Geometria, que, por ser mais visual, seria mais concreta. Isso não acontece à toa: nessa fase, as questões algébricas mais presentes tratam somente de resolução de equações ou elaboração de fórmulas. Além disso, elas são solucionadas por meio de uma manipulação de números e letras que é respaldada por “regras” nem sempre compreendidas pelos estudantes.

Outra razão para isso é que as equações polinomiais (de grau qualquer) foram o principal campo de estudo da Álgebra por um longo período, até o início do século XIX. No entanto, nos últimos

dois séculos, as pesquisas da área estiveram focadas no estudo de, digamos, estruturas. Aliás, até mesmo os últimos métodos para estudar raízes de polinômios têm um aspecto mais estrutural. Um jeito possível de ver tais estruturas é como generalizações de alguns conceitos matemáticos. Por exemplo, os chamados anéis e grupos generalizam conjuntos numéricos como o dos inteiros, e os espaços vetoriais estendem a ideia de um ambiente como o plano cartesiano.

### 1.1. Objetivos

O autor pensa que é bastante importante difundir e divulgar de modo acessível esse aspecto generalizador e estrutural que a Álgebra e a Matemática possuem. Com isso, almeja propor através de exemplos uma apresentação visual e geométrica de uma estrutura algébrica, a de Grupos. Ideias semelhantes são tratadas no trabalho de Andressa Dambrós [2], no qual é evidenciado, também, o papel da emoção e da estética na aprendizagem e no desenvolvimento da Matemática.

Esta exposição pode servir como motivação para o estudo de Grupos no ensino superior, assim como uma possível caminho para a divulgação científica da teoria. Além disso, algumas das ideias apresentadas aqui podem ser reformuladas para serem apresentadas em um nível de aprendizagem mais básico<sup>1</sup> no ambiente escolar. Por exemplo, o tema de simetrias (previsto na habilidade EF07MA21 da BNCC) pode ser bastante explorado através do manuseio físico de sólidos platônicos e da visualização de suas diversas rotações. Assim, apesar de que não seja, e nem deva ser, apresentado o conceito formal de grupo no Ensino Básico, o entendimento de tal estrutura pelo professor pode ser bastante proveitoso, visto que ela consegue capturar todas as simetrias de um polígono ou poliedro de uma forma sintética e precisa. Isso garante um sólido aprofundamento do tema e uma maior possibilidade de uma clara apresentação em sala de aula.

Vale enfatizar que este artigo não visa a didatização do tema em foco, embora ele possa embasar eventuais trabalhos futuros que pretendam inserir tópicos de simetria de poliedros e polígonos em aulas de Matemática.

### 1.2. Contexto da teoria de grupos

A Teoria de Grupos, além de ser um campo de estudo por si próprio, é bastante encontrada em toda a Matemática. Uma de suas origens está justamente no estudo definitivo de raízes de polinômios, realizado por Évariste Galois (1811-1832) durante a década de 1830 [2, p.82]. Ainda em Álgebra, ela foi central para o desenvolvimento da Teoria de Representações, no fim do século XIX, por matemáticos como Ferdinand G. Frobenius (1849-1917). De um ponto de vista mais geométrico, grupos são utilizados para formalizar a ideia de “contar furos” de uma superfície. *Grosso modo*, essa seria a maneira matemática de distinguir, por exemplo, um toro (a forma de uma rosquinha) de uma esfera: o primeiro tem um “buraco” que a segunda não tem. Essas ideias estão presentes na área conhecida como Topologia Algébrica, que foi inaugurada pelo artigo *Analysis Situs*, publicado em 1895 por J. Henri Poincaré (1854-1912).

Desse modo, percebe-se que uma pessoa pode olhar para os grupos por meio de distintos pontos de vista. Alguns, como os citados acima, podem ser mais intrincados, mas vê-los através da lente das simetrias leva qualquer pessoa a afirmar que grupos são tão concretos quanto qualquer objeto geométrico. E é o que faremos: apresentaremos grupos através das simetrias de polígonos

<sup>1</sup>No sentido de van Hiele [3], poderia corresponder aos níveis de reconhecimento e análise.

e poliedros regulares. Vale citar que esse aspecto da Teoria de Grupos traz também aplicações em Biologia [4, 5] e nos estudos de partículas em Química e Física [6].

## 2. Grupos em polígonos: os cíclicos e os diedrais

Para começar, vejamos dois exemplos de grupos obtidos através de polígonos regulares. Fixado  $n \in \mathbb{N}$ , o primeiro deles, o grupo cíclico, pode ser visto como o conjunto das rotações em torno do centro de um  $n$ -ágono regular. Explicitamente, podemos defini-lo como

$$C_n = \left\{ \text{rotação de ângulo } \frac{2\pi k}{n} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Repare que, aqui, também estamos considerando a “rotação” de ângulo 0 (quando  $k = 0$ ), que mantém o polígono na mesma posição. Essa rotação é chamada de *rotação trivial*. Também, dizemos que a rotação de ângulo  $2\pi/n$  é um gerador de  $C_n$ , pois cada uma de suas rotações pode ser dada por sucessivas rotações de ângulo  $2\pi/n$ . Denotando-a por 'a' e utilizando a notação de multiplicação para a composição de duas rotações, podemos escrever o grupo cíclico da maneira mais usual:

$$C_n = \{a^k \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\}.$$

Se também considerarmos as reflexões em relação a retas, podemos obter o chamado grupo diedral. Façamos um exemplo com o quadrado: com base na Figura 1, note que há quatro eixos de reflexão  $\overleftrightarrow{AC}$ ,  $\overleftrightarrow{BD}$ ,  $\overleftrightarrow{HF}$  e  $\overleftrightarrow{EG}$  e, portanto, ele possui somente 4 tipos de reflexões. Ao incluir, também, as quatro rotações possíveis (de ângulos  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$ ), obtemos os 8 elementos que formam o conjunto das rotações e reflexões de um quadrado.

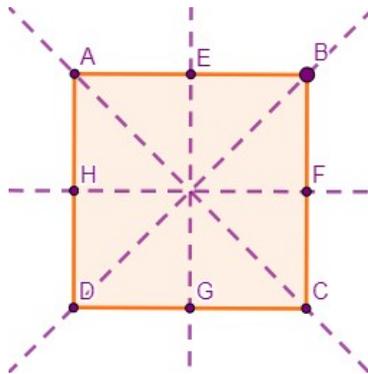


Figura 1: Os eixos de reflexão de um quadrado.

Para lhe darmos uma apresentação sintética, pode-se notar que a rotação de  $90^\circ$  e uma reflexão, que fixamos para ser a dada pelo eixo  $\overleftrightarrow{EG}$ , *geram* esse conjunto. Ou seja, denotando-as por a e b respectivamente, todas as outras rotações ou reflexões podem ser obtidas de algumas composições de a e b. A título de ilustração, vejamos a reflexão por  $\overleftrightarrow{AC}$ : convencionando que a rotação a é realizada no sentido anti-horário, podemos perceber que efetuar a reflexão b e, em seguida, a rotação a dá-nos o mesmo resultado que a reflexão  $\overleftrightarrow{AC}$ . De fato, em ambos os movimentos, as posições iniciais e finais dos vértices A e C são mantidas e as dos vértices B e D são trocadas. Desse

modo, dizemos que a reflexão  $\overleftrightarrow{AC}$  é igual à composição de  $b$  por  $a$  e  $a$  e representamos simplesmente por  $ab$ . Fazendo o mesmo para todos os 8 elementos, podemos escrever o grupo de simetrias do quadrado como

$$D_4 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

e lhe damos o nome de *grupo diedral* (de 8 elementos). Aqui, o subscrito 4 faz referência à quantidade de lados do polígono que estamos considerando<sup>2</sup> e 1 está denotando a rotação trivial: assim como multiplicar um número por 1, realizar uma composição pela rotação trivial é o mesmo que manter o elemento inalterado.

Para o caso geral, podemos realizar o mesmo processo para obter o grupo de simetrias de um  $n$ -ágono regular:

$$D_n = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\},$$

onde ‘ $a$ ’ denota a rotação de ângulo  $2\pi/n$  e ‘ $b$ ’ a reflexão em relação ao eixo vertical.

Uma apresentação mais detalhada desses grupos é dada em [7] e [2, seções 3.4 e 3.5]

### 3. Os sólidos platônicos

Foquemos nossa atenção, agora, em objetos tridimensionais simétricos. Para isso, os melhores exemplos que podem vir à mente são os cinco sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Eles serão centrais para apresentarmos grupos além dos cíclicos e dos diedrais.

Esses poliedros são estudados desde os tempos da Grécia Antiga: a classificação deles já fora feita por Euclides (c. 325a.C.-265a.C.) no Livro XIII de *Os Elementos*. Além disso, Platão (c.427a.C.-347a.C.) também os citou em seu discurso *Timeu*, no qual quatro deles são associados aos elementos da natureza: o cubo à terra, o tetraedro ao fogo, o octaedro ao ar, o icosaedro à água; e o quinto, o dodecaedro, é associado ao universo. Quase 2000 anos depois, J. Kepler (1571-1630) também tentava encontrar harmonia entre a natureza e os sólidos platônicos: inscrevendo os cinco sólidos sucessivamente e intercalando-os com esferas (Figura 3), ele criou um modelo (inverossímil) para o Sistema Solar no qual as órbitas dos seis planetas conhecidos na época respeitavam uma certa proporção com o raio de cada uma das esferas. Para um melhor panorama histórico sobre os sólidos e sua classificação, pode-se consultar [8, Capítulo 2], e, para ler a classificação dada por Euclides, uma possível edição é [9, Livro XIII].

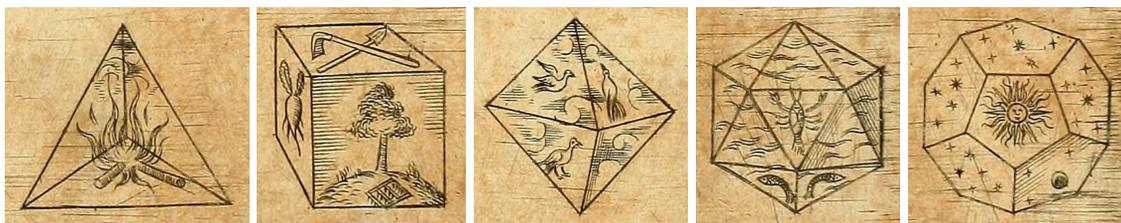


Figura 2: Os cinco sólidos platônicos representando elementos da natureza, da obra *Harmonices Mundi* de J. Kepler [10].

<sup>2</sup>Vale citar que alguns autores, tendo como referência a cardinalidade do grupo, preferem denotá-lo por  $D_8$  e, no caso geral de um  $n$ -ágono regular, por  $D_{2n}$ .

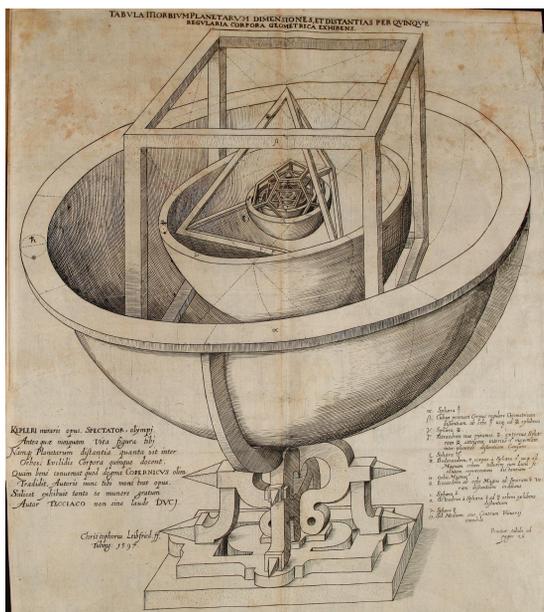


Figura 3: Ilustração do modelo do Sistema Solar de Kepler, de seu livro *Mysterium Cosmographicum* [11].

Vamos, agora, definir os sólidos platônicos e fornecer algumas ideias sobre sua classificação.

Primeiramente, o leitor já deve saber o que é um poliedro<sup>3</sup> através de diversos exemplos: cubo, pirâmide, prisma, icosaedro, etc. Apesar disso, vejamos duas possíveis definições para eles. Em linhas gerais, assim como um polígono é uma colagem de segmentos de retas pelas suas pontas de modo que cada ponta é a interseção de exatamente dois segmentos, um poliedro (oco) é uma colagem de diversos polígonos pelas suas bordas, de modo que cada borda seja a interseção de exatamente dois polígonos, e os vértices a interseção de três ou mais polígonos. De outro modo, pode-se dizer que um poliedro (maciço) convexo é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que é interseção de um número finito de semiespaços. Assim, com essa definição, o cubo sólido seria a interseção de seis semiespaços, de modo que sejam três pares de semiespaços com bordas (que são planos) paralelas e que esses pares sejam, da maneira adequada, ortogonais entre si.

De qualquer modo, sabemos que um poliedro possui faces (polígonos), arestas (segmentos de reta) e vértices (pontos) e podem ser caracterizados, em certo sentido, pelo número ou pelo tipo (no caso das faces) de cada um desses elementos. Afinal, se alguém quer explicar o que é um icosaedro, provavelmente citará que é formado por 20 faces triangulares regulares. Agora, pensando em construir poliedros simétricos, dizemos que um poliedro é um *sólido platônico* se for convexo, se todas as suas faces forem polígonos regulares congruentes e se o número de faces que se encontram em cada vértice é o mesmo para todos os vértices.

Assim, se tal sólido é formado por polígonos de  $n$  lados e que se encontram  $m$  vezes em cada vértice, podemos analisar quais são os possíveis valores do par ordenado  $(m, n)$ , o qual é conhecido como o *símbolo de Schläfli* do poliedro. Como ele é convexo (i.e. os vértices formam “bicos”), temos

<sup>3</sup>Aqui as palavras “sólido” e “poliedro” serão usadas sem distinção, já que as ideias apresentadas ficam inalteradas se pensamos no poliedro como oco (só a casca) ou maciço.

que a soma dos ângulos internos das faces que formam cada vértice deve ser inferior a  $360^\circ$ . Ou seja, a soma de  $m$  ângulos internos dos  $n$ -ângulos é menor que  $360^\circ$ . Como o ângulo interno de um  $n$ -ângono regular é  $\alpha_n = (n - 2) \cdot 180^\circ/n$ , devemos ter que

$$360^\circ > m\alpha_n = 180^\circ \left( m - \frac{2m}{n} \right) \Rightarrow \frac{2}{m} > 1 - \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Perceba que, se  $n = 2$ , qualquer valor positivo de  $m$  satisfaz a desigualdade acima e vice-versa: se  $m = 2$ , então podemos tomar qualquer valor positivo para  $n$ . Agora, se assumirmos que  $n \geq 3$ , então

$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \Rightarrow m < 6.$$

Para  $n \geq 4$ , chegamos que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \Rightarrow m < 4$$

De forma análoga, temos que, se  $m \geq 3$ , então  $n < 6$  e, se  $m \geq 4$ , então  $n < 4$ . Assim, os únicos valores de  $(m, n)$ , com  $m, n \geq 2$ , que satisfazem a desigualdade 1 são  $(m, 2)$ ,  $(2, n)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(3, 5)$  e  $(5, 3)$ .<sup>4</sup>

Nesse momento, o leitor poderá se perguntar o significado geométrico de considerar o valor de  $n$  ou de  $m$  igual a 2. De fato, não há polígonos de dois lados nem há vértices de poliedros formados por apenas duas faces. No entanto, se formos mais permissíveis, podemos representar um polígono de dois lados (regular) como a figura formada por dois pontos fixos, os vértices, ligados por dois arcos de circunferência de mesmo tamanho, as “arestas”. Desse modo, o objeto do caso  $(m, 2)$ , que chamamos de *hosoedro*, pode ser dado pela colagem adequada de  $m$  desses polígonos de duas arestas. A Figura 4 ilustra um hosoedro da forma  $(6, 2)$ : os seis fusos representam as seis faces de duas arestas e os polos norte e sul os vértices. Para o segundo objeto, da forma  $(2, n)$  e conhecido como *diedro*, a visualização é mais simplista: como somente duas faces se encontram em cada vértice, podemos tomar duas semiesferas para fazerem o papel das faces e os  $n$  vértices podem ser dados por  $n$  pontos distribuídos de maneira uniforme no equador da esfera (veja o diedro  $(2, 6)$  na figura 4). Apesar de esses dois objetos não serem considerados poliedros, eles nos serão úteis para obtermos uma nova visualização dos grupos do tipo diedral.

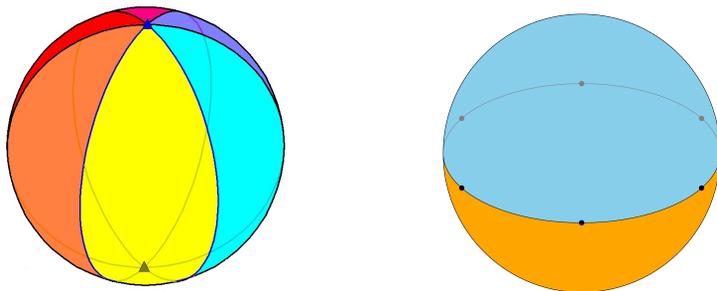


Figura 4: À esquerda, um hosoedro de seis faces e, à direita, um diedro de seis vértices. Fontes: [12] (domínio público) e [13] (CC0).

<sup>4</sup>Decidimos descartar os pares que satisfazem  $m = 1$  ou  $n = 1$ , pois eles não fornecem-nos interpretações geométricas interessantes.

Pensando nos outros casos, verificamos que só há cinco possíveis valores para  $(m, n)$  e, como pode ser conferido em [14, p.327], é possível provar que cada um deles dá-nos a construção de um único poliedro. Assim, são obtidos os cinco sólidos platônicos. A Tabela 1 sintetiza as informações deles e dos dois casos degenerados.

$(m,n)$	Poliedro	faces	arestas	vértices
$(2,n)$	diedro	2	n	n
$(m,2)$	hosoedro	m	m	2
$(3,3)$	tetraedro	4	6	4
$(3,4)$	cubo	6	12	8
$(4,3)$	octaedro	8	12	6
$(3,5)$	dodecaedro	12	30	20
$(5,3)$	icosaedro	20	30	12

Tabela 1: Os números de faces, arestas e vértices dos poliedros regulares.

Por meio da tabela, podemos perceber algumas dualidades: entre o diedro e o hosoedro, entre o cubo e o octaedro e entre o dodecaedro e o icosaedro. Uma forma geométrica de visualizar isso é que, a partir de um desses sólidos, podemos fixar os centros de cada uma de suas faces para serem os vértices de um novo poliedro, o seu *dual*, cujas arestas são dadas ligando o centro de faces adjacentes (veja a Figura 5). Desse modo, percebe-se que não é por acaso que o número de vértices do cubo é igual à quantidade de faces do octaedro e que o mesmo acontece para o icosaedro e o dodecaedro. Note que o tetraedro é o dual de si mesmo.

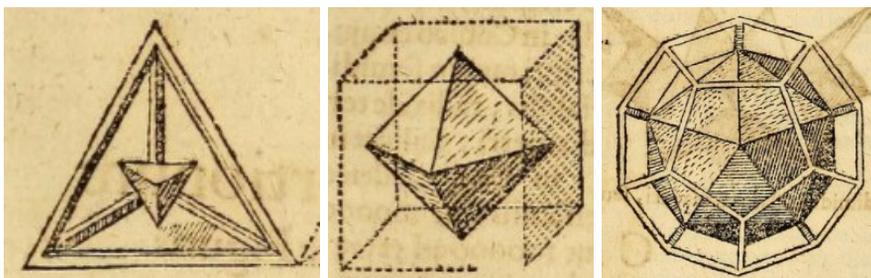


Figura 5: Ilustrações de J. Kepler da autodualidade do tetraedro e das dualidades entre o cubo e o octaedro e entre o dodecaedro e o icosaedro. Fonte: [10, p.181].

#### 4. Girando sólidos

Agora, foquemos nossa atenção em analisar as diferentes rotações dos sólidos. Por isso, apesar de que ilustramos com algumas imagens, tê-los em mãos ou uma boa imagem mental deles facilitará bastante o processo. Alternativamente, pode-se assistir aos vídeos [15, 48-51] de N. J. Wildberger, nos quais são feitas as diversas rotações dos poliedros. Mais detalhes também podem ser encontrados no livro [16, Chapter 4].

Primeiramente, devemos esclarecer que uma *rotação tridimensional* é dada por um movimento em

torno de uma reta fixa, o eixo de rotação, por um certo ângulo e em certo sentido, horário ou anti-horário. Já a *rotação de um poliedro* é uma rotação tridimensional que satisfaz o seguinte: cada vértice do poliedro, após uma rotação, deve estar na posição que era ocupada por algum vértice antes da rotação. Assim, se tivermos um poliedro pintado somente de uma cor e realizarmos uma rotação sua, uma pessoa que viu apenas os seus estados inicial e final nem notará diferença. Duas rotações serão consideradas diferentes se elas permutam os vértices de modo distinto. Em outras palavras, as rotações serão consideradas módulo  $360^\circ$ , isto é, uma rotação de  $360^\circ$  é o mesmo que ficar parado, a rotação *trivial*. Assim como feito anteriormente, tal rotação será denotada por 1.

Tendo isso em vista, pode-se notar que os eixos de uma rotação não trivial intersectam o poliedro (oco) somente em vértices, em centros de faces ou em pontos médios de arestas; caso contrário, somente seria possível retornar à estrutura inicial com uma rotação de  $360^\circ$ . Outra definição que devemos ter em mente é a de *ordem* de uma rotação  $r$ : ela é definida como o menor número natural (não nulo)  $n$  satisfazendo que a composição de  $n$  dessas rotações seja igual à rotação trivial, i.e. que  $r^n = 1$ . Por exemplo, uma rotação de ângulo  $120^\circ$  tem ordem 3, pois a composição de três dessas rotações dá-nos uma rotação de  $360^\circ$ , a rotação trivial.

Nosso objetivo é compreender as rotações de cada caso e armazená-las na estrutura matemática mais ideal para isso, a dos Grupos. Isto é, para cada um dos objetos da Tabela 1, iremos encontrar o grupo formado pelas suas rotações<sup>5</sup>. O primeiro passo para simplificar esse problema é reparar que esse grupo deve ser o mesmo para dois sólidos duais. Para ilustrar isso, veja as dualidades da Figura 5. Desconsiderando o caso do tetraedro, denote um desses poliedros por  $P$  e o seu dual por  $P'$ , pode-se reparar que o eixo que liga o ponto médio de duas arestas opostas é o mesmo em ambos, e o eixo que liga dois vértices opostos em  $P$  é o mesmo que liga o centro de duas faces em  $P'$  e vice-versa. Assim, os eixos das rotações de  $P$  e  $P'$  coincidem. Repare que os possíveis ângulos de rotação em torno desses eixos também é o mesmo, o que nos diz que poliedros duais possuem os mesmos grupos de rotações. Desse modo, iremos nos restringir somente aos casos do diedro, tetraedro, cubo e dodecaedro.

Abaixo,  $S_n$  será utilizado para denotar o grupo de permutações de  $n$  elementos e  $A_n$  para denotar o grupo  $n$ -alternado, formado pelas permutações pares<sup>6</sup> de  $n$  elementos. Uma concisa e clara introdução aos grupos de permutação, assim como à notação por ciclos que será utilizada adiante, pode ser encontrada no artigo [17, Seção 2], desta própria revista.

#### 4.1. O grupo de rotações do diedro

Voltando à Figura 4, lembre que um diedro é formado por duas faces com  $n$  vértices, onde  $n$  é um inteiro maior ou igual a 2. Podemos fazer rotações dele em relação a dois eixos:

- em relação ao eixo vertical, temos as rotações de ângulo  $2\pi k/n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- em relação aos eixos que ligam dois vértices opostos (se  $n$  for par) ou que liga um vértice ao centro da aresta oposta (se  $n$  for ímpar), temos as rotações de ângulo  $180^\circ$ , que trocam os polos norte e sul entre si.

<sup>5</sup>Aqui, pode ser conveniente para o leitor que conhece os axiomas de grupo notar que, de fato, eles são satisfeitos para o conjunto das rotações de um poliedro: a associatividade segue da definição de composição, o elemento neutro é a rotação trivial e toda rotação possui como inverso a rotação no sentido contrário.

<sup>6</sup>Dizemos que uma permutação é *par* se ela pode ser escrita como produto de um número par de 2-ciclos. Por exemplo, (12345) é uma permutação par, pois  $(12345) = (15)(14)(13)(12)$ , sendo que o produto de permutações é lido da direita para a esquerda (assim como a composição de funções).

Vejamos que o grupo formado nesse caso é, de fato, o diedral  $D_n$ , que foi obtido na seção 2. Primeiramente, perceba que o equador do diedro é uma circunferência com  $n$  pontos como “vértices” e podemos pensá-la como um polígono de  $n$  vértices. As rotações do primeiro tipo na circunferência equivalem às rotações (de mesmo ângulo) desse polígono. Já as rotações do segundo tipo permutam os vértices da circunferência, do mesmo modo que uma reflexão o faz no polígono. Ou seja, o grupo de rotações do diedro é equivalente ao de rotações e reflexões do  $n$ -ângono, como queríamos.

Repetindo a notação usada anteriormente, podemos escrever  $a$  para a rotação do diedro de ângulo  $2\pi/n$ , do primeiro tipo, e  $b$  para uma rotação do segundo tipo. Desse modo, o grupo de rotações do diedro pode ser escrito como

$$D_n = \{1, a, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}.$$

Portanto, o grupo de rotações do diedro de  $n$  vértices é o grupo diedral  $D_n$  de  $2n$  elementos. Obtemos, assim, uma segunda visualização geométrica para esse grupo.

#### 4.2. O grupo de rotações do tetraedro

Vamos denotá-lo por  $\mathcal{T}$ . Rotulando os vértices por 1, 2, 3 e 4, temos que cada rotação permuta esses números e, portanto,  $\mathcal{T}$  é subgrupo de  $S_4$ . Vejamos, agora, que  $A_4 \subseteq \mathcal{T}$ , onde  $A_4 \subset S_4$  é o subgrupo das permutações pares, formado por dois tipos de elementos: os ciclos de ordem 3, como (123), e as permutações que são produto de dois ciclos independentes de ordem 2, como (12)(34).

- os **3-ciclos** podem ser obtidos através da rotação do tetraedro em relação ao eixo que une um vértice ao centro da face oposta. Por exemplo, a permutação (123) pode ser visualizada através de um tetraedro em que a face formada pelos vértices 1, 2 e 3 está apoiada numa mesa (horizontal). Com uma rotação de  $120^\circ$  em relação ao eixo vertical, obtemos a permutação (123) e, com mais  $120^\circ$ , temos (132).
- os **produtos de 2-ciclos** podem ser obtidos com a rotação de  $180^\circ$  em relação ao eixo que une duas arestas opostas. A sequência de figuras 6 ilustra uma das rotações desse tipo.

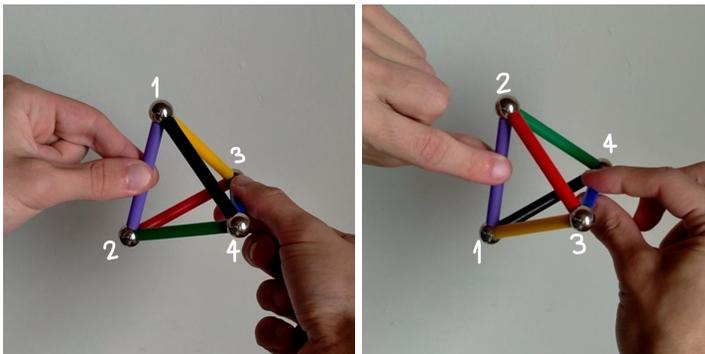


Figura 6: A rotação  $(12)(34) \in \mathcal{T}$ .

Para concluirmos, repare que a permutação (12) não é possível de ser obtida como rotação do tetraedro, já que, se fixarmos os vértices 3 e 4, a única rotação que poderá ser feita leva o vértices

1 e 2 para as suas posições iniciais, ou seja, é a rotação trivial. Assim,  $A_4 \subseteq \mathcal{T} \subseteq S_4$  e segue que  $\mathcal{T} = A_4$ , pois  $|S_4|/|A_4| = 2$ .

Para detalhar as operações entre os elementos do grupo  $A_4$ , a sua tábua de multiplicação está representada na Tabela 2. Cada linha e coluna corresponde a uma permutação de  $A_4$  e as entradas dentro da tabela mostram o produto entre os elementos das respectivas linha e coluna. Ou podemos pensar, de modo equivalente, que cada linha e coluna corresponde a uma rotação do tetraedro e que as entradas são as composições das rotações.

$A_4$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\sigma_7$	$\sigma_8$	$\sigma_9$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$
$(1) = \sigma_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$(12)(34) = \sigma_2$	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
$(13)(24) = \sigma_3$	3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10
$(14)(23) = \sigma_4$	4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9
$(123) = \sigma_5$	5	8	6	7	9	12	10	11	1	4	2	3
$(243) = \sigma_6$	6	7	5	8	10	11	9	12	2	3	1	4
$(142) = \sigma_7$	7	6	8	5	11	10	12	9	3	2	4	1
$(134) = \sigma_8$	8	5	7	6	12	9	11	10	4	1	3	2
$(132) = \sigma_9$	9	11	12	10	1	3	4	2	5	7	8	6
$(143) = \sigma_{10}$	10	12	11	9	2	4	3	1	6	8	7	5
$(234) = \sigma_{11}$	11	9	10	12	3	1	2	4	7	5	6	8
$(124) = \sigma_{12}$	12	10	9	11	4	2	1	3	8	6	5	7

Tabela 2: Tábua de multiplicação do grupo alternado  $A_4$ . As permutações foram denotadas por  $\sigma_1, \dots, \sigma_{12}$  e cada entrada  $k$  dentro da tabela representa a permutação  $\sigma_k$ . Referência: [18, p.111].

### 4.3. O grupo de rotações do cubo

Vamos denotá-lo por  $\mathcal{O}$ , em referência a seu dual, o octaedro. O cubo possui 8 vértices, então, se seguíssemos a mesma ideia que a acima, veríamos  $\mathcal{O}$  como subgrupo de  $S_8$ . No entanto, nossa análise pode ser consideravelmente simplificada se notarmos que há outras estruturas mantidas rígidas por rotações. No caso do cubo, vamos considerar as diagonais ou, de modo equivalente, os pares de vértices opostos. Para fixarmos uma enumeração das diagonais, imaginemos um cubo apoiado numa mesa e enumere, de 1 a 4, os vértices da face superior do cubo no sentido anti-horário. Como cada um desses quatro vértices representa (de modo único) uma diagonal, elas também estão enumeradas. Agora, vejamos como cada um dos três tipos de rotação do cubo permuta suas diagonais:

- **Em relação ao eixo que liga o centro de duas faces opostas**, podemos rotacionar o cubo  $90^\circ$ . Isso corresponde, em termos de permutação das diagonais, aos ciclos de ordem 4. Por exemplo, a Figura 7 mostra-nos que a permutação  $(1234)$  de nosso cubo pode ser obtida através de uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário em relação ao eixo vertical. Assim, girando mais  $90^\circ$ , obtemos  $(13)(24)$  e, com mais  $90^\circ$ , temos  $(1432)$ .

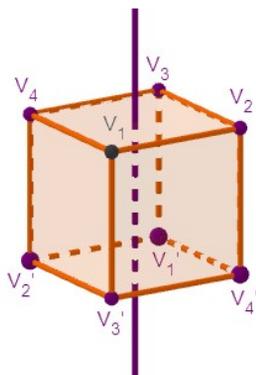


Figura 7: Após uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário em relação ao eixo vertical, obtemos a permutação  $(1234)$ : o vértice  $V_1$  passa a ocupar a posição de  $V_2$ , que, por sua vez, passa a ocupar a de  $V_3$ , o qual passa a ocupar a de  $V_4$ , que, por fim, passa à de  $V_1$ .

- **Em relação ao eixo que liga dois vértices opostos**, com uma rotação de  $120^\circ$ , obtemos os ciclos de ordem 3. Isso acontece, porque o eixo está sobre uma das diagonais, e, assim, uma delas é fixada, enquanto as outras trocam de lugar. Como pode ser visto na Figura 8, com o eixo sobre a diagonal 4, obtemos os ciclos  $(123)$  ao girar  $120^\circ$  em um sentido e  $(132)$  ao girar  $120^\circ$  no outro sentido.

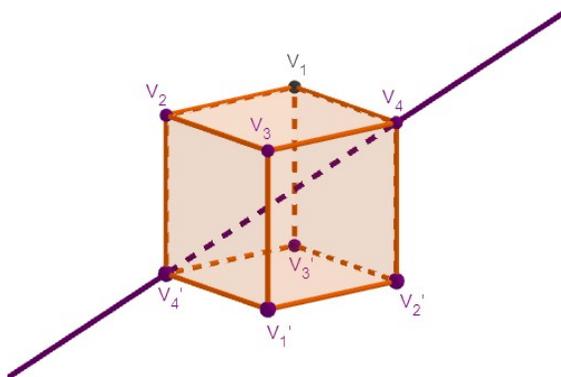


Figura 8: Após uma rotação de  $120^\circ$  em relação ao eixo acima, obtemos a permutação  $(123)$ : a diagonal  $\overline{V_1V'_1}$  passa a ocupar a posição de  $\overline{V'_2V_2}$ , que, por sua vez, passa a ocupar a de  $\overline{V_3V'_3}$ , a qual passa à de  $\overline{V_1V'_1}$ .

- **Em relação ao eixo que une o centro de duas arestas opostas**, pode-se realizar uma rotação de  $180^\circ$ . Note, com o auxílio da Figura 9, que esse tipo de rotação fixa duas diagonais e permuta as outras duas, isto é, ela corresponde aos ciclos de ordem 2, como  $(12)$ ,  $(23)$ ,...

Com isso, pode-se perceber que cada permutação das 4 diagonais corresponde a uma única<sup>7</sup> rotação do cubo e, portanto, pode-se concluir que  $\mathcal{O} = S_4$ .

<sup>7</sup>O motivo de ser única segue do fato de que duas permutações distintas das diagonais nos fornecem rotações distintas, já que elas também permutam os vértices de modo distinto.

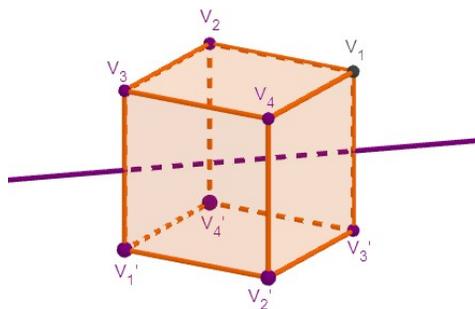


Figura 9: Após uma rotação de  $180^\circ$  em relação ao eixo acima, obtemos a permutação (13): a diagonal  $\overline{V_1V_1'}$  passa a ocupar a posição de  $\overline{V_3V_3'}$ , que, por sua vez, passa a ocupar a de  $\overline{V_1V_1'}$ ; as outras duas diagonais são mantidas na mesma posição.

Um outro modo de visualizar isso é dado ao perceber que podemos inscrever dois tetraedros regulares no cubo, como na Figura 10. Como cada rotação do tetraedro também é rotação do cubo, temos a inclusão  $A_4 = \mathcal{T} \subset \mathcal{O}$ . Já uma permutação ímpar em  $\mathcal{O}$  pode ser dada quando trocamos os dois tetraedros de lugar, o que implica que  $A_4 \subseteq \mathcal{O} \subseteq S_4$ .

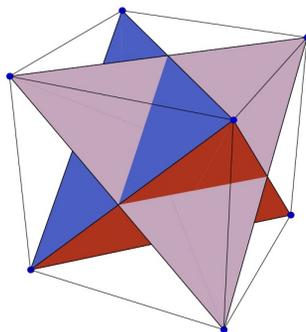


Figura 10: Há 2 tetraedros regulares inscritos no cubo. Fonte: [16].

#### 4.4. O grupo de rotações do dodecaedro

Em referência ao icosaedro, ele será denotado por  $\mathcal{I}$ . Pode-se ver que as rotações do dodecaedro também são dadas somente em relação a três tipos de eixos, cujas ilustrações podem ser encontradas em [16, p.226-227]:

- Eixo que une o centro de duas faces opostas:** como as faces do dodecaedro são pentágonos, essas rotações têm ordem 5 e, portanto, seus ângulos são de  $72^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $216^\circ$  ou  $288^\circ$ . Como há 6 pares de faces, temos que há  $4 \cdot 6 = 24$  rotações não triviais distintas desse tipo.
- Eixo que une dois vértices opostos:** são rotações de ordem 3, de ângulo  $120^\circ$  ou  $240^\circ$ . Já que há 10 pares de vértices no dodecaedro, temos  $2 \cdot 10 = 20$  rotações não triviais desse tipo.

- **Eixo que une o centro de duas arestas opostas:** essas rotações, de ângulo  $180^\circ$ , têm ordem 2 e, dadas os 15 pares de arestas do dodecaedro, temos mais  $1 \cdot 15 = 15$  dessas rotações.

Somando à rotação trivial, segue que há  $1 + 24 + 20 + 15 = 60$  rotações distintas, isto é,  $|\mathcal{I}| = 60$ .

Agora, precisamos decidir a permutação de que estruturas dentro do dodecaedro pode caracterizar as suas rotações.

Para isso, através da Figura 11, note que há 5 tetraedros regulares em seu interior. Pode-se provar que cada rotação do dodecaedro corresponde a uma única permutação dos tetraedros e, portanto, temos a inclusão  $\mathcal{I} \subseteq S_5$ .

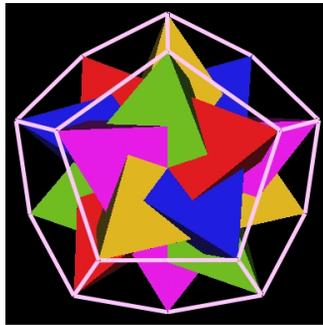


Figura 11: Podemos construir 5 tetraedros regulares dentro do dodecaedro. Fonte: [19].

Agora, dado um desses tetraedros, temos que suas rotações também são rotações do dodecaedro, o que nos fornece, à luz da seção 4.2, uma nova interpretação das rotações explicitadas acima: as rotações de ângulo  $120^\circ$  são aquelas dadas por eixos que unem um vértice de um tetraedro à sua face oposta; as de ângulo  $180^\circ$  são dadas por eixos que unem duas arestas opostas de um tetraedro.

Em outras palavras, temos a inclusão  $A_4 = \mathcal{T} \subset \mathcal{I}$ . Além disso, repare que a rotação de ordem 5 corresponde a uma permutação cíclica dos 5 tetraedros, de modo que  $C_5 = \langle (12345) \rangle$ , o grupo gerado por essa rotação, está contido em  $\mathcal{I}$ .

Assim, o grupo produto  $A_4 \cdot C_5$  está contido em  $\mathcal{I}$  e, como  $|A_4 \cdot C_5| = 60$ , concluímos que  $\mathcal{I} = A_4 \cdot C_5$ , pois a ordem dos dois grupos é a mesma.

No entanto, também vale que  $A_4, C_5 \subset A_5$  e  $|A_5| = 60$ , então podemos enfim concluir que  $A_5 = A_4 \cdot C_5 = \mathcal{I}$ .

## 5. Considerações finais

Podemos sintetizar a análise que fizemos dos grupos de rotações por meio da Tabela 3. Nela, buscamos registrar as ordens das diferentes rotações de cada um dos grupos  $G$  considerados na última seção. Utilizamos a seguinte notação:

- $n_1$  é a ordem da rotação que tem como eixo a reta que passa por dois vértices opostos.
- $n_2$  é a ordem da rotação que tem como eixo a reta que passa pelos pontos médios de duas arestas opostas.

- $n_3$  é a ordem da rotação que tem como eixo a reta que passa pelos centros de duas faces opostas.

Na realidade, essas notações não fazem sentido para os casos do tetraedro, do diedro com  $n$  ímpar e do hosoedro com  $m$  ímpar: o primeiro não possui “faces ou vértices opostos”, o segundo não possui “arestas ou vértices opostos” e o terceiro não possui “arestas ou faces opostas”. Assim, para esses objetos fazemos as seguintes reformulações:

- para o caso do tetraedro,  $n_1$  é a ordem da rotação que tem como eixo a reta que passa por um vértice, e, pela face oposta a ele,  $n_2$  não é alterado e  $n_3 = n_1$ .
- para o caso do diedro (com  $n$  ímpar),  $n_1$  é a ordem da rotação que tem como eixo a reta que passa por um vértice, e, pelo ponto médio da aresta oposta a ele,  $n_2 = n_1$ , e  $n_3$  não é alterado.
- para o caso do hosoedro (com  $m$  ímpar),  $n_1$  não é alterado,  $n_2$  é a ordem da rotação que tem como eixo a reta que passa pelo ponto médio de uma aresta e pelo centro da face oposta a ela e  $n_3 = n_2$

Repare, na tabela, que as ordens das rotações do hosoedro, octaedro e icosaedro também podem ser obtidas através da dualidade já citada.

	<b>G</b>	<b> G </b>	<b>n<sub>1</sub></b>	<b>n<sub>2</sub></b>	<b>n<sub>3</sub></b>
Diedro	$D_n$	$2n$	2	2	$n$
Hosoedro	$D_m$	$2m$	$m$	2	2
Tetraedro	$A_4$	12	3	2	3
Cubo	$S_4$	24	3	2	4
Octaedro	$S_4$	24	4	2	3
Dodecaedro	$A_5$	60	3	2	5
Icosaedro	$A_5$	60	5	2	3

Tabela 3: Os grupos de rotações dos sólidos platônicos. Aqui,  $|G|$  denota a quantidade de elementos de  $G$ .

Por fim, imaginemos os sólidos platônicos como subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  e coloquemos os seus centros de massa na origem. Dessa maneira, podemos visualizar cada um dos grupos de rotações obtidos como um subgrupo do grupo de todas as rotações de  $\mathbb{R}^3$  que fixam a origem (usualmente denotado por  $SO_3(\mathbb{R})$ ). O fato curioso é que, na verdade, a menos dos cíclicos<sup>8</sup>, esses são todos os seus possíveis subgrupos finitos. Uma prova para esse fato pode ser encontrada em [20, chapter 19]. Isso nos diz que os grupos finitos tratados nesse texto são os únicos que conseguimos apresentar utilizando apenas rotações de poliedros. Entretanto, nada nos impede de buscar novos modos para visualizarmos outros grupos finitos. Afinal, existem diversos outros tipos de objetos e transformações geométricas. Um exemplo é a transformação de reflexão em relação a um plano [16, Seção 4.3], mas também podemos ser mais inventivos e pensar nas diversas operações de um cubo mágico. Nesse caso, a criatividade (ou a compreensão) é o limite.

<sup>8</sup>Para obtermos o grupo cíclico  $C_n$  como grupo de rotações de um poliedro, basta tomar uma pirâmide reta cuja base é um  $n$ -ângono regular. No caso  $n = 3$ , no entanto, também devemos ter o cuidado de que a altura da pirâmide não seja congruente ao lado da base para que não voltemos a considerar o tetraedro regular.

## Agradecimentos

Este trabalho foi motivado por parte de um trabalho de iniciação científica, intitulado “Representações de Grupos Finitos e a Correspondência de McKay”. Assim, gostaria de agradecer meu orientador Prof. Kostiantyn Iusenko por ter me apresentado a dissertação de J. Hoboken [21]. Estudando-a, pude descobrir singulares conexões (que iniciaram com os sólidos platônicos) entre algumas teorias de Matemática.

## Referências

- [1] Michaelis. *Dicionário escolar língua portuguesa*. São Paulo: Editora Melhoramentos, 2008.
- [2] Andressa Dambrós. *Um Estudo sobre Simetrias e Grupos De Galois: utilizando uma via estética para acesso ao conhecimento matemático*. Trabalho de Conclusão de Curso UDESC, 2013. Disponível em: <https://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/00001a/00001ad7.pdf>.
- [3] Pierre M Van Hiele. *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. PhD thesis, Universidad de Utrecht, 1957. Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991. Disponível em: <https://www.uv.es/apregeom/archivos2/VanHiele57.pdf>.
- [4] Fernando Martins Antoneli Jr. *Grupos Finitos e Quebra de Simetria no Código Genético*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2003.
- [5] E.A. Rietman, R.L. Karp, and J.A. Tuszynski. *Review and application of group theory to molecular systems biology*. *Theor Biol Med Model*, 8(21), 2011. <https://doi.org/10.1186/1742-4682-8-21>.
- [6] F. Albert Cotton. *Chemical applications of group theory*. Wiley-Interscience, 3rd edition, 1990.
- [7] Alan de Araújo Guimarães and Francisco Thiarly Alves de Souza. *Grupos diedrais e simetrias da circunferência: uma abordagem geométrica*. *PMO*, 10, n.3:378–387, 2022. <https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1027>.
- [8] Ton Marar. *Topologia Geométrica para Inquietos*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2019.
- [9] Euclides. *Os Elementos*. Editora UNESP, 2009. Tradução: Irineu Bicudo.
- [10] J. Kepler. *Harmonices Mvndi*. Linz Austria: Johannes Plancus, 1619. Disponível em: <https://archive.org/details/ioanniskeplerih00kepl/page/n80/mode/1up>. Acesso em: 01/12/2021.
- [11] J. Kepler. *Mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium coelestium*. Frankfurt: Erasmi Kempferi & Godefridi Tampachii, 1621. Disponível em: <https://archive.org/details/prodromusdissert00kepl/page/n46/mode/1up?view=theater>. Acesso em: 01/12/2021.
- [12] Wikimedia Commons. *File:Hexagonal hosohedron.png*. Disponível em: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexagonal\\_hosohedron.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexagonal_hosohedron.png). Acesso em: 01/04/2021.
- [13] Wikipedia. *Dihedron*. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Dihedron>. Acesso em: 01/04/2021.

- [14] A. C. N. Muniz. *Geometria*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [15] N. J. Wildberger. *Universal Hyperbolic Geometry*. Videoaulas disponíveis em: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLIijB45xT85CN9oJ4gYkuSQQhAtpJucul>, 2015. Acesso em: 24/11/2021.
- [16] Frederick M. Goodman. *Algebra: Abstract and Concrete*. SemiSimple Press, Iowa City, IA, 2.6 edition, 2015. Disponível em: <https://homepage.divms.uiowa.edu/~goodman/algebrabook.dir/download.htm>.
- [17] Gabriel F. Pinheiro, Irene M. Craveiro, and Naiguél A. da Silva. *Números de Stirling do primeiro tipo*. *PMO*, 8, n.5:590–605, 2020. <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo843>.
- [18] Joseph A. Gallian. *Contemporary Abstract Algebra*. Brooks/Cole, 7a edition, 2010.
- [19] Robert W. Gray. *What's in this Polyhedron? (Part 2)*. Disponível em: <http://www.rwgrayprojects.com/Lynn/NCH/whatpoly2.html>, 2000. Acesso em: 20/05/2020.
- [20] Mark A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag New York, 1988.
- [21] Joris van Hoboken. *Platonic solids, binary polyhedral groups, Kleinian singularities and Lie algebras of type A, D, E*. Master's thesis, University of Amsterdam, 2002.

Guilherme da Costa Cruz  
Universidade de São Paulo  
<[guilhermecc@usp.br](mailto:guilhermecc@usp.br)>

Recebido: 17/12/2021  
Publicado: 20/04/2023